II. Trigonometrie.

a) Das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck; das reguläre Polygon.

e. 00, 3 73) In einem Kreise trägt man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FG und GH je gleich der Hälfte der Seite des dem Kreise einbeschriebenen regulären Dreiecks ab. Wie groß ist alsdann AH, wenn der Radius des Kreises gleich 10 cm ist? (Bekannte, auch von Albrecht Dürer gelehrte Näherungskonstruktion des regulären Siebenecks.)

Gegeben: r, gesucht $AH = x$. Sei α der zu AB, und δ der zu AH gehörige Centriwinkel, so ist

1. $AB = \frac{1}{2} s_3 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ 2. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2r} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

3. $\angle\delta = 4R - 7\alpha$ und 4. $x = 2r\sin\frac{\delta}{2}$

$x = 1{,}352$ mm.

k. 95, 6 74) In einem gleichschenkligen Dreieck seien die Höhen $h_a = 36$ und $h_b = 27$. Wie groß die Winkel, die Seiten und der Inhalt des Dreiecks?

Gegeben: h_a und h_b; gesucht: a, b, α, β und J

1. $\cos\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h_b}{2h_a}$ 2. $a = \frac{h_b}{\sin\beta}$

3. $b = \frac{h_a}{\sin\beta}$ und 4. $2J = \frac{h_a h_b}{\sin\beta}$

$a = 29{,}125$ $\alpha = 44°\ 2'\ 54''$ $J = 524{,}25$
$b = 38{,}834$ $\beta = 67°\ 58'\ 33''$

k. 94, 5 75) Von einem Rechteck sind gegeben die Diagonale $e = 74{,}95$ und die Differenz der beiden Seiten $d = 27{,}24$. Wie groß sind die Seiten und der Winkel der Diagonalen?

Gegeben: e und $(a - b) = d$; gesucht: a, b und $\angle(e, e')$. Sei in dem Rechteck $ABCD$ die Strecke $EC = d$, und in dem $\triangle AEC$ der $\angle CAE = \varphi$, so ist:

1. $\sin\varphi = \frac{d}{e}\sin 135°$ 2. $\angle\frac{e, e'}{2} = (45 - \varphi)$

3. $\begin{cases} a = e\sin(45 - \varphi) \\ b = e\cos(45 - \varphi) \end{cases}$ oder 4. $(a + b) = d\operatorname{ctg}\varphi$

$a = 64{,}836$
$b = 37{,}596$ $\angle(e, e') = 60°\ 12'\ 58''$

k. 95, 5 76) Von einem Rhombus ist gegeben die Diagonale $e = 70{,}5$ und der von ihr durchzogene $\angle\beta = 65°\ 40'$. Gesucht der Inhalt des Rechtecks, dessen Ecken die Fußpunkte der durch den Diagonalen-Schnittpunkt gezogenen Höhen sind.

Gegeben: e und β; gesucht: $J (= x\,y)$

$$1.\quad x = h\cos\frac{\beta}{2} = e\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{e}{2}\sin\beta$$

$$2.\quad y = h\sin\frac{\beta}{2} = e\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\text{also}\quad 3.\quad J = x\,.\,y = \frac{e^2}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin\beta = e^2\sin^3\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 665{,}686$$

77) In einem Rhombus ist die Summe der Diagonalen $s = 159{,}4$; $\angle\beta = 43^\circ\,19'\,30''$. Gesucht die Seite, die Diagonalen und der Inhalt. k. 93, 5.

Gegeben: $e + e' = s$ und β; gesucht: a, e, e' und J

$$1.\quad (e' - e) = s\,tg\left(45 - \frac{\beta}{2}\right) \qquad 2.\quad a = \frac{e}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$3.\quad J = \frac{e\,e'}{2} = a^2\sin\beta$$

$a = 61{,}377$; $e = 45{,}314$; $e' = 114{,}086$; $J = 2584{,}82$

78) Seite und Fläche eines Rhombus zu berechnen aus einem Winkel und der Summe der Diagonalen; $\alpha = 63^\circ\,15'\,4''$; $s = 26{,}4$ cm. e. 96, 3.

Lösung siehe 77).

$a = 9{,}594$ cm ; $J = 82{,}194$ cm.

79) Von einem regulären Fünfeck ist der Flächeninhalt $F_5 = 100$ qm gegeben, gesucht ist die Fläche und Seite des regulären Zwölfecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist. e. 99, 3.

Gegeben: F_5 ; gesucht: F_{12} und s_{12}. Es ist $r^2 = \dfrac{2\,F_5}{5\sin 72^\circ}$,

$$\text{also}\quad 1.\quad F_{12} = 3\,r^2 = \frac{6\,F_5}{5\sin 72^\circ} \quad\text{und}\quad 2.\quad s_{12} = 2\,r\sin 15^\circ$$

$F_{12} = 126{,}174$ qm ; $s_{12} = 3{,}357$ m.

b) Das schiefwinklige Dreieck.

80) 2 Seiten b u. c eines Dreiecks $A\,B\,C$ verhalten sich wie $7:4$; dabei ist c um 38,4 cm kleiner als b. Der Winkel α ist ein spitzer Winkel; seine Größe ergibt sich aus der Proportion: $tg\,\alpha : \sin 2\,\alpha = 8:5$; wie groß ist die Fläche des Dreiecks? e. 02, 3.

Gegeben: $b:c$, $(b - c)$, α ; gesucht: J

$$\frac{tg\,\alpha}{\sin 2\,\alpha} = \frac{8}{5} \quad\text{gibt}\quad \sin\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{11}\ ;$$

$$\frac{b}{c} = \frac{7}{4} \quad\text{gibt}\quad (b + c) = \frac{11}{3}(b - c)\ ;\quad J = \frac{b\,c}{2}\sin\alpha$$

$J = 1901{,}87$

81) In einem Dreieck $A\,B\,C$ verhalten sich die Seiten $A\,B$ und $A\,C$ wie $2:3$, der Inhalt des Dreiecks beträgt 100 qm und der e. 01, 3.

$\angle BAC$ 19° 28′ 16″. Wie groß sind die beiden Seiten AB und AC, sowie die beiden Winkel ABC und ACB dieses Dreiecks?

Gegeben: $b : c = m : n$, α, J; gesucht: b, c, β und γ

1. $tg\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{m-n}{m+n}\,ctg\,\frac{\alpha}{2}$

2. $d = \sqrt{\frac{2\,J}{sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma}}$ oder 2. $b\,c = \frac{2\,J}{sin\,\alpha}$

3. $\begin{cases} b = d\,sin\,\beta \\ c = d\,sin\,\gamma \end{cases}$ 3. $b = \sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{2\,J}{sin\,\alpha}}$, $c = \sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2\,J}{sin\,\alpha}}$

k. 01, 5 82) Von einem Dreieck ist gegeben $a = 20{,}2$ cm, die Differenz der Seiten $(b - c) = 6{,}3$ cm und die Differenz der Gegenwinkel der letzteren $(\beta - \gamma) = 13°\,20'\,30''$. Wie groß sind die Seiten und die Winkel?

Gegeben: a, $(b - c)$, $(\beta - \gamma)$; gesucht b, c, α, β, γ

1. $cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b-c}\,sin\,\frac{\beta-\gamma}{2}$ 2. $(b + c) = a \cdot \frac{cos\,\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\,\frac{\alpha}{2}}$

$b = 13{,}99$ cm $\quad \alpha = 136°\,15'\,52''$
$c = 7{,}69$ cm $\quad \beta = 28°\,32'\,19''$
$\gamma = 15°\,11'\,49''$

k. 91, 5 83) Von einem Dreieck ist gegeben $a = 24$; $(b - c) = 7$; $\alpha = 31°\,54'$ Zu berechnen b, c und den Inhalt.

1. $sin\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{a}\,cos\,\frac{\alpha}{2}$

2. $(b + c) = \frac{a\,cos\,\frac{\beta-\gamma}{2}}{sin\,\frac{\alpha}{2}}$ oder 2. $d = \frac{a}{sin\,\alpha}$ 3. $\begin{cases} b = d\,sin\,\beta \\ c = d\,sin\,\gamma \end{cases}$

3. $2\,J = b\,c\,sin\,\alpha$ 4. $J = \frac{d^2}{2}\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma$

$b = 46{,}57$; $c = 39{,}57$; $J = 474{,}82$

k. 96, 5 84) Von einem Dreieck ist gegeben:

$$(b + c) = 100 \text{ m};\ (\beta - \gamma) = 12°\,25';\ \alpha = 65°\,46\,\frac{1'}{2}$$

zu berechnen die Seiten und den Inhalt!

1. $a = (b + c)\,\frac{sin\,\frac{\alpha}{2}}{cos\,\frac{\beta-\gamma}{2}}$ 2. $(b - c) = (b + c)\,tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}$

3. $J = \frac{b\,c}{2} \sin \alpha$

$a = 54{,}62$ m ; $b = 53{,}517$ m ; $c = 46{,}483$ m.

$J = 1134{,}316$ qm.

85) In einem Dreieck ist: $(b + c) = 166{,}5$ m; die Differenz $(\beta - \gamma)$ k. 98, 5
$= 15° 3' 40''$; $\angle \alpha = 67° 18' 20''$; gesucht die Seiten und der Inhalt des Dreiecks.

cfr. 84) $a = 93{,}068$ m ; $b = 90{,}576$ m ; $c = 75{,}923$ m.

$J = 3172{,}2$ qm.

86) Der Inhalt eines Dreiecks mit den Winkeln $\beta = 75° 40'$ und k. 02, 4
$\gamma = 36° 25'$ beträgt 75 qdm; wie groß sind die Seiten desselben?

Gegeben: J, β, γ; gesucht: a, b, c.

$$d = \sqrt{\frac{2\,J}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}} \quad \text{oder} \quad 2\,J = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

woraus $a = d \sin \alpha$ usw. woraus $a = \sqrt{\frac{2\,J \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$ usw.

$a = 15{,}545$ dm ; $b = 16{,}254$ dm ; $c = 9{,}959$ dm.

87) In einem Dreieck $A\,B\,C$ ist gegeben Seite $A\,B = 347{,}53$ m, e. 97, 3
Seite $A\,C = 219{,}18$ m und $\angle B\,A\,C = 77° 42' 12''$. Wie groß sind die beiden Winkel, in welche die Transversale von A nach dem Halbierungspunkte von $B\,C$ den $\angle\, B\,A\,C$ teilt?

Gegeben: b, c, α; gesucht: α_1 und α_2

$$tg\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{b - c}{b + c}\,tg\,\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha_1 = 49° 11' 27''$; $\alpha_2 = 28° 30' 45''$

c) Das Viereck.

88) Zwischen den Schenkeln eines Winkels von $70°$ liegt ein Punkt, e. 92. 4
von welchem Lote $= 25$ m und 9 m auf die Schenkel gefällt sind. Wie weit ist der Punkt von der Spitze des Winkels entfernt?

Die gesuchte Entfernung $P\,A = x$ ist Diagonale eines Kreisvierecks $B\,A\,C\,P$ und bilde mit den Schenkeln des gegebenen Winkels A die Winkel φ und ψ. Aus dem $\triangle\, B\,C\,P$ folgt:

1. $tg\,\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{b - c}{b + c}\,tg\,\frac{A}{2}$ (wenn $PC = b$, $PB = c$)

und aus den $R \triangle \triangle\, P\,A\,C$ bzw. $P\,B\,C$:

2. $x = \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sin \psi} = 31{,}206$ m.

89) In einem Viereck $A\,B\,C\,D$ sind $AB = 8$ cm, $B\,C = 9$ cm, k. 03, 5
$C\,D = 15$ cm, $D\,A = 12$ cm und $\angle B\,A\,D = 80° 57' 20''$. Wie groß die Diagonale $B\,D$ und der Flächeninhalt des Vierecks?

Gegeben: $a, b, c, d, \angle A$; gesucht: e' und J

Im $\triangle ABD$ ist: 1. $e' = \sqrt{a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos A} = 13{,}334$ cm

und $i = \frac{a\,d}{2} \sin A$

Im $\triangle BCD$ ist: $i' = \sqrt{s\,(s-b)\,(s-c)\,(s-e')}$, wo $(b + c + e') = 2s$

also 2. $J = i + i' = 106{,}83$ qcm.

d) Berechnungen am Kreise.

e. 95, 4 90) Wie groß ist der Radius eines Kreises, in welchem das zu einem Sektor vom Zentriwinkel 100° gehörige Segment gleich 1 qcm ist?

Gegeben: T und α; gesucht r

$$r = \sqrt{\frac{2\,T}{arc\,\alpha - \sin\alpha}} = 1{,}6216 \text{ cm}.$$

k. 99, 6 91) In einem Kreis vom Radius $r = 18{,}75$ liegt ein Sektor vom Zentriwinkel $\alpha = 108°\,40'\,30''$. Wie groß ist das dazugehörige Segment?

Gegeben: r und α; gesucht: T

$$T = \frac{r^2}{2}\,(arc\,\alpha - \sin\alpha)$$

$$T = 166{,}884$$

e. 98, 3 92) In einem Kreise vom Radius $r = 10$ m liegen die beiden Sehnen $AB = 9$ m und $AC = 18$ m. Wie groß ist das von den beiden Sehnen und dem zwischen ihnen liegenden Bogen begrenzte Flächenstück, wenn die beiden Sehnen so zu einander liegen, daß der Mittelpunkt des Kreises nicht in jenes Flächenstück hineinfällt?

Gegeben: r und b und c; gesucht: $F = (\triangle ABC + \text{Segment})$.

1. $\sin\beta = \frac{b}{2\,r}$ 2. $\sin\gamma = \frac{c}{2\,r}$ 3. $\alpha = 2\,R - (\beta + \gamma)$

4. $F = \frac{bc}{2}\sin\alpha + \frac{r^2}{2}\,(arc\,2\,\alpha - \sin 2\,\alpha) = 61{,}258$ qm.

e) Höhen- und Entfernungsbestimmungen.

k. 99, 5 93) Ein Turm erscheint in einer gewissen Entfernung unter dem Elevationswinkel von $6°\,5'\,30''$; man nähert sich ihm auf der horizontalen Ebene um 180 m, so daß er unter dem Winkel $19°\,55'\,50''$ erscheint. Wie hoch ist er?

Gegeben: $a = 180$ m; $\angle\alpha = 6°\,5'\,30''$; $\angle\beta = 19°\,55'\,50''$

$$x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} = 27{,}222 \text{ m}.$$

94) Ein Turm hat die Höhe a m. Von seiner Spitze erscheint ein e. 03, 3
Fluß, dessen diesseitiges Ufer c m vom Fuß des Turmes entfernt ist, unter einem Gesichtswinkel von $\lambda°$. Wie breit ist der Fluß? $a = 30$ m; $c = 17$ m; $\lambda = 36° 20' 24''$. Wie hoch müßte der Turm sein, wenn der Fluß unter dem möglichst großen Gesichtswinkel erscheinen soll?

Der Elevationswinkel vom diesseitigen Ufer nach der Turmspitze sei φ, so ist:

1. $tg\,\varphi = \frac{a}{c}$ 2 die Breite $x = \frac{a \sin \lambda}{\sin \varphi \sin(\varphi - \lambda)} = 50$ m.

Damit der Fluß unter dem möglichst großen Gesichtswinkel erscheint, müßte der Turm die Höhe $a_1 = \sqrt{c\,.\,(c+x)} = 33{,}749$ m haben, d. h. sie müßte das geometrische Mittel der beiden Uferentfernungen sein.

95) Die Höhe eines Turmes ist $h = 15$ m, seine Entfernung vom k. 01, 6
Ufer eines Flusses $b = 30$ m. Wie groß ist die Breite des letzteren, wenn sie von der Spitze des Turmes unter dem $\angle \alpha = 15°$ erscheint?

Vgl. 94). 1. $tg\,\varphi = \frac{h}{b}$ 2. $x = \frac{h \sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} = 43{,}302$ m.

96) Aus dem Fenster eines Turmes erscheint einem Auge, das sich k. 92, 5
30 m über dem Erdboden befindet, die Breite eines nahen Flusses unter einem $\angle \varepsilon = 7° 46'$; wie breit ist der Fluß, wenn das nächstliegende Ufer 56 m vom Turme entfernt ist?

Vgl. 94.) $x = 24{,}616$ m.

97) Am Ufer eines Flusses steht ein Turm mit zwei senkrecht k. 96, 6
übereinander liegenden Öffnungen, deren Mitten, von denen aus visiert wird, um $a = 15$ m von einander entfernt sind. Die Visierlinien von den bezeichneten Punkten nach dem jenseitigen Ufer bilden mit der Vertikalen die Winkel $\varphi = 85° 25'$ und $\psi = 80° 40'$. Wie breit ist der Fluß?

Vgl. 93). $x = \frac{a \sin \psi \sin \varphi}{\sin(\varphi - \psi)} = 178{,}172$ m.

98) Hart am Ufer eines Flusses entlang ist eine Standlinie BC k. 03, 4
$= 112$ m gemessen; von B und C wird nach dem am jenseitigen Ufer stehenden Pfahl A visiert. Die Visierlinie BA bildet mit der Standlinie BC den $\angle \beta = 68° 4' 13''$, die Visierlinie CA mit BC den $\angle \gamma = 71° 13' 10''$. Wie breit ist der Fluß an dieser Stelle?

$$x = \frac{BC\,.\,\sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = 150{,}814 \text{ m.}$$

k. 98, 6 99) Auf dem Firste eines Daches, welches mit der horizontalen Ebene einen $\angle \varphi = 35°$ bildet, ist eine $l = 1{,}5$ m hohe Auffangstange eines Blitzableiters vertikal aufgestellt. Der Abstand des unteren Endpunktes der Stange vom Rande des Daches ist $e = 10$ m. Wie weit ist die Spitze des Blitzableiters vom Rande des Daches entfernt?

Die Größen l und e bilden zwei Seiten eines Dreiecks, deren eingeschlossener Winkel $\lambda = (90 + \varphi)$ und dessen dritte Seite die gesuchte Entfernung x ist.

$$x = \sqrt{l^2 + e^2 + 2\, l\, e \sin \varphi} = 10{,}93 \text{ m.}$$

k. 02, 5 100) Eine vertikal stehende Stange von 8 m Höhe erscheint von einem bestimmten Punkt der Horizontalebene unter dem Elevationswinkel $\varepsilon = 20\ 24' 40''$. In der Visierebene wird sie um ihren Fußpunkt um den $\angle \varphi = 45° 30'$ auswärts gedreht; unter welchem Elevationswinkel erscheint sie jetzt?

Die neue Lage $A' B$ der Stange a bildet mit der Entfernung e in der Horizontalebene und der Visierlinie nach A' ein Dreieck, in welchem die an dieser letzteren gelegenen Winkel α und γ seien; so ist:

$$1.\ e = a \operatorname{ctg} \varepsilon \qquad 2.\ tg \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{e - a}{e + a} tg \frac{R - \varphi}{2}$$

$$\text{woraus } \gamma = 11° 38' 48''$$

f) Beziehungen zwischen Winkelfunktionen.

e. 91, 4 101) α u. β aus folgenden beiden Gleichungen zu bestimmen:

$$1.\ \sin \alpha = 2 \sin \beta \qquad 2.\ (\alpha + \beta) = 36° 14' 11''$$

$$\text{Aus 1. wird } tg \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3} tg \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\alpha = 24° 20' 34'' \ ; \ \beta = 11° 53' 37''$$

e. 94, 4 102) Die beiden Winkel α u. β aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$1.\ \cos \alpha + \cos \beta = -\frac{1}{3} \qquad 2.\ (\alpha + \beta) = 200°$$

$$\text{Aus 1. folgt: } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{-1}{6 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$\alpha = 116° 18' \text{ und } \beta = 83° 42' \text{ oder umgekehrt.}$$

e. 93, 4 103) Auf der Hypotenuse BC eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC schneidet man von einem Endpunkt B ein Stück $BD = \frac{1}{8}$ der Hypotenuse ab, vom andern Endpunkt C

ein Stück $CE = \frac{7}{24}$ der Hypotenuse und zieht die Geraden AD und AE. Es soll nun der Sinus des $\angle DAE$ ohne Hilfe von Logarithmentafeln bestimmt und sodann mit Hilfe der Logarithmentafeln aus dem gefundenen Sinus der Winkel selbst berechnet werden.

$\angle DAE$ sei: x, so ist im $\triangle DAE$: $\sin x = \frac{2\triangle}{AD \cdot AE}$;

$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \frac{5}{8}$; $AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \frac{13}{24}$

und $\triangle DAE = \frac{7}{48}$ gibt $\sin x = \frac{56}{65}$; $x = 59^\circ\, 29'\, 26''$

oder $\cos x = \frac{AM^2 - DM \cdot ME}{AD \cdot DE} = \frac{33}{65}$, woraus $\sin x = \frac{56}{65}$

III. Geometrie.

(Geordnet nach dem System des Lehrbuchs von Spieker.)

a) **Aufgaben aus dem ersten Kursus** (Abschnitt V).

104) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe nach einer andern und der Differenz der Gegenwinkel dieser Seiten. k. 92, 7
($\triangle$ aus c, h_b, $\beta - \gamma = \delta$)

Zu c und h_b ist α, bzw. $(\beta + \gamma)$ Datum.

105) Parallelogramm aus $(b + h)$, e' u. $\angle \alpha$ k. 91, 6

$\triangle FBE$ konstruierbar aus $BE = (b + h)$, $\angle FBE = (2R - \alpha)$ und $\angle BEF = \frac{\alpha - R}{2}$;

Mittellot über FE gibt C und Kreisbogen um B mit e' gibt D.

106) Gegeben fünf Punkte. Ein Fünfeck zu zeichnen, in welchem die gegebenen Punkte die Halbierungspunkte der fünf Seiten werden. e. 94, 6

Drei aufeinanderfolgende der gegebenen Punkte bilden mit dem Halbierungspunkt einer Diagonale ein Parallelogramm; die Verbindungslinie dieses letzteren Punktes mit dem vierten gegebenen Punkt bestimmt die Richtung und Länge der durch den fünften Punkt gehenden Seite, wodurch zwei Ecken und damit alle andern des Fünfecks gefunden sind.

107) Im Dreieck ABC (α spitz, $AB \angle AC$) die Gerade XY so zu ziehen (X auf AB, Y auf AC), daß $AX = XY$ und $XY = \frac{1}{2}\, CY$ ist. e. 03, 4