Mitteilungen

aus

dem mathematischen Lehrplan

des Stadtgymnasiums zu Halle a. S.

von

Friedrich Meyer,
Oberlehrer.

1891. Progr. Nr. 230.

Seit der Begründung des hiesigen Stadtgymnasiums, d. h. seit mehr als zwei Dezennien, mit der Erteilung des mathematischen Unterrichts betraut, halte ich eine etwas eingehendere Berichterstattung über den Umfang des Lehrstoffs und die Methode, nach welcher bei der Bewältigung desselben verfahren wurde, für angemessen und interessierten Kreisen gegenüber für wünschenswert. Freilich fordert der knappe Raum eines Programms sogleich eine Beschränkung; es soll wesentlich die Planimetrie ins Auge gefaſst werden, dasjenige Gebiet also, welches ohne Zweifel für unsere Schüler innerhalb der mathematischen Disziplinen eine Zentralstellung einnimmt und auch für die Folgezeit seine vorwiegende Bedeutung behaupten wird, wenn man nicht auf allen geistigen und erziehlichen Einfluſs dieses Lehrobjekts Verzicht leisten will. Vor den fachwissenschaftlichen Untersuchungen soll aber vor allem die Stellung der Mathematik zu den andern Unterrichtsgegenständen beleuchtet werden.

1. Die Bedeutung jeder Disziplin innerhalb des Lehrplans kann nur verstanden werden im Zusammenhang mit dem Zwecke des Gymnasiums, welcher ein einfacher und einziger sein muſs. Das Gymnasium weist, indem es ängstlich alle Vereinseitigung des Gemüts meidet und ein allgemeines Gleichgewicht der Seelenkräfte anstrebt, jede Vorbereitung auf einen bestimmten Beruf ab; es will und soll keine Fachschule sein, dann bleibt ihm nichts übrig, als im Gemüt des Zöglings die Idee des Kosmos, d. h. die Idee einer allgemeinen natürlichen und sittlichen Ordnung und zugleich die Idee von der Schönheit und Herrlichkeit, welche auf der eigenartigen Durchwirkung des Sinnlichen vom Geistigen und Sittlichen beruht, anzulegen und mehr und mehr fühlbar zu machen. Die Maturitätserklärung des Schülers tritt ein, wenn ihn die Anstalt für reif zur bewuſsten sittlichen That hält. Darin ist die konkretere Forderung des Staats, gute Bürger und zukünftige brauchbare Beamte, der Kirche, selbstvergessene Seelsorger, der Familie, strebsame und für alles Edle begeisterte Jünglinge heranzubilden, eingeschlossen. Und überdies erscheint der alte Streit zwischen Realismus und Humanismus gegenstandlos und hinfällig.

2. Da die Idee des Kosmos das äuſserste Ziel ist, von dem der unkultivierte Mensch nicht ausgeht, sondern dem er mit Ausdauer zuzustreben hat, so wird uns vor allem daran liegen müssen zu erfahren und darüber ins Klare zu kommen, welche und wieviel Lehrobjekte das Gymnasium zu wählen hat, um das Gemüt des Schülers in der bezeichneten Art zu bilden und seinem natürlichen Freiheitsdrang, der die Schranke so leicht an einem falschen Flecke sucht, die rechte Bahn anzuweisen. Wir reden aber hier und im Folgenden von den Wissenschaften*) nur, soweit sie für die Jugend erziehliche Macht besitzen, ihre

*) Die körperliche und technische Ausbildung des Schülers kommt hier nicht zur Besprechung.

sonstige Bedeutung an sich und für die Menschheit aufser Acht lassend. Auch das wolle man nicht übersehen, dafs es eine universelle Pädagogik nicht geben kann, weil Lehrer und Zögling national und sekulär beschränkt sind, dazu die letzten Bedingungen und Grundlagen des Denkens und Empfindens niemals völlig klar erkannt sein werden. Damit ist zugleich ausgesprochen, dafs die Erziehungslehre immer wieder von neuem mit dem Fortschritt der Zeiten ihre Prinzipien kritisch zu sichten hat und unablässig bemüht sein mufs, die Methoden für die Behandlung der Einzelwissenschaften zu bessern. Auf der anderen Seite steht uns das Recht und die Notwendigkeit der Erziehung aufser Zweifel, weil das Kind zwar potenziell alles sein mag, hingegen aktuell nichts ist. Im selbständigen Denken und Thun findet es überall an seiner Verworrenheit, an der Sinnlichkeit und den Begierden Hemmnisse, Mifserfolge, Täuschungen. Die Erziehung hat es aus der Dumpfheit unklarer Gefühle und der Verworrenheit seiner Begriffe nach Möglichkeit zu befreien, seinen Egoismus zu bannen, dafür dem Wohlwollen eine Stätte zu bereiten und es zur sittlichen Freiheit emporzuheben. Diese lohnende und hohe Aufgabe wird an jedem Individuum anders und überall nur annäherungsweise zu lösen sein. Denn man darf niemals vergessen, dafs die Erziehung aufser Stande ist, einen Menschen neu zu gestalten, dem Künstler vergleichbar, welcher aus totem Marmor die olympischen Züge und Gebärden Apollos erstehen läfst; vielmehr ist auf ein vorgegebenes lebendiges Individuum mit ganz bestimmten Anlagen richtunggebend so einzuwirken, dafs dasfelbe allgemach aus eigenem Vermögen den ihm gemäfsen Weg einschlägt und darauf beharrt. Die Mittel hierzu bietet dem Unterricht die Technik der Einzelwissenschaften in Verbindung mit den allgemeinen Gesetzen der Psychologie, soweit solche feststehen.

3. Es dürfte allgemein zugestanden werden, dafs es gar nicht darauf ankommen kann, die Elemente aller Wissenschaften zu lehren, denn dadurch würde das Gymnasium in gewissem Sinne wieder zur Fachschule, ganz abgesehen davon, dafs ein solches Vorhaben am unzureichenden Rezeptionsvermögen des Kindes scheitern mufs. Auch hat man festzuhalten, dafs die Schule keineswegs alles zu leisten hat; die Gemeinde, die Familie und sogar der Knabe selbst hat ein Erziehungsrecht, welches anzutasten unverantwortlich wäre. Nicht Lehrobjekte also, sondern Hauptrichtungen des Gemüts werden abzuzählen sein; das Minimum von Lehrgegenständen, welche den letzteren zur rechten Ausgestaltung verhelfen, wird durchaus zureichend, aber auch notwendig sein, um nach dem Verlassen der Schule die beste Grundlage für die Selbsterziehung, welche niemals aufhören sollte, zu bilden.

Das oben aufgestellte Erziehungsziel deutet uns klar den Lehrplan an: wir werden zweier Disziplinen bedürfen, die möglichst einseitig die eine die Kosmos-Idee im Reiche der Natur, die andere im Reiche des Geistes und zwar nach der religiös-sittlichen Seite hin zur Entfaltung zu bringen tauglich sind, und einer dritten (oder auch einer Gruppe), welche beide Richtungen zu einer Strömung vereinigt und hierdurch, selbstverständlich in idealer Weise, unmittelbar mit dem wirklichen Leben Fühlung gewinnt; sie bildet den Kern- und Mittelpunkt des Erziehungsgemäldes, während jenen mehr oder minder die Rolle des festen Rahmens zugewiesen ist, ohne den freilich das Gemälde sicherem und unvermeidlichem Verfall ausgesetzt ist.

4. Alle Wissenschaften, welche sich mit der Natur, dem Reiche der Notwendigkeit befassen, haben insgesamt das ausgesprochene Bestreben, mathematische Wissenschaften

zu werden, weil Mathematik allein im Stande ist, den von ihnen gewünschten Kausalzusammenhang in ganzer Vollständigkeit aufzudecken. Bloſse empirische Wissenschaften mögen immerhin der Privatbeschäftigung anheim gegeben werden, das Gymnasium sollte in seinem obligatorischen Lehrplan keinen oder keinen nennenswerten Raum für dieselben haben; hier hat vielmehr das Haus mit seinem Erziehungsrecht und seiner Erziehungspflicht einzugreifen. Werden die beschreibenden Naturwissenschaften, und, um diesen Punkt vorweg zu nehmen, die neueren Sprachen von tüchtigen Kräften in etwa drei lediglich nach Kenntnissen, nicht nach Klassen zu normierenden Abteilungen fakultativ gelehrt, so macht man nicht nur die Eltern zu verantwortlichen Miterziehern ihrer Kinder, sondern sichert auch diesen Disziplinen einen unvergleichlich gröſseren Erfolg als sie je zuvor besessen haben. Es wird also vollkommen genügen, wenn wir in unseren Lehrplan Mathematik, die erhabenste aller Naturwissenschaften, und Physik aufnehmen, letztere darum, weil sich hier charakteristischer als anderwärts zeigt, wie sich Mathematik einfacher Naturgesetze bemächtigt, um zwischen scheinbar weit auseinander liegenden Erscheinungen die innigste Verkettung nachzuweisen, indem sie Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft mittels ihrer dem Kundigen verständlichen Symbole gleichsam in einen einzigen Punkt zusammendrängt. Wo eine direkte Messung von Kräften unmöglich erscheint, weiſs Mathematik auf Umwegen und durch planvolle Einführung künstlicher Maſse dennoch das Ziel zu erreichen. Qualitatives zeigt sie in einer groſsen Menge von Fällen von wesentlich quantitativen Bestimmungen abhängig. Man kann sehr häufig die Bemerkung hören, daſs die Mathematik an und für sich vorzugsweise für den Schüler einen logischen Wert habe. Es muſs zugestanden werden, daſs hier wegen verhältnismäſsiger Armut an Inhalt eine gute Übersicht über logische Vorgänge erworben werden kann; haben ja doch auch die Philosophen von jeher mathematische Wahrheiten zur Exemplifikation herangezogen. Würde aber die bloſs logische Seite im Unterricht wiederkehrend und scharf hervorgehoben, dann dürfte das Interesse der guten Köpfe an der Mathematik gar leicht erstickt werden, weil dieselben niemals am Mechanisieren ein Genüge finden; sind sie doch fähig und bereit, aus der Fülle innerer und äuſserer Wahrnehmungen unter der Anleitung des Lehrers ihre Vorstellungen selbst zu bilden, sie durch Vergleichen, Unterscheiden und Ordnen zu Begriffen zu erweitern und aus aufmerksamen Beobachtungen die beherrschende Regel abzulesen. Schwach begabte Schüler allerdings, welche im grammatischen Unterricht sich daran gewöhnt haben, Regeln auswendig zu lernen und unter diese zu subsumieren, also wesentlich mit dem Gedächtnis zu arbeiten und damit Scheinerfolge zu erzielen, finden sich sehr schwer oder gar nicht in die spekulative Richtung und das Beweisverfahren der Mathematik. Sie wollen alles glauben und sofort wie eine Regel anwenden; sie erwerben deshalb leicht die Zufriedenheit eines nachsichtigen Lehrers in den Anfangsgründen der Arithmetik, wo sie befriedigende Rechenextemporalien schreiben, ohne ein klares Bewuſstsein über die Gesetze dieser sehr schwierigen, weil sehr abstrakten Wissenschaft zu besitzen. Erst auf den oberen Stufen entpuppen sie sich auch als mittelmäſsige oder schlechte Sprachler. An solchen Individuen kommt die bildende Kraft der Mathematik nicht zur Geltung. Denn diese Wissenschaft ist unter sämtlichen Schuldisziplinen die einzige autoritätlose; in dem Gefühle, seine Kenntnisse gewissermaſsen aus sich selbst geschöpft zu haben, gewinnt der Schüler eine Befriedigung, die ihm gleichzeitig Vertrauen zur eigenen geistigen Kraft einflöſst und den

Trieb zur Produktion anstachelt, was mehr wert ist wie umfangreiches Wissen. Dazu kommt, daſs eine saure, aber zielbewuſste Arbeit den Willen stählt und eine geistige Kraftvermehrung hinterläſst, welche auch anderen Wissensgebieten zugute kommt. Wer daher über die gesetzliche, auf so wenigen und durchsichtigen Axiomen beruhende Verkettung der unerschöpflichen Fülle von Gebilden im Raume und innerhalb des Zahlbegriffs keine Freude empfindet, wird der Mathematik schwerlich logische Förderung nachrühmen.

5. Der Religionsunterricht, in anderem Sinne einseitig, soll tief in das Gemüt des Zöglings sittlich-religiöse Keime einsenken; sein Erfolg beruht darauf, daſs er sich fast durchgehends dem mathematischen polar entgegengesetzt verhält. Während Mathematik durch Methode und Organisation sich als Muster aller Wissenschaften, als ein nahezu ideales Beispiel eines Systems zusammenhängender Erkenntnisse hinstellt, sollte Religion sich vor nichts mehr hüten, als mit erklügelter Systematik dem Schüler eine Art von religiöser Metaphysik aufzunötigen: das Herz ist auszuweiten, nicht der Verstand. Wo jene feste Lehrsätze giebt, soll diese Halt und Anker im Jenseit suchen; wo jene Probleme löst, soll diese die Welt als eine Summe ungelöster oder doch nur sehr partiell gelöster Probleme, soll sie die Welt als eine Welt der Rätsel hinstellen, deren Auflösung nur im Glauben an Gottes allwaltende Vorsehung gefunden werden kann. Mathematik steigert das Selbstgefühl, Religion beugt das Gemüt durch den Hinweis auf seine Hilflosigkeit und Nichtigkeit; für sich allein würde sie Weltflucht und Welthaſs erzeugen, Demut möchte sich in Selbstverachtung wandeln, der Mensch als Zweck sänke zum Menschen als Mittel herab; Mathematik rettet vor solcher Verirrung durch stete Erinnerung an selbsteigene Kraft.

6. Erschien hiernach Mathematik vorzugsweise als eine Logik des Verstandes, Religion als eine Logik des Herzens und der Vernunft, so werden wir beiden noch eine Logik des Taktes hinzugesellen müssen, an welcher nicht diese oder jene Gemütsseite, sondern so sehr als möglich (wenn auch nicht gerade in jedem Zeitmomente) der volle, ganze Mensch Anteil hat. Aus dem Reiche der Notwendigkeit (Kausalzusammenhang) und dem Reiche der Freiheit (Teleologie) muſs die Summe gezogen werden, welche, das wollen wir niemals vergessen, die Posten zur Voraussetzung hat, weil sie ohne dieselben an Wert einbüſst, der festen Stützpunkte entbehrt, unverständlich wird. Diese Logik des Taktes hat es auf eine gewisse beharrliche Grundstimmung abgesehen, die später, wo im Wogendrange des Augenblicks planvolle Untersuchung so oft unmöglich ist, und es dennoch gilt, zu handeln, wie von selbst das Rechte treffen läſst. Sie ist's, die zeigen soll, daſs alles Leben, Streben und Denken, offenbart es sich nun in Geschichte und Poesie, oder in Wissenschaft und Kunst, oder in Familie und Staat, nur dann einen Wert hat, wenn es sich der natürlichen Ordnungen zur Erreichung sittlicher Zwecke zu bedienen weiſs. In diesem Sinne ist unsere Disziplin mathematischer und religiöser Unterricht zugleich. Und welche soll es denn nun sein? Hier sehen wir die Ansichten sich zerklüften; die einen glauben, daſs in den festen und unveränderlichen Rahmen Mathematik und Religion mehrere und verschiedenartige Lehrpläne hineinpassen, welche alle gleich gut an dasſelbe Ziel geleiten; andere wollen die Mathematik in den Mittelpunkt des Unterrichts versetzen, ohne zu bedenken, daſs alsdann Religion denselben Anspruch hätte, und daſs das Zentrum für einen Pol als solchen eine Indifferenzstelle ist; noch andere und ihrer ist, Gott sei Dank, unter den Kompetenten die Mehrzahl, sind entschiedene Vertreter und Verfechter des sprachlichen Unterrichts. Mit

den letzteren allein haben wir uns auseinanderzusetzen. Ist es doch die Sprache, in welcher Sinnliches und Geistiges so wunderbar zur Einheit wie Aufzug und Einschlag verwebt sind, dafs sie vorzugsweise unseren Forderungen Genüge leistet. Aber auf welche Sprachen, da sie alle nicht gelehrt werden können, soll das Hauptgewicht gelegt werden, auf die alten oder die neuen? Ist man nur darüber einig, dafs der historische Entwickelungsgang der Menschheit, insbesondere aber derjenige unseres deutschen Volkes, dessen gesamte geistige Kultur auf den beiden Säulen Christentum und Altertum ruht, die Norm für die planmäfsige Erziehung des einzelnen abgeben müsse, wer möchte da noch Bedenken tragen, unsere Jugend einzuführen in die Herrlichkeiten des alten Hellas und Rom? Wie die Gesänge Homers in ewiger Jugendschöne das Herz der spätesten Geschlechter ergreifen werden, so wird allezeit das naive, urwüchsige Ringen der Alten nach Erkenntnis unsere beanlagten Jünglinge zur folgenreichen Nacheiferung entflammen. Alt, aber nie veraltet, eignen sich die antiken Schriftsteller besser zum Objekt ruhiger Betrachtung wegen des grofsen Abstandes von uns und der dadurch bewirkten Abgeschlossenheit ihrer Gedankenkreise als die fremdländischen modernen, welche durch Masse und Überfülle des Stoffs aus nächster Nähe bedrückend auf uns einwirken, auch zum Widerspruch reizen, oder vom Tagesstreit befangen des rechten Gleichgewichts bar sind, oder aber an einer Überfeinerung des Gedankenlebens leiden, welche glaubens- und thatenarm macht. Dazu kommt, dafs „alle uns bekannten Kultursprachen hinsichtlich ihrer Wortformen in einem Streben nach Vereinfachung begriffen sind, welches das Gefühl für die Funktion der einzelnen Elemente eines Wortes mehr und mehr in den Hintergrund drängt.“ Die Sinnlichkeit und Frische der alten Sprachen ist die Ursache ihrer klangreicheren Formen, ihrer Bildsamkeit und Biegsamkeit, die für den elastischen Geist der Jugend wie geschaffen sind. Aber dies, wie die kunstreiche Periodologie der klassischen Schriftsteller möchte mehr oder minder für äufsere Gewandung gehalten werden; heben wir also vor allem hervor, dafs die ersten Blüten der geistigen Produktionen des Menschengeistes uns hier ihren Duft entgegenströmen und das gegenüber der bedingungsreichen, häufig undurchsichtigen und unwahren Komplikation der modernen Autoren mit einer Unmittelbarkeit und Wahrheit, mit einem Parallelismus von Wort und Empfindung, welche in der jugendlichen Seele eine Begeisterung anfachen, die selbst im spätesten Alter nicht erlischt. Verstand es nun gar auf der obersten Stufe eine weise Anleitung, die Anschauungen der Alten bis in die Tiefe zu durchdringen und versäumte es nicht, zur rechten Zeit zwischen Vergangenheit und Gegenwart tausend Beziehungsfäden hinüber und herüber zu spinnen, wer von uns gedächte nicht noch heute dankbar der empfundenen Freude, des erwachenden Kraftgefühls und eines frischen und reinen Thatendranges! Aber schwer ist dieser Unterricht, und er sollte in der ersten Klasse in der Hand eines ebenso gelehrten als weisen Mannes ruhen, eines Mannes, im Bilde zu reden, mit grauem Haar und klugem Verstand und dem Feuer der Jugend im Herzen.

Der Religionsunterricht bahnt sich seinen Weg durch die Idee der Freiheit, die in Verheifsungen spricht, Mathematik durch die Idee der Notwendigkeit, die im Gesetz erscheint, der philologische Unterricht wirkt durch Autorität, welche in Geboten redet. Man permutiere diese drei Kategorieen und man hat im allgemeinen Entartungen vor sich. Nicht als ob ein Zusammenwirken aller drei auf jedem Gebiete schlechthin ausgeschlossen wäre, um den charakteristischen Grundton handelt es sich, um nichts anderes. Eine grammatische Regel ist ein Gebot; überschüttet man ein Kind mit ihren zahlreichen Ausnahmen, so verwirrt man es; dem vorgeschrittenen Jünglinge werden die Ausnahmen zu Abschattierungen des Gedankeninhalts; sie hören in Wahrheit auf, Ausnahmen zu sein. Während auf der höchsten Stufe Grammatik ein unentbehrliches Mittel zum Verständnis der Schriftsteller ist, sollte man auf den untern Stufen nicht so peinlich um lückenlosen Fortschritt bemüht sein; man wende sich mehr an das Gedächtnis, arbeite also mechanisch; dem Mathematiker kommt man hier doch nicht gleich, der das Gedächtnis wenig brauchen kann, weil es ihm auf Anschauung und Verständnis ankommt. Aber den Samen weitreichender Vorstellungen streue man allezeit aus, der vielleicht anderen Knospen und Blüten trägt: lehren heifst verzichten.

Man hat oft gesagt, im deutschen Unterricht solle sich alles Wissen und Können des Schülers konzentrieren; will man damit sagen, dafs der Zögling seine Muttersprache in allen Lektionen mit Sicherheit, Gewandtheit und künstlerischem Sinne handhaben solle, und solange er das aus eigenen Stücken noch nicht vermag, der Lehrer ihn dazu helfend und ratend nötigen solle, so ist nichts dagegen zu erwidern. Ebensowenig ist zu leugnen, dafs unser ganze geistige Zuschnitt auf das wesentlichste, nämlich in durchaus grundlegender Weise, durch die Muttersprache bedingt ist, dafs die fremden Sprachen im Kontrast gegen dieselbe uns unendlich gegenständlicher werden und umgekehrt, aber von unserem Standpunkte aus ist dennoch der Unterricht in der altklassischen Philologie der wahre Mittelpunkt der Gymnasialerziehung. Das Wesen der Sprache erfafst man so wenig an der Muttersprache wie die Anatomie am eignen Körper.

Pragmatische Geschichte und Deutsch sind im Dienst des altklassischen Unterrichts ohne Zweifel von der allergröfsten Bedeutung; aber wenn sie mit dem expansiven Bestreben, das ihnen als Wissenschaften eigen ist und als solchen unbenommen sein soll, auftreten, schaden sie; sie müssen einseitig wirken, wenn sie einer solchen Einseitigkeit fähig sind. Die Geschichte entfaltet vor den Augen des Schülers (wenigstens auf der obersten Stufe) das Leben der Völker als das eines Organismus, dem jeder einzelne eingefügt ist und von dem er sich nicht ablösen kann, ohne ein entwurzelter Stamm dem Untergang zu verfallen. Wir sehen hervorragende Menschen unter den mannigfaltigsten Bedingungen und in den verschiedenartigsten Lagen für die allgemeine Wohlfahrt handeln und dennoch ihre Individualität behaupten; sie geben sich dem Universellen hin, ohne sich darin zu verlieren. Darum soll alles Grofse und Gute, um in weite Kreise zu dringen, auf vaterländischem Boden und für das Vaterland angestrebt werden; die Individualität wird hierdurch nicht vernichtet, wohl aber prägt sie ihre berechtigten Seiten um so schärfer aus, je mehr sie sich dem Allgemeinen opfert. Unvermerkt und unbeabsichtigt ist die Geschichte propädeutischen Charakters für den religiösen Unterricht, für dessen Probleme sie das Bedürfnis weckt.

Deutsch hat die Bildung des Gefühls für künstlerische Schönheit im allgemeinsten Sinne zum Zielpunkt, zu dessen Erreichung ihr der unerschöpfliche Born vaterländischer Poesie zur Verfügung steht. Dieser Unterricht wäre verfehlt, wenn man denselben, verführt durch die herrlichen Leistungen germanistischer Forscher, in grammatische Regeln einschnürte. Grammatik lehren die alten Sprachen. Ebenso ist das vorzeitige Schreiben von Aufsätzen eine Verirrung. Wer zu früh gehen lernt, nimmt Schaden an seinem Leibe. Der Knabe lerne bis zur Tertia Gedichte, namentlich unsere schönen Balladen auswendig, deren Verständnis und Schönheit, wo es nötig und thunlich erscheint, der Lehrer vermittle. Man sollte nur wissen, wie gern in diesem Alter auswendig gelernt wird und wie dankbar man dafür noch in der spätesten Zeit ist! Es ist einfach nicht wahr, dafs hier die Aufsätze das Kerbholz für das innere Wachstum des Kindes sind. Aufsätze sollten erst in der Obertertia begonnen werden und der Lehrer sollte genötigt sein, dieselben auf dieser Stufe stets mitzumachen, damit der Schüler ein Muster vor sich habe, das ihm zur Richtschnur wird.

Sollte noch eins hinzugefügt werden, so wäre es der lebhafte Wunsch, dafs eines Tages ein weiser Gesetzgeber den Umtausch der Rollen des Lateinischen und Griechischen gebiete. Was spricht nicht alles für das Lateinische: die vollendete Durchbildung der Grammatik, diese granitne Festigkeit des Satzbaus, die historische Entwickelung der Wissenschaften und nicht am wenigsten die fundamentale Bedeutung für ein tieferes Verständnis der romanischen Sprachen! Gewifs! Aber kann die römische Litteratur Namen anführen, welche sich mit Homer, Sophokles, Eurypides, Aeschylus, Plato, Demosthenes, Thucydides und den ungezählten anderen messen können? Auch ist es nicht zu gering zu veranschlagen, dafs auf diese Art die Frage nach dem lateinischen Aufsatz in natürlicher, ungezwungener Weise gelöst wird.

7. Und läfst sich denn nun auch das gesteckte Ziel erreichen? Welche Widerstände setzt der Zögling demselben entgegen? Wie kann man dieser unter vielen gleichzeitig zu Unterrichtenden Herr werden? Das pädagogische soeben bezeichnete Problem hat viel Verwandtschaft mit dem berühmten astronomischen Problem der drei Körper, das es an Schwierigkeit der Lösung noch übertrifft: Lehrer, Schüler und Wissenschaft sollen sich zu einer Art harmonischen Einklangs vereinigen, jedes das andere beeinflussen und es doch in seiner Entwickelung nicht aufhalten. Die Auflösung ist durchaus psychologischer Natur; für die Mathematik sollen im Nachfolgenden einige Fingerzeige gegeben werden, und es soll auch das so wichtige pädagogische principium individui eine kurze Besprechung finden. Im allgemeinen ist daran zu erinnern, dafs für jeden Pädagogen stündlich nichts mehr als die herrlich trotzigen Worte Lessings im 91. Artikel der „Erziehung des Menschengeschlechts" zu beherzigen sind: „Es ist nicht wahr, dafs die kürzeste Linie immer die gerade ist."

8. Dem alten Satze des Parmenides, dafs das All eine Kugel sei, hat der geistreiche Blaise Pascal die tiefsinnige Erweiterung gegeben: deren Mittelpunkt überall, deren Umfang nirgends ist. Jeder Beruf, jede Sphäre des Denkens besitzt eine absorbierende Kraft, die allmählich immer ferner liegende Bereiche in sich aufnimmt und sich zu einem geistigen Universum auszuweiten vermag. Aber, wohl gemerkt, dieser Segen des scheinbar isolierenden und mit Einseitigkeit und Verknöcherung drohenden Einzelberufs kann nur denen zuteil werden, welche ihre besonderen Gaben auf dem Grunde der Idee des Kosmos zur Entfaltung gebracht haben. Das Gymnasium setzt daher seine volle Kraft daran, seine Schüler nicht anders in das Leben hinauszuschicken als das Herz voll der Empfindung:

σύμπνοια πάντα.

---

1. Wie die Völker unzweifelhaft früher gezählt als gemessen haben, so ist mit vollem Rechte auch der einzelne in unseren modernen Schulen zuerst lange Zeit im Rechnen geübt worden, ehe er in die verwickelteren Raumbeziehungen eingeführt wird. Diese Einführung selbst muſs mit außerordentlicher Umsicht geschehen, damit man möglichst alle Schüler zur Beteiligung heranziehe, ihr Interesse an der neuen Disziplin wecke, rege erhalte, steigere. Mit dem Gelingen dieses Anfangs wird gleichzeitig das einseitige und prekäre Urteil, welches leider selbst durch manche mathematisch ungebildete Sprachlehrer eine gedankenlose Unterstützung findet, beseitigt, als gebe es mathematische und nicht mathematische Köpfe, während doch Mathematik als Wissenschaft auf dem Gymnasium überhaupt nicht, sondern nur mit wissenschaftlichem Geist unterrichtet werden soll. Richtig ist an dieser, man sollte es wünschen, veralteten Entschuldigungsformel der Trägheit nur die psychologische Thatsache, die sich bei den Sprachen ebenso wohl als bei der Mathematik geltend macht, daſs bei dem einen Knaben ein gewisser Vorstellungskomplex schwerer ausgelöst wird als bei einem anderen, und daſs derselbe Hebel, welcher bei dem einen treffliche Dienste leistete, bei einem zweiten Kopfe versagt und durch einen neuen verschiedenartigen ersetzt werden muſs, um Bahn zu brechen. Einer oberflächlichen Betrachtung dürfte es naturgemäſser erscheinen, auf den Rechenunterricht sofort die allgemeine Arithmetik folgen zu lassen, zumal sich deren Lehren in der Geometrie schon frühzeitig so schön verwerten lassen. Allein man vergiſst, daſs wie in allen Wissenschaften vor dem umfassenden Ausbau sich ein Vorwalten des Besonderen und Speziellen zeigt, so auch der Schüler dem Individuellen zuneigt, darum der Buchstabenzahl wenig sympathisch gegenübersteht, die hierhergehörigen Rechnungsvorschriften wohl äuſserlich auffaſst, aber in ihre wahre Bedeutung, in ihren begrifflichen Inhalt nicht eindringt. In kurzer Frist ist darum alles wieder vergessen. Die Geometrie aber wirkt in hohem Maſse vorbereitend für die abstrakten Operationen mit allgemeinen Zahlen und regt eigentlich das Bedürfnis für die Erledigung von Problemen der allgemeinen Arithmetik erst an, während sie zugleich infolge der Verkettung und Vermischung des Besonderen und Allgemeinen, des Speziellen und Generellen, wie der planimetrische Lehrsatz mit seiner den äuſseren Sinn ansprechenden Figur das beständig thut, dem Fassungsvermögen des Knaben so sehr viel näher steht. Die erforderlichen arithmetisch-algebraischen Operationen lassen sich wenigstens in den Anfängen auſserhalb aller Systematik zu völlig genügendem Verständnis bringen. Freilich kann man nicht leugnen, daſs der erste Unterricht in der Raumlehre mit eigentümlichen Schwierigkeiten interner Natur zu kämpfen hat, welche nur durch einen Lehrer, der eine eingehende Kenntnis der Prinzipien seiner Wissenschaft besitzt, zu überwinden sind; anderenfalls wäre derselbe auſser Stande sich der Fassungskraft des Knaben anzupassen, ohne völlig unwissenschaftlich zu werden. Wir denken offenbar an die geometrischen Grundbegriffe, welche komplexer Natur sind, insofern dieselben ebensowohl von der Wesensbeschaffenheit unseres Geistes als unser Anschauung abhängen, d. h. auf aprioristischer und empirischer Grundlage zugleich ruhen. Diesem Sachverhältnis muſs der Unterricht notgedrungen Ausdruck geben, aber ganz gewiſs nicht dadurch, daſs er sich mit Erörterungen über die letzten Grundbegriffe und Anschauungen abplagt, wodurch weniger logisches als hyperlogisches Denken und noch mehr Indifferenz und Widerwille erzeugt würde, sondern vielmehr dadurch, daſs in den Definitionen das Axiomatische freimütig und kurz ausgesprochen wird. Hat man die Grundanschauungen und Grundbegriffe

nur erst gewonnen und gesichert und darf sich an die kombinatorische Fähigkeit des Schülers wenden, dann ist der regelmäfsige Fortschritt durch nichts mehr behindert.

2. Die Methode des einleitenden Unterrichts ist durch die Geschichte und den erziehlichen Zweck der Mathematik gegeben. In ersterer Hinsicht hat man sich zu vergegenwärtigen, dafs die Geometrie sich ursprünglich in einem vorwissenschaftlichen, rein empirischen Zustande befunden hat, ehe geniale Männer, ob es nun Thales oder ein anderer war, zu systematischer Gliederung und planmäfsigem Aufbau fortgeschritten sind; was den zweiten Punkt angeht, wollen wir festhalten, dafs die Mefskunde, unterstützt durch die jedem obschon in verschiedenem Grade dienstbare geometrische Phantasie den Sinn für räumliche Gesetzlichkeit wecken und demnächst auf Verstandesbildung hinarbeiten soll. Hierbei mufs der Schüler wohl oder übel sich der sauren Mühe des eignen Denkens unterziehen und es lernen, seine Aufmerksamkeit unverrückt auf einen Punkt zu konzentrieren, wodurch zum Entgelt mehr wie durch jede andere Lektion Stählung und Festigkeit des Willens erreicht wird. Die Anfänge des geometrischen Unterrichts werden sich hiernach von aller Systematik fernhalten, weder ein Lehrbuch zugrunde legen noch die Anlage regelmäfsig geführter Hefte und Ausarbeitungen verlangen, welche durch unaufhörliche Repetitionen in den Einzelstunden vollkommen ersetzt werden. Der Knabe steht im Alter von 12 Jahren unserer Lektion keineswegs leer gegenüber; er bringt eine Menge ungeordneter Raumvorstellungen und eine Art instinktiver Mathematik als Mitgift dem Lehrer entgegen, der in dieses Chaos Ordnung zu bringen und seinen Zögling unvermerkt vom konkreten Gebilde zum abstrakten hinüberzuleiten hat, während das weitere erfahrungsmäfsige Einsammeln von allerlei mathematischen Kenntnissen fortgesetzt wird. Definition und Einteilung sind hier die logischen Formen, in welchen der Schüler sein Wissen aufbewahrt; beide müssen in eminentem Mafse das Attribut der Mathematik: die Klarheit an sich tragen. Der Beweis tritt entweder völlig zurück oder spielt eine durchaus untergeordnete Rolle. Dafür lernt der Schüler mit Lineal und Zirkel, mit dem Transporteur und rechtwinkligen Dreieck und gelegentlich auch mit dem Senkel umgehen, und überall, ob er nun Bleistiftzeichnungen entwirft oder Arm- und Handbewegungen als Versinnlichungsmittel benutzt, auf Sauberkeit und Praezision achten.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet der physikalische Körper, welcher einen Teil des stetig und gleichartig vorgestellten Raumes einnimmt und ohne den Raum nicht angeschaut werden kann; an ihm werden die Begrenzungsflächen, an diesen Linien, an den letzteren Punkte unterschieden. Die Flächen haben mannigfaltige Gröfse, Gestalt und Stellung, dasfelbe gilt von den Linien, Punkte sind schlechthin ausdehnungslos. Der Übergang vom physikalischen Körper zum mathematischen bietet keinerlei Schwierigkeit, denn der Teil des Raumes, welchen der physikalische Körper einnimmt oder einnehmen könnte, ist der mathematische; der letztere ist absolut durchdringlich, d. h. irgend welche Punkte oder Teile desfelben können zugleich auch einem anderen mathematischen Körper angehören. Als Gattungsbegriff für die Definition von Fläche, Linie und Punkt ist „Grenze" oder „Gemeinsam" (z. B. ein Punkt ist das Gemeinsame zweier Linien) zu wählen, nicht ohne das Verständnis und den Sinn dieser leicht mifsverständlichen und vieldeutigen Worte durch Beispiele gehörig zu vermitteln. Das meiste Kopfzerbrechen verursacht der Punkt; sein Begriff ist unentbehrlich, wenn jene Gebilde nicht als etwas Fertiges angeschaut, sondern durch Bewegung erzeugt werden. Ein mathematischer Körper oder ein Punkt u. s. w.

kann sich eigentlich nicht bewegen; der Vorgang ist einfach vom physikalischen Körper und den an ihm zu unterscheidenden Stellen auf den mathematischen übertragen, insofern jeder Punkt als Stelle eines physikalischen Körpers angesehen werden kann; die Bewegung läfst sich aber auch als relative auffassen, d. h. jeder Punkt bleibt in Ruhe und nur ein betrachtendes Subjekt durchstreift ein gewisses Punktgebiet. Axiom: Bewegt sich ein Körper, so ändert sich an ihm nichts als der Platz.

Mit der Bewegung ist der Dimensionsbegriff, den man freilich besser viel später in den Lehrbüchern zur Erörterung brächte, unschwer zu verknüpfen; ist dieselbe von einem Punkt ausgeführt, so entsteht eine Linie, bewegt sich eine Linie mit oder ohne Festhaltung ihrer Form so, dafs jeder ihrer Punkte für sich eine neue Linie beschreibt, so entsteht die Fläche, und durch Bewegung der Fläche mit oder ohne Gestaltänderung, wenn nur jeder Punkt, von einzelnen abgesehen, eine nicht auf der Fläche liegende Linie beschreibt, entsteht der Körper. Es treten also bei der Genesis der Fläche zwei Liniensysteme in die Erscheinung; die erzeugende Linie in ihren verschiedenen Lagen bildet das eine System und die von ihren einzelnen Punkten beschriebenen Linien setzen das zweite System zusammen. Jeder Punkt der Fläche tritt daher als Durchschnitt zweier Linien auf, wovon die erste dem einen, die zweite dem anderen System angehört. Das meint man, wenn man der Fläche zwei Dimensionen zuschreibt. Bewegt sich die Fläche, so erzeugt sie in ihren verschiedenen Lagen ein Flächensystem, jedes der vorbeschriebenen Liniensysteme auf der Fläche beschreibt aber auch ein Flächensystem, so dafs in jedem Punkte des erzeugten Körpers sich drei Flächen treffen, von denen jede einem anderen der drei Systeme angehört. Das aber will man mit den Worten sagen: der Körper hat drei Dimensionen. Der Sinn des Ausdrucks, eine Linie habe eine Dimension, ist leicht anzugeben. Die Begriffe Länge, Breite, Höhe mit dem Dimensionsbegriff zu vermischen, ist wohl verfehlt. Welche Länge und Breite hat ein Dreieck? Ist später der Begriff des geometrischen Orts eingeführt, so läfst sich nachträglich derjenige der Dimension dahin präzisieren, dafs auf der Linie ein Punkt durch ein Merkmal, auf der Fläche durch zwei, im Raume durch drei Merkmale oder Ortsangaben zu einem bestimmten wird.

3. Axiomatisch ist die Strecke, welche zwei Punkte A und B verbindet und der Begriff der Richtung. Die Strecke AB enthält zwei Richtungen, die von A nach B und die entgegengesetzte von B nach A. Von einem Punkte aber laufen unendlich viele Richtungen aus. Der Versuch, auf einfachere Begriffe erklärend zurückzugreifen, führt zu lauter bösen Zirkeln. Man beobachte sich selbst, ob man zwei Punkte A und B anders als zugleich auf eine gewisse einfachste Art verbunden vorstellen kann; das aber ist die Strecke, auch Abstand der Punkte A und B genannt. Führt man die Strecke AB als die kürzeste aller Linien zwischen A und B ein, so setzt das Messung, folglich die Strecke voraus; wollte man sich mit einem schnelleren oder langsameren Durcheilen der Linien aushelfen, so müfsten die Bewegungen mit gleicher Geschwindigkeit ausgeführt werden, aber dieser mechanische Begriff involviert wiederum den der Strecke. — Es ist ein Postulat, die Strecke AB über A oder B hinaus zu verlängern; bei dieser Operation stöfst man auf keine Schranke; die Vorstellung der Strecke zusammen mit dem Bewufstsein ihrer unbeschränkten zweiseitigen Verlängerbarkeit liefert den Begriff der Geraden. Eine Gerade ist nicht anschaulich vorstellbar; man schaut immer nur Strecken an. — Jetzt kann auch die Unbegrenztheit des

Raumes zu kurzer und verständlicher Besprechung kommen; die Lehrbücher reden von diesem Merkmal gewöhnlich in ihrer ersten Zeile; was soll ein Kind, ohne von der Geraden zu wissen, eigentlich dabei denken oder empfinden? Die Gerade heifst auch Strahl, ein beliebiger Punkt auf ihr teilt sie in zwei kongruente Teile, Halbstrahlen genannt. Man hat vielfach angenommen, das habe Euklides gemeint, wenn er sagt: *εὐϑεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*; aber da ist zu bedenken, dafs auch die Schraubenlinie durch jeden ihrer Punkte in zwei kongruente Teile zerspalten wird; die *διαφορά* läfst also Mehrdeutigkeit bestehen, und dieser Umstand bringt die Definition zu Falle. — Ein Strahl ist durch zwei Punkte völlig bestimmt; die unendlich vielen durch einen Punkt gehenden Strahlen bilden ein Strahlenbündel.

Die Identifizierung von Gerade und Richtung ist falsch, denn einmal kann man wohl von Teilen einer Geraden, aber nicht von Teilen einer Richtung reden, und dann wird später in der Parallelentheorie klar gelegt, dafs verschiedene Gerade eine und dieselbe Richtung haben können.

Neben Punkt und Gerade ist das dritte wichtige Raumelement die Ebene; sie entsteht, wenn eine Gerade so um einen festen Punkt bewegt wird, dafs sie eine festliegende Gerade fortwährend schneidet. Wird im Anschlufs hieran definirt: Eine Ebene ist eine Fläche, welcher eine Gerade mit allen Punkten angehört, wenn sie irgend zwei Punkte mit ihr gemeinsam hat, so ist zu betonen, dafs die spezifische Differenz axiomatischer Natur ist. Aus der Entstehung der Ebene ersieht man sofort, dafs durch eine Gerade unendlich viele Ebenen gelegt werden können, ebenso durch einen Punkt; das führt auf die Vorstellung des Ebenenbüschels resp. des Ebenenbündels. Jedes Klassenzimmer bietet hinreichenden Anhalt, diese Gebilde zu versinnlichen.

Die Planimetrie handelt nur von den in einer Ebene möglichen Figuren. (Blatt Papier, Wandtafel.)

Punkt, Gerade, Ebene haben also das Eigenartige, dafs der Punkt dimensionslos ist, die Gerade unterscheidet sich von allen ebenen Linien dadurch, dafs sie allein zu ihrem Entwurf das zweidimensionale Gebiet der Ebene gar nicht nötig hat, wie die Ebene unter allen Flächen die einzige ist, welche den dreidimensionalen Raum nicht beansprucht.

Alle Strahlen einer Ebene, welche durch einen Punkt gehen, bilden das Strahlenbüschel. Nach Absolvierung der Parallelentheorie wird der Schüler darauf hingewiesen, dafs ein Strahlenbüschel sämtliche Richtungen einer Ebene, ein Strahlenbündel diejenigen des Raumes erschöpft.

4. Der Anfänger hat sich nunmehr eine geraume Zeit mit der Geraden zu beschäftigen. Die Ausmessung der Strecken mit dem Meter, die Konstruktion von Strecken nach vorgeschriebenem Mafse, ferner die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Strecken gehören hierher. Auch die Teilung einer Strecke nach vorgeschriebenem Verhältnis wird in der Weise der Gesellschaftsexempel mit Leichtigkeit und Lust gelöst. Soll z. B. eine 12 cm lange Strecke nach dem Verhältnis $1:2:3$ geteilt werden, so schliefst man: Auf $1+2+3$ d. i. 6 Anteile kommen 12 cm, auf einen $12:6=2$; also sind die drei Stücke 2 cm, 4 cm, 6 cm; an den betreffenden Stellen werden Punktmarken gemacht. Für überaus wichtig auf dieser Stufe halten wir die Abschätzung von Strecken. Banklängen, Zimmer-,

Tafel-, Fenster-, Thür-, Buchbreiten u. s. w. sind geeignete Muster; hierbei machen sich perspektivische Irrungen geltend; das schadet aber nicht.

Die Erinnerung an die in der Praxis benutzten Maſse ist hier ganz am Platz und erregt gemeinhin lebhaftes Interesse. Der Feldmesser gebraucht die Kette, der Astronom den Erdradius (geodätisches Bureau) oder gar das Lichtjahr, der Mikroskopiker das Glasmikrometer, der Physiker die Mikrometerschraube.

Auch der Begriff der vertikalen (Senkel), horizontalen und schiefen Geraden ist zu entwickeln und hieran sind die mit unserem Leibe zusammenhängenden Hauptrichtungen: vorn—hinten, rechts—links, oben—unten anzuschlieſsen.

Auf die geradlinige Fortpflanzung des Lichts stützt sich das Visieren, resp. Einvisieren. Man lasse immerhin einen Knaben mehrere andere in eine Gerade einvisieren.

Endlich benutze man die Gelegenheit zu leichten syntaktischen Fragen: In wieviel Punkten schneiden sich zwei, drei, vier u. s. w. Gerade?

5. Wir stehen vor der Definition des Winkels. Ein Winkel entsteht, wenn von einem Punkte aus zwei Halbstrahlen nach verschiedenen Richtungen gezogen werden. In dieser Entstehung sieht man auf das deutlichste die Keime für die zwei auseinandergehenden Erklärungen des Winkels, welche für uns in Frage kommen. Einerseits wird beim Entwurf der beiden Strahlen das Lineal sinnenfällig gedreht, andererseits können wir zwei von einem Punkte auslaufende Strahlen kaum anders als zugleich unwillkürlich durch ein ebenes Feld verbunden vorstellen. So kommt es mit scheinbar gleicher Berechtigung zu den Definitionen des Winkels als Drehungsgröſse und Ausschnitt einer Ebene. Indessen haben wir zu bedenken, daſs, obschon alle geometrischen Gebilde durch Bewegung erzeugt werden können und hierdurch ihre Verwertbarkeit in der Physik, d. h. bei allen Bewegungsvorgängen auf das klarste hervortritt, die rein extensive Natur der Geometrie gleichwohl überall Definitionen erfordert, welche von den Begriffen Zeit und Geschwindigkeit frei sind. Auſserdem braucht kaum an den logischen Zirkel erinnert zu werden, den man begeht, wenn man den Winkel eine Drehungsgröſse nennt; wollen wir gleiche Winkel definieren, so bedürfen wir eines Maſses für die Drehung, und das ist nichts anderes als der Winkel. — Es bleibt also dabei, der Winkel ist der Teil einer Ebene, welche zwei von einem Punkte derselben auslaufende Halbstrahlen bilden; in Wahrheit werden zwei Winkel, die sich zur vollen Ebene ergänzen, durch diese Konstruktion erzeugt; man muſs daher die Vereinbarung treffen, daſs immer der kleinere der beiden Winkel gemeint ist, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gefordert wird. Zieht man zwei sich schneidende Gerade, so entstehen sogar vier Winkel (und wenn man will, noch mehr), deren Zusammenhang die wichtigen Sätze aussprechen: Nebenwinkel betragen zusammen 2 R, und Scheitelwinkel sind einander gleich. Jedenfalls sind die Schenkel eines Winkels immer Halbstrahlen. Es ist wahr, unsere Definition fordert den Verkehr mit Unbegrenztem, aber dieser läſst sich ja schon bei der Geraden nicht umgehen. Im übrigen ist das Maſs eines Winkels nicht die unbestimmbare Menge von Quadratmetern seines Feldes, sondern eine durchaus bestimmte Gröſse, nämlich das Verhältnis seines Feldes zur ganzen Ebene. Ist dieses Verhältnis $\frac{1}{360}$, so heiſst der Winkel ein Grad und dient als Einheit für die Messung aller anderen Winkel. Wenn der Winkel durch Drehung eines Halbstrahls erzeugt wird, beschreibt jeder Punkt des Halb-

strahls eine krumme Bahn, welche Kreisbogen heifst und ein Teil der Peripherie eines Kreises ist, dessen genetische- und Realdefinition nebst dem Begriff des Radius und Durchmessers hier kurz einzuschalten sind. Ein Winkel hat also dasfelbe Mafs, wie jeder Kreisbogen, welcher sich zwischen den Schenkeln ausspannt und den Scheitel zum Zentrum hat, vorausgesetzt, dafs das Verhältnis des Bogens zur Peripherie zum Mafs des Bogens gewählt wird; die Länge des Radius ist hierbei ganz gleichgiltig. Diese Bemerkungen sind für das Verständnis des Transporteurs, demnächst für die Kreislehre und die Trigonometrie von gröfster Wichtigkeit.

Scheinbar einfach und gelenk ist die Definition: Der Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden; diese Worte haben nur einen Sinn, wenn man sie so versteht: der Winkel zeigt uns stets an, dafs seine Schenkel verschiedene Richtung haben, wo man denn etwas sehr Triviales erfährt, ohne belehrt zu werden, was der Winkel ist. In Wahrheit aber spielt man mit dem Doppelsinn des Wortes „Unterschied", welches einmal nur als Ausdehnungsbegriff (Quale) und ein anderes Mal als Gröfse (Quantum) gebraucht wird. In falscher Analogie zu der korrekten Aussage: zwei Personen haben gleiches Vermögen, wenn sie gegenüber einer dritten denselben Vermögensunterschied aufweisen, stellt man den Satz auf: zwei Gerade haben gleiche Richtung, wenn sie gegenüber einer dritten gleichen Richtungsunterschied zeigen. Die Verletzung des Identitätsgesetzes liegt hier in dem oben angegebenen Sinne klar vor Augen.

6. Über die Einteilung der Winkel ist nichts zu vermerken. Der Schüler ist hierin tüchtig zu üben. Man ziehe unter anderen etwa fünf sich schneidende Gerade und knüpfe allerlei Fragen daran: Wie heifst der Winkel, dessen Schenkel AB und AC sind? Welche Winkel haben alle den Schenkel AB, den Scheitel A? Welche Winkel mit dem Schenkel AB sind spitz, welche stumpf? Wie heifst der Scheitelwinkel zu $D\widehat{E}F$? U. s. w. Warum taugt die Definition nichts: Ein rechter Winkel ist ein solcher, dessen Schenkel auf einander senkrecht stehen? Warum aber darf man sagen, zwei Gerade stehen senkrecht aufeinander, wenn sie die Schenkel eines rechten Winkels sind?

Es ist die Bemerkung wohl überflüssig, dafs die an Strecken vollzogenen Rechnungsoperationen auch auf die Winkel auszudehnen sind, ebenso dafs auf die ungemein ausgiebige Verwertung des Winkels lebhaft hinzuweisen ist: Die Zeit wird durch Winkel gemessen, der Seemann orientiert sich auf hoher See durch gewisse Winkel (Deklination), der Astronom mifst von seiner Warte aus nichts als Winkel, die Wetterfahne beschreibt gewisse Winkel, nach denen der Wind benannt wird, jeder Schritt, jede Arm- und Handbewegung, jedes Kopfbeugen, jede Mundöffnung, jede Wendung des exerzierenden Soldaten beruht auf der Beschreibung von Winkeln.

Dem Knaben ist endlich eine so klare Auffassung von der Gröfse eines Winkels beizubringen, dafs er bei der Abschätzung sich nicht um 5^0 irrt. Diese Schätzungen sind natürlich wiederholt vorzunehmen und dabei ist zur Vermeidung von Konfusion und Unredlichkeit gelegentlich etwa so zu verfahren: Der Lehrer zeichnet einen Winkel an die Tafel; die Knaben schätzen jeder still für sich unter Benutzung der Uhr (später ohne dieselbe; 1 Minute $= 6^0$) die Gröfse desselben und schreiben ihre Resultate ins Diarium. Diese letzteren läfst sich der Lehrer unter Zurückweisung offenbar unsinniger diktieren, um das Mittel mit der durch den Transporteur vollführten Messung zu vergleichen. Die Abweichung wird zur Überraschung aller eine sehr geringe sein; diejenigen, welche das Mittel streiften, verdienen ein Lob. Nicht von der geringsten Bedeutung ist das Interesse, mit welchem die Schüler an dieser Stelle den Begriff des Mittels aufnehmen. Man scheue sich nicht, diese Teilnahme durch gut gewählte Beispiele aus der Wärmelehre, Höhenmessung, Sterblichkeit u. s. w. zu erhöhen.

7. So sind wir denn vollständig vorbereitet für das Verständnis der Parallelentheorie. Dafs durch einen Punkt A zu einer Geraden BC nur eine Parallele gezogen werden kann, ist schlecht und recht als Axiom hinzustellen; durch Hinweis auf das Strahlenbüschel A wird dieselbe als Grenzlage zwischen links- und rechtsseitiger Konvergenz charakterisiert und dazu bemerkt, dafs alle Versuche, durch A noch eine zweite BC nicht schneidende Gerade zu zeichnen, scheitern. Mehr verträgt der Kopf eines Quartaners nicht. Bei den Repetitionen in den oberen Klassen empfiehlt es sich aber sehr, auf diese viel umstrittene Hypothese etwas näher einzugehen und die Stelle zu bezeichnen, bis zu welcher aprioristische Betrachtung einzig und allein gelangen kann. Legt man durch A einen BC schneidenden Strahl s und dreht denselben etwa im Sinne eines Uhrzeigers um A, so ist zweierlei möglich, entweder wird BC von s in allen Lagen getroffen oder nicht; im letzten Falle nähert sich s einer Grenzlage u, bei welcher das Schneiden eben aufhört, notwendigerweise mufs dann aus Symmetriegründen, wenn s in umgekehrtem Sinne eines Uhrzeigers um A herumgeführt wird, noch eine zweite Grenzlage v existieren, für die das nämliche wie für u gilt. Die beiden Geraden u und v heifsen parallel zu BC und zerlegen das Strahlenbüschel A in zwei Teile, indem sie das System der BC schneidenden von dem System der BC nicht schneidenden Geraden sondern; man drückt sich auch so aus, dafs die schneidenden Geraden je einen endlichen, u und v je einen unendlich fernen, die übrigen Geraden des Büschels A aber gar keinen Schnittpunkt mit BC gemeinsam haben; BC selbst besitzt also gar keinen oder zwei unendlich ferne Punkte. Fallen diese zwei Punkte in einen zusammen, oder was dasselbe ist, vereinigen sich u und v zu einer einzigen Geraden (man denke an das Gleichwerden der Wurzeln einer quadratischen Gleichung), so giebt es durch A auch nur eine Parallele zu BC. Jede dieser Annahmen führt zu einer konsequenten, in sich widerspruchsfreien und wohlgegliederten Geometrie, der elliptischen (keine Parallele), hyperbolischen (zwei Parallele) und parabolischen (eine Parallele); die letztere, meist Euklidische genannt, scheint mit unseren Erfahrungen in voller und allseitiger Harmonie zu stehen. Wir begreifen nun den Sinn der Worte, der Euklidische Raum ist unendlich; vor der Parallelentheorie kann man sich darunter nichts Verständiges denken. Die Lehrbücher identifizieren zumeist „unbegrenzt“ und „unendlich“ trotz Riemann, nach welchem der erste Begriff ein Ausdehnungs- (Kreis, Kugel sind unbegrenzt), der zweite ein Mafsbegriff ist.

8. Die prinzipiellen Auseinandersetzungen der Nummern 2—7 liefern das Skelett für die sogenannte propädeutische Geometrie, die am zweckmäfsigsten und erfolgreichsten ein Semester der Quarta ausfüllt, übrigens in Verbindung mit dem Rechenunterricht diese Klasse sehr wohl auch ein volles Jahr beschäftigen kann. Über das mathematische Zeichnen in der Quinta darf man die Erwartungen des Lehrplans vom Jahre 1882 schwerlich teilen. Der systematische Unterricht sollte mit der Tertia beginnen. Als Ziel und eventuell als Erfolg des propädeutischen Unterrichts ist dreierlei hinzustellen:

a) Vorhandenes empirisches Material wird gesichtet und begrifflich geformt.

b) Neues empirisches Material wird in gewissen Grenzen gesammelt.

c) Der Schüler gewöhnt sich an den Gebrauch der mathematischen Instrumente, namentlich des Lineals und Zirkels.

9. Auf dieser Stufe ist der Schüler reif für das Verständnis eines Lehrsatzes und empfindet vor allem auch das Bedürfnis eines Beweises. Es darf ihm nun zugemutet werden, einzusehen, dafs die Tafelfigur mit Zufälligkeiten behaftet und eine schlechte Kopie der innerlich angeschauten reinen und wahren ist; ohne zahlreiche Vorübungen in der Unterklasse wäre er hierzu nicht befähigt gewesen. Die Empirie hört auf, die ausschliefsliche Kontrolle für die mathematischen Wahrheiten abzugeben; nur zum Vergleiche wird sie herangezogen. Denn der Schüler mufs nun mehr und mehr genötigt werden, das Auge der bunten Sinnenwelt zu verschliefsen, d. h. vom Einzelnen und Vereinzelten abzusehen; er soll sich in sich selbst vertiefen, und ist's auch nur auf elementarem Wege, den Formen und Gesetzen der anschauenden Vernunft nachspüren. Diese gewissermafsen gewaltsame Abtrennung vom gewöhnlichen Fühlen und Wollen und vom zerstreuenden Wechselspiel der Phantasie erregt leicht Unlust, welche steigt und sich in Überdrufs verwandelt, sobald dem Knaben hier und da ein Punkt und damit das Folgende unklar wird, oder ihm Jugend, Mangel an Anlagen, Schwerfälligkeit, momentane geistige Unreife überhaupt zu ebenso viel Hemmnissen für einigermafsen konsequentes Denken werden. Da giebt's schwere Bürde für den Erzieher, aber auf der anderen Seite strömt hier auch die Quelle des reinsten Lehrerglücks, das echte Priestertum des Lehrerberufs liegt hier verborgen. Das Genie geht so sehr seine eigenartigen Wege, dafs es einer besonderen Teilnahme des Erziehers nicht bedarf; aber das ist etwas, den Trägen anspornen, dem Verdrossenen Lust, dem Zaghaften Mut, dem Müden Kraft, dem Leichtsinnigen Beharrlichkeit einzuflöfsen. Die Persönlichkeit des Lehrers entscheidet in diesem Punkte alles und jede auf ihre Weise, so dafs es der allgemeinen Anweisungen nur wenige giebt. Vor allem ist kein Knabe aufzugeben; oft hindern versteckte physische und psychische Hemmnisse allein oder im Verein an ordentlicher Unterrichtsbeteiligung und unverrückter Aufmerksamkeit. Psychische Mängel werden sich im allgemeinen dann durch angemessenen Tadel, der in steigender Schärfe ausgesprochen werden darf, beseitigen lassen, wenn der Lehrer das Glück hat, die gute Seite des Knaben herauszufinden, die gewifs immer vorhanden ist, denn diese mufs ihm durchaus zuerst vorgehalten werden, um dagegen den Tadel anzustemmen. Der blofse Tadel nützt gar nichts, lockert die Pietätsbande und erzeugt mit der Zeit Verbitterung und Groll.

Es ist ein merkwürdiges und allbekanntes Phänomen, dafs das Licht dem Schüler oft von einer ganz anderen Seite kommt als von da, wohin das Augenmerk des Erziehers gerichtet war. Was die Worte des Meisters nicht vom Dunkel zu befreien vermochten, entkleidet oft ein einziger Fingerzeig eines Mitschülers von allem Geheimnisvollen. Ein deutlicher Wink, dafs man es nie unterlassen solle, in den nachfolgenden Stunden auf dieselben Gegenstände immer von neuem zurückzukommen, sie bald von dieser bald von jener Seite beleuchtend, oft von einem scheinbar ganz entlegenen und fremdartigen Ausgangspunkte auszulaufen und plötzlich wieder bei dem alten Ziele anzulangen!

Manchmal, und das ist kein seltener Fall, erscheint eine Gemütsseite von Natur oder durch eine überwiegende Ausbildung einer anderen wie verschlossen. Jemand besitze kein unmittelbar wirkendes ästhetisches Gefühl, während ein zweiter beim ersten Anblick von der Schönheit eines Kunstwerkes durchdrungen und entzückt sei; aber man weise jenem die Reinheit und Harmonie der Verhältnisse, die edle Absicht des Künstlers und wie er ihr nachgekommen, und plötzlich verklärt sich auch vor seiner Seele die Erscheinung, die ihn anfänglich so kalt liefs. Wer weifs, ob er nicht in Zukunft aus eigenen Stücken einen schönen Gegenstand tiefer und wahrer erfassen wird als der andere, so paradox es klingen mag, dafs der Verstand da die Bahn brach, wo das Gefühl allein hätte leiten sollen. Das ganze Verhältnis ist umkehrbar: Ein künstlerisch beanlagtes Kind kann bei anfänglicher Abneigung gegen die strenge Mathematik durch den Zauber ihrer einfachen und doch so schönen, ihrer anspruchslosen und doch so fern wirkenden Gesetze für dieselbe gewonnen werden.

Hypostasieren wir unter der grofsen Menge möglicher Fälle noch einen letzten: Ein Schüler zeige treuen Fleifs und unausgesetzten Eifer, dem aber der rechte Erfolg fehle, weil wegen verhältnifsmäfsiger Jugend der spekulative, auf das Allgemeine gerichtete Sinn noch nicht hinreichend erschlossen ist. Bei einem solchen Kopfe ist Geduld zu üben; sein Fehler nimmt sichtlich mit der Zeit ab, wenn man möglichst für feste Association seiner Vorstellungen sorgt; er gedeiht recht eigentlich unter dem Schutze der Mathematik, und leicht möchte er eines Tages viele seiner Kameraden überflügelt haben, die eigentlich hohle Köpfe waren, aber für Talente galten, weil sie ein frisches Gedächtnis besafsen.

Mögen diese kurzen Bemerkungen genügen, um wenigstens im Umrifs das ebenso wichtige als vielfach mifsverstandene und falsch ausgelegte pädagogische Prinzip der Individualität in seiner wahren Bedeutung hinzustellen. Man kann täglich sagen hören, dafs der eine Schüler Anlagen zur Mathematik, ein anderer für die Sprachen, ein dritter für die Geschichte, ein vierter für die Musik u. s. w. habe, und dafs man jeden nur auf dem Wege, auf dem er sich eben befinde, möglichst gewähren lassen solle; man verwechselt hierbei meist Anlage mit flüchtigem Interesse und vergifst, dafs die erziehliche Aufgabe des Gymnasiums gerade das Gleichgewicht aller Gemütskräfte anzustreben fordert. Dürften wir diese Gemütskräfte eines jeden in latente und freie abteilen, so liefse sich das Prinzip der Individualität auf die kurze Formel bringen, dafs man mit Hilfe der vorhandenen freien Kräfte den Durchbruch und Zugang zu den latenten zu vermitteln habe.

10. Wir hatten schon an anderer Stelle bemerkt, dafs der systematische Unterricht am zweckmäfsigsten in der Untertertia beginne; da sein letztes Ziel ein in sich geschlossener, ästhetische und wissenschaftliche Anforderungen gleichmäfsig befriedigender Vorstellungsbereich ist, so erscheint für einen gedeihlichen Fortgang des Unterrichts ein Lehrbuch unentbehrlich. Diese Unentbehrlichkeit ist vornehmlich durch folgende drei Momente bezeugt:

a) Gröfsere Anstalten haben mehrere mathematische Lehrer, welche sich einer gemeinschaftlichen Unterlage bedienen müssen.
b) Den Schülern mufs die Möglichkeit der Repetition kleinerer und gröfserer Abschnitte an einer sauberen und übersichtlichen Darstellung gegeben sein.
c) Den Schülern mufs ein Übungsmaterial aus wohlgeordneten Sätzen und Aufgaben zur Verfügung stehen.

Es fragt sich, welche Anforderungen man an ein Lehrbuch zu stellen habe. Euklids, des ersten grofsen Systematikers, Prinzip ist rein logischer Natur, nämlich „Lückenlosigkeit", d. h. jeder Satz wird durch ihm vorangehende als richtig erkannt. Dieses Prinzip erlaubt eine sehr mannigfache Anordnung der in den Elementen vorkommenden Sätze, so dafs die

Gruppierung des Euklides vielfach den Charakter des Zufälligen und Willkürlichen an sich trägt. Man wird unwillkürlich an das botanische System von Linné erinnert. Erwünscht ist eine mehr organische Gliederung, wo innerlich verwandte Sätze zusammenstehen und Satzgruppen durch ein methodisches Prinzip wie durch ein Band zusammengehalten werden. Von einem Schulbuch mufs überdies gefordert werden, dafs es nicht allein einen organischen Aufbau der Geometrie erstrebe, sondern auch zugleich ein Minimum von Sätzen enthalte, welche eine unerschöpfliche Menge von Einzelnheiten beherrschen, d. h. ein Maximum von Anwendungen verstatten. Man könnte sich wundern, dafs die methodische Behandlung der Elemente nicht lange eine definitive Gestalt angenommen hat; allein das wird nie geschehen, so lange überhaupt die Wissenschaft in der Fortbildung begriffen ist. Denn damit geht nicht allein eine fortwährende Läuterung der Prinzipien Hand in Hand, sondern wohlbekannte Sätze gewinnen oder verlieren an Bedeutung, und beides zusammen verbunden mit psychologischer Vertiefung wirkt erheblich auf die Darstellung der Lehrbücher ein. Es scheint, als wären nur drei Arten elementar-mathematischer Schriften berechtigt, solche, welche nach mehr oder weniger Dezennien den wissenschaftlichen Standpunkt kodifizieren (Euklides, Legendre, Baltzer), die Journallitteratur, welche für die Mitteilung neuer und wichtiger Einzelnheiten sorgt und endlich die Elementarbücher, welche nicht sowohl den Lehrer als ausschliefslich den Schüler im Auge haben. Diese letzteren sollen durch Anordnung und Gliederung des Stoffs und durch wohlgeplantes Übungsmaterial didaktisch einwirken, nicht durch Breite im Detail. Methodische Auseinandersetzungen gehören in die Vorrede und können und werden dort, wenn sie wahrhaften Wert besitzen, mit Freuden eingesehen und benutzt werden; durchflechten sie jeden Satz, so wirken sie wahrhaft ermüdend, unterbinden alle freie Thätigkeit des Lehrers und Schülers und machen das Buch für Repetitionen völlig ungeeignet. Daher müssen z. B. die mit vieler Reklame in die Litteratur eingeführten, sicherlich wohlgemeinten Lehrbücher von Fenkner und H. Müller als verfehlt angesehen werden. An der hiesigen Anstalt ist Spiekers ebene Geometrie im Gebrauch; der gesamte Lehrstoff ist auf zwanzig Abschnitte verteilt, jeder Abschnitt bildet ein in sich geschlossenes wohlabgegrenztes Ganzes und hat reichliches Übungsmaterial in unmittelbarem Gefolge. Der Druck und die dem Text eingefügten Figuren sind deutlich und sauber, das Format ist handlich. Das Werk würde unseres Erachtens aufserordentlich an Wert gewinnen, wenn der gröfste Teil der in „Bemerkungen“ aufgespeicherten Notizen und eine erhebliche Menge höchst unwichtiger Lehrsätze in Wegfall kämen. Eigentümlich ist dem Verfasser die ausgiebige Benutzung des aus der griechischen Mathematik entlehnten Begriffs „δεδομένον“ (Datum). Derselbe deckt sich mit dem modernen Begriff „Funktion“ und dürfte darum trotz seines grofsen historischen Interesses kein Bürgerrecht mehr erwerben. Kunstausdrücke, welche die Wissenschaft nicht mehr benutzt, sollten auch die „Elemente“ nicht gebrauchen. Auf den Sachverhalt selbst, d. h. die Abhängigkeit gewisser Stücke einer Figur von anderen Stücken mufste im Abschnitt V allerdings hingewiesen werden; wollte man einen Kunstausdruck einführen, so mufste es „Funktion“ sein. Aufser den „Datis“ enthält ein grofser Teil der Paragraphen noch Beispiele und Örter. Die Beispiele gehören in den Übungsabschnitt, die Örter nicht minder. Dem systematischen Text sind vor der Ähnlichkeitslehre nur fünf Örter einzufügen, nämlich der Ort eines Punktes, welcher von einem festen Punkte, resp. einer festen Geraden einen vorgeschriebenen Abstand hat, ferner der Ort eines Punktes, welcher von zwei festen Punkten, resp. zwei festen Geraden gleiche Abstände besitzt (Grenzfall: Mittelparallele) und endlich der Ort eines Punktes, von dem aus eine feste Strecke unter gegebenem Winkel erscheint. Die Spiekerschen Örter lassen sich mit Leichtigkeit auf die fünf genannten reduzieren und gehören daher, weil sie ohne selbständige Bedeutung sind, in das Übungsmaterial. Aus allem folgt, dafs die Forderung an ein gutes Lehrbuch, ein Minimum von Sätzen zu enthalten, nicht sorgsam innegehalten ist, und dafs hierdurch dem Schüler die Repetition erschwert wird. Auf Einzelnheiten und Belege für die gemachten Ausstellungen näher einzugehen, ist hier nicht der Ort. Die ausgezeichnete Elementar-Mathematik von Mehler ist von den gerügten Mängeln frei, bietet aber so gut wie nichts über die Transversalentheorie und enthält gar kein Übungsmaterial.

11. Die Stoffverteilung auf die einzelnen Klassen ist wohl die allgemein übliche: Quarta und Tertia erledigen die Lehre von den Dreiecken, namentlich deren Kongruenz, vom Parallelogramm, vom Kreise und vom Flächenvergleich; Untersekunda hat die Proportionalität der Strecken, die Ähnlichkeit der Polygone und die Kreispotenz durchzumachen; die Rektifikation und Quadratur des Kreises wird in Unterprima behandelt. Auch hier dürfen die nachteiligen Veränderungen des Lehrplans vom Jahre 1882 nicht unerwähnt bleiben; ein wöchentlich dreistündiger Unterricht in der Tertia ist für gründliche mathematische Unterweisung zu kurz; durch Stundenausfall und Pausenabzug ist im Durchschnitt kaum über mehr als zwei Stunden zu verfügen. Die frühere Einrichtung war besser, auch ist ein Rückgang in den Leistungen ganz unverkennbar. In Quarta kann man mit drei Stunden sehr wohl auskommen. Dem Einwande, dafs man den Stoff entsprechend verkleinern könne, mufs man entgegenhalten, dafs eine Verkleinerung des Umfangs der Planimetrie, wie dieselbe durch die ersten dreizehn Abschnitte von Spieker oder das allbekannte Lehrbuch von Kambly dargestellt ist, nicht gut angeht, wenn man nicht die bildende Kraft aller mathematischen Disziplinen auf das empfindlichste schädigen will. Das Wesen der elementaren Planimetrie ist dadurch gekennzeichnet, dafs die Gerade, die mit ihrer Hilfe herstellbaren Polygone, der Kreis und die mannigfaltigen Beziehungen dieser Gebilde gegeneinander untersucht werden; das mufs aber nothwendig mit einer gewissen Vollständigkeit geschehen, wenn Übersicht, bewufstes Vorgehen im einzelnen Fall und ein nachhaltiger Bildungseinflufs über die Schulzeit hinaus erreicht werden sollen. Auf der anderen Seite verbietet die Durchschnittsbegabung unserer Schüler eine systematische Behandlung der Kegelschnitte sei es nach analytischer, sei es nach projektiver Methode. Hier gilt vielmehr voll und ganz das Wort von Poncelet (Traité des popr. project. des figures, introduct): La géométrie d'Euclide a certainement de très-grands avantages: elle accoutume l'esprit à la rigueur, à l'élégance des démonstrations et à l'enchaînement méthodique des idées; sous ces divers rapports elle est digne de notre admiration et mérite seule de constituer la base des éléments. Alle höheren Betrachtungen sind dieses dadurch, dafs sie eine Verallgemeineruug des Ausdrucks, der Auffassung und der Begriffe erstreben, welche zwar ein einziges Theorem zur Quelle eines Stroms von Wahrheiten machen, aber den jugendlichen Geist, der nun einmal dem Individuellen zuneigt, dennoch abstofsen. Das hindert nicht, die Primaner gelegentlich, z. B. bei der Theorie des Kegels in der Stereometrie oder in der Theorie der quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten oder bei der Mitteilung der Keplerschen Gesetze in der astronomischen Geographie oder bei der Lehre vom Wurf in

der Physik mit den Formen der Kegelschnitte und denjenigen Eigenschaften, welche sich mühelos aus den Definitionen ergeben, bekannt zu machen. So ist es an unserer Anstalt auch immer geschehen; über das Problem, von einem Punkte an einen Kegelschnitt die Tangenten zu ziehen, wurde nicht hinausgegangen. Aber auch die Sätze der elementaren Geometrie mufs man notgedrungen in zwei Teile zerlegen, einen festen, so zu sagen eisernen Bestand, dessen Beherrschung von jedem Schüler unweigerlich gefordert wird, und einen dehnbaren, variablen Bestand, dessen Weite und Fülle von gegebenen Umständen, insbesondere von der sehr veränderlichen Befähigung der aufeinanderfolgenden Schülergenerationen abhängig zu machen ist. Durch gewaltsamen Zwang ist hier wenig oder nichts zu erreichen. Der Kürze halber möchte ich diesen zweiten Teil unter dem Namen „Transversalentheorie" (Spieker, Abschnitt XIV—XVII) zusammenfassen; derselbe gipfelt in dem Taktionsproblem des Apollonius. Es kann nicht die Rede davon sein, dafs man im systematischen Unterricht der Tertia und Untersekunda soweit vordringen könnte; eher schon liefse sich diesem Ziele in Obersekunda nahe kommen, wenn daselbst wie früher ein Semester hindurch Planimetrie unterrichtet würde; die Altersreife und das theoretische Bedürfnis des Schülers erheischen das auch in Wahrheit, aber eine wenig segensvolle Verordnung hat die Trigonometrie nach der Obersekunda verlegt, für deren verständnisvolle Aufnahme eine Durchschnittsbefähigung der Schüler nicht vorhanden ist. Wie dem auch sei, das ausgesprocheneZiel ist nun einmal gesteckt und ihm wird so nachgegangen, dafs von den mathematischen Stunden der vier oberen Klassen überall eine abgezweigt ist, die fast ausschliefslich für planimetrische Übungen verwendet wird. Auch wird nach Kräften darauf gehalten, dafs die Schüler zu dieser Zeit sich freimütig äufsern sowohl beim Beweisen von Lehrsätzen als beim Lösen von Konstruktionsaufgaben, welche ebenfalls in jener Stunde zu systematischer Behandlung gelangen. In der Tertia war ehedem die vierte, jetzt in Wegfall gekommene Stunde zu Übungen im Beweisen von nicht zum System gehörigen Lehrsätzen angesetzt. Durch häufige Anwendung seiner Kenntnisse sieht der Schüler sein Wissen sich zum Können erweitern, er bekommt Lust zum Lernen und nun ist er für unsere Disziplin gewonnen. Einzelne Köpfe schlagen oft sehr eigenartige, vom Lehrer nicht vorhergesehene Wege ein, ausgezeichnet durch Einfachheit oder Eleganz oder Originalität, andere kommen auf Umwegen ans Ziel; beide verdienen Anerkennung; manchen führt der Eifer auf Abwege, die Klasse rektifiziert ihn. Jedenfalls dürfen, soll jeder sein Bestes ohne Scheu an den Tag bringen, dem Notizbuch keine Prädikate einverleibt werden; es handelt sich um eine Stunde freien Verkehrs; aufserdem findet keine systematische Beziehung auf die Ergebnisse der Übungsstunden statt.

Das Lösen von Aufgaben oder die Lehre vom geometrischen Ort setzt in Untersekunda ein; neben einfacheren Problemen werden näher solche besprochen, bei denen Seiten- und Winkelsummen resp. Differenzen darzustellen sind; die Aufgaben der Obersekunda berücksichtigen die Eigenschaften der Schwerlinien, den Apollonischen Kreis, die mannigfachen Beziehungen, welche die vier Berührungskreise eines Dreiecks hervorrufen; in Unterprima spielt der Feuerbachsche Kreis und die Ähnlichkeitsmethode eine hervorragende Rolle, während auf der obersten Stufe die Lehre vom Ähnlichkeitspunkt, die Inversion und die algebraische Methode sich geltend machen.

12. Der mündliche Klassenunterricht wird durch regelmäfsige Repetitionen und von Sekunda ab durch häusliche Terminarbeiten auf das wesentlichste unterstützt. Die Repetitionen finden vier- oder fünfmal im Semester statt und beziehen sich meist auf den Lehrstoff früherer Klassen; sie dürfen nicht zu umfangreich sein. Da die Zeit von einer Stunde für die Kontrolle sehr kurz ist, schlägt man am besten ein wechselndes Verfahren ein: bald werden einzelne Sätze erwiesen, bald wird Nachdruck auf den innern Zusammenhang der Sätze gelegt, oder es werden aus dem einschlagenden Übungsmaterial einige Aufgabe gelöst, oder man läfst über den Wiederholungsstoff ein Scriptum anfertigen.

Sehr empfehlenswert ist die Forderung des berühmten Physikers Ohm, dafs bei Repetitionen jeder Schüler an den Lehrer eine Frage zu stellen habe entweder über einen unklar gebliebenen Punkt des Systems oder über Vermutungen und Probleme, mit denen er sich beschäftigt hat. Wehe dem, der nichts zu fragen weifs!

Für die Terminarbeiten sprechen folgende Motive:

a) Der Schüler mufs Gelegenheit haben zu mufsevoller, konsequenter und vollständiger Entwickelung.

b) Die wichtige Selbstkritik des Schülers über sein Wissen und Können wird wohl nur auf diesem Wege ermöglicht.

c) Der Lehrer tritt bei gewissenhafter Korrektur in einen sehr nahen Verkehr zum einzelnen Schüler.

Solcher Arbeiten wurden seither im Semester vier angefertigt; die Sekunden lieferten von Konstruktionsaufgaben vollständige Ausführungen ein, nämlich Analysis, Determination, Konstruktion und Beweis, die Primaner dagegen führten abwechselnd nur Analysis und Determination oder Konstruktion und Beweis aus, weil die Entwickelungen hier schwieriger und umfangreicher sind. Dafs auf Sauberkeit, eine deutliche Handschrift, korrekte Zeichnungen, lesbares Deutsch und eine ebenso den Stoff erschöpfende wie auf der anderen Seite knappe Darstellung gehalten wurde, versteht sich von selbst.

Noch ist ein Wort über die Selbständigkeit dieser Elaborate zu sagen. Das steht nun einmal fest, dafs die Abschreiber niemals aussterben werden, aber auch die kleinere Schar der unabhängigen Denker nicht, für beide ist zu sorgen. Das Abschreiben selbst ist nicht immer böser Wille, geschieht öfter aus Lichtsinn, zuweilen durch eine gewisse Aufdringlichkeit der guten Köpfe, die sich gehoben fühlen, wenn schwächere Kameraden von ihnen abhängen; dazu ist es in den seltensten Fällen ein wörtliches. Die Selbständigkeit läfst sich nicht befehlen, der Lehrer mufs die erwachsenen Schüler darum bitten. Zur Kontrolle und Sicherung eines Durchschnittserfolgs empfiehlt sich ein mündliches Referat seitens einiger schwächerer Schüler sofort nach der Abgabe der häuslichen Arbeit über diesen oder jenen Teil der letzteren, oder noch besser ein Scriptum von zwanzig Minuten von ebenfalls lediglich referierender Natur. Bei der Rückgabe der korrigierten Hefte können schon wegen Mangels an Zeit nur allgemein interessierende Fehler, aus denen etwas für die Folgezeit zu lernen ist, besprochen werden.

13. Der Verlauf der einzelnen Lehrstunde ist im allgemeinen der folgende: Die erste Viertelstunde, unter Umständen eine halbe Stunde dient der Rekapitulation des Dagewesenen, nicht blofs des Erlöses der letzten Stunde, sondern es wird mehr oder minder das ganze bis dahin durchgenommene Semesterpensum durchstreift, um die leitenden Grund-

gedanken fortwährend lebendig zu erhalten und so zu verhindern, daſs der Schüler sich im Einzelnen verliert, das Woher und Wohin aus dem Auge läſst. Damit ist gleichzeitig zum Ausdruck gebracht, daſs der Unterricht auf einen genetischen Zusammenhang der Sätze Bedacht nimmt. Ein Blick auf den Abschnitt IX von Spieker möge das erläutern; der leitende, alles beherrschende Satz ist hier der Proportionalsatz. Werden die Schenkel des Winkels $\widehat{B}$ von den Parallelen AD und EC geschnitten, so ist

$$BD : DC = BA : AE,$$
$$BD : BC = AD : EC.$$

Werden mehr Strahlen des Büschels B herangezogen, so folgert der Schüler mit leichter Mühe den Inhalt des § 158, daſs zwei Parallele von einem Strahlenbüschel proportioniert geschnitten werden. Ist zufällig $AC = AE$, dann sieht man sogleich, daſs AD den Winkel $B\widehat{A}C$ halbiert, und der Satz liegt vor, daſs die Halbierende eines Dreieckswinkels die gegenüberliegende Seite nach dem Verhältnis der Schenkel teilt. Ist $BD = DC$ und $BA = AE$, so werden AC und DE zu Schwerlinien des Dreiecks BEC und man schlieſst ohne Anstrengung auf das Schnittverhältnis 2 : 1 derselben. Damit ist der Inhalt des Abschnitts erschöpft, alle seine Sätze treten in Reih und Glied. Wer denkt hierbei nicht an das schöne Beispiel Trendelenburgs über das rechtwinklige Dreieck, aus dessen Definition, daſs ein Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist und darum auf doppelte Art in diese zwei Posten zerlegt werden kann, in ungezwungener Weise sowohl der pythgoreische Lehrsatz, wie der Satz, daſs der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises die Mitte der Hypotenuse ist, abgeleitet wird! Der Lehrer der Mathematik hat sich immer gegenwärtig zu halten, daſs Eigenschaften durch Einschränkung des Allgemeinen folgen, und daſs der Inhalt eines Begriffs gehörig auszuschöpfen ist.

Zuweilen wird der Inhalt eines Satzes durch Induktion aus Spezialfällen oder ein kombinatorisches Verfahren gewonnen, manchmal durch bloſse Anschauung einer wohlentworfenen Figur, ehe an seinen Beweis geschritten wird. Nicht eindringlich genug sind Rousseaus Worte im Emile zu beherzigen: On néglige souvent la justesse des figures, on la suppose et l'on sattache à la démonstration; faites des figures exactes! In der That muſs in der Geometrie Sinnliches und Begriffliches zusammenwirken, die sinnliche Gewiſsheit fördert die begriffliche Einsicht, die genaue Figur hemmt den voreiligen Schluſs. In den oberen Klassen wird der Beweis oft synthetisch geführt, in den mittleren Klassen und den Sekunden wiegt die analytische Methode vor; die Analysis ist regressiv, führt aus den Erscheinnngen zn den Gründen, während die Synthesis progressiv aus den Gründen zu den Erscheinungen leitet; im analytischen Verfahren wird daher ein Beweis wie ein Problem behandelt, jede vermittelnde Linie wird erst nach Erkenntnis ihres Zweckes eingeführt; hierbei sich bunter Kreiden zu bedienen, wie es mehrfach geschieht, halten wir nicht für angezeigt, weil der Sinnlichkeit dadurch eine vornehmere Rolle angewiesen wird, wie ihr zukommt, auch die innere Vertiefung des Schülers thatsächlich Abbruch leidet. Ohnehin muſs die Tafelfigur allmählich zurücktreten, die auf Papier selbstentworfene des Schülers den Vorzug erhalten. Durch fortwährendes Fragen und Entwickeln wird endlich die Überzeugung von der Wahrheit der Behauptung erworben. In hohem Grade wünschenswert, aber nicht immer erreichbar ist es, daſs noch in derselben Stunde ein Schüler, nötigenfalls auch der Lehrer, den ganzen Beweis in geschlossener und ununterbrochener Rede synthetisch rekapituliert; bei der Repetition in der folgenden Stunde empfehlen sich kleine Modifikationen an der Figur, um die Überzeugung zu gewinnen, dafs der Gegenstand wirklich durchdacht ist. Es ist unnütz zu bemerken, dafs keine Methode produzierende Köpfe erzeugen kann, aber produktiv begabte Schüler anregen und alle Köpfe zum verständigen Nachsinnen nötigen, das vermag man allerdings. Und überdies darf der Lehrer des guten Glaubens leben, dafs wenn er seinen Gegenstand mit Wärme und innerer Teilnahme behandelt, auch der Schüler den gebotenen Stoff gern und freudig aufnimmt.

14. Wir schreiten endlich zu einer Reihe von Bemerkungen, welche sich grofsenteils auf Abweichungen von dem üblichen Verfahren der Lehrbücher beziehen. Zunächst mag an die geometrische Konstruktionsaufgabe erinnert werden, obschon nähere Ausführungen unterbleiben müssen, da sie einen beträchtlichen Raum beanspruchen würden. Ich verweise vielmehr auf meine Abhandlung im XVI. Bande der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Hier seien nur folgende Umstände erwähnt: Ich gehe in der Analysis nicht von einem Punkttripel aus, sondern von zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke den Namen Grund- oder Fundamentalstrecke führt, und deren Gröfse bekannt sein mufs; alle übrigen wichtigen Punkte der Figur werden durch Angabe zweier Ortslinien fixiert. Dadurch empfängt der Schüler mehr Beweglichkeit und Freiheit, und aufserdem entspricht dieses Vorgehen dem Wesen der zweidimensionalen Ebene, in welcher jeder Punkt auf zwei festliegende Elemente (zwei Punkte, einen Punkt und eine Gerade, zwei Gerade u. s. w.) bezogen werden mufs, damit man seine Lage feststellen könne. Analog wäre im Raume ein Punkttripel zugrunde zu legen. Man analysiere z. B. die schlichte Aufgabe: a, α, h (Dreieck ABC aus Grundlinie, Winkel an der Spitze, Höhe). Wird BC zur Grundstrecke gewählt, so sind die Örter für A das kongruente Kreisbogenpaar, welches BC zur gemeinschaftlichen Sehne hat und des Winkels α fähig ist und das Parallelenpaar zu BC im Abstande h. Die Einführung eines Punkttripels ist hier geradezu lästig.

Die Determination hat ihren logischen Platz hinter der Analysis, nicht hinter dem Beweise. Das liegt an ihrem Begriff, denn sie giebt die Bedingungen an, unter welchen die Ortslinien eines jeden durch solche bestimmten Punktes der Figur sich treffen, und für den Fall, dafs eine Strecke durch rechnerische Betrachtungen gefunden ist, sichert sie die reelle Existenz derselben. Der mehrfache Schnitt der Örter leitet von selbst auf eine Untersuchung über die Vieldeutigkeit der Aufgabe. Schwache Schüler haben sich wiederholt beklagt, dafs die Konstruktion ihnen mifsraten sei, obschon sie die Analysis verstanden hätten; natürlich! denn sie scheuten sich vor der Determination, welche das Nachdenken herausfordert, und hatten sich Stücke vorgegeben, die mit der Determination in Widerspruch standen. Spieker giebt eine durch zu grofse Allgemeinheit unbrauchbare Definition der Determination, sie untersuche, sagte er, die Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe. Wovon hängt diese Möglichkeit und Bestimmtheit ab? — Der Mangel rächte sich sogleich in der Musteraufgabe 6 des § 94 ($\triangle ABC$ aus Seitendifferenz $= d$ und $BD = w$, $DC = v$, AD halbiert den Winkel $\widehat{BAC}$; E liegt auf AC so, dafs $AE = AB$ ist), wo die Determination ganz falsch ist. Ist DC Grundstrecke, so fordert die reelle Existenz von E, dafs von den 3 Stücken d, v, w das gröfste höchstens der Summe der beider anderen gleich ist. Mit E existiert A immer. Die eine Ortslinie für A ist das Mittellot von BE, welches die Gerade EC bedingungslos schneidet; das übersieht der Verfasser und meint, v müsse gröfser als w

sein. Vermutlich ist er durch die Thatsache irre geleitet, dafs wenn v gröfser als w vorgegeben wird, auch AC gröfser als AB ausfällt und umgekehrt. Dieser Umstand hat aber mit dem eigentlichen Wesen der Determination nichts zu thun. Ist übrigens $v = w$, so entartet unser Dreieck in einen Parallelstreifen.

Ueber den unklaren Begriff „Hilfslinie", den man vermeiden sollte, kann nicht eingehender verhandelt werden.

15. Die Lehre vom Kreise enthält die hingehörigen Sätze oft in recht bunter Folge (auch Spieker); als natürliche Gruppen ergeben sich die vier Kapitel: Punkt und Kreis, Gerade und Kreis, Polygon und Kreis, Kreis und Kreis. Der Satz, dafs um und in jedes reguläre Polygon ein Kreis beschrieben werden kann, erfordert durchaus eine Modifikation, da der Schüler aufser Stande ist, die Voraussetzung zu erfüllen, nämlich ein reguläres n-eck zu zeichnen. Die Sache liegt sehr einfach; man geht vom regulären Streckenzug aus, d. h. einer gebrochenen Linie, deren Teile gleich sind und unter gleichen, in demselben Sinne aufeinanderfolgenden Winkeln aneinanderstofsen; schliefst sich derselbe, so geht er in das reguläre Polygon über. Wir haben also nur zu zeigen, dafs sich um und in jeden regulären Streckenzug ein Kreis beschreiben lasse. Der Kreis (Fig. 1), welcher durch die 3 Punkte A, B, C geht, habe den Mittelpunkt O; man ziehe DO, so ist $\triangle ABO \cong CDO$, denn $AB = CD$, $BO = CO$ und $O\widehat{B}A = O\widehat{C}D$, das letztere, weil diese Winkel die Basiswinkel des gleichschenkligen Zwischendreiecks BOC je zum konstanten Winkel des Streckenzuges ergänzen. Vermöge des ersten Kongruenzsatzes ist also $DO = AO$, d. h. D liegt auf der Peripherie des Kreises O, u. s. w. Indem gleiche Sehnen vom Mittelpunkt gleich fern sind, läfst sich also auch in den Streckenzug ein Kreis beschreiben, welcher mit dem erstgenannten konzentrisch ist. Dafs die zu den Seiten AB, BC, CD, . . . parallelen Tangenten des umbeschriebenen Kreises oder auch die Berührenden desselben in den Eckpunkten $A, B, C, \ldots$ je einen regulären Streckenzug in bestimmter Lagenbeziehung zu ABC . . . . konstituieren, erhellt fast unmittelbar. Die Frage nach dem Entwurf der regulären Polygone oder, was dasfelbe ist, nach dem Schlufs eines regulären Streckenzuges, mufs man nach der Durchnahme des goldenen Schnitts im Zusammenhang mit den hier üblichen Konstruktionen beantworten. Der Abschnit VII in Spieker ist demnach verfrüht, ja ganz überflüssig.

16. In der Flächenlehre sollte man sich mit dem Euklidischen und indischen Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes begnügen. Vor allem aber vermisse ich die elementaren isoperimetrischen Probleme, deren Abschlufs der schöne Satz bildet, dafs unter sämtlichen isoperimetrischen Figuren der Ebene der Kreis den gröfsten Inhalt hat. Es wird mit folgendem Satz begonnen: Unter allen flächengleichen Dreiecken über derselben Basis hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang. (Fig. 2.)

In der That, ist ABC gleichschenklig und gleich BCD, so mufs $AD \parallel BC$ sein; sucht man den Gegenpunkt B' von B in Beziehung auf die Gerade AD und zieht $B'A$ und $B'D$, so ist AD das Mittellot von BB', $B'D = BD$ und $B'A$ die Verlängerung von AC. Indem aber $B'D + CD > B'C$ ist, mufs auch $BD + DC > B'C$, d. h. $> AB + AC$ sein.

(Man bemerkt leicht, dafs wenn sich D von A mehr und mehr entfernt, die Schenkelsumme $BD + DC$ fortwährend wächst, ohne ein Maximum zu erreichen, während $BD - DC$ in kontinuierlichem Wachstum der Basis BC als Grenze zustrebt.)

Umgekehrt hat von allen isoperimetrischen Dreiecken über derselben Basis das gleichschenklige die gröfste Fläche. Denn das auf derselben Basis stehende und mit irgend einem der ungleichseitigen Dreiecke gleichflächige und gleichschenklige Dreieck hat nach dem vorigen eine kleinere Schenkelsumme, seine Spitze mufs daher im Innern des zuerst genannten gleichschenkligen Dreiecks liegen. Damit ist der Satz erwiesen.

Zieht man im Trapez $ABCD$ die Strecke $CE \parallel AD$, so entsteht das Dreieck EBC, dessen Schenkel gleich den Schenkeln des Trapezes sind; auf dasfelbe zurückgehend erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des Satzes: Unter allen isoperimetrischen Trapezen mit übereinstimmenden Grundlinien hat das gleichschenklige den gröfsten Inhalt und umgekehrt: Unter allen flächengleichen Trapezen mit bezüglich gleichen Grundlinien hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang. Dafs von allen Dreiecken mit gleicher Basis und gleichem Winkel an der Spitze das gleichschenklige den gröfsten Inhalt hat, weil es die gröfste Höhe besitzt, ist fast unmittelbar abzulesen.

Diese, wie man sieht, in so einfacher Art herzuleitenden Sätze liegen ausschliefslich der Umwandlung eines unregelmäfsigen Polygons in ein regelmäfsiges mit kleinerem Umfang, aber gröfserem oder mindestens ebenso grofsem Flächeninhalt zugrunde; durch unter sich parallele, von den Ecken auslaufende Gerade zerfällt das Polygon in $(n-1)$ Teile, welche Trapeze oder auch Dreiecke sind und die nach den mitgeteilten Vorschriften in gleichschenklige Trapeze resp. Dreiecke von gleichem Umfang zu verwandeln sind. Das Weitere des schlichten Hergangs kann man nachlesen bei Edler, Göttinger Nachrichten 1882 oder in meiner Bearbeitung des dritten Teils von Wiegands Planimetrie, Halle 1885. Dafs ein reguläres Polygon eine kleinere Fläche umspannt wie ein isoperimetrischer Kreis, ist sehr leicht und schnell zu zeigen und ebenfalls in den genannten Schriften erörtert. Dürfen diese belangreichen, praktisch verwertbaren und völlig elementaren Erscheinungen unseren Schülern vorenthalten werden?

17. Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf hinweisen, dafs man den anwendungsreichen Satz: „Das arithmetische Mittel zwischen n positiven Zahlen ist gröfser als das geometrische“, oder in brauchbarerer Form: Unter allen Zerlegungen einer Zahl in n Posten ist das Produkt der letzteren am gröfsten, wenn die Posten gleich sind, in den Elementarbüchern wohl gar nicht benutzt findet. Die Posten dürfen wir uns als Mafszahlen von Strecken denken, dann nimmt der Beweis folgenden schlichten Gang (Fig. 3): Man gehe zunächst von zwei Zahlen aus und bilde ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse die Mafse a und b haben. Ist M die Mitte der Hypotenuse BC, so ist $MA = \frac{a+b}{2}$ und $DA = \sqrt{ab}$, offenbar aber im Dreieck ADM $AM > AD$, d. h. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Für zwei andere Zahlen c und d ist ebenso $\frac{c+d}{2} > \sqrt{cd}$. Durch Multiplikation folgt

$$\left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}\right)^2 > abcd.$$

Da aber für die zwei Zahlen $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{c+d}{2}$ die Ungleichung $\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} < \left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right):2$, oder $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$ erwiesen ist, so ist um so mehr $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 > abcd$, also

$$\frac{a+b+c+d}{4} > \sqrt[4]{abcd}.$$

Liegen nur drei Zahlen a, b, c, vor, so füge man denselben noch ihr Mittel $(a+b+c):3$ als vierte Zahl hinzu, worauf man schliefsen darf

$$\left[\frac{a+b+c+(a+b+c):3}{4}\right]^4 > abc\cdot\frac{a+b+c}{3}.$$

Die linke Seite ist identisch mit $[(a+b+c):3]^4$; mithin ergiebt die Substitution und darauf folgende Kürzung durch $(a+b+c):3$:

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}.$$

Gleiche Schlufsweise fördert den allgemeinen Satz zu Tage.

Allbekannt ist die Inhaltsformel des **Heron** für ein Dreieck:

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wo a, b, c die Seiten, s der halbe Umfang ist. Weil nun $(s-a)+(s-b)+(s-c)$ dasfelbe ist wie s, wird bei konstantem s das Produkt $(s-a)(s-b)(s-c)$ am gröfsten sein, wenn die Faktoren gleich sind, d. h. $s-a=s-b=s-c$ oder $a=b=c$ ist, also:

Unter allen isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige den gröfsten Flächeninhalt.

Sind a, b, c, d die Seiten eines Sehnenvierecks, $2\,s$ sein Umfang, so ist bekanntlich

$$\text{Viereck} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

und da $(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d)$ gleichwertig ist mit $2\,s$, so folgt:

Unter allen isoperimetrischen Sehnenvierecken ist das Quadrat an Inhalt ein Maximum.

Indem aber mit Hilfe des Ptolemäischen Lehrsatzes leicht folgt, dafs unter allen Vierecken, welche aus vier gegebenen Strecken als Seiten hergestellt werden können, das Kreisviereck die gröfste Fläche besitzt, folgern wir den allgemeineren Satz:

Unter allen isoperimetrischen Vierecken hat das Quadrat den gröfsten Flächeninhalt.

Damit ist die Frage vorbereitet, ob überhaupt unter allen isoperimetrischen n-Ecken das reguläre n-eck das Maximum an Fläche habe; die Antwort lautet bejahend und ist ganz elementar zu begründen.

Die Maximumserwägungen bei **Steiner, Legendre, Baltzer** befriedigen darum nicht, weil in den einschlagenden Elementarfragen ein Maximum einfach als existierend vorausgesetzt und nur seine Form erschlossen wird. Ein Beispiel mag zur Erläuterung des Unterschiedes im Beweisverfahren dienen. In Baltzer II, 12, Seite 44 steht der interessante Satz: „Das Dreieck der Höhenfufspunkte hat unter den einem gegebenen spitzwinkligen

Dreieck einschreibbaren Dreiecken den kleinsten Perimeter, weil die Verschiebung eines seiner Eckpunkte mit einer Vermehrung des Perimeters verbunden ist." Diese Schlufsweise eignet der Differentialrechnung, ihre lakonische Kürze giebt allerlei Bedenken Raum: Wenn alle 3 Ecken zugleich verschoben werden, könnte da nicht ein auf Verminderung des Perimeters hinwirkender Ausgleich stattfinden? Wie vergleiche ich direkt das Höhenfufspunktendreieck mit einem anderen einbeschriebenen Dreieck? Ist es überhaupt richtig, dafs unter den Umfängen deshalb ein Minimum sein müsse, weil die Umfänge nicht beliebig klein werden können? Der letztgenannte Umstand berechtigt nur zum Schlufs auf eine Grenze, der Minimumsschlufs ist ein Paralogismus. So hat die Zahlenreihe $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, ... kein Minimum, wohl aber eine Grenze, nämlich 1. Allen solchen Skrupeln enthebt uns der folgende Beweis. Ist D ein ganz beliebiger Punkt auf der Seite BC des spitzwinkligen Dreiecks ABC, und sind E und F seine Projektionen, H und I seine Gegenpunkte hinsichtlich der Seiten AC und AB, so hat von allen einbeschriebenen Dreiecken mit der Spitze D dasjenige den kleinsten Umfang, dessen Eckpunkte K und L auf AC und AB durch die Gerade HI herausgeschnitten werden. Denn der Umfang des einbeschriebenen Dreiecks DMN, nämlich die gebrochene Linie $HMNI$ ist offenbar gröfser als der Umfang $HKLI$ des Dreiecks DKL, welcher geradlinig ist. Man beachte, dafs EF der halbe Umfang des Dreiecks DKL ist. — Nunmehr sei in einer neu entworfenen Figur D die Projektion von A auf BC, E und F seien die Projektionen von D, E' und F' diejenigen eines beliebigen Punktes D' von BC auf AC und AB, so ist offenbar EF der halbe Umfang des Höhenfufspunktendreiecks, $E'F'$ derjenige eines Dreiecks von kleinstem Umfang der oben beschriebenen Art; wir haben dann nur zu zeigen, dafs $E'F' > EF$ ist. Diese beiden Strecken sind Diagonalen der Sehnenvierecke $AEDF$ und $AE'D'F'$, welche den Winkel $\widehat{A}$ gemeinschaftlich haben; die Kreisdurchmesser sind AD und AD', und zwar ist $AD' > AD$. In zwei ungleichen Kreisen gehören aber offenbar zu gleichen Peripheriewinkeln (oder, was dasselbe ist, Zentriwinkeln) in demselben Sinne ungleiche Sehnen; also ist thatsächlich $E'F' > EF$.

18. Eine rechte Last für den Unterricht ist die Proportionslehre; man hat grofse Mühe, den Schülern gegenwärtig zu halten, dafs es sich lediglich um eine neue Ausdrucksweise bekannter Quotientensätze handle. Die äufserste Einschränkung erscheint daher geboten. Man sollte mit dem Satz: $ad = bc$, wenn $a:b = c:d$ ist, und seiner Umkehrung auszukommen suchen. Wichtig ist eigentlich nur der Begriff direkter und indirekter Proportionalität und der des Proportionalitätsfaktors. Der Schüler müfste gewöhnt werden, sofort $a = \lambda b$ oder $ab = \lambda$ niederzuschreiben, wenn a und b direkt resp. umgekehrt proportional sind.

Noch schlimmer steht es mit der Theorie der Irrationalzahlen, welche in der Geometrie eine so bedeutsame Rolle spielen. Man setzt deren Vergleichbarkeit mit den rationalen Zahlen einfach voraus. Was würde man dazu sagen, wenn nach der Definition des Bruchs sofort zum Vergleich der ganzen Zahlen mit den Brüchen geschritten würde, ohne zu zeigen, wie die ganzen Zahlen auf Bruchform zu bringen sind? Dafs eine unendliche Folge von rationalen Zahlen zur Erklärung und Umschreibung der irrationalen Zahlen herangezogen werden mufs, liegt in der Natur der Sache und läfst sich nicht umgehen. Ist eine Totalität aber darum unklar, weil man nicht auf jeden Teil einen Blick werfen kann? Gehört denn überhaupt die Endlickeit des Umfangs zum Wesen eines

Begriffs? Sollte es für unsere Sekundaner oder gar Primaner wirklich zu schwierig sein, eine unendliche Folge von rationalen Zahlen in zwei Abteilungen zu zerlegen, die eine aus einer endlichen, die andere aus einer unendlichen Menge von Gliedern der Art, daſs in der zweiten Menge der Unterschied zwischen irgend zwei Gliedern kleiner ist als eine nach Belieben vorgegebene kleine Zahl? Darauf kommt alles hinaus; was folgt, ist spielend zu erledigen. Wichtig ist der Begriff „Äquivalenz" der Grundreihen. Ich führe noch den Beweis, daſs man jede Grundreihe durch eine andere ersetzen kann, deren Glieder nur steigen, resp. nur abnehmen; Grundreihen der letzteren Art nenne ich normale. In der Grundreihe a_1, a_2, a_3, ... giebt es entweder ein gröſstes Glied oder nicht. Giebt es ein gröſstes Glied, so müssen wir annehmen, daſs wenn dieses und alle ihm vorangehenden Glieder gestrichen werden, eine mit der gegebenen Reihe äquivalente restiert, welche ebenfalls ein gröſstes Glied enthält, denn anderenfalls würden wir von vornherein diese gleichgeltende Reihe ohne gröſstes Glied anstatt der gegebenen setzen können, und es läge wie im zweiten Falle eine Grundreihe ohne gröſstes Glied vor. Diesen zweiten Fall betreffend wähle man nach Gutdünken a_k heraus, darauf folge, wenn auch nicht unmittelbar, das gröſsere Glied a_l, auf dieses analog $a_m > a_l$, u. s. w. Hierdurch entsteht die mit der gegebenen äquivalente Grundreihe a_k, a_l, a_m, ..., deren Glieder fortwährend wachsen. Ist aber a_k das gröſste Glied, so ist nach der eingangs gemachten Auseinandersetzung a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, ... eine mit der gegebenen Reihe gleichgeltende, welche wiederum ein gröſstes Glied a_l besitzt, und in gleicher Art enthält a_{l+1}, a_{l+2}, a_{l+3}, ... ein gröſstes Glied a_m u. s. w. Die Grundreihe a_k, a_l, a_m, ... mit beständig abnehmenden Gliedern ist aber mit der gegebenen äquivalent. — Durch diesen Satz sind wir zu der Aussage berechtigt, daſs eine Irrationalzahl eine Zahl sei, welche auf eine gewisse normale Grundreihe der Gröſse nach zunächst folgt. Diese Definition enthält natürlich ein Postulat, sie fordert Anerkennung solcher zunächst folgenden Zahlen, welche im rationalen Falle skrupellos ist; auf $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, ... folgt z. B. in der That zunächst 1. Alles übrige kann in meiner Arithmetik, Halle 1885, eingesehen werden. Es mögen noch zwei geometrische Anwendungen folgen.

19. Die Maſszahlen zweier anstoſsender Seiten eines Rechtecks seien Reihenzahlen, darunter sei mindestens eine irrational. Sei also (Fig. 4)

$$AB = [k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots],$$
$$AD = [l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots],$$

die Grundreihen selbst seien normale, die Glieder dauernd im Wachsen begriffen, es sei also $AB' = k_1$, $AB'' = k_2$, ..., ebenso $AD' = l_1$, $AD'' = l_2$, ... Die Inhalte der Rechtecke AC', AC'', AC''', ... sind der Reihe nach $k_1 . l_1$, $k_2 . l_2$, $k_3 . l_3$, ...; diese Produkte bilden bekanntlich wieder eine normale Grundreihe, deren zugehörige Reihenzahl der Inhalt des Rechtecks $ABCD$ heiſsen soll; das letztere erscheint also als das auf die Rechtecke AC', AC'', AC''', ... der Gröſse nach zunächst folgende. Es ist demgemäſs

$$\begin{aligned} ABCD &= [k_1\, l_1,\ k_2\, l_2,\ k_3\, l_3, \ldots] \\ &= [k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots] . [l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots] \\ &= AB . AD. \end{aligned}$$

20. Die Theorie der Grundreihen giebt die Einsicht, daſs es bei der Rektifikation des Kreises ganz einerlei ist, ob man demselben reguläre oder irreguläre Polygone einbeschreibt. Denn geht man von einem beliebigen konvexen Sehnenpolygon aus, so leite

man daraus ein neues ab, indem man die Endpunkte jeder Seite mit einem beliebigen Zwischenpunkte des zugehörenden Kreisbogens verbindet; aus dem zweiten Polygon erzeuge man auf analoge Weise ein drittes, u. s. w. Der Prozeſs der Neubildung bricht niemals ab und führt, wenn wir die Maſszahlen der aufeinanderfolgenden Umfänge durch $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bezeichnen, auf die normale Grundreihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Denn die Glieder derselben wachsen fortwährend, weil bei der Genesis offenbar der Satz in Kraft tritt, daſs in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten gröſser ist als die dritte, und ferner bleibt jedes Glied endlich, z. B. kleiner als der Umfang des dem Kreise umbeschriebenen Quadrats (Spieker, § 55, Zus.). Unsere Reihe definiert also eine völlig bestimmte Zahl; wird dafür gesorgt, daſs mit wachsender Seitenzahl der Polygone jeder Seite der Nullstrecke näher und näher kommt, so ist diese Reihenzahl unabhängig von der besonderen Beschaffenheit der Polygone. Ist nämlich $u_1', u_2', u_3', \ldots$ eine andere Umfangsfolge von Polygonen, so ist $u_1 - u_1', u_2 - u_2', u_3 - u_3', \ldots$ eine Nullreihe. Denn vereinigen wir die sämtlichen Eckpunkte der Polygone mit den Umfängen u_n und u_n' (Fig. 5) zu einem neuen dem Kreise einbeschriebenen Polygon mit dem Umfange U, so können wir dieses letztere als das gemeinschaftliche Glied zweier sich kreuzender Polygonreihen ansehen, die beide dem Kreise einbeschrieben sind, und deren eine u_n, deren andere u_n' enthält. Ist nun n hinreichend groſs, so weichen u_n und u_n' beliebig wenig von U, also auch voneinander ab. In der That wird aus u_n in der beschriebenen Weise ein neues Polygon abgeleitet und ist $CD \perp AB$, so ist offenbar (Fig. 6)

$$AB < AC + CB < (AD + CD) + (BD + CD),$$

somit auch

$$\Sigma AB < \Sigma (AC + CB) < \Sigma AB + 2 \Sigma CD.$$

Wählen wir anstatt CD die Bogenhöhe m, so ist um so mehr

$$\Sigma AB < \Sigma (AC + CB) < \Sigma AB + 2 \Sigma m.$$

Bekanntlich ist für den Radius r die Gleichung richtig: $m \,.\, 2r = s^2$; wählt man auſserdem für s die gröſste derartige Sehne σ, so ist sicher

$$\Sigma AB < \Sigma (AC + CB) < \Sigma AB + \frac{\sigma}{2r} \Sigma 2s.$$

$\Sigma 2s$ ist der Umfang eines eingeschriebenen Polygons, also jedenfalls endlich; nehmen die Polygonseiten mit wachsendem n alle unbeschränkt ab, so thut σ dasselbe, also ist die Grenze von $\frac{\sigma}{2r} \Sigma 2s$ Null, d. h. $u_n - U$ wie $u_n' - U$, folglich auch $u_n - u_n'$ ist beliebig klein. Es ist also

$$[u_1, u_2, u_3, \ldots] = [u_1', u_2', u_3, \ldots]$$

Erklärung. Die Reihenzahl $[u_1, u_2, u_3, \ldots]$ soll die Maſszahl der Peripherie heiſsen.

Folgerung. Die Peripherie ist gröſser als der Umfang jedes beliebigen einbeschriebenen konvexen Polygons.

Ganz analog verfährt man mit den umbeschriebenen Polygonen. Man hat hierbei zu beachten, daſs infolge der Durchkreuzung der Umfänge U_n und U_n' ein drittes Tangentenpolygon erzeugt wird, welches als das gemeinschaftliche Glied zweier Reihen von Tangentenpolygonen angesehen werden darf, von welchen U_n und U_n' je ein Individuum ist. Von diesem dritten Polygon weichen U_n und U_n' bei hinreichend groſsem n um ein beliebig Geringes ab. U. s. w.

Dafs $[U_1, U_2, U_3, \ldots] = [u_1, u_2, u_3, \ldots]$ ist, wird am besten nach Art der Lehrbücher bewiesen, indem man für die U und u lauter reguläre Polygone wählt.

21. Eine reich sprudelnde Quelle von Aufgaben birgt der Feuerbachsche Satz. Dafs der Feuerbachsche Kreis die vier Berührungskreise des Dreiecks berührt, ist oft erwiesen worden (Feuerbach, Baltzer, Lappe, Schröter, Taylor, Schubert, Binder). Der eleganteste und auch der kürzeste Beweis rührt von Taylor her; derselbe stützt sich aber auf die Inversionstheorie; der schönste Beweis ist der von Schröter (Math. Annalen, Bd. VII), weil er die vollständige Figur der vier Berührungskreise betrachtet und konform der scharfsinnigen Eigenart dieses Forschers reiche Beziehungen aufdeckt; die Elementarbücher verhalten sich grofsenteils gegen alle diese Beweise und daher den ganzen Satz ablehnend. Ich werde zunächst einen algebraisch-geometrischen Beweis geben, der sich des Grundgedankens von Feuerbach bemächtigt, und von dem ich glaube, dafs er den Intentionen eines Schulbuchs nach Möglichkeit entspricht; darauf soll der Beweis von Schröter folgen mit einer Abweichung an entscheidender Stelle (B, III), so dafs auch diese schönen Ausführungen vollkommen schulgemäfs ausfallen.

A) Im Dreieck ABC (Fig. 7) ist O der Mittelpunkt des umbeschriebenen, M derjenige des einbeschriebenen Kreises, M' ist das Zentrum des BC anbeschriebenen Berührungskreises; E und E' sind die Mitten der unter- und oberhalb BC gelegenen Bogen des Kreises O, so dafs E, O, E' in einer Geraden liegen, welche BC in D senkrecht schneidet. Ebenso liegen A, M, M', E in einer Geraden, welche BC in F schneidet und den Winkel $B\widehat{A}C$ halbiert. Endlich ist H der Höhenpunkt, $AH \perp BC$ in G, und MK und EN sollen parallel zu BC oder senkrecht auf AH sein. — Zieht man OH, so ist die Mitte Q das Zentrum des Feuerbachschen Kreises, dessen Peripherie die Punkte G und D enthält und durch die Mitte von AH geht; darum ist $\frac{AH}{2} \cdot GH$ die Potenz des Feuerbachschen Kreises im Höhenpunkt.

Nun zur Sache selbst! Im Dreieck OMH ist nach einem allbekannten Flächensatze

1. $$\overline{OM}^2 + \overline{MH}^2 = 2\,\overline{MQ}^2 + 2\,\overline{QH}^2.$$

Nach Euler ist

2. $$\overline{OM}^2 = r^2 - 2r\varrho;$$

ferner ist $\overline{QH}^2 - \frac{r^2}{4}$ offenbar die Potenz des Feuerbachschen Kreises im Punkte H, und da dieselbe auch gleich $\frac{AH \, . \, GH}{2}$ ist, so mufs

3. $$\overline{QH}^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{AH \, . \, GH}{2}$$

sein. Es erübrigt MH durch die in 2. und 3. auftretenden Gröfsen AH, GH und ϱ auszudrücken, was deshalb möglich ist, weil diese drei Stücke, wie man sehr leicht erkennt, das Dreieck ABC vollkommen bestimmen. Im Dreieck AMH ist nach dem Projektionssatze

4. $$\overline{MH}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,AH \, . \, AK.$$

Nun ist $\triangle AMK \backsim \triangle AEE'$, also verhält sich

$$AE : EE' = AK : AM,$$

oder

$$(AM + ME) : 2r = AK : AM;$$

hieraus folgt

$$\overline{AM}^2 + AM \,.\, ME = 2r \,.\, AK,$$

oder da nach Euler die Potenz $AM \,.\, ME$ des Kreises M im Punkte O gleich $2r\varrho$ ist (Spieker, § 295),

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= 2r(AK - \varrho)\\ &= 2(OD + DE)(AK - KG)\\ &= AH(AK - KG) + 2\,DE(AK - HG),\end{aligned}$$

denn es ist bekanntermaſsen (Spieker, § 219) $2\,OD = AH$. Das zweite Glied der rechten Seite hat den Wert $2\,\overline{GK}^2$. Da nämlich A, M, F, M' vier harmonische Punkte sind und E die Strecke MM' halbiert, so ist $\overline{EM}^2 = EF \,.\, EA$, eine Relation, welche sich ohne weiteres in eine solche zwischen den drei aufeinanderfolgenden Stücken EF, FM, MA umsetzen läſst und dann lautet: $\overline{FM}^2 = EF\,(MA - FM)$. Weil aber GN, GK, AK jenen drei Stücken wegen des Parallelismus von MK, FG, EN proportional sind, ist auch

$$\begin{aligned}\overline{KG}^2 &= GN(AK - KG),\\ &= DE(AK - KG),\end{aligned}$$

also ist

$$\overline{AM}^2 = AH\,(AK - KG) + 2\,\overline{KG}^2.$$

Die Gleichung 4. geht hierdurch über in

$$\begin{aligned}5. \qquad \overline{MH}^2 &= AH(AK - KG) + 2\,\overline{KG}^2 + \overline{AH}^2 - 2\,AH \,.\, AK\\ &= AH(AK - KG + AH - 2\,AK) + 2\,\overline{KG}^2\\ &= AH \,.\, GH + 2\varrho^2.\end{aligned}$$

Kombiniert man nunmehr die Gleichungen 1., 2., 3., 4., 5., so folgt

$$(r^2 - 2r\varrho) + (AH \,.\, GH + 2\varrho^2) = 2\,\overline{MQ}^2 + \frac{r^2}{2} + AH \,.\, GH.$$

Durch Heben und Radizieren folgt endlich unmittelbar

$$MQ = \frac{r}{2} - \varrho,$$

d. h. der Feuerbachsche Kreis berührt den einbeschriebenen umschlieſsend.

Analog liegt alles beim Kreise M'. Der Beweis ist sogar buchstäblich zu wiederholen, wenn

— GK' anstatt GK,
— EM' anstatt EM,
— FM' anstatt FM

gesetzt wird. (Vergleiche Baltzer II, wo auf drei Seiten: 309—312 durch trigonometrische Rechnung dasſelbe Resultat gewonnen wird.)

B) Schröters modifizierter Beweis. Die einzelnen Staffeln des Beweises sollen durch Nummern von einander geschieden werden, um gröſsere Übersicht zu gewinnen.

I. Betrachtet man ein Dreieck und seine vier Berührungskreise, so erscheint diese Konfiguration insofern unvollständig, als je zwei Kreise immer nur drei gemeinschaftliche Tangenten aufweisen, während sie vier besitzen. Es fehlen daher im ganzen sechs Tangenten; jeder Dreiecksseite sind offenbar noch zwei Tangenten, welche zu ihr komplementär heiſsen sollen, zuzuordnen, eine innere und eine äuſsere. Auch die Berührungspunkte dieser letztgenannten Tangenten wollen wir komplementäre hinsichtlich jener Seite nennen. Zu jeder Seite gehören hiernach vier eigentliche und vier komplementäre Berührungspunkte, auf einem einzelnen Kreise hat sie dagegen nur einen eigentlichen und einen komplementären Berührungspunkt. (Z. B. hat BC auf dem Kreise O (Fig. 8) den eigentlichen Berührungspunkt E und den komplementären F.) Aus Symmetriegründen folgt unmittelbar, daſs jede zu einer Seite komplementäre Tangente mit den beiden anderen Seiten des Dreiecks ein diesem kongruentes Dreiek bildet. (So ist in Fig. 8 $ABC \cong BLN$.)

II. Die zu den drei Seiten auf einem und demselben Kreise gelegenen komplementären Berührungspunkte bestimmen ein Dreieck, dessen Seiten denen des gegebenen parallel sind.

Denn sind in Fig. 8 die Berührungspunkte F, F', F'' komplementär zu BC, AC und AB, und schneiden sich die Tangenten in F und F' im Punkte H, während sie AB in K und L treffen, so sind die Winkel bei K und L im Dreieck HKL gleich, weil sie nach I. so groſs sind wie $A\widehat{C}B$. Es ist darum $HK = HL$. Bedenkt man, daſs auch $HF = HF'$ ist, so folgt unmittelbar der Parallelismus von FF' und AB. Ebenso ist $FF'' \parallel AC$ und $F'F'' \parallel BC$. U. s. w.

III. Die Abstände der Mitte einer Seite von ihren beiden auf einem und dem nämlichen Berührungskreise gelegenen Berührungspunkten (dem eigentl. und komplem.) stehen in demselben Verhältnis zu einander wie der Radius des umbeschriebenen Kreises und die Zentrale des letzteren und jenes Berührungskreises.

In der Fig. 9 ist M der Mittelpunkt des umbeschriebenen, O derjenige des einbeschriebenen Kreises vom Dreieck ABC; MG steht senkrecht auf BC, halbiert also den Bogen BC in G, und deshalb halbiert AG den Winkel $B\widehat{A}C$ und geht durch O. Um zu dem eigentlichen Berührungspunkte E von BC den komplementären auf dem Kreise O zu finden, hat man offenbar nur durch E die auf AG senkrechte Sehne EF zu zeichnen, denn AG geht durch die Zentra des einbeschriebenen und BC anbeschriebenen Kreises; F selbst ist der gesuchte Punkt. Man ziehe auch noch $ON \parallel DE$. Die Behauptung lautet

$$DE : DF = MA : MO.$$

Um dies einzusehen, haben wir nur die Ähnlichkeit der Dreiecke AMO und DEF nachzuweisen. In denselben ist $M\widehat{A}O$ bekanntlich gleich $(A\widehat{C}B - A\widehat{B}C) : 2$; das nämliche gilt von $D\widehat{E}F$, weil die Schenkel DE und FE auf der Höhe aus A, resp. der Winkelhalbierenden AG senkrecht stehen; beide Winkel sind also gleich. Ferner ist $MA : AO = DE : EF$. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EIO und GNO folgt

$$\begin{aligned} GO : EO &= ON : EI \\ &= DE : \tfrac{1}{2} EF. \end{aligned}$$

Da aber der Kreis M im Punkte O einerseits die Potenz $AO \cdot GO$, anderseits nach Euler $2\,MA \cdot EO$ hat, so gilt auch die Proportion

$$GO : EO = 2\,MA : AO.$$

Aus beiden Proportionen ergiebt sich die neue

$$2\,MA : AO = DE : \tfrac{1}{2} EF,$$

oder
$$MA:AO=DE:EF.$$
Vermöge des ersten Ähnlichkeitskriteriums ist daher
$$DE:DF=MA:MO,$$
was behauptet wurde. (Ist E' der Berührungspunkt des BC anbeschriebenen Kreises O', so ist $DE':DH'=MA:MO'$, wenn H' der komplementäre Berührungspunkt von BC auf dem Kreise O' ist. Berührt BC den AC anbeschriebenen Kreis O'' in E'' und ist H'' komplementär zu E'', so ist $DE'':DH''=MA:MO''$, oder $\frac{b+c}{2}:DH''=r:MO''$ u. s. w.)

IV. Der Feuerbachsche Kreis berührt die vier Berührungskreise eines Dreiecks.

In Fig. 9 seien D' und D'' die Mitten von AC und AB und F' und F'' die beiden andern auf O liegenden komplementären Berührungspunkte dieser beiden Seiten, dann ist nach III., wenn der bekannten Thatsache gedacht wird, daſs $DE=\frac{AB-AC}{2}=\frac{c-b}{2}$ u. s. w. ist,
$$DF=(c-b)\,\frac{MO}{2\,MA},$$
ebenso
$$D'F'=(c-a)\,\frac{MO'}{2\,MA},$$
$$D''F''=(a-b)\,\frac{MO}{2\,MA},$$
also
$$DF:D'F':D''F''=(c-b):(c-a):(a-b).$$
Nun ist aber das Mittendreieck $DD'D''$ ähnlich und ähnlich liegend zu $FF'F''$, weil beide Dreiecke paarweis parallele Seiten haben (II.); der Ähnlichkeitspunkt sei S. Infolge dessen ist einerseits
$$FS:F'S:F''S=DF:D'F':D''F'' \text{ (Proportionalsatz)}$$
$$=(c-b):(c-a):(a-b),$$
anderseits
$$F'F'':FF'':FF'=a:b:c.$$
Die Multiplikation beider Proportionen liefert
$$FS.F'F'':F'S.FF'':F''S.FF'=(c-b)a:(c-a)b:(a-b)c.$$
Indem aber $(c-b)a$ identisch ist mit $(c-a)b+(a-b)c$, ist notwendig
$$FS.F'F''=F'S.FF''+F''S.FF',$$
d. h. es ist nach der Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes $FF'SF''$ ein Sehnenviereck, S liegt also auf der Peripherie des Kreises O und darum auch als Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke $DD'D''$ und $FF'F''$ wie der umbeschriebenen Kreise beider auf der Peripherie des Feuerbachschen Kreises; beide Kreise müssen sich daher in S berühren.

oder

Vermöge des ersten Ähnlich

was behauptet wurde. (Ist … eschriebenen Kreises O', so ist $DE' : DH' = MA : MO'$, w … gspunkt von BC auf dem Kreise O' ist. Berührt BC … und ist H'' komplementär zu E'', so ist $DE'' : DH'' =$ … u. s. w.)

IV. Der Feuerba … Berührungskreise eines Dreiecks.

In Fig. 9 seien D' … und F' und F'' die beiden andern auf O liegenden kom … eiden Seiten, dann ist nach III., wenn der bekannten T … $-AC}{2} = \frac{c-b}{2}$ u. s. w. ist,

ebenso

also

DI …).

Nun ist aber das Mittendr … gend zu $FF'F''$, weil beide Dreiecke paarweis parallele … unkt sei S. Infolge dessen ist einerseits

$FS : F$ … alsatz)

anderseits

$F'F'' : F$

Die Multiplikation beider P

$FS . F'F'' :$ … $: (a-b)c$.

Indem aber $(c-b)a$ identis … vendig

d. h. es ist nach der Umkel … $FF'SF''$ ein Sehnenviereck, S liegt also auf der Perip … als Ähnlichkeitspunkt der Dreiecke $DD'D''$ und $FF'F''$ … der auf der Peripherie des Feuerbachschen Kreises; be … rühren.

Ganz analog steht es mit den anbeschriebenen Kreisen. Man mufs es bedauern, dafs der schöne und lichtvolle Beweis des Ptolemäischen Lehrsatzes von Grüson im X. Bande des Crelleschen Journals nicht in die Lehrbücher übergegangen ist; aus demselben erhellt unmittelbar die Umkehrbarkeit dieses denkwürdigen Satzes, welcher im Algamest die Rolle unseres heutigen Additionstheorems für die trigonometrischen Funktionen zu vertreten hat. Grüsons Beweis ist natürlich, derjenige von Ptolemäus beruht trotz aller Kürze auf einem Kunstgriff und läfst eine Frage offen.

Zum Schlufs möge noch die Bemerkung Platz finden, dafs die Lehre vom Ähnlichkeitspunkt und von der Inversion in unseren Schulbüchern der vorbildlichen Darstellung Steiners in den „geometrischen Konstruktionen“ und derjenigen Petersens in den „Methoden und Theorien“ durchaus nicht entspricht.

Druck von Ehrhardt Karras, Halle a. S.

Figurentafel.

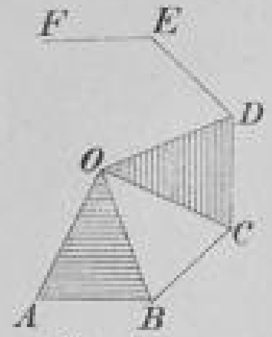

Fig. 1.

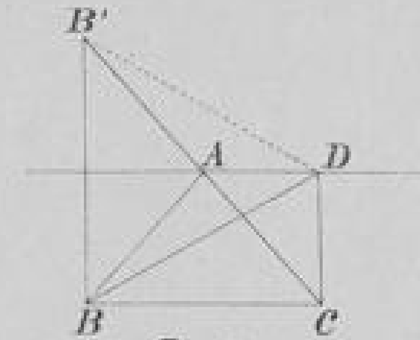

Fig. 2.

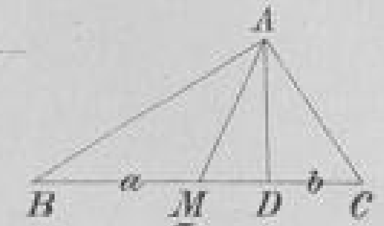

Fig. 3.

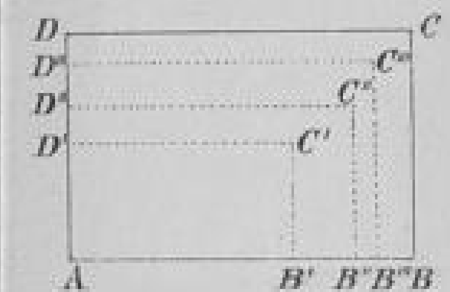

Fig. 4.

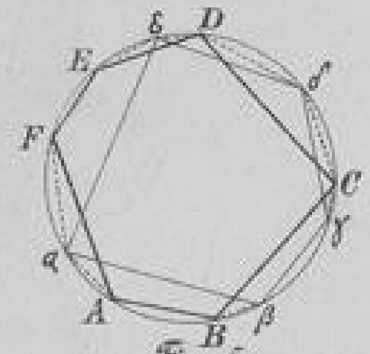

Fig. 5.

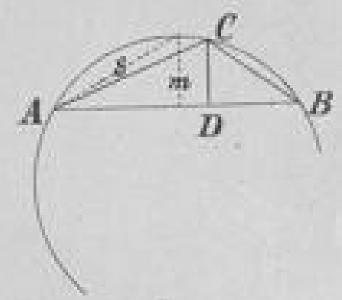

Fig. 6.

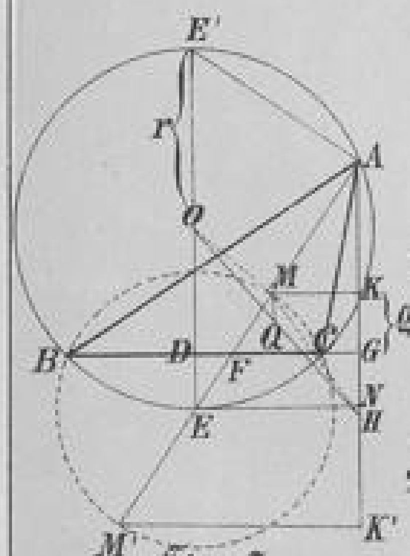

Fig. 7.

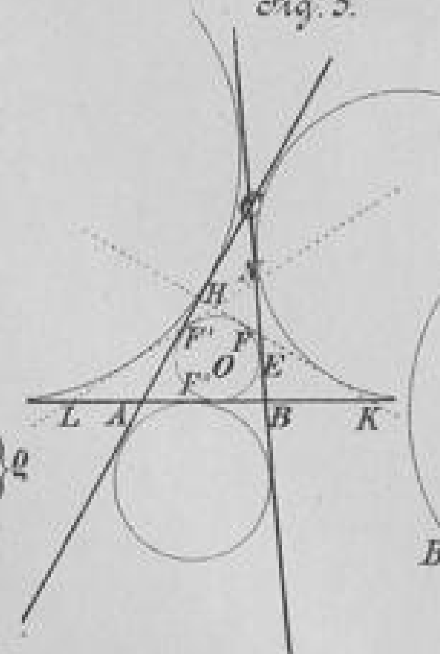

Fig. 8.

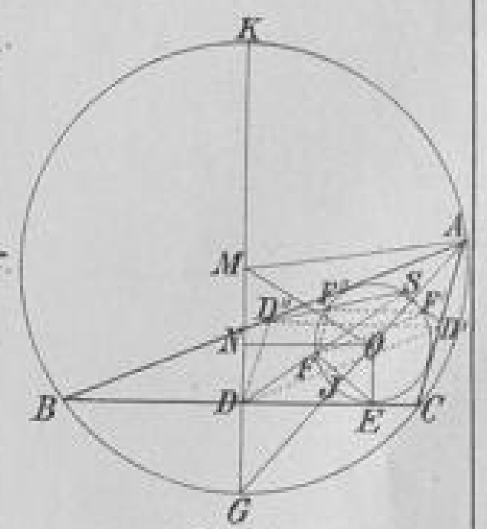

Fig. 9.