I. Algebra.

a) Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

1) Wenn in einen Behälter in der Stunde 23 hl Wasser fließen, so fehlen nach einer gewissen Zeit noch 30 hl zur Füllung; wenn aber 27 hl in jeder Stunde zufließen, so sind nach derselben Zeit schon 10 hl übergeflossen. Wieviel hl faßt der Behälter? k. 92, 1

Inhalt des Behälters: x hl.

Gleichung: $$\frac{x-30}{23} = \frac{x+10}{27}$$

$x = 260$ hl.

2) Seit die Preise für Lebensunterhalt durchschnittlich um 25 % gestiegen sind, während der Zinsfuß von $4\frac{1}{2}$ % auf $3\frac{1}{2}$ % gesunken ist, kann ein Kapitalist nicht mehr 340 ℳ, wie früher, jährlich ersparen, sondern braucht alle Zinsen auf. Wie groß ist sein Vermögen? e. 92, 1

Betrag des Vermögens: x ℳ.

Gleichung: $$\frac{7x}{200} = \frac{5}{4}\left(\frac{9x}{200} - 340\right)$$

$x = 20\,000$ ℳ.

b) Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

3) Zwei Körper bewegen sich auf einer kreisförmigen Bahn von 480 m Länge. Gehen sie gegeneinander, so treffen sie sich nach je 30 Sekunden; gehen sie hintereinander her, so kommen sie nach je 1 Minute 20 Sek. zusammen. Wie groß ist eines jeden Geschwindigkeit? k. 94, 2

Geschwindigkeiten der zwei Körper: x und y m.

Gleichungen: 1. $30(x+y) = 480$

2. $80(x-y) = 480$

$x = 11$ m; $y = 5$ m.

k. 95, 2 4) Drei Kameraden spielen um Geld. Beim ersten Spiel verliert der 1. an jeden der beiden andern so viel als jeder hatte; beim zweiten Spiel der 2. an jeden andern so viel als nun jeder besaß, und beim dritten Spiel ebenso der 3. Schließlich hatte jeder 48 ℳ. Wieviel hatte jeder anfangs?

Ursprünglicher Besitz des A: x ℳ, des B: y ℳ, des C: z ℳ.

Gleichungen: 1. $4(x-y-z)=48$

2. $2(3y-x-z)=48$

3. $(7z-x-y)=48$

$x = 78$ ℳ ; $y = 42$ ℳ ; $z = 24$ ℳ

c) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

e. 98, 1 5) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{ax^2 - 2ax + a}{bx^2 + 2bx + b} = 1$$

Was kann zum voraus über das Resultat dieser Aufgabe gesagt werden?

Die auf die Nullform gebrachte Gleichung lautet:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{a+b}{a-b} x + 1 = 0$$

also müssen die Wurzeln a) beide positiv, b) reziprok sein.

Durch Anwendung des Lehrsatzes von der korrespondierenden Addition und Subtraktion erhält man:

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{b}{a} \qquad \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$x = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{a \pm 2\sqrt{ab} + b}{a-b}$$

e. 91, 1 6) Berechne x aus folgender Gleichung:

$$\sqrt[4]{\frac{100+x}{x-5}} - \sqrt[4]{\frac{x-5}{100+x}} = 1{,}5$$

Die Wurzel $\sqrt[4]{\frac{100+x}{x-5}} = u$ gesetzt, gibt die Gleichung: $u - \frac{1}{n} = \frac{3}{2}$

$u = 2$ und $-\frac{1}{2}$; $x = 12$ und -107

e, 97, 1 7) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = \sqrt{2x}$$

Quadriert gibt: $2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \frac{1}{x}$

woraus durch Zerlegung: 1. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0$; 2. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 2$

$x = \pm 1$ und $2 \pm \sqrt{5}$

8) Bestimme x aus nachstehender Gleichung: k. 93, 1

$$\sqrt{x+10} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+43}$$

Quadriert und zusammengezogen, gibt:

$$3x^2 - 32x = 1196$$

$$x = 26 \quad \text{und} \quad -15\frac{1}{3}$$

9) x zu berechnen aus folgender Gleichung: e. 93, 1

$$\sqrt{x(1+x)} - \sqrt{x(1-x)} - \frac{2x^2}{\sqrt{1+2x}} = 0$$

Durch $\sqrt{x}$ durchdividiert, gibt:

$$\sqrt{x} = 0, \quad \text{also} \quad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}};$$

quadriert und zusammengezogen, liefert die Gleichung:

$$1 - 4x^2 + 4x^4 = 0$$

$$(2x^2 - 1)^2 = 0$$

$$x_{\prime\prime} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x = 0 \quad \text{und} \quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

10) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen: e. 01, 1

$$\sqrt{9 + 8\sqrt{x+1}} + \sqrt{1 + 7\sqrt{x+1}} = \sqrt{19 + 30\sqrt{x+1}}$$

Nach zweimaligem Quadrieren erhält man die Gleichung:

$$(x+1) - 14\sqrt{x+1} = -45$$

$$\text{woraus} \quad \sqrt{x+1} = 9 \quad \text{und} \quad 5$$

$$x = 80 \quad \text{und} \quad 24$$

11) Früh morgens fährt ein beschleunigter Personenzug von A ab nach B, zu gleicher Zeit fährt ein gewöhnlicher Personenzug von B ab nach A. Um $10^h\,45'$ vormittags kreuzen sich die Züge in der Station C. Der erste Zug kommt um $3^h\,45'$ nachmittags in B, der zweite um $5^h\,57'$ nachmittags in A an. Um wieviel Uhr fahren beide Züge von ihren Ausgangsstationen ab? e. 91, 2

Zeit bis zur Begegnung der zwei Züge: x Stunden.

$$\text{Gleichung:} \quad \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7\frac{1}{5}} = \frac{1}{x}$$

$$x = 6 \text{ Stunden.}$$

Antwort: Um $4^h\,45'$ morgens.

e. 96, 2 12) Ein Körper a bewegt sich vom Punkt C nach dem Punkt D mit $7\frac{1}{2}$ m Geschwindigkeit. Als er schon 36 m zurückgelegt hatte, läuft ein 2. Körper b von D nach C und macht in jeder Sekunde den zwanzigsten Teil des ganzen Weges. Nachdem b so viele Sekunden als seine Geschwindigkeit Meter beträgt, gelaufen ist, trifft er mit a zusammen. Wie viele Meter ist C von D entfernt?

Entfernung des Punktes C von D: x m

Gleichung: $$\left(\frac{x}{20} + \frac{24}{5}\right)\frac{15}{2} + \frac{x^2}{400} = x$$

$$x^2 - 250\,x + 14400 = 0$$

woraus durch Zerlegung $x = 160$ oder 90 m.

k. 94, 3 13) Zwei Schuldsummen, 520 ℳ und 648 ℳ, werden, die 2. mit doppelt soviel Prozent Rabatt auf 100 ℳ als die 1., bar bezahlt mit 1100 ℳ. Wie groß war der Rabatt bei der ersten Summe?

Rabatt auf Hundert bei der ersten Summe: x %

Gleichung: $$\frac{520 \cdot 100}{100 + x} + \frac{648 \cdot 100}{100 + 2x} = 1100$$

$$\frac{520}{100 + x} + \frac{648}{100 + 2x} = 11$$

$$11\,x^2 + 806\,x = 3400$$

$$x = 4\,\%$$

Antwort: der Rabatt bei der ersten Summe betrug 20 ℳ.

e. 95, 2 14) Ein Weinhändler beauftragt seinen Küfer, aus zwei Sorten Wein, von welchen das Liter der besseren Sorte 70 ₰ kostet, einen Wein zu mischen, von dem das Liter auf 60 ₰ zu stehen kommt. Indem der Küfer hierbei die ihm zu diesem Zweck vom Weinhändler angegebenen Verhältniszahlen verwechselt, kommt das Liter der Mischung statt auf 60 ₰ nur auf 55 ₰. Wie viel kostete das Liter der geringeren Sorte?

Preis des Liters der geringeren Sorte: x ₰.

Gleichung: $$10 \cdot 70 + (60 - x)\,x = (70 - x)\,55$$

$$x^2 - 115\,x = -3150$$

$$x = 45 \text{ ₰}.$$

e. 99,1 u. k. 96, 4 15)*) Die Entfernung zweier Punkte beträgt 5184 m. Von beiden Endpunkten gehen Körper aus, der erste 15 Minuten später als der andere; und ersterer legt in $1\frac{1}{3}$ Minuten $6\frac{2}{3}$ m mehr zu-

*) Die Aufgaben 15)–23) können auch mit zwei Unbekannten gelöst werden.

rück als der zweite. Beide Körper treffen in der Mitte des Weges zusammen. Welche Geschwindigkeiten haben diese Körper und nach welcher Zeit treffen sie zusammen?

Geschwindigkeit des ersten Körpers pro Minute: x m.

$$\text{Gleichung:} \quad \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} = \frac{15}{2592}$$
$$x^2 - 5x = 864$$
$$x = 32 \text{ m},$$

also Geschwindigkeit des zweiten Körpers $= 27$ m

und Zeit bis zur Begegnung 1): 1 Stunde 21 Minuten,
2): 1 Stunde 36 Minuten.

16) Aus zwei Orten, welche 13 Meilen von einander entfernt sind, gehen zwei Wanderer einander entgegen und treffen sich nach $10\frac{1}{2}$ Stunden. Wie viel Zeit braucht jeder zu 1 Meile Weges, wenn der erste dazu eine Viertelstunde weniger nötig hatte als der zweite? k. 91, 3

Zeitverbrauch des ersten Wanderers zu einer Meile Wegs: x Stunden

$$\text{Gleichung:} \quad \frac{1}{x} + \frac{4}{4x+1} = \frac{26}{21}$$
$$104x^2 - 142x = 21$$
$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ Stunden,}$$

also braucht der zweite Wanderer: $1\frac{3}{4}$ Stunden;

der erstere legt 7 Meilen, der andere 6 Meilen zurück.

17) Von zwei Orten A und B, welche 6,9 km von einander entfernt sind, gehen zwei Boten gleichzeitig ab und zwar beide in der Richtung von A über B hinaus. Der von A ausgehende Bote braucht zu 1 km 1 Minute 32 Sekunden weniger als der von B ausgehende, und jener holt diesen in 11 Stunden 33 Minuten ein. Wie lange braucht jeder zu 1 km? e. 94, 1

Zeitverbrauch des von A ausgehenden Boten zu 1 km Wegs: x Minuten.

$$\text{Gleichung:} \quad 693\left(\frac{1}{x} - \frac{15}{15x+23}\right) = 6{,}9$$
$$15x^2 + 23x = 2310$$
$$x = 11\frac{2}{3} \text{ Minuten,}$$

d. h. der aus A gehende Bote braucht: 11 Minuten 40 Sekunden,
und der aus B gehende Bote braucht: 13 Minuten 12 Sekunden.

18) Auf einer 33 km langen Straße gehen zwei Wanderer einander entgegen; sie sind gleichzeitig aufgebrochen und begegnen sich k. 03, 2

nach 3 Stunden; da der erste schneller geht als der zweite, so braucht er zu dem ganzen Weg 1 Stunde 6 Minuten weniger als der zweite. Wie lange braucht jeder zu 1 km?

Zeitverbrauch des ersten Wanderers zu 1 km: x Minuten.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{11}{60}$$

$$11\,x^2 - 9\,x = 120$$

$$x = 10 \text{ Minuten}$$

während der zweite braucht: 12 Minuten.

k. 99, 4 19) Aus den Orten A und B gehen zwei Reiter einander entgegen, der von A eine Stunde früher. 10 Stunden nach dem Abgang des letzteren begegnen sie einander. Wie lange braucht jeder zu 1 km, wenn der erste dazu noch $^1/_{20}$ Stunde weniger braucht als der zweite, und wenn $AB = 187\,^1/_2$ km ist?

Zeitverbrauch des ersten Reiters zu 1 km: x Minuten.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{120}{x} + \frac{108}{x+3} = \frac{75}{2}$$

$$25\,x^2 - 77\,x = 240$$

$$x = 5 \text{ Minuten,}$$

also braucht der zweite Reiter: 8 Minuten.

k. 01, 3 20) Eine Bahnstrecke von 65 km wird von einem Schnellzug in der einen, von einem Personenzug in der entgegengesetzten Richtung befahren. Beide Züge beginnen ihre Fahrt gleichzeitig und begegnen sich nach 40 Minuten; auf je 10 km braucht der Schnellzug 6 Minuten weniger als der Personenzug. Wie viel km legt jeder Zug in 1 Minute zurück?

Geschwindigkeit des Schnellzugs pro Minute: x km.

$$\text{Gleichung:}\quad x + \frac{10\,x}{10 + 6\,x} = \frac{13}{8}$$

$$24\,x^2 + 41\,x = 65$$

$$x = 1 \text{ km,}$$

somit Geschwindigkeit des Personenzugs: $\frac{5}{8}$ km.

k. 93, 3 21) Auf einer Eisenbahn geht von A nach dem 210 km entfernten Orte B ein Zug ab, und von B nach A ein anderer, der in jeder Minute $^1/_5$ km weniger zurücklegt und daher zwei Stunden länger braucht, um ans Ziel zu kommen. Wie groß sind die Geschwindigkeiten und Fahrzeiten?

Geschwindigkeit des ersten Zuges (aus A) pro ^{h}: x km.

Gleichung: $$\frac{1}{x-12}-\frac{1}{x}=\frac{1}{105}$$

$$x^2-12x=1260$$

$$x=42 \text{ km},$$

also Geschwindigkeit des zweiten Zugs (aus B): 30 km und Fahrzeit des ersten: 5 Stunden, des zweiten: 7 Stunden.

22) Zu einer Arbeit braucht A zwei Tage länger als B. Wenn nun A drei Tage allein daran gearbeitet hat, so braucht B zum Rest der Arbeit $3\,^3/_4$ Tage. Wie lange jeder allein, und wie lange gemeinschaftlich? k. 92, 3

Arbeitszeit des A allein: x Tage.

Gleichung: $$\frac{3\frac{3}{4}}{x-2}=\frac{x-3}{x}$$

$$4x^2-35x=-24$$

$$x=8 \text{ Tage},$$

also Zeit des B allein: 6 Tage,

und Zeit bei gemeinschaftlicher Arbeit: $\frac{x(x-2)}{2x-2}=3\frac{3}{7}$ Tage.

23) In einem gemeinschaftlichen Unternehmen haben A und B zusammen 20 000 ℳ gegeben. A läßt seine Einlage 11 Monate, B die seinige 9 Monate in dem Unternehmen stehen. Wie viel Mark hatte jeder eingelegt, wenn A an Einlage und Gewinn im ganzen 8968 ℳ, B 13 188 ℳ zurückerhält? e. 93, 2

Einlagekapital des A: x ℳ

Gleichung: $$\frac{8968-x}{11x}=\frac{x-6812}{9(20\,000-x)}$$

$$x^2+92890x=807120000$$

$$x=8000 \text{ ℳ},$$

und Einlage des B: 12000 ℳ

d) Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

24) 1. $2x^2-xy+2y^2=38$ k. 99, 1

2. $xy-\frac{120}{xy}=2$

Aus Gleichung 2. ergibt sich $xy=12$ und -10

und per Substitution in 1. $x^2+y^2=25$ und 14

woraus $x=\pm 4,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{34}\pm i\sqrt{6})$

$y=\pm 3,\ \pm 4,\ \mp\frac{1}{2}(\sqrt{34}\mp i\sqrt{6})$

k. 01, 1 25) 1. $x - z = 241 - xz$

2. $\sqrt{x - z} = \sqrt{xz} - 11$

Gleichung 2. quadriert und von 1. subtrahiert, gibt eine quadratische Gleichung in $\sqrt{xz}$, woraus $xz = 225$ und 16 und damit

$$x = 25,\ -9 \text{ und } \frac{1}{2}\left\{225 \pm \sqrt{50689}\right\} (= 225{,}07 \text{ und } -0{,}07)$$

$$z = 9,\ -25 \text{ und } \frac{1}{2}\left\{-225 \pm \sqrt{50689}\right\} (= 0{,}07 \text{ und } -225{,}07)$$

e. 02, 1 26) 1. $x + y = xy$

2. $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 3xy - 10$

Die Differenz der Quadrate der beiden Gleichungen gibt:

$$8(xy)^2 - 58xy = 99,$$

woraus $xy = 4\frac{1}{2}$ und $2\frac{3}{4}$; diesen Wert mit der quadrierten Gleichung 1. kombiniert, liefert $(x - y)$ und damit

$$x = 3,\ \frac{3}{2} \text{ und } \frac{1}{8}(11 \pm i\sqrt{55}) \quad y = \frac{3}{2},\ 3 \text{ und } \frac{1}{8}(11 \mp i\sqrt{55})$$

k. 98, 1 27) 1. $\dfrac{x + y}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{2}$

2. $\dfrac{x - y}{1 - xy} = -\dfrac{1}{7}$

Aus Gleichung 1. ergibt sich $(x - y) = 2$ und mit Hilfe dieses Wertes aus 2.: $xy = 15$

$$x = 5 \text{ und } -3\ ;\ y = 3 \text{ und } -5$$

e. 96, 1 28) 1. $x^3 + y^3 = \dfrac{35}{36} x^2 y^2$

2. $x + y = 5$

Gleichung 2. kubiert und um 1. vermindert, liefert nach Substitution des Wertes von $(x + y)$ aus 2. eine quadratische Gleichung in xy, woraus $xy = 6$ und $-21\frac{3}{7}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3,\ 2 \text{ und } \frac{5}{2}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{31}{7}}\right\} (= +7{,}761) \\ y = 2,\ 3 \text{ und } \frac{5}{2}\left\{1 \mp \sqrt{\frac{31}{7}}\right\} (= -2{,}761) \end{array}\right\} \text{und umgekehrt.}$$

k. 02, 1 29) 1. $4x^2 - 5xy + 6y^2 = 40$

2. $3x^2 + 7xy - 2y^2 = 36$

Indem man die Glieder mit xy nach rechts bringt und dann durch die Kombination der beiden Gleichungen zunächst x^2 und y^2 bestimmt, erhält man

3. $13x^2 = 148 - 16xy$ $\qquad$ $26y^2 = -24 + 43xy$

Diese beiden Gleichungen, mit einander multipliziert, liefern eine quadratische Gleichung für xy.*) Man erhält:

$$xy = 6 \quad \text{und} \quad \frac{296}{513}$$

Aus 3. ergeben sich darnach die Unbekannten unmittelbar:

$$x = \pm 2 \quad \text{und} \quad \pm \frac{74}{\sqrt{513}} \; (= \pm 3{,}267)$$

$$y = \pm 3 \quad \text{und} \quad \pm \frac{4}{\sqrt{513}} \; (= \pm 0{,}176)$$

30) 1. $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{ab}$ e. 95, 1

2. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Zwei Wurzeln der Gleichungen sind zum voraus erkenntlich, nämlich

$$x = a \text{ und } b \quad , \quad y = b \text{ und } a$$

Wenn man die erste Gleichung, nachdem der Nenner von der linken auf die rechte Seite gebracht ist, quadriert, und in der neuen Gleichung den Wert aus der Gleichung 2. substituiert, erhält man eine quadratische Gleichung für xy:

$$\frac{(a+b)^2}{a^2b^2} x^2y^2 - 2xy = a^2 + b^2$$

woraus $\quad xy = ab \quad$ (s. oben) und $\quad -\dfrac{(a^2+b^2)\,ab}{(a+b)^2}$

Die Kombination dieser Werte mit Gleichung 2. liefert $(x+y)$ und $(x-y)$ und damit die Unbekannten selbst:

$$x = a, b \text{ und } -\frac{(a^2+b^2)}{2(a+b)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2+b^2}}\right)$$

$$y = b, a \text{ und } -\frac{(a^2+b^2)}{2(a+b)}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4ab}{a^2+b^2}}\right)$$

31) Löst man die Aufgabe $\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = a \\ xy \quad = b \end{Bmatrix}$ nach den bekannten zwei k. 94. 1

Methoden, so erhält man zwei der Form nach von einander verschiedene Resultate. Es soll die Übereinstimmung derselben gezeigt und aus ihnen eine Regel über die Umwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine Wurzel abgeleitet werden.

Die erste Lösungsmethode liefert für die Unbekannten die Werte

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}\big),$$

die zweite Methode gibt:

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}} \qquad y = \sqrt{\frac{a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}}$$

*) Die Gleichungen durch einander dividiert, oder, was dasselbe ist, die rechten Seiten eliminiert, führt zu dem Verhältnis der Unbekannten.

Beide Werte, je von x und y, quadriert, gibt übereinstimmende Resultate, daher:

Regel: „Die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln aus Summe und Differenz derselben Größen ist gleich der Quadratwurzel aus dem entwickelten Quadrat dieser Summe oder Differenz der beiden Wurzeln."

e. 92, 2 32) Ein Unternehmer bezahlte täglich eine bestimmte Summe für Taglöhne. Als er die Zahl der Arbeiter auf 4 mehr als das Doppelte erhöht, den Taglohn aber um $^1/_2$ ℳ verringert hatte, mußte er täglich 128 ℳ im ganzen bezahlen. Ohne Lohnverminderung hätte er täglich 85 ℳ mehr als anfangs auslegen müssen. Wie viele Arbeiter waren es anfangs, und welchen Taglohn zahlte er ihnen?

Zahl der Arbeiter: x Mann; Betrag des Taglohns: y ℳ.

Gleichungen: 1. $(2x+4)\left(y-\frac{1}{2}\right)=128$

2. $(2x+4)\ y = xy+85$

Lösung der Gleichungen durch Substitution.

Entweder war die Zahl der Arbeiter 6 bei einem Taglohn von 8 ℳ 50 ₰ oder 30 bei einem Taglohn von 2 ℳ 50 ₰.

k. 98, 2 33) Ein Fabrikbesitzer zahlt den Arbeitern täglich 108 ℳ aus. Aus Mangel an Arbeit mußten 8 Arbeiter entlassen werden, und der Taglohn der übrigen Arbeiter wurde um 50 ₰ herabgesetzt, so daß die tägliche Lohnausgabe nachher 70 ℳ betrug. Wie viel Arbeiter ursprünglich, und wie hoch der Taglohn anfangs?

Ursprüngliche Zahl der Arbeiter: x Mann, und anfängliche Höhe des Taglohns: y ℳ.

Gleichungen: 1. $xy=108$

2. $(x-8)\left(y-\frac{1}{2}\right)=70$

Lösung durch Substitution gibt endlich

$$x^2-84x=-1728$$

$$x=48 \text{ und } 36,$$

$$\text{woraus } y=2\frac{1}{4} \text{ und } 3$$

Entweder waren es ursprünglich 48 Arbeiter bei einem Taglohn von 2 ℳ 25 ₰, oder 36 Arbeiter bei einem solchen von 3 ℳ.

e. 03, 2 34) 50 Liter Wein zu 1 ℳ 50 ₰ das Liter und eine gewisse Anzahl Liter einer andern Sorte von unbekanntem Preis geben eine Mischung zu 1 ℳ 35 ₰ das Liter. Werden die Quantitäten der zwei gemischten Sorten unverändert gelassen, aber die Preise vertauscht, so ist das Liter der zweiten Mischung 75 ₰ wert. Wie viel Liter der zweiten Sorte wurden zur ersten Mischung genommen, und wie hoch war der Preis?

Literzahl der zweiten Sorte: x Liter; Preis des Liters derselben: y ℳ.

Gleichungen: 1. $27x - 20xy = 150$

2. $3x + 200y = 150$

Gleichung 2. mit x multipliziert und um die zehnfache Gleichung 1. vermindert, gibt:

$x^2 + 40x = 500$, woraus $x = 10$ Liter und $y = 60$ ₰.

35) Einer Mischung von Kupfer und Silber werden 20 g Feinsilber zugesetzt, dadurch erhöht sich der Gehalt an reinem Silber in der Mischung um 20 %. Der Gewichtsunterschied zwischen Silber und Kupfer nach dem Zusatz ist $1\frac{1}{2}$ mal so groß als der zwischen Kupfer und Silber vor dem Zusatz. Wie viel g Silber und Kupfer waren es anfänglich? [Zur Vermeidung etwaiger Mißverständnisse wurde mündlich bemerkt: „Gesetztenfalls der Silbergehalt hätte ursprünglich 12 % betragen, so betrüge er nach dem Zusatze 32 %."] e. 99, 2

Ursprüngliches Gewicht des Silbers: x g, des Kupfers: y g.

Gleichungen: 1. $$\frac{100(x+20)}{x+y+20} = \frac{100x}{x+y} + 20$$

2. $$(x - y + 20) = \frac{3}{2}(y - x)$$

Lösung durch Substitution liefert die Gleichung:

$$x^2 - 7x = 144$$

$$x = 16 \text{ g Silber,}$$

$$y = 24 \text{ g Kupfer.}$$

36) Von Ulm fährt ein Schnellzug über Aulendorf nach Friedrichshafen, der auf der ganzen Strecke eine bestimmte, sich gleichbleibende Geschwindigkeit beibehalten soll. Die Entfernung Ulm—Aulendorf verhält sich zu der Entfernung Aulendorf—Friedrichshafen wie 3 : 2. Auf der Strecke Ulm—Aulendorf fährt der Zug mit einer um $3\frac{1}{8}$ km kleineren Geschwindigkeit als vorgeschrieben, und verspätet sich deshalb um 5 Minuten. Um diese Verspätung hereinzuholen, fährt der Zug auf der Strecke Aulendorf — Friedrichshafen mit einer um $5\frac{5}{9}$ km größeren Geschwindigkeit, als vorgeschrieben. Wie groß ist die vorgeschriebene Geschwindigkeit des Zuges, und wie weit sind Ulm, Aulendorf und Friedrichshafen von einander entfernt? (Die Aufenthalte auf den Stationen sind außer acht zu lassen, e. 98, 2

und unter Geschwindigkeit ist jeweils der Weg pro Stunde zu verstehen.)

Vorgeschriebene Geschwindigkeit des Zuges pro $\underline{h}$: x km. Entfernung Ulm—Aulendorf: y km.

Gleichungen: 1. $$\frac{y}{x - 3\frac{1}{8}} = \frac{y}{x} + \frac{1}{12}$$

2. $$\frac{2y}{3\left(x + 5\frac{5}{9}\right)} = \frac{2y}{3x} - \frac{1}{12}$$

Die Gleichungen addiert, gibt eine lineare Gleichung in x, woraus $x =$ 50 km, und damit ergibt sich für y, die Entfernung Ulm-Aulendorf: $62\frac{1}{2}$ km und für $\frac{2}{3}y$, die Entfernung Aulendorf-Friedrichshafen: $41\frac{2}{3}$ km.

e. 97, 2 37) Ein Schienenstrang läuft neben einem Flusse hin. Um 8^h morgens fährt auf demselben ein Zug von einem Orte A gegen den 114 km. stromabwärts gelegenen Ort B ab und legt in der Stunde 38 km zurück. Ebenfalls um 8^h morgens fahren von B zwei Dampfschiffe in entgegengesetzter Richtung ab, und zwar hat das stromabwärts fahrende eine doppelt so große Geschwindigkeit als das stromaufwärts fahrende. Der Zug begegnet dem stromaufwärts fahrenden Schiffe 3 Stunden 36 Minuten früher, als er das stromabwärts fahrende einholt. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Dampfschiffe, um wie viel Uhr begegnet der Zug dem stromaufwärts fahrenden, und um wie viel Uhr holt er das stromabwärts fahrende ein?

Geschwindigkeit des stromaufwärts fahrenden Schiffes: x km, Zeit bis zur Begegnung desselben mit dem Zug: y Stunden.

Gleichungen: 1. $38y + xy = 114$

2. $38\left(y + 3\frac{3}{5}\right) - 2x\left(y + 3\frac{3}{5}\right) = 114$

Lösung durch Substitution führt zu der Gleichung:

$$2x^2 + 133x = 1444$$

woraus $x = 9\frac{1}{2}$ km und $y = 2\frac{2}{5}$ Stunden,

also Geschwindigkeiten der beiden Schiffe: $9\frac{1}{2}$ und 19 km.

Begegnung mit dem stromaufwärts fahrenden Schiff um 10^h 24 Minuten und Einholung des stromabwärts fahrenden Schiffes um 2^h Nachm.

e) Quadratische Gleichungen mit drei und vier Unbekannten.

Die Werte der Unbekannten zu ermitteln aus nachfolgenden Gleichungen:

38) 1. $(2x - y)(x + y + z) = 240$ k. 95, 1

2. $(2y - z)(x + y + z) = 216$

3. $(2z - x)(x + y + z) = 120$

Die Gleichungen addiert, gibt $(x + y + z) = \pm 24$; damit ergeben sich aus den nunmehr linearen Gleichungen die Werte:

$$x = \pm 9\ ; \quad y = \pm 8\ ; \quad z = \pm 7$$

39) 1. $\dfrac{xyz}{x+y} = 30$ k. 96, 1

2. $\dfrac{xyz}{x+z} = 12\dfrac{6}{7}$

3. $\dfrac{xyz}{y+z} = 18$

*) Aus den Gleichungen 1. und 2., bzw. 1. und 3. ergeben sich nach Entfernung der Nenner die zwei neuen:

$$4x + 7y - 3z = 0 \qquad 5x + 2y - 3z = 0$$

durch Elimination von z, bzw. y aus diesen letzteren erhält man die Werte

$$y = \frac{x}{5} \quad \text{und} \quad z = \frac{9x}{5}$$

welche, in eine der drei gegebenen Gleichungen substituiert, die Unbekannten liefern:

$$x = \pm 10 \quad ; \quad y = \pm 2 \quad ; \quad z = \pm 18$$

40) 1. $x + y + z = 24$ k. 91, 2

2. $xz = 63$

3. $(x + z)y = 128$

Den Wert $(x+z)$ aus den Gleichungen 1. und 3. ausgedrückt, gibt eine quadratische Gleichung in y

$$x = 9\ ,\ 7 \text{ und } 4 \pm i\sqrt{47}$$
$$y = 16 \quad \text{und } 8$$
$$z = 7\ ,\ 9 \text{ und } 4 \mp i\sqrt{47}$$

41) 1. $x + y + z = 30$ k. 92,

2. $x^2 + y^2 = z^2$

3. $xy = 4\dfrac{8}{13}z$

---

*) Eine andere Lösung ist: Man bringt die Gleichungen zunächst auf die Form $x + y = \frac{1}{3}xyz$ usw. und addiert, indem man der Reihe nach je eine der Gleichungen mit (– 1) durchmultipliziert. Dies gibt $x = \frac{1}{36}xyz$ oder $yz = 36$ usw.

2

Die Werte von $(x+y)^2$, einerseits aus Gleichung 1. durch Quadrieren, andrerseits aus Gleichung 2. und 3. durch Addieren gebildet, einander gleichgesetzt, geben eine quadratische Gleichung in z

$$x = 12 \text{ oder } 5 \;; \quad y = 5 \text{ oder } 12 \;; \quad z = 13$$

k. 01, 2 42) Die Summe von drei Zahlen ist 21; die zweite Zahl ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern, und das Produkt aus der zweiten Zahl und der Summe der beiden andern ist 90. Wie heißen die drei Zahlen?

Die drei Zahlen heißen x, y und z

Gleichungen:
$$\begin{aligned} 1.\quad & x + y + z = 21 \\ 2.\quad & y^2 = xz \\ 3.\quad & y(x+z) = 90 \end{aligned}$$

$(x+z)$ aus den Gleichungen 1. und 3. ausgedrückt, gibt $y = 6$ und 15; und mit Hilfe von Gleichung 3.:

$$x = 3 \pm 6i\sqrt{6}, \; 12 \text{ und } 3$$
$$z = 3 \mp 6i\sqrt{6}, \; 3 \text{ und } 12$$

Die drei Zahlen heißen 12, 6 und 3

oder $(3+6i\sqrt{6})$, 15 und $(3-6i\sqrt{6})$

k. 93, 2 43) In einer stetigen geometrischen Proportion ist die Summe der drei Glieder = 195, das Produkt des Mittelgliedes mit der Summe der beiden äußeren = 6750. Welches ist die Proportion?

Die Glieder der Proportion seien x, y, z

Gleichungen:
$$\begin{aligned} 1.\quad & x + y + z = 195 \\ 2.\quad & y^2 = xz \\ 3.\quad & y(x+z) = 6750 \end{aligned}$$

Lösung wie bei 42).

Die Proportion lautet: $135 : 45 = 45 : 15$

oder $\frac{15}{2}(3 + i\sqrt{391}) : 150 = 150 : \frac{15}{2}(3 - i\sqrt{391})$

e. 00, 2 44) Ein Trog kann durch eine Röhre gefüllt und durch eine zweite geleert werden, und zwar fließen durch diese letztere in jeder Sekunde $^3/_4$ Liter ab. Wird nur die Abflußröhre geöffnet, so entleert sich der volle Trog 40 Minuten früher, als wenn beide Röhren geöffnet sind. Werden bei vollem Troge beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so enthält der Trog nach 1 Stunde 40 Minuten noch 6 Hektoliter. Wie lange steht es jetzt noch an, bis der Trog ganz leer sein wird?

Zufluß durch die erste Röhre pro Sekunde: a Liter; Zeit, den vollen Trog zu leeren bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren: t Minuten; endlich Zeit, die noch erforderlich, um den Rest von 6 hl zu leeren: x Minuten.

Gleichungen: 1. $(45 - 60\,a)\,t = 45\,(t - 40)$
2. $(45 - 60\,a)\,x = 600$
3. $(t - x) = 100$

Gleichung 2. durch 1. dividiert und aus 3. den Wert von t substituiert, gibt

$$\frac{x}{x+100} = \frac{600}{45\,(x+60)}$$

$$3\,x^2 + 140\,x = 4000$$

$$x = 20 \text{ Minuten } [t = 2 \text{ Stunden, } a = \frac{1}{4} \text{ Liter}]$$

45) Die Werte von x, y, z u. w aus folgenden 4 Gleichungen zu berechnen: e. 94, 3

1. $x + y = 3$ 3. $x^2 + z^2 = 10$
2. $z + w = 7$ 4. $y^2 + w^2 = 20$

Man eliminiere x und z aus der 3. Gleichung mit Hilfe der Werte aus 1. und 2. und kombiniere das Resultat mit Gleichung 4. Man erhält:

5. $3\,y + 7\,w = 34$

Aus 4. und 5. lassen sich nun y und w leicht ermitteln. Es werden

$$x = 1 \text{ und } 1\frac{14}{29}$$

$$y = 2 \text{ und } 1\frac{15}{29}$$

$$z = 3 \text{ und } 2\frac{23}{29}$$

$$w = 4 \text{ und } 4\frac{6}{29}$$

46) Vier Zahlen, deren Quadrate zusammen $= 125$ sind, bilden eine Proportion, in welcher das erste Glied um 5 größer ist als das letzte, und das zweite Glied um 2 größer als das dritte. Wie heißt die Proportion? e. 00, 1

Die vier Zahlen seien x, y, z und u

Gleichungen: 1. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 125$
2. $x\,u = y\,z$
3. $x - u = 5$
4. $y - z = 2$

Die quadrierten Gleichungen 3. und 4. je von 1. subtrahiert, geben mit Benützung der Gleichung 2. die Werte von $(y + z)$, bzw. $(x + u)$, welche in Verbindung mit 3. und 4. die Unbekannten ergeben.

Die Proportion heißt: $8 : 6 = 4 : 3$

oder $(-3) : (-4) = (-6) : (-8)$

47) Von 4 Zahlen bilden die drei ersten eine arithmetische Reihe, deren Summe $= 24$, die letzten drei eine geometrische Reihe, deren Summe $= 38$ ist; wie heißen die Zahlen? k. 99, 3

Die vier Zahlen seien x, y, z und w.

Gleichungen: 1. $x + y + z = 24$

2. $x - y = y - z$

3. $y + z + w = 38$

4. $y : z = z : w$

Aus Gleichung 1. und 2. ergibt sich $y = 8$; diesen Wert in 3. und 4. substituiert und aus den neugewonnenen Gleichungen w eliminiert, liefert die quadratische Gleichung in z:

$$z^2 + 8z = 240$$

$$z = 12 \text{ und } -20$$

und damit $w = 18$ und 50

$x = 4$ und 36

Die Zahlen heißen somit: 4, 8, 12 und 18

oder 36, 8, −20 50

f) Arithmetische Reihen.

Bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben über arithmetische Reihen sei das Anfangsglied der Reihe: a, die Differenz: d, das letzte Glied: z, die Anzahl der Glieder: n und die Summe der Reihe: S.

k. 96, 2 48) Die Summe des vierten und sechsten Gliedes einer arithmetischen Reihe ist 28; das Produkt des dritten und zehnten Gliedes 232. Wie heißt das erste Glied und die Differenz?

Gesucht: Anfangsglied a und Differenz d.

Gleichungen: 1. $2a + 8d = 28$

2. $(a + 2d)(a + 9d) = 232$

Lösung durch Substitution liefert:

$$10d^2 - 42d = -36$$

$d =$ 3 und 1,2

$a =$ 2 und 9,2

k. 91, 1 49) In einer arithmetischen Reihe ist die Summe des dritten und siebten Gliedes $= 6$, das Quadrat des sechsten Gliedes 25. Wie groß die Summe der ersten zehn Glieder? (Man beachte die Doppelwerte.)

Gesucht: Summe S der ersten zehn Glieder.

Gleichungen: 1. $(a + 2d) + (a + 6d) = 6$

2. $(a + 5d) = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Aus 1. ergibt sich das fünfte Glied $= 3$, woraus durch Kombination mit Gleichung 2. $d =$ 2 und -8

und $a = -5$ und 35

somit $S = (a + z)\frac{10}{2} =$ 40 und -10

[Die Reihe lautet: −5, −3, −1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

und 35, 27, 19, 11, 3, −5, −13, −21, −29, −37]

50) Das vierte Glied einer arithmetischen Reihe ist $= 8$, das siebte Glied $= 14$, die Summe $= 72$. Gesucht das erste und letzte Glied und die Anzahl der Glieder k. 95, 3

Gesucht: a, z und n.

Gleichungen: 1. $a + 3\,d = 8$

2. $a + 6\,d = 14$

3. $(a + z)\frac{n}{2} = 72$

Aus Gleichung 1. und 2 ergibt sich unmittelbar $d = 2$ und $a = 2$ und aus Gleichung 3. folgt nach Substitution des Wertes für z:

$$n^2 + n = 72$$

$$n = 8\,,\quad \text{also}\quad z = 16$$

51) Ein Eisenwerk führt einen Auftrag in der Weise aus, daß es jede Woche 200 Zentner mehr liefert als in der vorangehenden; in der letzten liefert es 4800 Zentner. Auf diese Weise wird der Auftrag neun Wochen früher erledigt, als wenn es wöchentlich immer gleich viel, nämlich das doppelte Quantum der ersten Woche geliefert hätte. Wie groß war das ganze Quantum? Wieviel wurde in der ersten Woche geliefert? Wie viele Wochen erforderte die Erledigung des Auftrags? e. 03, 1

Gegeben: $d = 200$; $z = 4800$; gesucht a und n

Gleichungen: 1. $(a + z)\frac{n}{2} = 2\,a\,(n + 9)$

2. $z = a + (n - 1)\,d$

Lösung durch Substitution gibt die Gleichung:

$$3\,d\,n^2 - (2\,z - 33\,d)\,n = 36\,(z + d)$$

woraus nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte:

$$n^2 - 5\,n = 300$$

$$n = 20 \text{ Jahre};\quad a = 1000 \text{ Ztr. und } S = 58\,000 \text{ Ztr.}$$

52) Bei einem Wettrennen werden 2040 ℳ als Preise verteilt. Der erste erhält 500 ℳ, jeder folgende 70 ℳ weniger als der vorausgehende. Wie viele Bewerber? k. 98, 3

Gegeben: $a = 500$; $d = -70$; $S = 2040$; gesucht: n

Gleichung: $S = \left\{2\,a + (n - 1)\,d\right\}\frac{n}{2}$

woraus $n = -\frac{2\,a - d}{2\,d} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,a - d}{2\,d}\right)^2 + \frac{2\,S}{d}} = 8$ Bewerber

53) Ein Verbrecher entflieht und macht am ersten Tage 56 km, an jedem folgenden Tag 2 km weniger als am vorhergehenden. 2 Tage nach seiner Flucht wird ihm ein Beamter nachgeschickt, dieser macht am ersten Tage 50 km, an jedem folgenden 10 km mehr als am vorhergehenden. Wann holt er ihn ein? e. 92, 3

Gegeben: $a = 56$; $d = -2$; und $a_1 = 50$; $d_1 = 10$; gesucht: n

Gleichung: $\left\{2a + (n-1)d\right\}\frac{n+2}{2} = \left\{2a_1 + (n-1)d_1\right\}\frac{n}{2}$

woraus mit den gegebenen Zahlenwerten: $3n^2 - 4n = 55$

$n = 5$,

d. h. nach 5 Tagen holt ihn der Beamte ein.

g) Geometrische Reihen.

k. 02, 2 54) Fünf Personen wollen eine Schuld so bezahlen, daß ihre Anteile eine geometrische Reihe bilden; die drei niedersten Anteile betragen zusammen 380 ℳ, und die zwei niedersten zusammen sind um 20 ℳ größer als der dritte Anteil. Wieviel zahlt jede der fünf Personen, und wieviel beträgt die ganze Schuld?

Das Anfangsglied der geometrischen Reihe sei a, ihr Quotient: q, so daß die Anteile seien a, aq, aq^2, aq^3 und aq^4

Gleichungen: 1. $a + aq + aq^2 = 380$

2. $a + aq - aq^2 = 20$

Addition der Gleichungen gibt $a = \frac{200}{1+q}$, welcher Wert in Gleichung 1. substituiert, die quadratische Gleichung $10q^2 - 9q = 9$ liefert.

$q = \frac{3}{2}$, also $a = 80$ ℳ und $S = \frac{a(q^5-1)}{q-1} = 1055$ ℳ

e. 02, 2 55) In einem Gefäß befanden sich 180 Liter Weingeist. Eine bestimmte Menge Wasser wurde hinzugefügt und mit dem Weingeist vermischt und hierauf ebensoviel aus der Mischung geschöpft, als vorhin Wasser hinzugefügt wurde. Wenn nun dieser Vorgang 25mal hintereinander vollzogen wird und zuletzt nur noch der 113. Teil des ursprünglichen Weingeistes übrig bleibt, wieviel Liter Wasser wurden jedesmal hinzugesetzt?

Anzahl der zugesetzten Liter Wasser: x, also gesucht $q = \frac{180}{180+x}$,

wenn gegeben $a = 180$ und $z = \frac{180}{113}$ und $n = 25$

Gleichung: $180 \cdot \left(\frac{180}{180+x}\right)^{25} = \frac{180}{113}$

$x = 180\left(\sqrt[25]{113} - 1\right) = 37{,}5$ Liter.

k. 03, 1 56) Eine arithmetische und eine geometrische Reihe haben folgende Eigenschaften:

Die Summe der ersten 10 Glieder der arithmetischen Reihe ist 155; das Anfangsglied der geometrischen Reihe ist gleich der Differenz der arithmetischen, und der Quotient der geometrischen

Reihe ist gleich dem Anfangsglied der arithmetischen, die Summe der zwei ersten Glieder der geometrischen Reihe ist = 9. Wie heißen die Reihen?

Das Anfangsglied der arithmetischen Reihe sei a, die Differenz: d, das Anfangsglied der geometrischen Reihe sei: a', der Quotient: q.

Gleichungen: 1. $\left\{2a + (n-1)d\right\}\frac{n}{2} = 155$ 2. $d + da = 9$

Lösung durch Substitution gibt mit dem gegebenen Zahlenwert für n:

$$2a^2 - 29a = -50$$

woraus $a = 12\frac{1}{2}$ und 2; $d = \frac{2}{3}$ und 3; somit die Reihen:

I. Arithm.: $2, \; 5, \; 8, \; 11, \; 14, \; 17, \; 20, \; 23 \ldots$

oder: $12\frac{1}{2}, \; 13\frac{1}{6}, \; 13\frac{5}{6}, \; 14\frac{1}{2}, \; 15\frac{1}{6}, \; 15\frac{5}{6}, \; 16\frac{1}{2}, \; 17\frac{1}{6} \ldots$

II. Geometr.: $3, \; 6, \; 12, \; 24, \; 48 \ldots\ldots$

oder: $\frac{2}{3}, \; \frac{25}{3}, \; \frac{625}{6} \ldots\ldots$

h) Zinseszinsrechnung.

α) Endwert.

57) Ein Waldbestand wurde anfangs 1890 auf 120 000 cbm geschätzt und vermehrt sich jedes Jahr um 3 %. Es werden nun am Ende jedes Jahres 1800 cbm Holz geschlagen; wie groß wird der Bestand anfangs 1900 sein? k. 99, 2

$x = a\,q^{10} - \frac{b\,(q^{10}-1)}{q-1}$ gibt für die gegebenen Zahlenwerte

$x = (q^{10} + 1)\,60\,000 = 140\,634$ cbm.

58) Eine Stadt, welche vor 20 Jahren 60 000 Einwohner zählte, habe jetzt 100 000. Wieviel Einwohner würde sie bei gleicher Zunahme nach weiteren 45 Jahren haben? k. 94, 4

Die Einwohnerzahl vor 20 Jahren sei a, die von jetzt: b, so folgt aus $a\,q^{20} = b$ der Wert für q und damit

$$x = b\,q^{45} = b\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^9} = 315\,600 \text{ Einwohner.}$$

β) Barwert.

59) A legt am Anfang jedes Jahres r ℳ bei 4 % auf Zinsen; B dieselbe Summe am Ende jedes Jahres, beide 20 Jahre hindurch. Wie groß ist r, wenn A schließlich 1191 ℳ mehr hat als B? k. 96, 3

Der Unterschied der beiden Endwerte nach 20 Jahren:

des $A = \frac{r\,q\,(q^{20}-1)}{q-1}$ und des $B = \frac{r\,(q^{20}-1)}{q-1}$

gibt $r = \frac{1191}{q^{20}-1} = 1000$ ℳ.

k. 98, 4 60) Es will jemand 10 000 ℳ 12 Jahre lang auf Zins geben, um sich nach Ablauf dieser Zeit durch die Zinsen dieses erlangten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 4 %, um wieviel muß er die angelegte Summe vermehren, wenn er nur $3\frac{1}{2}$ % erhalten kann?

Zuzulegende Summe: x ℳ, bisheriges Kapital sei a ℳ.

Gleichung: $a\,q^{12} = (a + x)\,q_1^{12}$, wobei $q_1 = 1{,}035$

gibt: $$x = a\left[\left(\frac{q}{q_1}\right)^{12} - 1\right] = 595{,}36 \text{ ℳ}$$

k. 03, 3 61) A will sein Haus verkaufen. B bietet 53 000 ℳ bar, während C ihm die nächsten fünf Jahre je am Ende eines solchen 10 000 ℳ bezahlen will. Wer bietet mehr und um wieviel? (4 %)

Der bare Wert des Angebots des C sei x ℳ; die jährliche Rate: a ℳ.

Gleichung: $$x = \frac{a\,(q^5 - 1)}{q^5\,(q - 1)} = \frac{100\,a}{p}\,(1 - q^{-5}) \quad \text{gibt}$$

$x = 44\,520$ ℳ; also bietet B um 8480 ℳ mehr.

e. 94, 2 62) A will sein Haus verkaufen. B bietet bar 47 000 ℳ. C bietet 53 000 ℳ, zahlbar nach 3 Jahren, und D bietet 50 000 ℳ in fünf jährlichen Terminen von je 10 000 ℳ, wobei die erste Rate sogleich zur Auszahlung käme. Welches Angebot wird A annehmen, wenn er seinen Kalkulationen 4 % Zinseszins zugrunde legt, und um wieviel übertrifft der bare Wert des höchsten Angebots denjenigen des niedersten?

Der bare Wert des Angebots a von C sei x ℳ; der des D: y ℳ, und dessen jährliche Rate: b ℳ.

Gleichungen: $$x = \frac{a}{q^3} \quad ; \quad y = \frac{100\,b}{p} \cdot \frac{(q^5 - 1)}{q^4}$$

geben: $x = 47\,117$ ℳ ; $y = 46\,300$ ℳ

also wird A das Angebot des C annehmen; Unterschied zwischen dem höchsten und niedersten Angebot 817 ℳ.

γ) Laufende Zahlungen.

k. 02, 3 63) Am 1. August 1902 legt jemand in eine Sparkasse eine Summe von 8000 ℳ ein; wieviel muß er jährlich jedesmal an diesem Tage — das letztemal am 1. August 1910 — hinzufügen, damit dann sein Vermögen 20 000 ℳ beträgt, bei 4 % Zinseszinsen?

Ursprüngliches Kapital sei a ℳ; Endwert: b ℳ; Zulage: x ℳ.

Gleichung: $$a\,q^8 + \frac{x\,(q^8 - 1)}{q - 1} = b\,, \quad \text{gibt}$$

$$x = \frac{0{,}01\,p\,(b - a\,q^8)}{q^8 - 1} = 982{,}75 \text{ ℳ}$$

δ) Zeit.

64) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 40 000 ℳ, das zu $3\frac{1}{2}$ % auf Zinseszins aussteht, dadurch aufgezehrt wird, daß jährlich am Schlusse des Jahres 2000 ℳ weggenommen werden? k. 93, 4

Jährliche Verminderung des Kapitels (a ℳ) sei b ℳ; Zahl der Jahre: x

Gleichung: $$a\,q^x - \frac{b\,(q^x - 1)}{q - 1} = 0$$

gibt $$x = log\left[\frac{100\,b}{100\,b - a\,p}\right] : log\,q = 35 \text{ Jahre.}$$

65) Jemand kauft ein Haus für eine gewisse Summe, die er abbezahlt, indem er jedes Jahr, im ganzen 10mal, am Schlusse des Jahres $a = 1000$ ℳ erlegt. Wie groß war die Kaufsumme, und wann hätte er statt dessen $b = 10\,000$ ℳ auf einmal abtragen können, wenn 4 % Zinseszins gerechnet werden? k. 92, 4

Die Kaufsumme sei k Mark, die Anzahl der Jahre, nach welchen er seine Schuld auf einmal abtragen kann: x Jahre.

Gleichungen: 1. $$k = \frac{a\,(q^{10} - 1)}{q^{10}\,(q - 1)}$$

2. $$k\,q^x = b\ ,$$

woraus $$k = \frac{100\,a}{p}\,(1 - q^{-10}) = 8111 \text{ ℳ}$$

und $$x = \frac{log\,b - log\,k}{log\,q} = 5{,}34 \text{ Jahre.}$$

i) Rentenrechnung.

α) Der bare Wert.

66) A hat infolge eines Vermächtnisses eine Rente im Betrag von 100 ℳ, zahlbar am 1. eines jeden Monats, 20 Jahre lang zu beziehen. Mit welcher Summe kann diese Rente an demjenigen Tage, an dem die erste Zahlung zu leisten ist, abgelöst werden, wenn man $4\frac{1}{2}$ % pro Jahr zugrunde legt und die Zinsen als monatlich zum Kapital geschlagen annimmt? e. 93, 3

Ablösungssumme (= Barwert der Rente) sei x ℳ, die Rente selbst: r ℳ

Gleichung: $$x\,q^{240} = \frac{r\,q\,(q^{240} - 1)}{(q - 1)}\ ,$$

woraus $$x = \frac{1200\,r\,q}{p}\,(1 - q^{-240}) = 15\,865{,}43 \text{ ℳ}$$

β) Die Rente.

67) Ein Beamter hat 25mal je am Anfang eines Jahres 2 % seiner 3750 ℳ betragenden Besoldung in eine Witwenkasse einbezahlt. Seine Witwe erhielt hierauf 11mal je am Ende eines Jahres e. 95, 3

(angefangen mit dem auf das Sterbejahr folgenden Jahre) eine Pension von 375 ℳ. Hat die Kasse hiebei Gewinn oder Verlust, und wieviel beträgt derselbe, wenn ein Zinsfuß von 4 % zugrunde gelegt wird?

Der jährliche Kassenbeitrag (2 % von 3750 ℳ) sei a ℳ, die Pension: r ℳ und der Gewinn oder Verlust der Kasse: x ℳ.

$$\text{Gleichung: } \frac{a\,q\,(q^{25}-1)}{q-1}\cdot q^{11} - \frac{r\,(q^{11}-1)}{q-1} = x$$

$$x = -\,57{,}35 \text{ ℳ}$$

d. h. die Kasse hat einen Verlust von 57,35 ℳ.

γ) Die Einzahlung.

k. 91, 4 68) Welche Summe hat jemand 10 Jahre lang am Schlusse des Jahres in eine Rentenbank einzuzahlen, wenn er nachher aus dem Erträgnis 15 Jahre lang eine jährliche Rente von 800 ℳ beziehen will? (4 % Zinseszins zu berechnen.)

Die jährlich einzuzahlende Summe sei x ℳ, die Rente: r ℳ.

$$\text{Gleichung: } \frac{x\,(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{r\,(q^{15}-1)}{q^{15}(q-1)}$$

$$\text{gibt: } x = \frac{r\,(1-q^{-15})}{q^{10}-1} = 740{,}88 \text{ ℳ}$$

e. 01, 2 69) A möchte sich eine Jahresrente sichern, welche 20 Jahre läuft, und deren Betrag von Jahr zu Jahr um 5 % wächst. Wie viel hat A heute einzuzahlen, wenn die Rente mit einem Betrage von 600 ℳ heute in einem Jahre zum erstenmale fällig sein soll, und wenn der Berechnung ein Zinsfuß von $3^1/_4$ % zugrunde gelegt wird?

Die einzelnen Jahresrenten seien r, re, re^2, $re^3 \ldots$ ℳ, wobei $e = \left(1+\frac{5}{100}\right)$; die einzuzahlende Mise (= Barwert): x ℳ, dann ist:

$$x = \frac{r\left(\left(\frac{e}{q}\right)^n - 1\right)}{(e-q)} = \frac{r\,(e^n - q^n)}{q^n\,(e-q)} = 13697{,}2 \text{ ℳ}$$

δ) Die Zeit.

e. 91, 3 70) A verkauft am Anfange eines Jahres an B ein Haus unter folgenden Bedingungen: B hat von diesem Jahre an 10mal, je am Ende des Jahres, den 10. Teil der Kaufsumme zu entrichten, während der jeweils bleibende Schuldrest nicht zu verzinsen ist. Wenn nun B im Laufe des ersten Jahres durch eine Erbschaft in den Stand gesetzt wird, die ganze Summe auf einmal zu bezahlen, so soll berechnet werden, wann er das tun kann, ohne selbst in Schaden zu kommen, oder A in Schaden zu bringen? Als Zinsfuß ist 4 % zugrunde zu legen.

Der mittlere Zahlungstermin sei nach x Jahren; die jährliche Abzahlung $\left(\frac{1}{10}\text{ der Kaufsumme}\right)$: r ℳ.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{10\,r}{q^x} = \frac{r\,(q^{10}-1)}{q^{10}\,(q-1)}$$

$$\text{gibt}\quad x = \frac{\log 0{,}1\,p - \log\,(1-q^{-10})}{\log q} = 5{,}339 \text{ Jahre,}$$

d. h. nach 5 Jahren 4 Monaten.

71) Eine Rente von 800 ℳ, welche 20 Jahre lang am Ende jedes Jahres bezogen werden soll, wird in eine andere von 1000 ℳ verwandelt. Wie lange dauert der Bezug der letzteren, wenn 4 % Zinseszins gerechnet werden? K. 01, 4

Bisherige Rente betrage r ℳ; die neue: r_1 ℳ und deren Bezugszeit sei x Jahre.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{100\,r}{p}\,(1-q^{-20}) = \frac{100\,r_1}{p}\,(1-q^{-x})$$

$$\text{gibt:}\quad x = \log\left[\frac{r_1}{r_1 - r\,(1-q^{-20})}\right] : \log q = 14{,}552 \text{ Jahre,}$$

d. h.: 14 Jahre lang kann die neue Rente voll bezogen werden, im 15. Jahre beträgt sie weniger als 1000 ℳ.

72) A braucht von seinem Vermögen, das 3 % Zinseszins bringt, jährlich 5000 ℳ und hat daher nach 5 Jahren noch 30 000 ℳ. a) Wie groß war sein ursprüngliches Vermögen? b) Welche Rente könnte er von dem Rest noch 30 Jahre lang beziehen? K. 95, 4

Das ursprüngliche Vermögen sei x ℳ, der jährliche Verbrauch: b ℳ, der zurückbleibende Rest: w ℳ und die Rente: r ℳ.

$$\text{Gleichungen: 1.}\quad x\,q^5 - \frac{b\,(q^5-1)}{q-1} = w$$

$$\text{woraus}\quad x = \frac{w + \frac{100\,b}{p}\,(q^5-1)}{q^5} = 48\,780 \text{ ℳ}$$

$$\text{2.}\quad w\,q^{30} - \frac{r\,(q^{30}-1)}{q-1} = 0$$

$$\text{woraus}\quad r = \frac{w\,p}{100\,(1-q^{-30})} = 1530{,}55 \text{ ℳ}$$