ein Stück $CE = \frac{7}{24}$ der Hypotenuse und zieht die Geraden AD und AE. Es soll nun der Sinus des $\angle DAE$ ohne Hilfe von Logarithmentafeln bestimmt und sodann mit Hilfe der Logarithmentafeln aus dem gefundenen Sinus der Winkel selbst berechnet werden.

$\angle DAE$ sei: x, so ist im $\triangle DAE$: $\sin x = \frac{2\triangle}{AD \cdot AE}$;

$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \frac{5}{8}$; $AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \frac{13}{24}$

und $\triangle DAE = \frac{7}{48}$ gibt $\sin x = \frac{56}{65}$; $x = 59^\circ 29' 26''$

oder $\cos x = \frac{AM^2 - DM \cdot ME}{AD \cdot DE} = \frac{33}{65}$, woraus $\sin x = \frac{56}{65}$

III. Geometrie.

(Geordnet nach dem System des Lehrbuchs von Spieker.)

a) Aufgaben aus dem ersten Kursus (Abschnitt V).

104) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe nach einer andern und der Differenz der Gegenwinkel dieser Seiten. k. 92, 7
($\triangle$ aus c, h_b, $\beta - \gamma = \delta$)

Zu c und h_b ist α, bzw. $(\beta + \gamma)$ Datum.

105) Parallelogramm aus $(b + h)$, e' u. $\angle \alpha$ k. 91, 6

$\triangle FBE$ konstruierbar aus $BE = (b + h)$, $\angle FBE = (2R - \alpha)$ und $\angle BEF = \frac{\alpha - R}{2}$;

Mittellot über FE gibt C und Kreisbogen um B mit e' gibt D.

106) Gegeben fünf Punkte. Ein Fünfeck zu zeichnen, in welchem die gegebenen Punkte die Halbierungspunkte der fünf Seiten werden. e. 94, 6

Drei aufeinanderfolgende der gegebenen Punkte bilden mit dem Halbierungspunkt einer Diagonale ein Parallelogramm; die Verbindungslinie dieses letzteren Punktes mit dem vierten gegebenen Punkt bestimmt die Richtung und Länge der durch den fünften Punkt gehenden Seite, wodurch zwei Ecken und damit alle andern des Fünfecks gefunden sind.

107) Im Dreieck ABC (α spitz, $AB \angle AC$) die Gerade XY so zu ziehen (X auf AB, Y auf AC), daß $AX = XY$ und $XY = \frac{1}{2} CY$ ist. e. 03, 4

Die Halbierungslinie von α und das Mittellot über AC schneiden sich in D; Parallele durch D zu AC bestimmt X und Kreisbogen um X mit XA den Punkt Y auf AC.

b) Aufgaben aus der Kreislehre (Abschnitt VI).

k. 95, 7 108) Ein Dreieck zu zeichnen aus einem Winkel α, der Summe s der ihn einschließenden Seiten und der Schwerlinie t_a nach der 3. Seite ($\triangle$ aus α, $(b + c) = s$, t_a)

$\triangle AEF$ konstruierbar aus $AE = 2t_a$, $AF = s$, $\angle AFE = R - \frac{\alpha}{2}$, Mittellot über EF gibt C und CD durch die Mitte von AE die Ecke B.

e. 99, 4 109) Ein Dreieck zu konstruieren aus $(b + c - a)$ und 2 Winkeln ($\triangle$ aus $s - a$, α, β)

Durch $(s - a)$ und α ist ϱ bestimmt; Tangente unter dem $\angle \beta$ gegen das verlängerte $(s - a)$ gibt BC. Wäre β und γ statt α und β gegeben, so würde durch $(s - a)$ und β der Halbmesser ϱ_c bestimmt.

k. 92, 6 110) Gegeben der Kreis um M und außerhalb desselben der Punkt P. Durch P die Sekante PXY zu ziehen, so daß der Zentriwinkel $XMY =$ dem gegebenen $\angle \alpha$ wird.

Im Kreis M ist zu α die Sehne a Datum, also konzentrischen Kreis um M mit dem Zentralabstand von a und von P die Tangenten an den letzteren.

e. 94, 5 111) Gegeben ein Kreis und 2 Punkte A u. B. Auf der Peripherie des Kreises 2 Punkte X u. Y so zu finden, daß XA u. YB sich gegenseitig halbieren.

Konzentrischen Kreis zu dem gegebenen mit dem Centralabstand einer Sehne $= AB$ und an diesen die Tangenten $\parallel AB$, bestimmen die Punkte X und Y. — Grenze der Möglichkeit: $AB \lesseqqgtr 2r$

k. 93, 7 112) Auf einem gegebenen Kreis den Punkt zu finden, von welchem aus die an einen zweiten gegebenen Kreis gezogenen Tangenten den $\angle \alpha$ mit einander bilden.

Zum Halbmesser r' und $\frac{\alpha}{2}$ ist der Zentralabstand des gesuchten Punktes von K' ein Datum, also der konzentrische Kreis mit diesem um K' ein geometrischer Ort für den Punkt.

k. 03, 6 113) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden $2s$ ist. (Vgl. 173.)

Über einem Durchmesser AC den Kreisbogen, welcher einen Winkel von 45° faßt (also die Quadrantensehne zum Halbmesser hat) und vom einen Endpunkt s als Sehne darein.

114) Gegeben drei Punkte P, P', P'' und eine Strecke a. Man soll einen Kreis zeichnen, so daß die Abschnitte der von den drei gegebenen Punkten an den Kreis gezogenen Tangenten je gleich a werden. e. 91, 5

Der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises ist Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises des Dreiecks $P P' P''$; sein Halbmesser $= \sqrt{P X^2 - a^2}$

115) Gegeben ein Halbkreis vom Radius r und auf dem Durchmesser ein Punkt P in der Entfernung a vom Mittelpunkte. Einen Kreis zu konstruieren, der den Halbkreis und den Durchmesser in diesem Punkte berührt. (Vgl. 166.) k. 01, 8

Im Mittelpunkt M des Halbkreises auf dem Durchmesser das Lot $M O = r$ nach abwärts errichtet und $O P$ nebst Verlängerung gezogen, gibt den Berührungspunkt mit dem Halbkreis.

116) Um die 3 Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind 3 Kreise gezeichnet, von denen die beiden um die Endpunkte der Basis beschriebenen einander gleich sind. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher die 3 Kreise alle umschließt und berührt. e. 01, 4

Geometrischer Ort für den gesuchten Mittelpunkt ist die Höhe auf die Basis; Verlängerung derselben um den Radius des Kreises um A gibt den einen Berührungspunkt X; durch B parallelen Radius $B P$ im Kreis B (nach aufwärts), so gibt $X P$ nebst Verlängerung den zweiten Berührungspunkt Y.

117) Auf der Seite $A C$ eines gegebenen Dreiecks $A B C$ einen Punkt X so zu finden, daß die Summe der von X auf die Seiten $A B$ u. $B C$ gefällten Lote einer gegebenen Strecke s gleich werde. e. 95, 5

Geometrischer Ort für den Punkt X ist die Basis desjenigen gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze in B und dem $\angle \beta$ an der Spitze, das zur Höhe des Schenkels s hat.

118) An 2 ungleich große Kreise ist eine innere gemeinschaftliche Tangente gezogen. Es soll auf dieser außerhalb der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Strecke ein Punkt gefunden werden, von welchem aus die beiden Kreise gleich groß erscheinen. (Vgl. 153.) e. 96, 5

Mittellot über $K K'$ schneide die gemeinschaftliche Tangente in E; Mittellot über $E K$ (oder $E K'$) schneide das erstere in Q; Kreis um Q mit $Q K$ gibt den gesuchten Punkt.

119) Gegeben Kreis K, Gerade L und auf L Punkt P; auf L Punkt X so zu finden, daß $P X$ gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 132 u. 156.) e. 97, 5

In P Lot auf L; durch K parallelen Radius KO (gleichgerichtet); OP schneide Kreis K in Q; Tangente in Q gibt X.

k. 95, 8 120) Durch 2 auf dem Umfang eines Kreises gegebene Punkte 2 zu einander parallele Sehnen zu ziehen, deren Summe gleich einer gegebenen Strecke s ist.

Erster Fall: Die Sehnen sind gleich gerichtet: konzentrischen Kreis mit dem Zentralabstand von PP'; in diesen vom Berührungspunkt aus $\frac{s}{2}$ als Sehne; die Tangente in deren anderem Endpunkt bestimmt die Endpunkte der gesuchten Sehnen.

Zweiter Fall: Die Sehnen sind entgegengesetzt gerichtet: In dem $R\triangle$ aus PP' als Hypotenuse und $\frac{s}{2}$ als Kathete bestimmt die letztere die Richtung der gesuchten Sehnen.

e. 95, 7 121) *) Gegeben 2 Kreise K u. K'; über dem Zentrabstand derselben als Durchmesser ist ein 3. Kreis K'' gezeichnet. Auf K'' einen Punkt X so zu finden, daß die beiden von X an K gezogenen Tangenten den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden von X an K' gezogenen Tangenten. (Vgl. 154.)

Zentrale KK' in D von innen nach dem Verhältnis $r : r'$ geteilt, so gibt die Verbindungslinie von D mit der Mitte des Halbkreises über KK' in ihrer Verlängerung den Punkt X.

c) **Teilungs- und Verwandlungsaufgaben** (Abschnitt VIII).

k. 02, 8 u. k. 94, 7 122) Auf der Seite AD des Quadrats $ABCD$ steht ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Man soll die ganze Figur von der Ecke A aus halbieren und noch die Lage des Endpunktes der Teillinie angeben.

$ABCDE$ wird in das $\triangle FAG$ verwandelt; FG in x halbiert;
$FG = \frac{5}{2} DC$; $Dx = \frac{3}{4} DC$

k. 93, 6 123) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus dem als Dreieck gegebenen Inhalt f^2, der Höhe h und dem $\angle \varepsilon$ der Diagonalen.

Das als Inhalt gegebene $\triangle ABC$ wird in ein anderes DBE mit der vorgeschriebenen Höhe h, dieses wieder in das $\triangle FBE$ mit dem $\angle \varepsilon$ an der Spitze bei F verwandelt, so ist $BG = \frac{1}{2} BE$ die Grundlinie, BF die eine und $GH \parallel EF$ die andere Diagonale des gesuchten Parallelogramms.

---

*) 121) kann auch unter III. d) oder e) aufgeführt werden.

d) **Proportionalität gerader Linien** (Abschnitt IX).

124) In einen gegebenen Kreis ein Trapez zu zeichnen, von dem man einen Winkel kennt und zugleich weiß, daß die eine Grundlinie das Doppelte der andern ist. e. 93, 5

Zu r und $\angle A$ ist e Datum; e im Verhältnis 2 : 1 geteilt und durch den Teilungspunkt die Tangente an den konzentrischen Kreis mit dem Zentralabstand von e, gibt die zwei andern Ecken des Trapezes.

e) **Ähnlichkeit der Figuren** (Abschnitt X).

125) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, wenn gegeben das Verhältnis $m : n$ der Diagonale zu einer Seite. k. 91, 8

Am Endpunkt eines Durchmessers R $\triangle$ aus m als Hypotenuse (auf dem Durchmesser) und n als Kathete, gibt die dritte Ecke des Rechtecks.

126) Von einem gleichschenkligen Dreieck ist gegeben das Verhältnis $h_a : h_b = m : n$ und ϱ. Das Dreieck ist zu konstruieren und sein Inhalt zu berechnen (2. Teil der Aufg. vgl. 178). k. 98, 7

Durch das Verhältnis $b : a = h_a : h_b = m : n$ ist die Gestalt, und durch ϱ die wahre Größe des Dreiecks bestimmt.

127) Ein Dreieck zu konstruieren aus Umfang, Radius eines äußeren Berührungskreises und dem Höhenverhältnis beider andern Seiten ($\triangle$ aus s, ϱ_a, $h_b : h_c$) e. 92, 5

Zu s und ϱ_a ist $\angle \alpha$ Datum und $h_b : h_c$ gibt das Verhältnis der einschließenden Seiten $c : b$

128) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben die Höhe auf eine Seite, ein an dieser Seite liegender Winkel und das Verhältnis einer 2. Seite zu der zugehörigen Schwerlinie. ($\triangle$ aus h_a, γ, $b : t_b = m : n$) k. 93, 8

Durch $b : t_b$ und $\angle \gamma$ ist das Dreieck seiner Gestalt nach, durch h_a seiner wahren Größe nach bestimmt.

129) $\triangle$ aus $(b - c) = \delta$; $h_b : t_a = m : n$ u. $\angle \alpha$. k. 96, 7

Durch $h_b : t_a$ und $\angle \alpha$ ist die Gestalt des Dreiecks, durch $(b - c) = \delta$ die wahre Größe desselben bestimmt.

130) Gegeben $\triangle ABC$ und auf BC Punkt P. Um P einen Kreis zu beschreiben, der AB und AC bzw. deren Verlängerungen in X u. Y so schneidet, daß $XY \parallel BC$ werde. e. 98, 4

Auf PC eine Strecke $PD = PB$ abgetragen, in D nach links geöffnet einen $\angle = \beta$ angelegt, gibt den Punkt Y und PY als Radius. Ist P im Fußpunkt E der Höhe h_a gelegen, fallen X und Y mit A, ist er im Mittelpunkt F von BC gelegen, mit B bzw. C zusammen; liegt

P zwischen E und F, so werden die Seiten AB und AC selbst, liegt er zwischen F und C, oder B und E, deren Verlängerungen über B und C, bzw. über A oder umgekehrt, geschnitten, je nachdem $b \gtreqless c$ ist.

f) Proportionalität gerader Linien am Kreise (Abschnitt XI).

k. 02, 7 131) Ein Dreieck zu konstruieren aus der Grundlinie a, dem Verhältnis der beiden Seiten $b : c = p : q$ und der Mediane des Winkels α. (Vgl. 152.)

(Siehe Spieker: XI. Aufg. 20.) n wird mittels des Sehnensatzes als vierte Proportionale zu BD, DC und m ermittelt, nachdem $BC = a$ in D im Verhältnis $q : p$ geteilt worden; $R \triangle$ aus n und dem Mittellot über BC (nach abwärts) bestimmt die Richtung und damit den Endpunkt A von m_a.

e. 97, 5 132) Gegeben Kreis K, Gerade L u. auf L Punkt P. Auf L Punkt X so zu finden, daß PX gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 119 u. 156.)

Beschreibe beliebigen Kreis, der L in P berührt und K in A und B schneidet, ziehe AB mit Verlängerung, so ist dessen Schnittpunkt mit L der gesuchte Punkt X.

e. 03, 5 133) Gegeben Kreis K; außerhalb desselben 2 Punkte P u. P'; durch dieselben einen Kreis zu legen, der den Kreis K unter einer Sehne von gegebener Größe $= a$ schneidet. (Θ aus P, P', K_s.) (Siehe auch 157.)

Lege durch P und P' einen beliebigen, den Kreis K in C und D schneidenden Kreis, ziehe CD und PP' bis zum Schnitt in O; von O die Tangenten an den zu K konzentrischen Kreis, beschrieben mit dem Zentralabstand von a, geben die weiteren Punkte A und B, bzw. A' und B', durch welche der gesuchte Kreis bestimmt wird (zwei Kreise).

e. 96, 4 134) Im Trapez $ABCD$ mit den Grundlinien AD u. BC soll $EF \parallel BC$ so gezogen werden, daß EF mittlere Proportionale zu AD und BC wird. Hierauf soll bewiesen werden, daß $EBCF = DBC$.

Konstruktion bekannt; aus der Ähnlichkeit der Trapeze $AEFD$ und $EBCF$ folgt auch:

$\triangle AED \sim EBF$, woraus $ED \parallel BF$, also
$\triangle EBF = DBF$; dazu beiderseits $\triangle BFC$ addiert, gibt
$EBCF = DBC$

e. 99, 5 135) Im Dreieck ABC soll zu BC die Parallele XY so gezogen werden, daß sie die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen AX u. BX. (Vgl. auch 165.)

Durch A zu BC die Parallele $AD =$ der dritten Proportionale zu AB und BC (über BC Halbkreis, Sehne $BF = BA$; $FE \perp BC$, $ED \parallel BA$) gezogen und D mit B verbunden, gibt Punkt Y.

136) Man soll in dem Dreieck ABC die Seite AC nach dem gol- k. 03, 7
denen Schnitt teilen und durch den Teilpunkt eine die Dreiecksfläche halbierende Gerade ziehen.

Beide Lösungen bekannt (cfr. Spieker § 185 und 141).

137) Radius OA eines gegebenen Kreises soll in X so geteilt werden, e. 92, 6
daß die zwei auf OX und AX als Basis errichteten gleichschenkligen Dreiecke, die ihre Spitzen auf der Peripherie haben, einander ähnlich sind.

Seien B und C die Spitzen der gleichschenkligen ähnlichen Dreiecke, so ist $\angle BOX = BXO = 2\,XCA = 2\,OBX$, d. h. OX ist die maior von OB, bzw. des stetig geteilten Halbmessers OA.

138) In einem regulären Fünfeck sind 2 sich schneidende Diagonalen e. 97, 4
gezogen; was läßt sich von den Teilen aussagen und beweisen, in welche hiebei diese Diagonalen sich gegenseitig zerlegen, und welche Konstruktion eines regulären Fünfecks über einer gegebenen Strecke AB als Seite folgt aus diesen Aussagen?

Schneiden sich die beiden Diagonalen AC und BE in F, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABF und ABC und der Vergleichung ihrer Winkel, daß AC durch BE und umgekehrt in F stetig geteilt wird. Verlängere demnach die Strecke AB stetig proportioniert und beschreibe um A und B mit der verlängerten AB (= der Diagonale) Kreisbögen, so ist deren Schnittpunkt die gegenüberliegende Ecke D des Fünfecks.

139) Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises den Punkt X so k. 91, 7
zu bestimmen, daß von ihm aus die ihrer Lage nach gegebene Strecke AB unter dem $\angle AXB = 36°$ erscheint. (Die Konstruktion ist vollständig auszuführen.)

Geometrischer Ort für den Punkt X ist der Umkreis des über AB als Seite errichteten regulären Fünfecks (cfr. Constr. 138). Den Mittelpunkt gibt das Mittellot über der Diagonale oder die dritte Teilungslinie des an AB in A angelegten, in fünf gleiche Teile geteilten Rechten. (Im allgemeinen zwei Punkte.)

g) **Ausmessung geradliniger Figuren** (Abschnitt XII).

140) Gegeben ein Winkel mit Spitze A und innerhalb des Winkels e. 94, 7
Punkt P. Durch P eine die Schenkel des Winkels in X u. Y schneidende Gerade so zu ziehen, daß das Rechteck aus PX u. PY gleich dem Quadrate über AP werde.

Ziehe AP nebst Verlängerung um sich selbst bis Q, beschreibe über PQ den Kreisbogen, der den Teilwinkel $\varphi = PAY$ faßt, so sind dessen Schnittpunkte mit dem andern Schenkel die Punkte X bzw. X' der gesuchten Geraden; oder mit Benützung des geometrischen Ortes in 142) (cfr. Spieker XII Nr. 47) $PS \perp PY$ mit Verlängerung über P, $QT \perp PQ$ bis zum Schnitt mit PS in T, liefert PT als Durchmesser des Kreises durch P, auf dem auch X gelegen sein muß. (Im allgemeinen zwei Gerade.)

e 98, 5 141) Gegeben 3 Punkte P, P', P''. Durch P eine solche Gerade zu ziehen, daß, wenn von P' und P'' auf dieselbe die Lote $P'X$ und $P''Y$ gefällt werden, das Rechteck aus PX und PY einem gegebenen Quadrat a^2 gleich werde.

$R\triangle$ aus PP' als Projektion (event. Hypotenuse) und $PN = a$ als zugehörige Kathete, $NQ \perp PN$ (bzw. PP') liefert auf PP' (bzw. dessen Verlängerung) Punkt Q, so daß $PQ \,.\, PP' = a^2$. Nun ist die Senkrechte auf PQ in Q der eine, der Halbkreis über PP'' der andere geometrische Ort für den Punkt Y. (Im allgemeinen zwei Gerade.)

e.01, 5 142) In einem Kreise zieht man von einem beliebigen Punkte P der Peripherie aus Sehnen, und verlängert dieselben über P hinaus, so daß jeweils das Rechteck aus der Sehne und ihrer Verlängerung gleich dem Quadrat über dem Radius des Kreises wird. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Verlängerungen?

Verlängere den Durchmesser PQ um ein Stück PN, so daß $PN.PQ = r^2$ ($SP \perp PQ$ und $= r$, $SN \perp SQ$); ebenso verlängere eine beliebige andere Sehne PA bis C, so daß $PA.PC = r^2$, dann ist: $PN : PC = PA : PQ$, woraus, da die Scheitelwinkel gleich,

$$\triangle PNC \sim PAQ\text{, d. h } \angle PNC = PAQ = R.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist somit „eine im Abstand $NP\left(=\frac{r}{2}\right)$ vom Punkt P senkrecht zum Durchmesser gezogene Gerade".

k. 94, 6 143) Ein Tangentenviereck, das ein gleichschenkliges Trapez ist, soll konstruiert und berechnet werden, wenn die beiden Grundlinien b u. d gegeben sind.

$R\triangle EFG$ aus Hypotenuse $EG = \frac{b+d}{2}$ und Kathete $FG = \frac{b-d}{2}$ gibt die Höhe des Trapezes $EF = \sqrt{b\,d}$, woraus $J = \frac{b+d}{2}\sqrt{b\,d}$

k. 01, 9 144) Von einem gegebenen Dreieck durch eine Gerade XZ ein gleichschenkliges Dreieck abzuschneiden, das $= \frac{1}{3}$ des gegebenen ist.

Der Schenkel $BX = BZ$ ist die mittlere Proportionale zu a und $\frac{c}{3}$ oder zu $\frac{a}{3}$ und c (Halbkreis über BC, $BE = \frac{BA}{3}$, $EF \perp BC$ gibt $BF = BZ$ oder Halbkreis über $BD = BA$, $BG = \frac{BC}{3}$, $GH \perp BD$, gibt $BH = BZ = BX$).

145) Ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichschenklig-recht- k. 03, 8
winkliges Dreieck zu verwandeln.

Viereck $ABCD$ wird in das $\triangle ABE$, dieses in ein $R\triangle$ verwandelt, und zu dessen Katheten die mittlere Proportionale bestimmt.

146) Ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichseitiges Dreieck k. 99, 7
zu verwandeln.

Cfr. 145).

147) Ein Quadrat in einen Rhombus mit dem $\angle \alpha = 36°$ zu ver- k. 96, 9
wandeln.

Das Quadrat $ABCD$ wird in ein Parallelogramm mit einem Winkel, etwa $B, = 36°$ (Kreisbogen um B mit BC, um C mit der maior von BC, Schnittpunkt U, $\angle UBC = 36°$) verwandelt und zu dessen Seiten die mittlere Proportionale bestimmt.

148) Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von dem e. 91, 6
2 Winkel α u. β gegeben sind.

Verwandle $\triangle ABC$ in $\triangle DBC$ mit gegebenem $\angle\beta$; mache $\angle BDZ =$ gegebenem $\angle\alpha$, suche zu BZ und BC die mittlere Proportionale BY und ziehe $YX \parallel DZ$.

149) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen gleich der Hälfte eines k. 92, 8
gegebenen. (Vgl. 158.)

(Cfr. Spieker § 196.)

150) Ein gegebenes Trapez durch eine Parallele mit den Grundlinien e. 00, 4
zu halbieren. (Vgl. 170.)

BA und CD schneiden sich in S; Halbkreis über BS, Sehne $SF = SA$, $FE \perp BS$; BE halbiert in G, $GH \perp BS$; $SX =$ Sehne SH und $XY \parallel BC$ gibt die gesuchte Teilungslinie.

h) **Harmonische Teilung** Abschnitt XV).

151) $\triangle$ aus $a, b : c = m : n$, und $\angle(a, t_a) = \varepsilon$ k. 94, 8

(Cfr. Spieker § 240.) Teile $BC = a$ von innen und von außen im Verhältnis von $m : n$, so ist der Halbkreis über DD' (der Kreis des Apollonius) der eine, der freie Schenkel des $\angle\varepsilon$, angelegt in der Mitte E von BC, der andere geometrische Ort für A. (Im allgemeinen zwei Dreiecke.)

k. 02, 7 152) $\triangle$ aus a, $b:c = p:q$ und m_a. (Vgl. 131.)

Teile $BC = a$ von innen und von außen im Verhältnis von $p:q$, so ist der Halbkreis über DD' der eine, der Kreisbogen um D mit m_a der andere geometrische Ort für A.

e. 96, 5 153) An zwei ungleich große Kreise ist eine innere gemeinschaftliche Tangente gezogen. Es soll auf dieser außerhalb der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Strecke ein Punkt gefunden werden, von welchem aus die beiden Kreise gleich groß erscheinen. (Vgl. 118.)

Der geometrische Ort für den gesuchten Punkt ist der apollonische Kreis, der die Centrale KK' von innen und außen im Verhältnis von $r:r'$ teilt, d. h. der Kreis über der Verbindungslinie des inneren und äußeren Ähnlichkeitspunkts als Durchmesser (cfr. Spieker § 177 u. 250).

e. 95, 7 154) Gegeben 2 Kreise K u. K'; über dem Zentralabstand derselben als Durchmesser ist ein 3. Kreis K'' gezeichnet. Auf K'' einen Punkt X so zu finden, daß die beiden von X an K gezogenen Tangenten den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden von X an K' gezogenen Tangenten. (Vgl. 121.)

Lösung wie 153.)

i) Von den Chordalen (Abschnitt XVI).

e. 95, 6 155) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis K in einem gegebenen Punkt P berührt, und außerdem einen 2. gegebenen Kreis K' rechtwinklig schneidet. (Vgl. auch 172.)

Sei X der gesuchte Mittelpunkt, XS die Tangente an K', so ist $XK'^2 - XS^2 = XK'^2 - XP^2 = r_1^2$, somit der Radius KP nebst Verlängerung der eine, die Chordale (s. § 255 u. 257) zu K' und P (als Kreis) der andere geometrische Ort für X. (Tangente PQ an K', $PO = OQ$, $ON \perp PK'$ ist Chordale; cfr. § 260, 3.)

e. 97, 5 156) Gegeben Kreis K, Gerade L und auf L Punkt P. Auf L Punkt X so zu finden, daß PX gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 119 u. 132.)

Sei XQ die Tangente an K, so ist $XK^2 - XQ^2 = XK^2 - XP^2 = r^2$, also die Chordale zu K und P geometrischer Ort für X (cfr. 155).

e. 03, 5 157) Gegeben Kreis K; außerhalb desselben 2 Punkte P und P'; durch dieselben einen Kreis zu legen, der den Kreis K unter einer Sehne von gegebener Größe $= a$ schneidet. (Vgl. auch 133.)

(Cfr. Spieker XVI Aufg. 13.) Durch P und P' beliebigen Kreis M, der K schneidet, so gibt die Chordale von K und M (s. § 260, 1) mit der Verlängerung von PP' den Chordalpunkt für X, K und M. (Das übrige siehe Aufgabe 133.)

k) Aufgaben mit Anwendung der algebraischen Analysis (Abschnitt XVIII).

158) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen gleich der Hälfte eines gegebenen. (Vgl. 149.) k. 92, 8.

Gesuchte Dreiecksseite: $x = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \sqrt{a \cdot \frac{a}{2}}$

159) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck (Seite $= a$) ist ein anderes einzubeschreiben, das das $^3/_4$fache des gegebenen ist, und der Radius des Umkreises für das gesuchte Dreieck zu berechnen. k. 98, 8.

Umkreisradius des gesuchten Dreiecks sei x, dann ist $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$,

daher Gleichung: $x^2 = \frac{1}{4}a^2$ gibt $x = \frac{a}{2}$, d. h. der Kreis um den Mittelpunkt des gegebenen Dreiecks mit $\frac{a}{2}$ gibt die Ecken des gesuchten Dreiecks.

160) Über der Strecke a als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem die eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete ist. (Cfr. Spieker XVIII Aufg. 16.) k. 99, 9.

Eine Kathete sei x

Gleichung: $a : \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} : x$ gibt $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$

d. h. x ist die maior der stetig geteilten Hypotenuse a.

161) Auf der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises den Punkt zu finden, von welchem aus eine Tangente gleich dem Durchmesser gezogen werden kann. k. 96, 8.

Entfernung $KX = x$ gesetzt, gibt $x = r\sqrt{5}$

162) In dem einen Endpunkte des Durchmessers eines Kreises ist die Tangente gezogen; vom andern Endpunkte eine Sekante zu ziehen, daß das Stück zwischen dem Kreis und der Tangente gleich dem Radius des Kreises werde. k. 02, 6.

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 27.) Innerer Abschnitt der Sekante sei x, Abschnitt der Tangente: y.

Gleichungen: 1. $y^2 = r(r + x)$ 2. $y^2 = (r + x)^2 - 4r^2$

woraus $x = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{17}$, d. h. die um $\frac{r}{2}$ verkürzte Hypotenuse eines $R\triangle$, dessen Katheten $2r$ und $\frac{r}{2}$ sind.

e. 92, 7 163) In einem Rechteck mit den Seiten a u. b soll die kleinere Seite um einen gewissen Betrag verlängert, die größere um denselben Betrag gekürzt werden, daß das neue Rechteck einen doppelt so großen Flächeninhalt als das ursprüngliche bekomme.

Gleichung: $(a + x)(b - x) = 2ab$ oder

$$x^2 + x(a - b) = -ab \text{ gibt } x = \frac{b-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - ab}$$

Grenze der Möglichkeit: $a \gtreqless b(3 \pm 2\sqrt{2}) \gtreqless \begin{cases} 5{,}82\,b \\ 0{,}17\,b \end{cases}$

e. 02, 5 164) Im Halbkreis über dem Durchmesser $2r$ geht durch den linken Endpunkt unter $60°$ eine Sehne. Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Schenkel dieses Winkels und den Halbkreis berührt.

Entfernung des Berührungspunktes vom linken Endpunkt sei x, der gesuchte Halbmesser y.

Gleichungen: $(r - x)^2 = r(r - 2y)$ und $x^2 = 3y^2$

geben $x = 2r \mp \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, d. h. der Durchmesser $2r$ ist um $\frac{2}{3}$ der Höhe des über ihm errichteten gleichseitigen Dreiecks zu verkürzen bzw. zu verlängern (äußerer Berührungskreis).

e. 99, 5 165) Im Dreieck ABC soll zu BC die Parallele XY so gezogen werden, daß sie die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen AX u. BX. (Vgl. 135.)

(Cfr. Spieker XVIII Aufgabe 46.) Die Parallele xy sei z.

Gleichung: $\frac{c}{a} = \frac{az}{ac - cz}$ gibt $z = \frac{ac^2}{a^2 + c^2}$

z ist die vierte Proportionale zu a, c^2 und $(a^2 + c^2)$

k. 01, 8 166) Gegeben ein Halbkreis vom Radius r und auf dem Durchmesser ein Punkt P in der Entfernung a vom Mittelpunkte. Einen Kreis zu konstruieren, der den Halbkreis und den Durchmesser in diesem Punkte berührt! (Vgl. 115.)

Der Halbmesser des gesuchten Kreises sei x.

Gleichung: $a^2 = r(r - 2x)$ gibt $x = \frac{(r + a)(r - a)}{2r}$

($PD \perp$ und $=$ Durchmesser BC, der Kreis durch B, C und D schneidet die verlängerte DP im gesuchten Mittelpunkt X.)

e. 93, 7 167) Gegeben 2 konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M. Um M einen 3. Kreis zu beschreiben, welcher den von den beiden ersten Kreisen gebildeten Kreisring halbiert.

Der Halbmesser des gesuchten dritten Kreises sei x

Gleichung: $\pi(R^2 - x^2) = \pi(x^2 - r^2)$

$$\text{gibt } x = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2} \cdot \sqrt{2}$$

d. h. $=$ der halben Diagonale eines Quadrats von der Seite $\sqrt{R^2 + r^2}$

168) Gegeben ein Kreis, eine Gerade L und eine Strecke a. In den Kreis eine solche Sehne parallel L zu ziehen, daß die Summe aus der Sehne und ihrem Abstande vom Kreismittelpunkt gleich a werde. e. 91, 7

Der Centralabstand der Sehne sei x.

Gleichung: $r^2 = \frac{(a-x)^2}{4} + x^2$ gibt $x = \frac{1}{5}\{a \pm 2\sqrt{5r^2 - a^2}\}$

(Der Radikalteil ist Kathete eines $R\triangle$, dessen Hypotenuse $r\sqrt{5}$ und dessen andere Kathete a ist; $\frac{1}{5}$ der um diesen doppelten Radikalteil verlängerten bzw. verkürzten Strecke a gibt den Halbmesser des geometrischen Orts für die Mitte der Sehne.)

Zwei Lösungen sind möglich, so lange $a > 2r$ und $\lesseqgtr r\sqrt{5}$; nur eine Sehne, wenn $a \leqq 2r$, und keine, wenn $a > r\sqrt{5}$ und $< r$.

169) Ein Dreieck ABC parallel zur Höhe AD zu halbieren. k. 95, 9

(Cfr. Spieker § 284, Aufg. 6.) $CY = x$ und $CD = d$ gesetzt, gibt $x = \sqrt{\frac{a}{2} . d} = \sqrt{a . \frac{d}{2}}$

170) Ein gegebenes Trapez durch eine Parallele mit den Grundlinien zu halbieren. (Vgl. 150.) e. 00, 4

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 45.) Die Parallele XY sei x.

Gleichung: $\frac{x^2 - d^2}{x^2} = \frac{b^2 - x^2}{x^2}$ gibt $x = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{2}}$ (s. 167).

171) Ein gegebenes Dreieck durch eine Gerade sowohl nach Umfang als auch nach Inhalt zu halbieren. e. 00, 5

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 45a). Die Abschnitte CX (auf BC) und CY (auf AC) seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = s\left(= \frac{a+b+c}{2}\right)$ und 2. $xy = \frac{ab}{2}$

geben $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2}}$ und $y = \frac{s}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2}}$

Konstruktion: BC verlängert um $CF = \frac{b}{2}$; Halbkreis über BF; $CG \perp BF$ gibt $\frac{ab}{2}$; CE (auf BC) $= \frac{s}{2}$; Halbkreis über CE und Kreisbogen um C mit CG schneiden sich in H; Kreisbogen um E mit EH gibt X bzw. X' und endlich Kreisbogen um C mit CX' gibt Y, mit CX gibt Y' (zwei Gerade).

172) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis K in einem gegebenen Punkte P berührt und außerdem einen 2. gegebenen Kreis K' rechtwinklig schneidet. (Vgl. auch 155.) e. 95, 6

Der Halbmesser des gesuchten Kreises sei x, die Projektion von PK' $(= a)$ auf die Zentrale KP sei q.

Gleichung: $x^2 + r_1{}^2 = a^2 + x^2 - 2xq$

gibt $x = \dfrac{a^2 - r_1{}^2}{2q}$

d. h. = der dritten Proportionale zu $(a^2 - r_1{}^2)$ und $2q$

k. 03, 6 173) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden $2s$ ist. (Vgl. 113.)

Die Rechteckseiten seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = s$ 2. $x^2 + y^2 = 4r^2$ geben

$$x = \frac{1}{2}\left\{s \pm \sqrt{(2r\sqrt{2})^2 - s^2}\right\} \text{ und } y = \frac{1}{2}\left\{s \mp \sqrt{(2r\sqrt{2})^2 - s^2}\right\}$$

d. h. x (y) ist die halbe Summe (Differenz) aus s und der Kathete eines $R\triangle$, dessen Hypotenuse $2r\sqrt{2}$ und dessen andere Kathete s ist.

Grenzen der Möglichkeit: $s \begin{matrix} > 2r \\ < 2r\sqrt{2} \end{matrix}$

k. 01, 7 174) In ein gegebenes Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h ein Rechteck zu konstruieren, so daß 2 Ecken auf der Grundlinie, die beiden andern auf den Seiten liegen und der Umfang desselben $= u$ werde!

Die Rechteckseiten seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = \dfrac{u}{2}$ 2. $x : a = (h - y) : h$

geben $x = \dfrac{a\left(\dfrac{u}{2} - h\right)}{a - h}$; $EB (= h) \perp BC$; $EF = \dfrac{u}{2}$,

gibt $BF = \left(\dfrac{u}{2} - h\right)$; $EG = a$; gibt $BG = (a - h$; $FD \parallel GC$ und $DY \parallel BA$ gibt eine Ecke Y des Rechtecks auf AC)

Grenze der Möglichkeit: $\dfrac{u}{2} < a$.

k 99, 8 175) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten die Differenz δ haben.

(Cfr. Spieker XVIII Aufgabe 58.) Die Rechteckseiten seien x und y;

Gleichungen: 1. $y - x = \delta$ und 2. $a : y = h : (h - x)$ geben $x = \dfrac{h(a - \delta)}{(a + h)}$

Construktion ähnlich wie bei 174).

l) Metrische Relationen am Dreiecke (Abschnitt XIX).

e. 93, 6 176) Auf der Peripherie eines Kreises sind 2 Punkte A u. B gegeben. Auf derselben Peripherie einen Punkt X so zu finden, daß das Rechteck aus XA u. XB gleich dem Quadrat über dem Radius wird.

Der senkrechte Abstand des Punktes X von AB sei z.
Gleichungen: 1. $XA . XB = r^2$ 2. $XA . XB = 2rz$
woraus $z = \frac{r}{2}$, d. h. die Parallelen zu AB im Abstand $\frac{r}{2}$ liefern die gesuchten Punkte (im allgemeinen vier).

177) Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a, der zur Seite b gehörigen Schwerlinie t_b und der Bedingung, daß $b^2 + c^2 = s^2$ werde, wobei s eine gegebene Strecke vorstellt. e. 02, 4

$\triangle BSD$ konstruierbar aus den 3 Seiten $BD = \frac{a}{2}$, $BS = \frac{2}{3} t_b$ und $DS = \frac{1}{3} t_a = \frac{1}{6} \sqrt{2s^2 - a^2}$

DS über S um das Doppelte, BS um die Hälfte verlängert, gibt A, E und damit C. Grenze der Möglichkeit:

$$s > \frac{a}{2}\sqrt{2} \text{ u. } t_b < \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2s^2 - a^2}\right)$$

178) Von einem gleichschenkligen Dreieck ist gegeben das Verhältnis $h_a : h_b = m : n$ und ϱ. Das Dreieck ist zu konstruieren und sein Inhalt zu berechnen. (1. Teil der Aufg. siehe 126.) k. 98, 7

Der Halbmesser des Inkreises des ähnlichen Dreiecks AUV sei ϱ_x, so ist

$$1.\ \frac{\triangle ABC}{AUV} = \frac{\varrho^2}{\varrho_x^2} \quad 2.\ \triangle AUV = \varrho_x \cdot \left(m + \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\sqrt{m^2 - \frac{n^2}{4}}$$

$$\text{woraus } \triangle ABC = \varrho^2 . \frac{2m+n}{n}\sqrt{\frac{2m+n}{2m-n}}$$

IV. Stereometrie.

a) Cylinder.

179) Wie groß ist der Halbmesser und die Höhe eines Cylinders, der mit einem Würfel von der Kante $a = 12{,}5$ cm gleichen Inhalt hat, und dessen Mantel gleich der Oberfläche des Würfels ist? k. 99, 11

Die Gleichungen $\pi r^2 h = a^3$ u. $\pi r h = 6a^2$ geben $r = \frac{a}{3} = 4\frac{1}{6}$ cm und $h = \frac{9a}{\pi} = 35{,}81$ cm.

180) Die Oberfläche einer Münze beträgt 6 qcm, ihre Dicke verhält sich zum Durchmesser wie 1 : 12; man berechne das Volumen der Münze. k. 98, 10