Der senkrechte Abstand des Punktes X von $A B$ sei z.
Gleichungen: 1. $XA . XB = r^2$ 2. $XA . XB = 2 r z$
woraus $z = \frac{r}{2}$, d. h. die Parallelen zu $A B$ im Abstand $\frac{r}{2}$ liefern die gesuchten Punkte (im allgemeinen vier).

177) Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a, der zur Seite b gehörigen Schwerlinie t_b und der Bedingung, daß $b^2 + c^2 = s^2$ werde, wobei s eine gegebene Strecke vorstellt. e. 02, 4

$\triangle BSD$ konstruierbar aus den 3 Seiten $BD = \frac{a}{2}$, $BS = \frac{2}{3} t_b$ und $DS = \frac{1}{3} t_a = \frac{1}{6} \sqrt{2 s^2 - a^2}$

DS über S um das Doppelte, BS um die Hälfte verlängert, gibt A, E und damit C. Grenze der Möglichkeit:

$$s > \frac{a}{2} \sqrt{2} \text{ u. } t_b < \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{2 s^2 - a^2} \right)$$

178) Von einem gleichschenkligen Dreieck ist gegeben das Verhältnis $h_a : h_b = m : n$ und ϱ. Das Dreieck ist zu konstruieren und sein Inhalt zu berechnen. (1. Teil der Aufg. siehe 126.) k. 98, 7

Der Halbmesser des Inkreises des ähnlichen Dreiecks AUV sei ϱ_x, so ist

$$1. \ \frac{\triangle ABC}{AUV} = \frac{\varrho^2}{\varrho_x^2} \quad 2. \ \triangle AUV = \varrho_x . \left(m + \frac{n}{2} \right) = \frac{n}{2} \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{4}}$$

$$\text{woraus } \triangle ABC = \varrho^2 . \frac{2m+n}{n} \sqrt{\frac{2m+n}{2m-n}}$$

IV. Stereometrie.

a) Cylinder.

179) Wie groß ist der Halbmesser und die Höhe eines Cylinders, der mit einem Würfel von der Kante $a = 12{,}5$ cm gleichen Inhalt hat, und dessen Mantel gleich der Oberfläche des Würfels ist? k. 99, 11

Die Gleichungen $\pi r^2 h = a^3$ u. $\pi r h = 6 a^2$ geben $r = \frac{a}{3} = 4 \frac{1}{6}$ cm und $h = \frac{9a}{\pi} = 35{,}81$ cm.

180) Die Oberfläche einer Münze beträgt 6 qcm, ihre Dicke verhält sich zum Durchmesser wie 1 : 12; man berechne das Volumen der Münze. k. 98, 10

Die Gleichungen $O = 2\pi r(h + r)$ und $\frac{h}{2r} = \frac{1}{12}$ geben

$$K = \frac{O}{14}\sqrt{\frac{3\,O}{7\pi}} = 0{,}3877 \text{ ccm}.$$

k. 94, 9 181) Ein Silberbarren von 500 g Gewicht und dem spezifischen Gewicht $s = 10{,}5$ wird zu einem Draht von 100 m Länge ausgezogen. Wie dick wird derselbe? Wie dick wird ferner die Vergoldung des Drahtes, wenn dazu 150 g Gold vom spezifischen Gewicht $s_1 = 19{,}3$ verwendet werden?

Aus den Gleichungen: $P = \pi r^2 l s$ und $P' = (2r + d)\pi d l s'$ ergibt sich

$$1.\ 2r = 2\sqrt{\frac{P}{\pi l s}} \text{ und } 2.\ d = -r + \sqrt{r^2 + \frac{P'}{\pi l s'}}$$

$$2r = 0{,}778 \text{ mm}; \qquad d = 0{,}0305 \text{ mm}.$$

k. 91, 10 182) Eine cylindrische Röhre hat eine Länge von 1,6 m, eine Wanddicke von 0,45 dm, eine lichte Weite von 1,34 dm. Wie groß die Gesamtoberfläche und das Gewicht derselben, wenn das spezifische Gewicht = 7,2? (Zuerst allgemein zu lösen, wenn die gegebenen Größen mit l, d, w, s bezeichnet werden.)

$$1.\ O = 2\pi(l + d)(w + d); \qquad 2.\ P = \pi l d s (w + d)$$

$$O = 185{,}012 \text{ qdm}; \qquad P = 291{,}513 \text{ kg}.$$

b) Pyramide.

k. 01, 10 183) Wie schwer ist eine Pyramide aus Messing (spez. Gewicht 8,4), deren Seitenkanten die Länge 13 dm haben und deren Basis ein gleichseitiges Dreieck von der Seite 8 dm ist, und wie groß ist die Oberfläche derselben?

Länge der Grundkante: a; der Seitenkante: l

$$1.\ P = V \cdot s = \frac{a^2 s}{12}\sqrt{3l^2 - a^2} = 942{,}925 \text{ kg}.$$

$$2.\ O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3 + \frac{3a}{2}\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} = 176{,}142 \text{ qdm}.$$

e. 96, 6 184) Eine Kugel vom Halbmesser $r = 10$ cm ist in der Entfernung des halben Halbmessers vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten. In den Schnittkreis ist ein Quadrat gezeichnet und über lelzterem im größeren Kugelabschnitt eine gerade Pyramide beschrieben, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie groß ist der Rauminhalt und wie groß die Oberfläche dieser Pyramide?

$$1.\ V = \frac{3}{4}r^3 = 750 \text{ ccm}; \quad 2.\ O = \frac{3r^2}{2}(1 + \sqrt{7}) = 546{,}8625 \text{ qcm}.$$

185) Auf einem Quadrat von der Seite a steht eine regelmäßige Pyramide gleich dem auf derselben Grundfläche stehenden Würfel. In der halben Höhe wird durch die Pyramide eine Schnittebene parallel der Grundfläche gelegt, und es soll nun die Gesamtoberfläche des Rumpfes unterhalb dieser Schnittebene berechnet werden. k. 93, 9

$$O = \frac{a^2}{4}(5 + 3\sqrt{37}) = 5{,}812\ a^2$$

c) Kegel.

186) Die Höhe und den Inhalt eines senkrechten Kreiskegels zu finden, wenn die Gesamtoberfläche w und der Halbmesser r der Grundfläche gegeben sind. k. 91, 9

Aus der Gleichung: $W = \pi r(s + r) = \pi r(r + \sqrt{h^2 + r^2})$

folgt 1. $h = \frac{1}{\pi r}\sqrt{w(w - 2\pi r^2)}$; 2. $V = \frac{r}{3}\sqrt{w(w - 2\pi r^2)}$

187) Ein Halbkreis vom Radius r wird zu einem Kegel gekrümmt; wie groß werden der Radius des Grundkreises, die Höhe und der Neigungswinkel der Mantellinie gegen die Grundkreisebene, und welches ist sein Inhalt? k. 99, 10

1. $r_1 = \frac{r}{2}$; 2. $h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; 3. $\angle\alpha = 60°$; 4. $V = \frac{\pi r^3}{24}\sqrt{3}$

188) Wie groß ist die Mantellinie desjenigen senkrechten Kreiskegels, der die Erdkugel längs des 49. Breitegrades berührt, wenn der Erdhalbmesser 6370 km mißt? Wie groß ist der Zentriwinkel des abgewickelten Kegelmantels, und welcher in der mathematischen Geographie vorkommenden Größe ist dieser Winkel gleich? k. 95, 10

Der Erdhalbmesser sei R, die geographische Breite: φ, so ist

1. die Mantellinie $s = R\ ctg\ \varphi = 5537{,}4$ km
2. der Centriwinkel $\lambda = 360\ sin\ \varphi = 271°\ 42'\ 21'', 6$

also λ gleich dem Winkel, um welchen sich an einem Ort unter dem 49.° geogr. Breite die Pendelebene scheinbar dreht.

189) Die Seitenkanten einer quadratischen Pyramide sind gleich den Grundkanten; auf dem der Basis einbeschriebenen Kreis steht ein Kegel von gleicher Höhe mit der Pyramide, der nach Inhalt und Oberfläche mit der Pyramide zu vergleichen ist. k. 98, 9

$$\frac{V_p}{V_k} = \frac{G_p}{G_k} = \frac{a^2}{\frac{\pi\, a^2}{4}} = \frac{4}{\pi} = 1 : 0{,}7854$$

$$\frac{O_p}{O_k} = \frac{a^2\,(\sqrt{3}+1)}{\frac{\pi\, a^2}{4}\,(\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{\pi} = 1 : 0{,}7854$$

Inhalte und Oberflächen dieser beiden Körper verhalten sich also gleich $\left(= 1 : \frac{\pi}{4}\right)$

k. 96,10 190) In einen Kegel, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche, ist ein Cylinder beschrieben, dessen Höhe gleich der Hälfte der Höhe des Kegels ist. Wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Körper?

$$O_k : O_c = \pi\, r^2 (\sqrt{5}+1) : \frac{3\,\pi\, r^2}{2} = 2(\sqrt{5}+1) : 3$$

$$= 2{,}15736 : 1 \quad \text{oder} \quad = 1 : 0{,}46352$$

k. 96,11 191) Ein gleichschenkliges Trapez rotiert um die große Parallelseite. Wie groß ist der Inhalt des Rotationskörpers, wenn ein Winkel des Trapezes $\alpha = 54^\circ\, 18'$, das Verhältnis der beiden Parallelen 5 : 3 und die Mittellinie des Trapezes 28,8 dm ist?

Der Rotationskörper setzt sich zusammen aus einem Cylinder und zwei gleichen Kegeln. Seien die beiden Grundlinien des Trapezes b und d, so ist die Cylinderhöhe $h = d$ und die Kegelhöhe $h_1 = \frac{b-d}{2}$; der Cylinder- und Kegelgrundkreishalbmesser $r = h_1\; tg\, \alpha$

$$\text{also} \quad K = \pi\, h_1^2\, tg^2\, \alpha \left(h + \frac{2}{3}\, h_1\right)$$

$$= 8{,}3266 \text{ cbm.}$$

e. 97, 6 192) Auf der Grundfläche eines Kegels vom Grundkreisradius r und der Höhe h steht ein Würfel, dessen obere Ecken im Mantel des Kegels liegen. Wie groß ist die Kante dieses Würfels?

Sei x die Kante des Würfels, so ergibt sich aus dem Achsenschnitt der beiden Körper:

$$x : h = \left(r - \frac{x}{2}\sqrt{2}\right) : r, \text{ woraus } x = \frac{2\, h\, r}{2\, r + h\sqrt{2}}$$

d) Pyramiden- und Kegelrumpf.

e. 01, 6 193) Es soll die Formel zur Berechnung des Kubikinhalts einer abgestumpften Pyramide aus der Formel für den Kubikinhalt der Pyramide abgeleitet und die erhaltene Formel dazu verwendet werden, den Kubikinhalt eines regulären vierseitigen Pyramidenrumpfes zu berechnen, dessen untere Grundkanten $= 4\,a$, dessen obere Grundkanten $= 3\,a$ und dessen Seitenkanten $= 5\,a$ sind.

Der erste Teil der Lösung ist im Lehrbuch enthalten.

Der zweite Teil ergibt: $K = \frac{7\,a}{6}\sqrt{2}\left\{16\,a^2 + 12\,a^2 + 9\,a^2\right\}$

$$= \frac{259\,a^3}{6}\sqrt{2} = 61{,}0469\,a^3$$

194) In einem Kegelrumpf verhalten sich die Halbmesser der Grundflächen wie 5 : 3, die Höhe ist gleich dem doppelten Durchmesser der kleinen Grundfläche. Das Volumen beträgt 2586 cbdm; gesucht die Gesamtoberfläche? k. 93, 10

Gegeben: $R : r = 5 : 3$ und $h = 4\,r$; gesucht: O

Aus $V = \frac{\pi\,h}{3}\left\{R^2 + R\,r + r^2\right\}$ ergibt sich damit

$$r = 3\sqrt[3]{\frac{V}{196\,\pi}}; \quad \text{also } s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2} = \frac{2\,r}{3}\sqrt{37}$$

$$\text{und somit } O = \pi\left\{(R + r)\,s + R^2 + r^2\right\} = \frac{1}{7}\,(17 + 8\sqrt{37})\sqrt[3]{\frac{V^2\pi}{14}}$$

$$= 1073{,}925 \text{ qdm.}$$

195) Das Gewicht einer steinernen Säule von der Form eines abgestumpften Kegels beträgt 6370 kg; es sollen der obere und untere Durchmesser $2\,r$ und $2\,r'$ berechnet werden, wenn sich $r : r' = 5 : 6$ und $r : h = 1 : 16$ verhalten, und wenn das spezifische Gewicht des Steines 2,5 beträgt. k. 02, 10

Aus den Gleichungen: $\frac{\pi\,h}{3}\,(r^2 + r\,r_1 + r_1^2) = \frac{P}{s}$; $r_1 = \frac{6}{5}\,r$ u. $h = 16\,r$

ergibt sich $2\,r = \sqrt[3]{\frac{75\,P}{182\,\pi\,s}} = 6{,}94$ dm

und $2\,r' = 8{,}33$ dm.

196) Eine metallene cylindrische Röhre, deren äußerer Durchmesser $d = 13$ cm, deren innerer $d' = 6$ cm, deren Länge $l = 18$ cm ist, soll in einen abgestumpften Kegel umgegossen werden, in welchem der untere Durchmesser $2\,r = 10$, der obere $2\,r' = 8$ cm ist. Wie hoch wird der Kegelrumpf? k. 92, 9

Aus der Gleichung: $\frac{\pi\,l}{4}\,(d^2 - d_1^2) = \frac{\pi\,h}{3}\,(r^2 + rr_1 + r_1^2)$

wird $h = \frac{3\,l\,(d^2 - d_1^2)}{4\,(r^2 + rr_1 + r_1^2)} = 29{,}434$ cm.

e. 99, 6 197) Aus einem Kegelrumpf, der durch r, r', h bestimmt ist, soll ein Doppelkegel, der die Grundkreise zu Grundflächen hat, herausgeschnitten werden; wie groß ist der Restkörper?

Der Inhalt des ausgeschnittenen Doppelkegels ist

$$K = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{r^3 + r_1^3}{r + r_1} = \frac{\pi h}{3}(r^2 - r r_1 + r_1^2)$$

somit Volumen des Restkörpers:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r r_1 + r_1^2) - \frac{\pi h}{3}(r^2 - r r_1 + r_1^2) = \frac{2 \pi h}{3} \cdot r r_1$$

d. h. gleich dem Doppelten eines Kegels von gleicher Höhe, dessen Grundkreishalbmesser das geometrische Mittel zu r und r_1 ist.

k. 95,11 198) Ein senkrechter Kreiscylinder vom Halbmesser $r = 0{,}75$ m und einer doppelt so großen Höhe hat eine konische Durchbohrung, deren beide Grundhalbmesser r_1 und r_2 sich wie $2 : 3$ verhalten. Wie groß sind diese Halbmesser, und wie groß ist die Gesamtoberfläche des röhrenförmigen Körpers, wenn das Volumen des Hohlraums halb so groß ist als das des massiven Cylinders?

Aus der Gleichung: $\pi r^2 h = \frac{2 \pi h}{3}\left\{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right\}$ wird mit Hilfe der gegebenen Werte $h = 2r$ und $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$

1. $r_1 = \frac{r}{19}\sqrt{114} = 0{,}42$ m; 2. $r_2 = \frac{3r}{38}\sqrt{114} = 0{,}63$ m;

3. $O = 6 \pi r^2 + \pi(r_1 + r_2)\sqrt{4 r^2 + (r_1 - r_2)^2} - \pi(r_1^2 + r_2^2)$
$$= \frac{\pi r^2}{38}\left\{189 + 5\sqrt{465}\right\} = 13{,}8 \text{ qm}.$$

k. 94,10 199) Ein Kegelrumpf und ein Cylinder sollen auf derselben Ebene stehen und dieselbe Achse haben, und der Cylindermantel werde von dem Kegelrumpfmantel in der Mitte der Höhe durchschnitten. Die Differenz der Inhalte der beiden Körper soll berechnet werden, wenn die Höhe h und die Halbmesser des Kegelrumpfes R und r gegeben sind.

$$V = K_K - K_{Cyl.} = \pi h \left\{\frac{R^2 + Rr + r^2}{3} - \frac{(R + r)^2}{4}\right\} = \frac{\pi h}{3}\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$$

d. h. der Unterschied der Inhalte beider Körper ist gleich dem Inhalt eines Kegels von derselben Höhe, dessen Grundkreishalbmesser die halbe Differenz der Radien des Kegelrumpfs ist.

e) Regelmässige Körper.

k. 03, 9 200) Ein reguläres Oktaeder hat einen Kubikinhalt von 40 ccm. Wie groß ist seine Kante und seine Oberfläche?

$$1.\ x = \sqrt[3]{\frac{3\,K}{2}\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{9\,K^2}{2}} = 4{,}3943 \text{ cm};$$

$$2.\ O = 2\,x^2\sqrt{3} = 3\sqrt[6]{48\,K^4} = 66{,}892 \text{ qcm}.$$

f) Kugel und Kugelteile.

201) Ein Kegel, dessen Achsenschnitt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist, steht mit vertikaler Achse auf der Spitze und ist bis zur Höhe $h = 10$ cm mit Wasser gefüllt. Um wieviel steigt das Wasser, wenn eine metallene Kugel vom Radius $r = 3$ cm darin untersinkt? k. 03, 10

Die Höhe des Wasserstandes nach Eintauchen der Kugel sei h_1; der gesuchte Höhenunterschied: x, so geben die Gleichungen:

$$1.\ h_1 - h = x;\quad 2.\ \frac{\pi\,h_1^3}{3} - \frac{\pi\,h^3}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3 \text{ oder}$$

$$h_1^3 - h^3 = 4\,r^3 \text{ den Wert } x = -h + \sqrt[3]{4\,r^3 + h^3} = 3{,}48 \text{ mm}.$$

202) Ein auf der Spitze stehender senkrechter hohler Kreiskegel vom Achsenschnitt 60° ist bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllt; eine Kugel vom Halbmesser $R = 0{,}5$ dm wird in denselben geworfen, wodurch das Wasser so hoch steigt, daß dessen Oberfläche die Kugel eben bedeckt. Wieviel Wasser enthielt der Kegel anfangs? k. 92, 10

Ursprüngliche Wassermenge: $x = 3\,\pi\,R^3 - \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{5}{3}\,\pi\,R^3$

$$= \frac{5\,\pi}{24} \text{ cdm} = 0{,}6545 \text{ Liter.}$$

203) Um eine Kugel vom Radius R ist ein Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben. Wie verhalten sich die Inhalte und die Oberflächen der drei Körper? k. 02, 9

a) Die Inhalte: Kugel: Cyl : Kegel $= \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 : 2\,\pi\,R^3 : 3\,\pi\,R^3$

$= 4 : 6 : 9;$

b) die Oberflächen: Kugel: Cyl.: Kegel $= 4\,R^2\,\pi : 6\,R^2\,\pi : 9\,R^2\,\pi$

$= 4 : 6 : 9$

204) Wie verhalten sich Mantellinie und Grundkreisradius eines Kegels, dessen Kubikinhalt doppelt so groß ist als der Kubikinhalt seiner Inkugel? e. 98, 6

Inhalt des Kegels: $K = \frac{\pi\,r^2}{3}\sqrt{s^2 - r^2}$

Inhalt der Inkugel: $K_1 = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{r^3\,(s - r)^3}{s^2 - r^2\sqrt{s^2 - r^2}}$

Daher Gleichung: $s^2 - r^2 = \dfrac{8\,r\,(s-r)^2}{(s+r)}$

woraus $\left(\dfrac{s}{r}\right)^2 - 6\left(\dfrac{s}{r}\right) + 9 = 0$

$s : r = 3 : 1$

e. 93, 8 205) In eine Kugel vom Radius R ist ein Cylinder einbeschrieben, d. h. die Grundkreise des Cylinders sind kleine Kreise der Kugel. Wie groß sind Grundkreisradius und Höhe dieses Cylinders, wenn die gesamte Cylinderoberfläche zur Kugeloberfläche sich wie $4 : 5$ verhält?

Der Grundkreisradius sei x, also die Höhe $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

somit Gleichung: $\dfrac{4\,R^2}{2\,x\,(x + 2\sqrt{R^2 - x^2})} = \dfrac{5}{4}$

gibt $x = \dfrac{2\,R}{5}\sqrt{5} = h$

oder $x = \dfrac{4}{5}\,R$ und $h = \dfrac{6}{5}\,R$

e. 91, 8 206) Um einen Kreis vom Radius r ist ein gleichschenkliges Trapez beschrieben, dessen Grundlinien sich wie $1 : 2$ verhalten. Wenn nun diese Figur um den zu den Trapezgrundlinien senkrechten Kreisdurchmesser als Achse gedreht wird, so erzeugt das Trapez einen Kegelrumpf, der Kreis eine Kugel. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Kegelrumpfes und wie verhält sich Oberfläche und Inhalt des Kegelrumpfes zu Oberfläche und Inhalt der Kugel?

Die Trapezgrundlinien seien $2\,r_1$ und $2\,r_2$, der Schenkel: s

so ist $r_1 = r\sqrt{2}$; $r_2 = \dfrac{r}{2}\sqrt{2}$ und $s = \dfrac{3\,r}{2}\sqrt{2}$

also 1. $O = \pi\left\{(r_1 + r_2)\,s + r_1^2 + r_2^2\right\} = 7\,\pi\,r^2$

2. $V = \dfrac{\pi\,h}{3}\left\{r_1^2 + r_1\,r_2 + r_2^2\right\} = \dfrac{7}{3}\,\pi\,r^3$

und $\dfrac{O}{O_1} = \dfrac{7\,\pi\,r^2}{4\,\pi\,r^2} = \dfrac{7}{4}$, $\dfrac{V}{V_1} = \dfrac{{}^7/_3\,\pi\,r^3}{{}^4/_3\,\pi\,r^3} = \dfrac{7}{4}$

d. h. die Oberflächen und Inhalte der beiden Körper haben dasselbe Verhältnis.

e. 03, 6 207) Einem Kreis ist ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten $2\,R$ und $2\,r$ umbeschrieben; wird die Figur um den auf den parallelen Seiten senkrechten Durchmesser des Kreises gedreht, so stellt sie den Achsenschnitt eines Kegelrumpfes mit den Grundkreisradien R und r dar, dem eine Kugel einbeschrieben ist. Die Differenz zwischen dem Mantel des Kegelrumpfes und der Oberfläche der Kugel, sowie die Differenz zwischen den Volumen beider Körper soll in R und r ausgedrückt werden. $R = 9$; $r = 4$.

Mantel des Kegelrumpfs: $M = (R + r)\,\pi\, s = (R + r)^2\,\pi$

Oberfläche der Kugel: $O = 4\,\pi\, R\, r$

also 1. $D_M = (R - r)^2\,\pi = 78{,}54$

Volumen des Kegelrumpfs: $V = \frac{2\,\pi\,\sqrt{R\,r}}{3}\left\{R^2 + R\,r + r^2\right\}$

Inhalt der Kugel: $V_1 = \frac{4}{3}\,\pi\, R\, r\,\sqrt{R\,r}$

somit 2. $D_V = \frac{2\,\pi}{3}\sqrt{R\,r}\left\{R^2 - R\,r + r^2\right\} = 766{,}55$

208) In einer Kugel ist der Durchmesser $2\,r$ im Verhältnis $1:5$ geteilt und im Teilpunkt auf ihm eine senkrechte Ebene errichtet. Wie verhält sich die Oberfläche des Kegels, der den Schnittkreis zur Basis und den größeren Abschnitt des Durchmessers als Höhe hat, zur Oberfläche der Kugel, und wie verhalten sich die Inhalte der beiden Körper? k. 01, 11

Halbmesser des Schnittkreises: $r^1 = \frac{r}{3}\sqrt{5}$, somit

Oberfläche des Kegels: $O = \pi\, r^1\left(r^1 + s\right) = \frac{5\,\pi\, r^2}{9}\left\{1 + \sqrt{6}\right\}$

also 1. $O : O_1 = \frac{5}{9}\left(1 + \sqrt{6}\right) : 4 = 0{,}4791 : 1 = 1 : 2{,}087$

Inhalt des Kegels: $V = \frac{\pi\, r_1^2}{3} \cdot \frac{5\,r}{3} = \frac{25}{81}\,\pi\, r^3$

woraus 2. $V : V_1 = \frac{25}{81} : \frac{4}{3} = 0{,}2314 : 1 = 1 : 4{,}32$

209) Einer Kugel ist ein Kegel einbeschrieben. Wie verhalten sich die krummen Oberflächen der Kugelabschnitte, in welche die Grundkreisebene des Kegels die Kugel teilt, wenn der Kegel seinem Kubikinhalte nach der 9. Teil desjenigen der beiden Kugelabschnitte ist, in welchem er nicht liegt? e. 95, 8

Halbmesser der Kugel sei R; die Höhen der beiden Kugelabschnitte: h bzw. $(2\,R - h)$

Aus der Gleichung: $\frac{\pi\, h^2}{3}\left(2\,R - h\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi}{3}\left(2\,R - h\right)^2\left(R + h\right)$

ergibt sich $h = \frac{R}{2}$

somit $\frac{O}{O^1} = \frac{h}{2\,R - h} = \frac{1}{3}$

e. 92, 8 210) Durch eine Kugel einen Schnitt zu legen, daß die in die entstehenden Abschnitte einbeschriebenen Berührungskugeln zusammen $^1|_3$ der gegebenen Kugel sind. Zugleich soll das Verhältnis der krummen Oberflächen und der Volumina beider Kugelteile angegeben werden.

Der Centralabstand der Schnittebene sei x; der Kugelhalbmesser: R, so sind die Radien der beiden Berührungskugeln $\frac{R-x}{2}$ bzw. $\frac{R+x}{2}$

$$\text{Gleichung: } \left(\frac{R-x}{2}\right)^3 + \left(\frac{R+x}{2}\right)^3 = \frac{R^3}{3} \text{ gibt } x = \frac{R}{3}$$

$$\text{also 1. } \frac{O}{O^1} = \frac{R-x}{R+x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{und 2. } \frac{V}{V^1} = \frac{h^2 (3R - h}{h_1^2 (3R - h_1)} = \frac{(R-x)^2 (2R+x)}{(R+x)^2 (2R-x)} = \frac{7}{20}$$

e. 94, 8 211) Von einem Punkte, der von der Oberfläche einer Kugel vom Radius r einen Abstand $= e$ hat, ist an die Kugel der Berührungskegel gelegt. Wie groß ist der zwischen Kegelmantel und Kugeloberfläche befindliche Raum?

Der gesuchte Rauminhalt ist die Differenz des Berührungskegels und des zugewandten Kugelabschnitts; sei des letzteren Höhe x und der Halbmesser seines Kugelkreises: r_1, so ist

$$x = \frac{e\,r}{(e+r)} \quad \text{und} \quad r_1{}^2 = (e+x)(r-x) = \frac{e\,r^2 (e + 2r)}{(e+r)^2}$$

$$\text{somit } K = \frac{\pi}{3}\left\{r_1{}^2 (e+x) - x^2 (3r - x)\right\} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{e^2 r^2}{(e+r)}$$

e. 00, 6 212) Von einem Kreise vom Radius r ist durch eine Sehne s ein Segment, das kleiner als der Halbkreis ist, abgeschnitten. Wie groß ist das Volumen des Umdrehungskörpers, der entsteht, wenn dieses Segment um den zu seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser als Achse gedreht wird, und was ergibt sich aus dem Resultate?

Das Volumen des Umdrehungskörpers ergibt sich als Differenz einer Kugelzone und eines Cylinders je von der Höhe s

$$V_U = V_Z - V_{Cyl.} = \frac{\pi s}{6}\left\{6\left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) + s^2\right\} - \pi s \left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi s^3}{6} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{s^3}{8} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^3$$

d. h. der Umdrehungskörper ist inhaltsgleich einer Kugel, die die Sehne s zum Durchmesser hat.

213) In einer Kugel vom Halbmesser R denke man sich einen Cylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat ist, eingezeichnet. Wie groß sind die Volumina der vier Stücke, in welche die Begrenzungsflächen des Cylinders die volle Kugel teilen? e. 02, 6

1. Cylinder $V = \pi r^2 h = 2 \pi r^3 \quad = \frac{\pi R^3}{2} \sqrt{2} \quad = 2{,}2214\ R^3$

2. Kugelkappe $V, = \frac{\pi h_1^2}{3} (3R - h_1) = \frac{\pi R^3}{12} \left(8 - 5\sqrt{2}\right) = 0{,}2437\ R^3$

3. Umdrehungskörper (cfr. 212) $V,, \quad = \frac{\pi R^3}{3} \sqrt{2} \quad = 1{,}4809\ R^3$