Königl. Gymnasium Esslingen.

Mathematische Aufgaben

der

evangelischen und katholischen

Konkurs-Prüfungen

1891–1903

geordnet und zusammengestellt

von

Professor **E. Motz.**

Beilage zum Programm Herbst 1904.

1904. Progr. Nr. 684.

Stuttgart.
J. B. Metzlersche Buchdruckerei.

II

III

IV.

e. 9

k. 9

Inhaltsangabe.

Abkürzungen.

e. 97, 3 = evang. Konkurs vom Jahre 1897, 3. Aufgabe. k. 96, 11 = kathol. Konkurs vom Jahre 1896, 11. Aufgabe.	cfr. Zusammenstellung.	60

I. Algebra.

a) Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

1) Wenn in einen Behälter in der Stunde 23 hl Wasser fließen, so fehlen nach einer gewissen Zeit noch 30 hl zur Füllung; wenn aber 27 hl in jeder Stunde zufließen, so sind nach derselben Zeit schon 10 hl übergeflossen. Wieviel hl faßt der Behälter? k. 92, 1

Inhalt des Behälters: x hl.

Gleichung: $$\frac{x-30}{23}=\frac{x+10}{27}$$

$x = 260$ hl.

2) Seit die Preise für Lebensunterhalt durchschnittlich um 25 % gestiegen sind, während der Zinsfuß von $4\frac{1}{2}$ % auf $3\frac{1}{2}$ % gesunken ist, kann ein Kapitalist nicht mehr 340 ℳ, wie früher, jährlich ersparen, sondern braucht alle Zinsen auf. Wie groß ist sein Vermögen? e. 92, 1

Betrag des Vermögens: x ℳ.

Gleichung: $$\frac{7x}{200}=\frac{5}{4}\left(\frac{9x}{200}-340\right)$$

$x = 20\,000$ ℳ.

b) Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

3) Zwei Körper bewegen sich auf einer kreisförmigen Bahn von 480 m Länge. Gehen sie gegeneinander, so treffen sie sich nach je 30 Sekunden; gehen sie hintereinander her, so kommen sie nach je 1 Minute 20 Sek. zusammen. Wie groß ist eines jeden Geschwindigkeit? k. 94, 2

Geschwindigkeiten der zwei Körper: x und y m.

Gleichungen: 1. $30(x+y)=480$

2. $80(x-y)=480$

$x = 11$ m; $y = 5$ m.

k. 95, 2 4) Drei Kameraden spielen um Geld. Beim ersten Spiel verliert der 1. an jeden der beiden andern so viel als jeder hatte; beim zweiten Spiel der 2. an jeden andern so viel als nun jeder besaß, und beim dritten Spiel ebenso der 3. Schließlich hatte jeder 48 ℳ. Wieviel hatte jeder anfangs?

Ursprünglicher Besitz des A: x ℳ, des B: y ℳ, des C: z ℳ.

Gleichungen: 1. $4(x - y - z) = 48$

2. $2(3y - x - z) = 48$

3. $(7z - x - y) = 48$

$x = 78$ ℳ ; $y = 42$ ℳ ; $z = 24$ ℳ

c) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

e. 98, 1 5) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{ax^2 - 2ax + a}{bx^2 + 2bx + b} = 1$$

Was kann zum voraus über das Resultat dieser Aufgabe gesagt werden?

Die auf die Nullform gebrachte Gleichung lautet:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{a+b}{a-b}\, x + 1 = 0$$

also müssen die Wurzeln a) beide positiv, b) reziprok sein.

Durch Anwendung des Lehrsatzes von der korrespondierenden Addition und Subtraktion erhält man:

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{b}{a} \qquad \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$x = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{a \pm 2\sqrt{ab} + b}{a-b}$$

e. 91, 1 6) Berechne x aus folgender Gleichung:

$$\sqrt[4]{\frac{100+x}{x-5}} - \sqrt[4]{\frac{x-5}{100+x}} = 1{,}5$$

Die Wurzel $\sqrt[4]{\frac{100+x}{x-5}} = u$ gesetzt, gibt die Gleichung: $u - \frac{1}{n} = \frac{3}{2}$

$u = 2$ und $-\frac{1}{2}$; $x = 12$ und -107

e, 97, 1 7) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{\frac{1}{x} + 1} = \sqrt{2x}$$

Quadriert gibt: $2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \frac{1}{x}$

woraus durch Zerlegung: 1. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0$; 2. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 2$

$x = \pm 1$ und $2 \pm \sqrt{5}$

8) Bestimme x aus nachstehender Gleichung: k. 93, 1

$$\sqrt{x+10}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x+43}$$

Quadriert und zusammengezogen, gibt:

$$3x^2-32x=1196$$

$$x=26 \quad\text{und}\quad -15\frac{1}{3}$$

9) x zu berechnen aus folgender Gleichung: e. 93, 1

$$\sqrt{x(1+x)}-\sqrt{x(1-x)}-\frac{2x^2}{\sqrt{1+2x}}=0$$

Durch $\sqrt{x}$ durchdividiert, gibt:

$$\sqrt{x}=0\,,\quad\text{also}\quad x_1=0\quad\text{und}\quad \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}}\ ;$$

quadriert und zusammengezogen, liefert die Gleichung:

$$1-4x^2+4x^4=0$$

$$(2x^2-1)^2=0$$

$$x_{,,}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x=0\quad\text{und}\quad \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

10) Den Wert von x aus folgender Gleichung zu bestimmen: e. 01, 1

$$\sqrt{9+8\sqrt{x+1}}+\sqrt{1+7\sqrt{x+1}}=\sqrt{19+30\sqrt{x+1}}$$

Nach zweimaligem Quadrieren erhält man die Gleichung:

$$(x+1)-14\sqrt{x+1}=-45$$

$$\text{woraus}\quad \sqrt{x+1}=9\ \text{und}\ 5$$

$$x=80\ \text{und}\ 24$$

11) Früh morgens fährt ein beschleunigter Personenzug von A ab nach B, zu gleicher Zeit fährt ein gewöhnlicher Personenzug von B ab nach A. Um $10^h\,45'$ vormittags kreuzen sich die Züge in der Station C. Der erste Zug kommt um $3^h\,45'$ nachmittags in B, der zweite um $5^h\,57'$ nachmittags in A an. Um wieviel Uhr fahren beide Züge von ihren Ausgangsstationen ab? e. 91, 2

Zeit bis zur Begegnung der zwei Züge: x Stunden.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7\frac{1}{5}}=\frac{1}{x}$$

$$x=6\ \text{Stunden.}$$

Antwort: Um $4^h\,45'$ morgens.

e. 96, 2 12) Ein Körper a bewegt sich vom Punkt C nach dem Punkt D mit $7\frac{1}{2}$ m Geschwindigkeit. Als er schon 36 m zurückgelegt hatte, läuft ein 2. Körper b von D nach C und macht in jeder Sekunde den zwanzigsten Teil des ganzen Weges. Nachdem b so viele Sekunden als seine Geschwindigkeit Meter beträgt, gelaufen ist, trifft er mit a zusammen. Wie viele Meter ist C von D entfernt?

Entfernung des Punktes C von D: x m

Gleichung: $$\left(\frac{x}{20}+\frac{24}{5}\right)\frac{15}{2}+\frac{x^2}{400}=x$$

$$x^2-250\,x+14400=0$$

woraus durch Zerlegung $x = 160$ oder 90 m.

k. 94, 3 13) Zwei Schuldsummen, 520 ℳ und 648 ℳ, werden, die 2. mit doppelt soviel Prozent Rabatt auf 100 ℳ als die 1., bar bezahlt mit 1100 ℳ. Wie groß war der Rabatt bei der ersten Summe?

Rabatt auf Hundert bei der ersten Summe: $x\,\%$

Gleichung: $$\frac{520\,.\,100}{100+x}+\frac{648\,.\,100}{100+2\,x}=1100$$

$$\frac{520}{100+x}+\frac{648}{100+2\,x}=11$$

$$11\,x^2+806\,x=3400$$

$$x=4\,\%$$

Antwort: der Rabatt bei der ersten Summe betrug 20 ℳ.

e. 95, 2 14) Ein Weinhändler beauftragt seinen Küfer, aus zwei Sorten Wein, von welchen das Liter der besseren Sorte 70 ₰ kostet, einen Wein zu mischen, von dem das Liter auf 60 ₰ zu stehen kommt. Indem der Küfer hierbei die ihm zu diesem Zweck vom Weinhändler angegebenen Verhältniszahlen verwechselt, kommt das Liter der Mischung statt auf 60 ₰ nur auf 55 ₰. Wie viel kostete das Liter der geringeren Sorte?

Preis des Liters der geringeren Sorte: x ₰.

Gleichung: $$10\,.\,70+(60-x)\,x=(70-x)\,55$$

$$x^2-115\,x=-3150$$

$$x=45 \text{ ₰}.$$

e. 99, 1 u. k. 96, 4 15)*) Die Entfernung zweier Punkte beträgt 5184 m. Von beiden Endpunkten gehen Körper aus, der erste 15 Minuten später als der andere; und ersterer legt in $1\frac{1}{3}$ Minuten $6\frac{2}{3}$ m mehr zu-

*) Die Aufgaben 15)–23) können auch mit zwei Unbekannten gelöst werden.

rück als der zweite. Beide Körper treffen in der Mitte des Weges zusammen. Welche Geschwindigkeiten haben diese Körper und nach welcher Zeit treffen sie zusammen?

Geschwindigkeit des ersten Körpers pro Minute: x m.

$$\text{Gleichung: } \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x} = \frac{15}{2592}$$

$$x^2 - 5x = 864$$

$$x = 32 \text{ m},$$

also Geschwindigkeit des zweiten Körpers $= 27$ m

und Zeit bis zur Begegnung 1): 1 Stunde 21 Minuten,

2): 1 Stunde 36 Minuten.

16) Aus zwei Orten, welche 13 Meilen von einander entfernt sind, gehen zwei Wanderer einander entgegen und treffen sich nach $10\frac{1}{2}$ Stunden. Wie viel Zeit braucht jeder zu 1 Meile Weges, wenn der erste dazu eine Viertelstunde weniger nötig hatte als der zweite? k. 91, 3

Zeitverbrauch des ersten Wanderers zu einer Meile Wegs: x Stunden

$$\text{Gleichung: } \frac{1}{x} + \frac{4}{4x+1} = \frac{26}{21}$$

$$104x^2 - 142x = 21$$

$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ Stunden},$$

also braucht der zweite Wanderer: $1\frac{3}{4}$ Stunden;

der erstere legt 7 Meilen, der andere 6 Meilen zurück.

17) Von zwei Orten A und B, welche 6,9 km von einander entfernt sind, gehen zwei Boten gleichzeitig ab und zwar beide in der Richtung von A über B hinaus. Der von A ausgehende Bote braucht zu 1 km 1 Minute 32 Sekunden weniger als der von B ausgehende, und jener holt diesen in 11 Stunden 33 Minuten ein. Wie lange braucht jeder zu 1 km? e. 94, 1

Zeitverbrauch des von A ausgehenden Boten zu 1 km Wegs: x Minuten.

$$\text{Gleichung: } 693\left(\frac{1}{x} - \frac{15}{15x+23}\right) = 6{,}9$$

$$15x^2 + 23x = 2310$$

$$x = 11\frac{2}{3} \text{ Minuten},$$

d. h. der aus A gehende Bote braucht: 11 Minuten 40 Sekunden,

und der aus B gehende Bote braucht: 13 Minuten 12 Sekunden.

18) Auf einer 33 km langen Straße gehen zwei Wanderer einander entgegen; sie sind gleichzeitig aufgebrochen und begegnen sich k. 03, 2

nach 3 Stunden; da der erste schneller geht als der zweite, so braucht er zu dem ganzen Weg 1 Stunde 6 Minuten weniger als der zweite. Wie lange braucht jeder zu 1 km?

Zeitverbrauch des ersten Wanderers zu 1 km: x Minuten.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{11}{60}$$

$$11\,x^2 - 9\,x = 120$$

$$x = 10 \text{ Minuten}$$

während der zweite braucht: 12 Minuten.

k. 99, 4 19) Aus den Orten A und B gehen zwei Reiter einander entgegen, der von A eine Stunde früher. 10 Stunden nach dem Abgang des letzteren begegnen sie einander. Wie lange braucht jeder zu 1 km, wenn der erste dazu noch $^1/_{20}$ Stunde weniger braucht als der zweite, und wenn $AB = 187\,^1/_2$ km ist?

Zeitverbrauch des ersten Reiters zu 1 km: x Minuten.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{120}{x} + \frac{108}{x+3} = \frac{75}{2}$$

$$25\,x^2 - 77\,x = 240$$

$$x = 5 \text{ Minuten,}$$

also braucht der zweite Reiter: 8 Minuten.

k. 01, 3 20) Eine Bahnstrecke von 65 km wird von einem Schnellzug in der einen, von einem Personenzug in der entgegengesetzten Richtung befahren. Beide Züge beginnen ihre Fahrt gleichzeitig und begegnen sich nach 40 Minuten; auf je 10 km braucht der Schnellzug 6 Minuten weniger als der Personenzug. Wie viel km legt jeder Zug in 1 Minute zurück?

Geschwindigkeit des Schnellzugs pro Minute: x km.

$$\text{Gleichung:}\quad x + \frac{10\,x}{10 + 6\,x} = \frac{13}{8}$$

$$24\,x^2 + 41\,x = 65$$

$$x = 1 \text{ km,}$$

somit Geschwindigkeit des Personenzugs: $\frac{5}{8}$ km.

k. 93, 3 21) Auf einer Eisenbahn geht von A nach dem 210 km entfernten Orte B ein Zug ab, und von B nach A ein anderer, der in jeder Minute $^1/_5$ km weniger zurücklegt und daher zwei Stunden länger braucht, um ans Ziel zu kommen. Wie groß sind die Geschwindigkeiten und Fahrzeiten?

Geschwindigkeit des ersten Zuges (aus A) pro ^{h}: x km.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{1}{x-12}-\frac{1}{x}=\frac{1}{105}$$

$$x^2-12x=1260$$

$$x=42\ \text{km},$$

also Geschwindigkeit des zweiten Zugs (aus B): 30 km und Fahrzeit des ersten: 5 Stunden, des zweiten: 7 Stunden.

22) Zu einer Arbeit braucht A zwei Tage länger als B. Wenn nun A drei Tage allein daran gearbeitet hat, so braucht B zum Rest der Arbeit $3\,{}^3/_4$ Tage. Wie lange jeder allein, und wie lange gemeinschaftlich? k. 92, 3

Arbeitszeit des A allein: x Tage.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{3\frac{3}{4}}{x-2}=\frac{x-3}{x}$$

$$4x^2-35x=-24$$

$$x=8\ \text{Tage},$$

also Zeit des B allein: 6 Tage,

und Zeit bei gemeinschaftlicher Arbeit: $\frac{x\,(x-2)}{2x-2}=3\frac{3}{7}$ Tage.

23) In einem gemeinschaftlichen Unternehmen haben A und B zusammen 20 000 ℳ gegeben. A läßt seine Einlage 11 Monate, B die seinige 9 Monate in dem Unternehmen stehen. Wie viel Mark hatte jeder eingelegt, wenn A an Einlage und Gewinn im ganzen 8968 ℳ, B 13 188 ℳ zurückerhält? e. 93, 2

Einlagekapital des A: x ℳ.

$$\text{Gleichung:}\quad \frac{8968-x}{11x}=\frac{x-6812}{9\,(20\,000-x)}$$

$$x^2+92890x=807120000$$

$$x=8000\ \text{ℳ},$$

und Einlage des B: 12000 ℳ

d) Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

24) 1. $2x^2-xy+2y^2=38$ k. 99, 1

2. $xy-\frac{120}{xy}\quad=2$

Aus Gleichung 2. ergibt sich $xy=12$ und -10

und per Substitution in 1. $x^2+y^2=25$ und 14

$$\text{woraus}\quad x=\pm 4,\ \pm 3,\ \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}\pm i\sqrt{6}\right)$$

$$y=\pm 3,\ \pm 4,\ \mp\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}\mp i\sqrt{6}\right)$$

k. 01, 1 25) 1. $x - z = 241 - xz$

2. $\sqrt{x-z} = \sqrt{xz} - 11$

Gleichung 2. quadriert und von 1. subtrahiert, gibt eine quadratische Gleichung in $\sqrt{xz}$, woraus $xz = 225$ und 16 und damit

$$x = 25,\ -9 \text{ und } \frac{1}{2}\left\{\ 225 \pm \sqrt{50689}\right\} (= 225{,}07 \text{ und } -0{,}07)$$

$$z = 9,\ -25 \text{ und } \frac{1}{2}\left\{-225 \pm \sqrt{50689}\right\} (= 0{,}07 \text{ und } -225{,}07)$$

e. 02, 1 26) 1. $x + y = xy$

2. $\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 3xy - 10$

Die Differenz der Quadrate der beiden Gleichungen gibt:

$$8(xy)^2 - 58xy = 99,$$

woraus $xy = 4\frac{1}{2}$ und $2\frac{3}{4}$; diesen Wert mit der quadrierten Gleichung 1. kombiniert, liefert $(x - y)$ und damit

$$x = 3,\ \frac{3}{2} \text{ und } \frac{1}{8}(11 \pm i\sqrt{55}) \quad y = \frac{3}{2},\ 3 \text{ und } \frac{1}{8}(11 \mp i\sqrt{55})$$

k. 98, 1 27) 1. $\frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{x-y}{1-xy} = -\frac{1}{7}$

Aus Gleichung 1. ergibt sich $(x - y) = 2$ und mit Hilfe dieses Wertes aus 2.: $xy = 15$

$$x = 5 \text{ und } -3\ ;\ y = 3 \text{ und } -5$$

e. 96, 1 28) 1. $x^3 + y^3 = \frac{35}{36}x^2y^2$

2. $x + y = 5$

Gleichung 2. kubiert und um 1. vermindert, liefert nach Substitution des Wertes von $(x + y)$ aus 2. eine quadratische Gleichung in xy, woraus $xy = 6$ und $-21\frac{3}{7}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3,\ 2 \text{ und } \frac{5}{2}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{31}{7}}\right\} (= +7{,}761) \\ y &= 2,\ 3 \text{ und } \frac{5}{2}\left\{1 \mp \sqrt{\frac{31}{7}}\right\} (= -2{,}761) \end{aligned}\right\} \text{und umgekehrt.}$$

k. 02, 1 29) 1. $4x^2 - 5xy + 6y^2 = 40$

2. $3x^2 + 7xy - 2y^2 = 36$

Indem man die Glieder mit xy nach rechts bringt und dann durch die Kombination der beiden Gleichungen zunächst x^2 und y^2 bestimmt, erhält man

3. $13\,x^2 = 148 - 16\,x\,y \qquad 26\,y^2 = -24 + 43\,x\,y$

Diese beiden Gleichungen, mit einander multipliziert, liefern eine quadratische Gleichung für $x\,y$.*) Man erhält:

$$x\,y = 6 \quad \text{und} \quad \frac{296}{513}$$

Aus 3. ergeben sich darnach die Unbekannten unmittelbar:

$$x = \pm 2 \quad \text{und} \quad \pm \frac{74}{\sqrt{513}} \,(= \pm 3{,}267)$$

$$y = \pm 3 \quad \text{und} \quad \pm \frac{4}{\sqrt{513}} \,(= \pm 0{,}176)$$

30) 1. $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{a+b}{a\,b}$ e. 95, 1

2. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Zwei Wurzeln der Gleichungen sind zum voraus erkenntlich, nämlich

$$x = a \text{ und } b \quad , \quad y = b \text{ und } a$$

Wenn man die erste Gleichung, nachdem der Nenner von der linken auf die rechte Seite gebracht ist, quadriert, und in der neuen Gleichung den Wert aus der Gleichung 2. substituiert, erhält man eine quadratische Gleichung für xy:

$$\frac{(a+b)^2}{a^2 b^2}\,x^2 y^2 - 2\,x\,y = a^2 + b^2$$

woraus $\quad x\,y = a\,b \quad$ (s. oben) und $\quad -\dfrac{(a^2+b^2)\,a\,b}{(a+b)^2}$

Die Kombination dieser Werte mit Gleichung 2. liefert $(x+y)$ und $(x-y)$ und damit die Unbekannten selbst:

$$x = a\,,\, b \text{ und } -\frac{(a^2+b^2)}{2\,(a+b)}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\,a\,b}{a^2+b^2}}\right)$$

$$y = b\,,\, a \text{ und } -\frac{(a^2+b^2)}{2\,(a+b)}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\,a\,b}{a^2+b^2}}\right)$$

31) Löst man die Aufgabe $\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = a \\ xy \quad = b \end{Bmatrix}$ nach den bekannten zwei k. 94. 1

Methoden, so erhält man zwei der Form nach von einander verschiedene Resultate. Es soll die Übereinstimmung derselben gezeigt und aus ihnen eine Regel über die Umwandlung der Summe zweier Quadratwurzeln in eine Wurzel abgeleitet werden.

Die erste Lösungsmethode liefert für die Unbekannten die Werte

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b}\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b}),$$

die zweite Methode gibt:

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\,b^2}} \qquad y = \sqrt{\frac{a}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4\,b^2}}$$

*) Die Gleichungen durch einander dividiert, oder, was dasselbe ist, die rechten Seiten eliminiert, führt zu dem Verhältnis der Unbekannten.

Beide Werte, je von x und y, quadriert, gibt übereinstimmende Resultate, daher:

Regel: „Die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln aus Summe und Differenz derselben Größen ist gleich der Quadratwurzel aus dem entwickelten Quadrat dieser Summe oder Differenz der beiden Wurzeln."

e. 92, 2 32) Ein Unternehmer bezahlte täglich eine bestimmte Summe für Taglöhne. Als er die Zahl der Arbeiter auf 4 mehr als das Doppelte erhöht, den Taglohn aber um $^1/_2$ ℳ verringert hatte, mußte er täglich 128 ℳ im ganzen bezahlen. Ohne Lohnverminderung hätte er täglich 85 ℳ mehr als anfangs auslegen müssen. Wie viele Arbeiter waren es anfangs, und welchen Taglohn zahlte er ihnen?

Zahl der Arbeiter: x Mann; Betrag des Taglohns: y ℳ.

Gleichungen: 1. $(2x+4)\left(y-\frac{1}{2}\right)=128$

2. $(2x+4)\,y = xy+85$

Lösung der Gleichungen durch Substitution.

Entweder war die Zahl der Arbeiter 6 bei einem Taglohn von 8 ℳ 50 ₰ oder 30 bei einem Taglohn von 2 ℳ 50 ₰.

k. 98, 2 33) Ein Fabrikbesitzer zahlt den Arbeitern täglich 108 ℳ aus. Aus Mangel an Arbeit mußten 8 Arbeiter entlassen werden, und der Taglohn der übrigen Arbeiter wurde um 50 ₰ herabgesetzt, so daß die tägliche Lohnausgabe nachher 70 ℳ betrug. Wie viel Arbeiter ursprünglich, und wie hoch der Taglohn anfangs?

Ursprüngliche Zahl der Arbeiter: x Mann, und anfängliche Höhe des Taglohns: y ℳ.

Gleichungen: 1. $xy = 108$

2. $(x-8)\left(y-\frac{1}{2}\right)=70$

Lösung durch Substitution gibt endlich

$$x^2-84x=-1728$$
$$x=48 \text{ und } 36,$$
$$\text{woraus } y=2\frac{1}{4} \text{ und } 3$$

Entweder waren es ursprünglich 48 Arbeiter bei einem Taglohn von 2 ℳ 25 ₰, oder 36 Arbeiter bei einem solchen von 3 ℳ.

e. 03, 2 34) 50 Liter Wein zu 1 ℳ 50 ₰ das Liter und eine gewisse Anzahl Liter einer andern Sorte von unbekanntem Preis geben eine Mischung zu 1 ℳ 35 ₰ das Liter. Werden die Quantitäten der zwei gemischten Sorten unverändert gelassen, aber die Preise vertauscht, so ist das Liter der zweiten Mischung 75 ₰ wert. Wie viel Liter der zweiten Sorte wurden zur ersten Mischung genommen, und wie hoch war der Preis?

Literzahl der zweiten Sorte: x Liter; Preis des Liters derselben: y ℳ.

Gleichungen: 1. $27\,x - 20\,x\,y = 150$

2. $3\,x + 200\,y = 150$

Gleichung 2. mit x multipliziert und um die zehnfache Gleichung 1. vermindert, gibt:

$x^2 + 40\,x = 500$, woraus $x = 10$ Liter und $y = 60$ ₰.

35) Einer Mischung von Kupfer und Silber werden 20 g Feinsilber zugesetzt, dadurch erhöht sich der Gehalt an reinem Silber in der Mischung um 20 %. Der Gewichtsunterschied zwischen Silber und Kupfer nach dem Zusatz ist $1\,{}^1\!/_2$ mal so groß als der zwischen Kupfer und Silber vor dem Zusatz. Wie viel g Silber und Kupfer waren es anfänglich? [Zur Vermeidung etwaiger Mißverständnisse wurde mündlich bemerkt: „Gesetztenfalls der Silbergehalt hätte ursprünglich 12 % betragen, so betrüge er nach dem Zusatze 32 %.“] e. 99, 2

Ursprüngliches Gewicht des Silbers: x g, des Kupfers: y g.

Gleichungen: 1. $\dfrac{100\,(x+20)}{x+y+20} = \dfrac{100\,x}{x+y} + 20$

2. $(x - y + 20) = \dfrac{3}{2}\,(y - x)$

Lösung durch Substitution liefert die Gleichung:

$x^2 - 7\,x = 144$

$x = 16$ g Silber,

$y = 24$ g Kupfer.

36) Von Ulm fährt ein Schnellzug über Aulendorf nach Friedrichshafen, der auf der ganzen Strecke eine bestimmte, sich gleichbleibende Geschwindigkeit beibehalten soll. Die Entfernung Ulm—Aulendorf verhält sich zu der Entfernung Aulendorf—Friedrichshafen wie 3 : 2. Auf der Strecke Ulm—Aulendorf fährt der Zug mit einer um $3\,{}^1\!/_8$ km kleineren Geschwindigkeit als vorgeschrieben, und verspätet sich deshalb um 5 Minuten. Um diese Verspätung hereinzuholen, fährt der Zug auf der Strecke Aulendorf — Friedrichshafen mit einer um $5\,{}^5\!/_9$ km größeren Geschwindigkeit, als vorgeschrieben. Wie groß ist die vorgeschriebene Geschwindigkeit des Zuges, und wie weit sind Ulm, Aulendorf und Friedrichshafen von einander entfernt? (Die Aufenthalte auf den Stationen sind außer acht zu lassen, e. 98, 2

und unter Geschwindigkeit ist jeweils der Weg pro Stunde zu verstehen.)

Vorgeschriebene Geschwindigkeit des Zuges pro $\underline{h}$: x km. Entfernung Ulm—Aulendorf: y km.

Gleichungen: 1. $$\frac{y}{x-3\frac{1}{8}}=\frac{y}{x}+\frac{1}{12}$$

2. $$\frac{2y}{3\left(x+5\frac{5}{9}\right)}=\frac{2y}{3x}-\frac{1}{12}$$

Die Gleichungen addiert, gibt eine lineare Gleichung in x, woraus $x =$ 50 km, und damit ergibt sich für y, die Entfernung Ulm-Aulendorf: $62\frac{1}{2}$ km und für $\frac{2}{3}y$, die Entfernung Aulendorf-Friedrichshafen: $41\frac{2}{3}$ km.

e. 97, 2 37) Ein Schienenstrang läuft neben einem Flusse hin. Um 8^h morgens fährt auf demselben ein Zug von einem Orte A gegen den 114 km. stromabwärts gelegenen Ort B ab und legt in der Stunde 38 km zurück. Ebenfalls um 8^h morgens fahren von B zwei Dampfschiffe in entgegengesetzter Richtung ab, und zwar hat das stromabwärts fahrende eine doppelt so große Geschwindigkeit als das stromaufwärts fahrende. Der Zug begegnet dem stromaufwärts fahrenden Schiffe 3 Stunden 36 Minuten früher, als er das stromabwärts fahrende einholt. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Dampfschiffe, um wie viel Uhr begegnet der Zug dem stromaufwärts fahrenden, und um wie viel Uhr holt er das stromabwärts fahrende ein?

Geschwindigkeit des stromaufwärts fahrenden Schiffes: x km, Zeit bis zur Begegnung desselben mit dem Zug: y Stunden.

Gleichungen: 1. $38y + xy = 114$

2. $38\left(y+3\frac{3}{5}\right)-2x\left(y+3\frac{3}{5}\right)=114$

Lösung durch Substitution führt zu der Gleichung:

$$2x^2 + 133x = 1444$$

woraus $x = 9\frac{1}{2}$ km und $y = 2\frac{2}{5}$ Stunden,

also Geschwindigkeiten der beiden Schiffe: $9\frac{1}{2}$ und 19 km.

Begegnung mit dem stromaufwärts fahrenden Schiff um 10^h 24 Minuten und Einholung des stromabwärts fahrenden Schiffes um 2^h Nachm.

e) Quadratische Gleichungen mit drei und vier Unbekannten.

Die Werte der Unbekannten zu ermitteln aus nachfolgenden Gleichungen:

38) 1. $(2x-y)(x+y+z)=240$ k. 95, 1

2. $(2y-z)(x+y+z)=216$

3. $(2z-x)(x+y+z)=120$

Die Gleichungen addiert, gibt $(x+y+z)=\pm 24$; damit ergeben sich aus den nunmehr linearen Gleichungen die Werte:

$$x=\pm 9\ ;\quad y=\pm 8\ ;\quad z=\pm 7$$

39) 1. $\dfrac{xyz}{x+y}=30$ k. 96, 1

2. $\dfrac{xyz}{x+z}=12\dfrac{6}{7}$

3. $\dfrac{xyz}{y+z}=18$

*) Aus den Gleichungen 1. und 2., bzw. 1. und 3. ergeben sich nach Entfernung der Nenner die zwei neuen:

$$4x+7y-3z=0 \qquad 5x+2y-3z=0$$

durch Elimination von z, bzw. y aus diesen letzteren erhält man die Werte

$$y=\frac{x}{5} \quad \text{und} \quad z=\frac{9x}{5}$$

welche, in eine der drei gegebenen Gleichungen substituiert, die Unbekannten liefern:

$$x=\pm 10\ ;\quad y=\pm 2\ ;\quad z=\pm 18$$

40) 1. $x+y+z=24$ k. 91, 2

2. $xz=63$

3. $(x+z)y=128$

Den Wert $(x+z)$ aus den Gleichungen 1. und 3. ausgedrückt, gibt eine quadratische Gleichung in y

$$x=9\ ,\ 7 \text{ und } 4\pm i\sqrt{47}$$
$$y=16 \quad \text{und } 8$$
$$z=7\ ,\ 9 \text{ und } 4\mp i\sqrt{47}$$

41) 1. $x+y+z=30$ k. 92,

2. $x^2+y^2=z^2$

3. $xy=4\dfrac{8}{13}z$

---

*) Eine andere Lösung ist: Man bringt die Gleichungen zunächst auf die Form $x+y=\frac{1}{3}xyz$ usw. und addiert, indem man der Reihe nach je eine der Gleichungen mit (−1) durchmultipliziert. Dies gibt $x=\frac{1}{36}xyz$ oder $yz=36$ usw.

2

Die Werte von $(x+y)^2$, einerseits aus Gleichung 1. durch Quadrieren, andrerseits aus Gleichung 2. und 3. durch Addieren gebildet, einander gleichgesetzt, geben eine quadratische Gleichung in z

$$x = 12 \text{ oder } 5\ ;\quad y = 5 \text{ oder } 12\ ;\quad z = 13$$

k. 01, 2 42) Die Summe von drei Zahlen ist 21; die zweite Zahl ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern, und das Produkt aus der zweiten Zahl und der Summe der beiden andern ist 90. Wie heißen die drei Zahlen?

Die drei Zahlen heißen x, y und z

Gleichungen: 1. $x + y + z = 21$

2. $y^2 = xz$

3. $y(x+z) = 90$

$(x+z)$ aus den Gleichungen 1. und 3. ausgedrückt, gibt $y = 6$ und 15; und mit Hilfe von Gleichung 3.:

$$x = 3 \pm 6i\sqrt{6},\ 12 \text{ und } 3$$
$$z = 3 \mp 6i\sqrt{6},\ 3 \text{ und } 12$$

Die drei Zahlen heißen 12, 6 und 3

oder $(3 + 6i\sqrt{6})$, 15 und $(3 - 6i\sqrt{6})$

k. 93, 2 43) In einer stetigen geometrischen Proportion ist die Summe der drei Glieder = 195, das Produkt des Mittelgliedes mit der Summe der beiden äußeren = 6750. Welches ist die Proportion?

Die Glieder der Proportion seien x, y, z

Gleichungen: 1. $x + y + z = 195$

2. $y^2 = xz$

3. $y(x+z) = 6750$

Lösung wie bei 42).

Die Proportion lautet: $135 : 45 = 45 : 15$

oder $\frac{15}{2}(3 + i\sqrt{391}) : 150 = 150 : \frac{15}{2}(3 - i\sqrt{391})$

e. 00, 2 44) Ein Trog kann durch eine Röhre gefüllt und durch eine zweite geleert werden, und zwar fließen durch diese letztere in jeder Sekunde $^3/_4$ Liter ab. Wird nur die Abflußröhre geöffnet, so entleert sich der volle Trog 40 Minuten früher, als wenn beide Röhren geöffnet sind. Werden bei vollem Troge beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so enthält der Trog nach 1 Stunde 40 Minuten noch 6 Hektoliter. Wie lange steht es jetzt noch an, bis der Trog ganz leer sein wird?

Zufluß durch die erste Röhre pro Sekunde: a Liter; Zeit, den vollen Trog zu leeren bei gleichzeitiger Öffnung beider Röhren: t Minuten; endlich Zeit, die noch erforderlich, um den Rest von 6 hl zu leeren: x Minuten.

Gleichungen: 1. $(45 - 60\,a)\;t = 45\,(t - 40)$

2. $(45 - 60\,a)\;x = 600$

3. $(t - x) \quad = 100$

Gleichung 2. durch 1. dividiert und aus 3. den Wert von t substituiert, gibt

$$\frac{x}{x + 100} = \frac{600}{45\,(x + 60)}$$

$$3\,x^2 + 140\,x = 4000$$

$$x = 20 \text{ Minuten } \left[t = 2 \text{ Stunden}, \; a = \frac{1}{4} \text{ Liter}\right]$$

45) Die Werte von x, y, z u. w aus folgenden 4 Gleichungen zu berechnen: e. 94, 3

1. $x + y = 3$ 3. $x^2 + z^2 = 10$

2. $z + w = 7$ 4. $y^2 + w^2 = 20$

Man eliminiere x und z aus der 3. Gleichung mit Hilfe der Werte aus 1. und 2. und kombiniere das Resultat mit Gleichung 4. Man erhält:

5. $3\,y + 7\,w = 34$

Aus 4. und 5. lassen sich nun y und w leicht ermitteln. Es werden

$$x = 1 \quad \text{und} \quad 1\frac{14}{29}$$

$$y = 2 \quad \text{und} \quad 1\frac{15}{29}$$

$$z = 3 \quad \text{und} \quad 2\frac{23}{29}$$

$$w = 4 \quad \text{und} \quad 4\frac{6}{29}$$

46) Vier Zahlen, deren Quadrate zusammen $= 125$ sind, bilden eine Proportion, in welcher das erste Glied um 5 größer ist als das letzte, und das zweite Glied um 2 größer als das dritte. Wie heißt die Proportion? e. 00, 1

Die vier Zahlen seien x, y, z und u

Gleichungen: 1. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 125$

2. $x\,u = y\,z$

3. $x - u = 5$

4. $y - z = 2$

Die quadrierten Gleichungen 3. und 4. je von 1. subtrahiert, geben mit Benützung der Gleichung 2. die Werte von $(y + z)$, bzw. $(x + u)$, welche in Verbindung mit 3. und 4. die Unbekannten ergeben.

Die Proportion heißt: $8 : 6 = 4 : 3$

oder $(-3) : (-4) = (-6) : (-8)$

47) Von 4 Zahlen bilden die drei ersten eine arithmetische Reihe, deren Summe $= 24$, die letzten drei eine geometrische Reihe, deren Summe $= 38$ ist; wie heißen die Zahlen? k. 99, 3

Die vier Zahlen seien x, y, z und w.

Gleichungen: 1. $x + y + z = 24$

2. $x - y = y - z$

3. $y + z + w = 38$

4. $y : z = z : w$

Aus Gleichung 1. und 2. ergibt sich $y = 8$; diesen Wert in 3. und 4. substituiert und aus den neugewonnenen Gleichungen w eliminiert, liefert die quadratische Gleichung in z:

$$z^2 + 8z = 240$$

$$z = 12 \text{ und } -20$$

und damit $w = 18$ und 50

$x = 4$ und 36

Die Zahlen heißen somit: 4, 8, 12 und 18

oder 36, 8, — 20 50

f) Arithmetische Reihen.

Bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben über arithmetische Reihen sei das Anfangsglied der Reihe: a, die Differenz: d, das letzte Glied: z, die Anzahl der Glieder: n und die Summe der Reihe: S.

k. 96, 2 48) Die Summe des vierten und sechsten Gliedes einer arithmetischen Reihe ist 28; das Produkt des dritten und zehnten Gliedes 232. Wie heißt das erste Glied und die Differenz?

Gesucht: Anfangsglied a und Differenz d.

Gleichungen: 1. $2a + 8d = 28$

2. $(a + 2d)(a + 9d) = 232$

Lösung durch Substitution liefert:

$$10d^2 - 42d = -36$$

$d = 3$ und $1{,}2$

$a = 2$ und $9{,}2$

k. 91, 1 49) In einer arithmetischen Reihe ist die Summe des dritten und siebten Gliedes $= 6$, das Quadrat des sechsten Gliedes 25. Wie groß die Summe der ersten zehn Glieder? (Man beachte die Doppelwerte.)

Gesucht: Summe S der ersten zehn Glieder.

Gleichungen: 1. $(a + 2d) + (a + 6d) = 6$

2. $(a + 5d) = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Aus 1. ergibt sich das fünfte Glied $= 3$, woraus durch Kombination mit Gleichung 2. $d = 2$ und -8

und $a = -5$ und 35

somit $S = (a + z)\frac{10}{2} = 40$ und -10

[Die Reihe lautet: —5, —3, —1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

und 35, 27, 19, 11, 3, -5, -13, -21, -29, -37]

50) Das vierte Glied einer arithmetischen Reihe ist $= 8$, das siebte k. 95, 3
Glied $= 14$, die Summe $= 72$. Gesucht das erste und letzte Glied und die Anzahl der Glieder

Gesucht: a, z und n.

Gleichungen:
$$1.\quad a + 3\,d = 8$$
$$2.\quad a + 6\,d = 14$$
$$3.\quad (a + z)\frac{n}{2} = 72$$

Aus Gleichung 1. und 2 ergibt sich unmittelbar $d = 2$ und $a = 2$ und aus Gleichung 3. folgt nach Substitution des Wertes für z:
$$n^2 + n = 72$$
$$n = 8\ ,\quad \text{also}\quad z = 16$$

51) Ein Eisenwerk führt einen Auftrag in der Weise aus, daß es e. 03, 1
jede Woche 200 Zentner mehr liefert als in der vorangehenden; in der letzten liefert es 4800 Zentner. Auf diese Weise wird der Auftrag neun Wochen früher erledigt, als wenn es wöchentlich immer gleich viel, nämlich das doppelte Quantum der ersten Woche geliefert hätte. Wie groß war das ganze Quantum? Wieviel wurde in der ersten Woche geliefert? Wie viele Wochen erforderte die Erledigung des Auftrags?

Gegeben: $d = 200$; $z = 4800$; gesucht a und n

Gleichungen:
$$1.\quad (a + z)\frac{n}{2} = 2\,a\,(n + 9)$$
$$2.\quad z = a + (n - 1)\,d$$

Lösung durch Substitution gibt die Gleichung:
$$3\,d\,n^2 - (2\,z - 33\,d)\,n = 36\,(z + d)$$
woraus nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte:
$$n^2 - 5\,n = 300$$
$$n = 20 \text{ Jahre};\quad a = 1000 \text{ Ztr. und } S = 58\,000 \text{ Ztr.}$$

52) Bei einem Wettrennen werden 2040 ℳ als Preise verteilt. k. 98, 3
Der erste erhält 500 ℳ, jeder folgende 70 ℳ weniger als der vorausgehende. Wie viele Bewerber?

Gegeben: $a = 500$; $d = -70$; $S = 2040$; gesucht: n

$$\text{Gleichung:}\quad S = \left\{2\,a + (n - 1)\,d\right\}\frac{n}{2}$$

$$\text{woraus}\quad n = -\frac{2\,a - d}{2\,d} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,a - d}{2\,d}\right)^2 + \frac{2\,S}{d}} = 8 \text{ Bewerber}$$

53) Ein Verbrecher entflieht und macht am ersten Tage 56 km, e. 92, 3
an jedem folgenden Tag 2 km weniger als am vorhergehenden. 2 Tage nach seiner Flucht wird ihm ein Beamter nachgeschickt, dieser macht am ersten Tage 50 km, an jedem folgenden 10 km mehr als am vorhergehenden. Wann holt er ihn ein?

Gegeben: $a = 56$; $d = -2$; und $a_1 = 50$; $d_1 = 10$; gesucht: n

$$\text{Gleichung:}\quad \left\{2\,a + (n-1)\,d\right\}\frac{n+2}{2} = \left\{2\,a_1 + (n-1)\,d_1\right\}\frac{n}{2}$$

woraus mit den gegebenen Zahlenwerten: $3\,n^2 - 4\,n = 55$

$$n = 5\,,$$

d. h. nach 5 Tagen holt ihn der Beamte ein.

g) Geometrische Reihen.

k. 02, 2 54) Fünf Personen wollen eine Schuld so bezahlen, daß ihre Anteile eine geometrische Reihe bilden; die drei niedersten Anteile betragen zusammen 380 ℳ, und die zwei niedersten zusammen sind um 20 ℳ größer als der dritte Anteil. Wieviel zahlt jede der fünf Personen, und wieviel beträgt die ganze Schuld?

Das Anfangsglied der geometrischen Reihe sei a, ihr Quotient: q, so daß die Anteile seien a, $a\,q$, $a\,q^2$, $a\,q^3$ und $a\,q^4$

Gleichungen: 1. $a + a\,q + a\,q^2 = 380$

2. $a + a\,q - a\,q^2 = 20$

Addition der Gleichungen gibt $a = \dfrac{200}{1+q}$, welcher Wert in Gleichung 1. substituiert, die quadratische Gleichung $10\,q^2 - 9\,q = 9$ liefert.

$$q = \frac{3}{2}\,,\quad \text{also}\quad a = 80\ \text{ℳ} \ \text{und}\ S = \frac{a\,(q^5-1)}{q-1} = 1055\ \text{ℳ}$$

e. 02, 2 55) In einem Gefäß befanden sich 180 Liter Weingeist. Eine bestimmte Menge Wasser wurde hinzugefügt und mit dem Weingeist vermischt und hierauf ebensoviel aus der Mischung geschöpft, als vorhin Wasser hinzugefügt wurde. Wenn nun dieser Vorgang 25mal hintereinander vollzogen wird und zuletzt nur noch der 113. Teil des ursprünglichen Weingeistes übrig bleibt, wieviel Liter Wasser wurden jedesmal hinzugesetzt?

Anzahl der zugesetzten Liter Wasser: x, also gesucht $q = \dfrac{180}{180+x}$,

wenn gegeben $a = 180$ und $z = \dfrac{180}{113}$ und $n = 25$

$$\text{Gleichung:}\quad 180\,.\left(\frac{180}{180+x}\right)^{25} = \frac{180}{113}$$

$$x = 180\left(\sqrt[25]{113} - 1\right) = 37{,}5\ \text{Liter.}$$

k. 03, 1 56) Eine arithmetische und eine geometrische Reihe haben folgende Eigenschaften:

Die Summe der ersten 10 Glieder der arithmetischen Reihe ist 155; das Anfangsglied der geometrischen Reihe ist gleich der Differenz der arithmetischen, und der Quotient der geometrischen

Reihe ist gleich dem Anfangsglied der arithmetischen, die Summe der zwei ersten Glieder der geometrischen Reihe ist $= 9$. Wie heißen die Reihen?

Das Anfangsglied der arithmetischen Reihe sei a, die Differenz: d, das Anfangsglied der geometrischen Reihe sei: a', der Quotient: q.

Gleichungen: 1. $\left\{2a + (n-1)d\right\}\frac{n}{2} = 155$ 2. $d + da = 9$

Lösung durch Substitution gibt mit dem gegebenen Zahlenwert für n:

$$2a^2 - 29a = -50$$

woraus $a = 12\frac{1}{2}$ und 2; $d = \frac{2}{3}$ und 3; somit die Reihen:

I. Arithm.: $2, \quad 5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \quad 17, \quad 20, \quad 23 \ldots$

oder: $12\frac{1}{2}, \quad 13\frac{1}{6}, \quad 13\frac{5}{6}, \quad 14\frac{1}{2}, \quad 15\frac{1}{6}, \quad 15\frac{5}{6}, \quad 16\frac{1}{2}, \quad 17\frac{1}{6} \ldots$

II. Geometr.: $3, \quad 6, \quad 12, \quad 24, \quad 48 \ldots\ldots$

oder: $\frac{2}{3}, \quad \frac{25}{3}, \quad \frac{625}{6} \ldots\ldots$

h) Zinseszinsrechnung.

α) Endwert.

57) Ein Waldbestand wurde anfangs 1890 auf 120 000 cbm geschätzt und vermehrt sich jedes Jahr um 3 %. Es werden nun am Ende jedes Jahres 1800 cbm Holz geschlagen; wie groß wird der Bestand anfangs 1900 sein? k. 99, 2

$x = a\,q^{10} - \frac{b\,(q^{10}-1)}{q-1}$ gibt für die gegebenen Zahlenwerte

$x = (q^{10} + 1)\,60\,000 = 140\,634$ cbm.

58) Eine Stadt, welche vor 20 Jahren 60 000 Einwohner zählte, habe jetzt 100 000. Wieviel Einwohner würde sie bei gleicher Zunahme nach weiteren 45 Jahren haben? k. 94, 4

Die Einwohnerzahl vor 20 Jahren sei a, die von jetzt: b, so folgt aus $a\,q^{20} = b$ der Wert für q und damit

$$x = b\,q^{45} = b\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^9} = 315\,600 \text{ Einwohner.}$$

β) Barwert.

59) A legt am Anfang jedes Jahres r ℳ bei 4 % auf Zinsen; B dieselbe Summe am Ende jedes Jahres, beide 20 Jahre hindurch. Wie groß ist r, wenn A schließlich 1191 ℳ mehr hat als B? k. 96, 3

Der Unterschied der beiden Endwerte nach 20 Jahren:

des $A = \frac{r\,q\,(q^{20}-1)}{q-1}$ und des $B = \frac{r\,(q^{20}-1)}{q-1}$

gibt $r = \frac{1191}{q^{20}-1} = 1000$ ℳ.

k. 98, 4 60) Es will jemand 10 000 ℳ 12 Jahre lang auf Zins geben, um sich nach Ablauf dieser Zeit durch die Zinsen dieses erlangten Kapitals eine gewisse Einnahme zu sichern. Er rechnet auf 4%, um wieviel muß er die angelegte Summe vermehren, wenn er nur $3\frac{1}{2}$% erhalten kann?

Zuzulegende Summe: x ℳ, bisheriges Kapital sei a ℳ.

Gleichung: $a\,q^{12} = (a + x)\,q_1^{12}$, wobei $q_1 = 1{,}035$

gibt: $$x = a\left[\left(\frac{q}{q_1}\right)^{12} - 1\right] = 595{,}36 \text{ ℳ}$$

k. 03, 3 61) A will sein Haus verkaufen. B bietet 53 000 ℳ bar, während C ihm die nächsten fünf Jahre je am Ende eines solchen 10 000 ℳ bezahlen will. Wer bietet mehr und um wieviel? (4%)

Der bare Wert des Angebots des C sei x ℳ; die jährliche Rate: a ℳ.

Gleichung: $$x = \frac{a\,(q^5 - 1)}{q^5\,(q - 1)} = \frac{100\,a}{p}\,(1 - q^{-5}) \quad \text{gibt}$$

$x = 44\,520$ ℳ; also bietet B um 8480 ℳ mehr.

e. 94, 2 62) A will sein Haus verkaufen. B bietet bar 47 000 ℳ. C bietet 53 000 ℳ, zahlbar nach 3 Jahren, und D bietet 50 000 ℳ in fünf jährlichen Terminen von je 10 000 ℳ, wobei die erste Rate sogleich zur Auszahlung käme. Welches Angebot wird A annehmen, wenn er seinen Kalkulationen 4% Zinseszins zugrunde legt, und um wieviel übertrifft der bare Wert des höchsten Angebots denjenigen des niedersten?

Der bare Wert des Angebots a von C sei x ℳ; der des D: y ℳ, und dessen jährliche Rate: b ℳ.

Gleichungen: $$x = \frac{a}{q^3} \quad ; \quad y = \frac{100\,b}{p} \cdot \frac{(q^5 - 1)}{q^4}$$

geben: $x = 47\,117$ ℳ ; $y = 46\,300$ ℳ

also wird A das Angebot des C annehmen; Unterschied zwischen dem höchsten und niedersten Angebot 817 ℳ.

γ) Laufende Zahlungen.

k. 02, 3 63) Am 1. August 1902 legt jemand in eine Sparkasse eine Summe von 8000 ℳ ein; wieviel muß er jährlich jedesmal an diesem Tage — das letztemal am 1. August 1910 — hinzufügen, damit dann sein Vermögen 20 000 ℳ beträgt, bei 4% Zinseszinsen?

Ursprüngliches Kapital sei a ℳ; Endwert: b ℳ; Zulage: x ℳ.

Gleichung: $$a\,q^8 + \frac{x\,(q^8 - 1)}{q - 1} = b\,, \quad \text{gibt}$$

$$x = \frac{0{,}01\,p\,(b - a\,q^8)}{q^8 - 1} = 982{,}75 \text{ ℳ}$$

δ) Zeit.

64) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 40 000 ℳ, das zu 3½ % auf Zinseszins aussteht, dadurch aufgezehrt wird, daß jährlich am Schlusse des Jahres 2000 ℳ weggenommen werden? k. 93, 4

Jährliche Verminderung des Kapitels (a ℳ) sei b ℳ; Zahl der Jahre: x

$$\text{Gleichung:} \quad a\,q^x - \frac{b\,(q^x - 1)}{q - 1} = 0$$

$$\text{gibt} \quad x = log\left[\frac{100\,b}{100\,b - a\,p}\right] : log\,q = 35 \text{ Jahre.}$$

65) Jemand kauft ein Haus für eine gewisse Summe, die er abbezahlt, indem er jedes Jahr, im ganzen 10mal, am Schlusse des Jahres $a = 1000$ ℳ erlegt. Wie groß war die Kaufsumme, und wann hätte er statt dessen $b = 10\,000$ ℳ auf einmal abtragen können, wenn 4 % Zinseszins gerechnet werden? k. 92, 4

Die Kaufsumme sei k Mark, die Anzahl der Jahre, nach welchen er seine Schuld auf einmal abtragen kann: x Jahre.

$$\text{Gleichungen:} \quad 1. \quad k = \frac{a\,(q^{10} - 1)}{q^{10}\,(q - 1)}$$

$$2. \quad k\,q^x = b\,,$$

$$\text{woraus} \quad k = \frac{100\,a}{p}\,(1 - q^{-10}) = 8111 \text{ ℳ}$$

$$\text{und} \quad x = \frac{log\,b - log\,k}{log\,q} = 5{,}34 \text{ Jahre.}$$

i) Rentenrechnung.

α) Der bare Wert.

66) A hat infolge eines Vermächtnisses eine Rente im Betrag von 100 ℳ, zahlbar am 1. eines jeden Monats, 20 Jahre lang zu beziehen. Mit welcher Summe kann diese Rente an demjenigen Tage, an dem die erste Zahlung zu leisten ist, abgelöst werden, wenn man 4½ % pro Jahr zugrunde legt und die Zinsen als monatlich zum Kapital geschlagen annimmt? e. 93, 3

Ablösungssumme (= Barwert der Rente) sei x ℳ, die Rente selbst: r ℳ

$$\text{Gleichung:} \quad x\,q^{240} = \frac{r\,q\,(q^{240} - 1)}{(q - 1)}\,,$$

$$\text{woraus} \quad x = \frac{1200\,r\,q}{p}\,(1 - q^{-240}) = 15\,865{,}43 \text{ ℳ}$$

β) Die Rente.

67) Ein Beamter hat 25mal je am Anfang eines Jahres 2 % seiner 3750 ℳ betragenden Besoldung in eine Witwenkasse einbezahlt. Seine Witwe erhielt hierauf 11mal je am Ende eines Jahres e. 95, 3

(angefangen mit dem auf das Sterbejahr folgenden Jahre) eine Pension von 375 ℳ. Hat die Kasse hiebei Gewinn oder Verlust, und wieviel beträgt derselbe, wenn ein Zinsfuß von 4 % zugrunde gelegt wird?

Der jährliche Kassenbeitrag (2 % von 3750 ℳ) sei a ℳ, die Pension: r ℳ und der Gewinn oder Verlust der Kasse: x ℳ.

Gleichung: $$\frac{a\,q\,(q^{25}-1)}{q-1}\cdot q^{11} - \frac{r\,(q^{11}-1)}{q-1} = x$$

$$x = -57{,}35 \text{ ℳ}$$

d. h. die Kasse hat einen Verlust von 57,35 ℳ.

γ) Die Einzahlung.

k. 91, 4 68) Welche Summe hat jemand 10 Jahre lang am Schlusse des Jahres in eine Rentenbank einzuzahlen, wenn er nachher aus dem Erträgnis 15 Jahre lang eine jährliche Rente von 800 ℳ beziehen will? (4 % Zinseszins zu berechnen.)

Die jährlich einzuzahlende Summe sei x ℳ, die Rente: r ℳ.

Gleichung: $$\frac{x\,(q^{10}-1)}{q-1} = \frac{r\,(q^{15}-1)}{q^{15}(q-1)}$$

gibt: $$x = \frac{r\,(1-q^{-15})}{q^{10}-1} = 740{,}88 \text{ ℳ}$$

e. 01, 2 69) A möchte sich eine Jahresrente sichern, welche 20 Jahre läuft, und deren Betrag von Jahr zu Jahr um 5 % wächst. Wie viel hat A heute einzuzahlen, wenn die Rente mit einem Betrage von 600 ℳ heute in einem Jahre zum erstenmale fällig sein soll, und wenn der Berechnung ein Zinsfuß von $3\frac{1}{4}$ % zugrunde gelegt wird?

Die einzelnen Jahresrenten seien r, re, re^2, re^3 ... ℳ, wobei $e = \left(1 + \frac{5}{100}\right)$; die einzuzahlende Mise (= Barwert): x ℳ, dann ist:

$$x = \frac{r\left(\left(\frac{e}{q}\right)^n - 1\right)}{(e-q)} = \frac{r\,(e^n - q^n)}{q^n\,(e-q)} = 13697{,}2 \text{ ℳ}$$

δ) Die Zeit.

e. 91, 3 70) A verkauft am Anfange eines Jahres an B ein Haus unter folgenden Bedingungen: B hat von diesem Jahre an 10mal, je am Ende des Jahres, den 10. Teil der Kaufsumme zu entrichten, während der jeweils bleibende Schuldrest nicht zu verzinsen ist. Wenn nun B im Laufe des ersten Jahres durch eine Erbschaft in den Stand gesetzt wird, die ganze Summe auf einmal zu bezahlen, so soll berechnet werden, wann er das tun kann, ohne selbst in Schaden zu kommen, oder A in Schaden zu bringen? Als Zinsfuß ist 4 % zugrunde zu legen.

Der mittlere Zahlungstermin sei nach x Jahren; die jährliche Abzahlung $\left(\frac{1}{10}\text{ der Kaufsumme}\right)$: r ℳ.

Gleichung: $\frac{10\,r}{q^x} = \frac{r\,(q^{10}-1)}{q^{10}\,(q-1)}$

gibt $x = \frac{\log 0{,}1\,p - \log(1-q^{-10})}{\log q} = 5{,}339$ Jahre,

d. h. nach 5 Jahren 4 Monaten.

71) Eine Rente von 800 ℳ, welche 20 Jahre lang am Ende jedes Jahres bezogen werden soll, wird in eine andere von 1000 ℳ verwandelt. Wie lange dauert der Bezug der letzteren, wenn 4 % Zinseszins gerechnet werden? k. 01, 4

Bisherige Rente betrage r ℳ; die neue: r_1 ℳ und deren Bezugszeit sei x Jahre.

Gleichung: $\frac{100\,r}{p}(1-q^{-20}) = \frac{100\,r_1}{p}(1-q^{-x})$

gibt: $x = \log\left[\frac{r_1}{r_1 - r\,(1-q^{-20})}\right] : \log q = 14{,}552$ Jahre,

d. h.: 14 Jahre lang kann die neue Rente voll bezogen werden, im 15. Jahre beträgt sie weniger als 1000 ℳ.

72) A braucht von seinem Vermögen, das 3 % Zinseszins bringt, jährlich 5000 ℳ und hat daher nach 5 Jahren noch 30 000 ℳ. a) Wie groß war sein ursprüngliches Vermögen? b) Welche Rente könnte er von dem Rest noch 30 Jahre lang beziehen? k. 95, 4

Das ursprüngliche Vermögen sei x ℳ, der jährliche Verbrauch: b ℳ, der zurückbleibende Rest: w ℳ und die Rente: r ℳ.

Gleichungen: 1. $x\,q^5 - \frac{b\,(q^5-1)}{q-1} = w$

woraus $x = \frac{w + \frac{100\,b}{p}(q^5-1)}{q^5} = 48\,780$ ℳ

2. $w\,q^{30} - \frac{r\,(q^{30}-1)}{q-1} = 0$

woraus $r = \frac{w\,p}{100\,(1-q^{-30})} = 1530{,}55$ ℳ

II. Trigonometrie.

a) Das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck; das reguläre Polygon.

e. 00, 3 73) In einem Kreise trägt man die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF, FG und GH je gleich der Hälfte der Seite des dem Kreise einbeschriebenen regulären Dreiecks ab. Wie groß ist alsdann AH, wenn der Radius des Kreises gleich 10 cm ist? (Bekannte, auch von Albrecht Dürer gelehrte Näherungskonstruktion des regulären Siebenecks.)

Gegeben: r, gesucht $AH = x$. Sei α der zu AB, und δ der zu AH gehörige Centriwinkel, so ist

1. $AB = \frac{1}{2} s_3 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ 2. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2r} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

3. $\angle\delta = 4R - 7\alpha$ und 4. $x = 2r\sin\frac{\delta}{2}$

$x = 1{,}352$ mm.

k. 95, 6 74) In einem gleichschenkligen Dreieck seien die Höhen $h_a = 36$ und $h_b = 27$. Wie groß die Winkel, die Seiten und der Inhalt des Dreiecks?

Gegeben: h_a und h_b; gesucht: a, b, α, β und J

1. $\cos\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h_b}{2h_a}$ 2. $a = \frac{h_b}{\sin\beta}$

3. $b = \frac{h_a}{\sin\beta}$ und 4. $2J = \frac{h_a h_b}{\sin\beta}$

$a = 29{,}125$ $\alpha = 44^\circ\, 2'\, 54''$ $J = 524{,}25$
$b = 38{,}834$ $\beta = 67^\circ\, 58'\, 33''$

k. 94, 5 75) Von einem Rechteck sind gegeben die Diagonale $e = 74{,}95$ und die Differenz der beiden Seiten $d = 27{,}24$. Wie groß sind die Seiten und der Winkel der Diagonalen?

Gegeben: e und $(a - b) = d$; gesucht: a, b und $\angle(e, e')$. Sei in dem Rechteck $ABCD$ die Strecke $EC = d$, und in dem $\triangle AEC$ der $\angle CAE = \varphi$, so ist:

1. $\sin\varphi = \frac{d}{e}\sin 135^\circ$ 2. $\angle\frac{e, e'}{2} = (45 - \varphi)$

3. $\begin{cases} a = e\sin(45 - \varphi) \\ b = e\cos(45 - \varphi) \end{cases}$ oder 4. $(a + b) = d\,ctg\,\varphi$

$a = 64{,}836$ $\angle(e, e') = 60^\circ\, 12'\, 58''$
$b = 37{,}596$

k. 95, 5 76) Von einem Rhombus ist gegeben die Diagonale $e = 70{,}5$ und der von ihr durchzogene $\angle\beta = 65^\circ\, 40'$. Gesucht der Inhalt des Rechtecks, dessen Ecken die Fußpunkte der durch den Diagonalen-Schnittpunkt gezogenen Höhen sind.

Gegeben: e und β; gesucht: $J (= x\,y)$

1. $x = h \cos \frac{\beta}{2} = e \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{e}{2} \sin \beta$

2. $y = h \sin \frac{\beta}{2} = e \sin^2 \frac{\beta}{2}$

also 3. $J = x \,.\, y = \frac{e^2}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta = e^2 \sin^3 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 665{,}686$

77) In einem Rhombus ist die Summe der Diagonalen $s = 159{,}4$; $\angle \beta = 43^\circ\, 19'\, 30''$. Gesucht die Seite, die Diagonalen und der Inhalt. k. 93, 5.

Gegeben: $e + e' = s$ und β; gesucht: a, e, e' und J

1. $(e' - e) = s \,tg \left(45 - \frac{\beta}{2}\right)$ 2. $a = \frac{e}{2 \sin \frac{\beta}{2}}$

3. $J = \frac{e\,e'}{2} = a^2 \sin \beta$

$a = 61{,}377$; $e = 45{,}314$; $e' = 114{,}086$; $J = 2584{,}82$

78) Seite und Fläche eines Rhombus zu berechnen aus einem Winkel und der Summe der Diagonalen; $\alpha = 63^\circ\, 15'\, 4''$; $s = 26{,}4$ cm. e. 96, 3.

Lösung siehe 77).

$a = 9{,}594$ cm ; $J = 82{,}194$ cm.

79) Von einem regulären Fünfeck ist der Flächeninhalt $F_5 = 100$ qm gegeben, gesucht ist die Fläche und Seite des regulären Zwölfecks, das demselben Kreis einbeschrieben ist. e. 99, 3.

Gegeben: F_5 ; gesucht: F_{12} und s_{12}. Es ist $r^2 = \frac{2\,F_5}{5 \sin 72^\circ}$,

also 1. $F_{12} = 3\,r^2 = \frac{6\,F_5}{5 \sin 72^\circ}$ und 2. $s_{12} = 2\,r \sin 15^\circ$

$F_{12} = 126{,}174$ qm ; $s_{12} = 3{,}357$ m.

b) Das schiefwinklige Dreieck.

80) 2 Seiten b u. c eines Dreiecks $A\,B\,C$ verhalten sich wie $7 : 4$; dabei ist c um 38,4 cm kleiner als b. Der Winkel α ist ein spitzer Winkel; seine Größe ergibt sich aus der Proportion: $tg\, \alpha : \sin 2\,\alpha = 8 : 5$; wie groß ist die Fläche des Dreiecks? e. 02, 3.

Gegeben: $b : c$, $(b - c)$, α ; gesucht: J

$\frac{tg\, \alpha}{\sin 2\,\alpha} = \frac{8}{5}$ gibt $\sin \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{11}$;

$\frac{b}{c} = \frac{7}{4}$ gibt $(b + c) = \frac{11}{3} (b - c)$; $J = \frac{b\,c}{2} \sin \alpha$

$J = 1901{,}87$

81) In einem Dreieck $A\,B\,C$ verhalten sich die Seiten $A\,B$ und $A\,C$ wie $2 : 3$, der Inhalt des Dreiecks beträgt 100 qm und der e. 01, 3.

$\angle BAC$ $19°\,28'\,16''$. Wie groß sind die beiden Seiten AB und AC, sowie die beiden Winkel ABC und ACB dieses Dreiecks?

Gegeben: $b:c = m:n$, α, J; gesucht: b, c, β und γ

1. $tg\,\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{m-n}{m+n}\,ctg\,\dfrac{\alpha}{2}$

2. $d = \sqrt{\dfrac{2\,J}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}}$ oder 2. $b\,c = \dfrac{2\,J}{\sin\alpha}$

3. $\left\{\begin{array}{l} b = d\sin\beta \\ c = d\sin\gamma \end{array}\right.$ 3. $b = \sqrt{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{2\,J}{\sin\alpha}}$, $c = \sqrt{\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{2\,J}{\sin\alpha}}$

k. 01, 5 82) Von einem Dreieck ist gegeben $a = 20{,}2$ cm, die Differenz der Seiten $(b-c) = 6{,}3$ cm und die Differenz der Gegenwinkel der letzteren $(\beta-\gamma) = 13°\,20'\,30''$. Wie groß sind die Seiten und die Winkel?

Gegeben: a, $(b-c)$, $(\beta-\gamma)$; gesucht b, c, α, β, γ

1. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{b-c}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ 2. $(b+c) = a\,.\,\dfrac{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

$b = 13{,}99$ cm
$c = 7{,}69$ cm

$\alpha = 136°\,15'\,52''$
$\beta = 28°\,32'\,19''$
$\gamma = 15°\,11'\,49''$

k. 91, 5 83) Von einem Dreieck ist gegeben $a = 24$; $(b-c) = 7$; $\alpha = 31°\,54'$ Zu berechnen b, c und den Inhalt.

1. $\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2} = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

2. $(b+c) = \dfrac{a\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ oder 2. $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

3. $\left\{\begin{array}{l} b = d\sin\beta \\ c = d\sin\gamma \end{array}\right.$

3. $2\,J = b\,c\sin\alpha$ 4. $J = \dfrac{d^2}{2}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$b = 46{,}57$; $c = 39{,}57$; $J = 474{,}82$

k. 96, 5 84) Von einem Dreieck ist gegeben:

$$(b+c) = 100 \text{ m};\ (\beta-\gamma) = 12°\,25';\ \alpha = 65°\,46\frac{1'}{2}$$

zu berechnen die Seiten und den Inhalt!

1. $a = (b+c)\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$ 2. $(b-c) = (b+c)\,tg\,\dfrac{\beta-\gamma}{2}\,.\,tg\,\dfrac{\alpha}{2}$

3. $J = \frac{b\,c}{2} \sin\alpha$

$a = 54{,}62$ m ; $b = 53{,}517$ m ; $c = 46{,}483$ m.
$J = 1134{,}316$ qm.

85) In einem Dreieck ist: $(b + c) = 166{,}5$ m; die Differenz $(\beta - \gamma) = 15^\circ\, 3'\, 40''$; $\angle\alpha = 67^\circ\, 18'\, 20''$; gesucht die Seiten und der Inhalt des Dreiecks. k. 98, 5

cfr. 84) $a = 93{,}068$ m ; $b = 90{,}576$ m ; $c = 75{,}923$ m.
$J = 3172{,}2$ qm.

86) Der Inhalt eines Dreiecks mit den Winkeln $\beta = 75^\circ\, 40'$ und $\gamma = 36^\circ\, 25'$ beträgt 75 qdm; wie groß sind die Seiten desselben? k. 02, 4

Gegeben: J, β, γ; gesucht: a, b, c.

$$d = \sqrt{\frac{2\,J}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}} \quad \text{oder} \quad 2\,J = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

woraus $a = d \sin\alpha$ usw. woraus $a = \sqrt{\frac{2\,J \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$ usw.

$a = 15{,}545$ dm ; $b = 16{,}254$ dm ; $c = 9{,}959$ dm.

87) In einem Dreieck $A\,B\,C$ ist gegeben Seite $A\,B = 347{,}53$ m, Seite $A\,C = 219{,}18$ m und $\angle B\,A\,C = 77^\circ\, 42'\, 12''$. Wie groß sind die beiden Winkel, in welche die Transversale von A nach dem Halbierungspunkte von $B\,C$ den $\angle\, B\,A\,C$ teilt? e. 97, 3

Gegeben: b, c, α; gesucht: α_1 und α_2

$$tg\,\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{b - c}{b + c}\, tg\,\frac{\alpha}{2}$$

$\alpha_1 = 49^\circ\, 11'\, 27''$; $\alpha_2 = 28^\circ\, 30'\, 45''$

c) Das Viereck.

88) Zwischen den Schenkeln eines Winkels von 70° liegt ein Punkt, von welchem Lote $= 25$ m und 9 m auf die Schenkel gefällt sind. Wie weit ist der Punkt von der Spitze des Winkels entfernt? e. 92, 4

Die gesuchte Entfernung $P\,A = x$ ist Diagonale eines Kreisvierecks $B\,A\,C\,P$ und bilde mit den Schenkeln des gegebenen Winkels A die Winkel φ und ψ. Aus dem $\triangle\, B\,C\,P$ folgt:

1. $tg\,\frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{b - c}{b + c}\, tg\,\frac{A}{2}$ (wenn $PC = b$, $PB = c$)

und aus den $R \triangle\triangle\, P\,A\,C$ bzw. $P\,B\,C$:

2. $x = \frac{b}{\sin\varphi} = \frac{c}{\sin\psi} = 31{,}206$ m.

89) In einem Viereck $A\,B\,C\,D$ sind $AB = 8$ cm, $B\,C = 9$ cm, $C\,D = 15$ cm, $D\,A = 12$ cm und $\angle\, B\,A\,D = 80^\circ\, 57'\, 20''$. Wie groß die Diagonale $B\,D$ und der Flächeninhalt des Vierecks? k. 03, 5

Gegeben: $a, b, c, d, \angle A$; gesucht: e' und J

Im $\triangle ABD$ ist: 1. $e' = \sqrt{a^2 + d^2 - 2\,a\,d\cos A} = 13{,}334$ cm

und $i = \frac{a\,d}{2}\sin A$

Im $\triangle BCD$ ist: $i' = \sqrt{s\,(s-b)\,(s-c)\,(s-e')}$, wo $(b+c+e') = 2s$

also 2. $J = i + i' = 106{,}83$ qcm.

d) Berechnungen am Kreise.

e. 95, 4 90) Wie groß ist der Radius eines Kreises, in welchem das zu einem Sektor vom Zentriwinkel $100°$ gehörige Segment gleich 1 qcm ist?

Gegeben: T und α; gesucht r

$$r = \sqrt{\frac{2\,T}{arc\,\alpha - \sin\alpha}} = 1{,}6216 \text{ cm}.$$

k. 99, 6 91) In einem Kreis vom Radius $r = 18{,}75$ liegt ein Sektor vom Zentriwinkel $\alpha = 108°\,40'\,30''$. Wie groß ist das dazugehörige Segment?

Gegeben: r und α; gesucht: T

$$T = \frac{r^2}{2}\,(arc\,\alpha - \sin\alpha)$$

$$T = 166{,}884$$

e. 98, 3 92) In einem Kreise vom Radius $r = 10$ m liegen die beiden Sehnen $AB = 9$ m und $AC = 18$ m. Wie groß ist das von den beiden Sehnen und dem zwischen ihnen liegenden Bogen begrenzte Flächenstück, wenn die beiden Sehnen so zu einander liegen, daß der Mittelpunkt des Kreises nicht in jenes Flächenstück hineinfällt?

Gegeben: r und b und c; gesucht: $F = (\triangle ABC + \text{Segment})$.

1. $\sin\beta = \frac{b}{2\,r}$ 2. $\sin\gamma = \frac{c}{2\,r}$ 3. $\alpha = 2\,R - (\beta + \gamma)$

4. $F = \frac{bc}{2}\sin\alpha + \frac{r^2}{2}\,(arc\,2\,\alpha - \sin 2\,\alpha) = 61{,}258$ qm.

e) Höhen- und Entfernungsbestimmungen.

k. 99, 5 93) Ein Turm erscheint in einer gewissen Entfernung unter dem Elevationswinkel von $6°\,5'\,30''$; man nähert sich ihm auf der horizontalen Ebene um 180 m, so daß er unter dem Winkel $19°\,55'\,50''$ erscheint. Wie hoch ist er?

Gegeben: $a = 180$ m; $\angle\alpha = 6°\,5'\,30''$; $\angle\beta = 19°\,55'\,50''$

$$x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} = 27{,}222 \text{ m}.$$

94) Ein Turm hat die Höhe a m. Von seiner Spitze erscheint ein Fluß, dessen diesseitiges Ufer c m vom Fuß des Turmes entfernt ist, unter einem Gesichtswinkel von $\lambda°$. Wie breit ist der Fluß? $a = 30$ m; $c = 17$ m; $\lambda = 36° 20' 24''$. Wie hoch müßte der Turm sein, wenn der Fluß unter dem möglichst großen Gesichtswinkel erscheinen soll? e. 03, 3

Der Elevationswinkel vom diesseitigen Ufer nach der Turmspitze sei φ, so ist:

1. $tg\,\varphi = \frac{a}{c}$ 2 die Breite $x = \frac{a \sin \lambda}{\sin \varphi \sin (\varphi - \lambda)} = 50$ m.

Damit der Fluß unter dem möglichst großen Gesichtswinkel erscheint, müßte der Turm die Höhe $a_1 = \sqrt{c\,.\,(c + x)} = 33{,}749$ m haben, d. h. sie müßte das geometrische Mittel der beiden Uferentfernungen sein.

95) Die Höhe eines Turmes ist $h = 15$ m, seine Entfernung vom Ufer eines Flusses $b = 30$ m. Wie groß ist die Breite des letzteren, wenn sie von der Spitze des Turmes unter dem $\angle \alpha = 15°$ erscheint? k. 01, 6

Vgl. 94). 1. $tg\,\varphi = \frac{h}{b}$ 2. $x = \frac{h \sin \alpha}{\sin \varphi \sin (\varphi - \alpha)} = 43{,}302$ m.

96) Aus dem Fenster eines Turmes erscheint einem Auge, das sich 30 m über dem Erdboden befindet, die Breite eines nahen Flusses unter einem $\angle \varepsilon = 7° 46'$; wie breit ist der Fluß, wenn das nächstliegende Ufer 56 m vom Turme entfernt ist? k. 92, 5

Vgl. 94.) $x = 24{,}616$ m.

97) Am Ufer eines Flusses steht ein Turm mit zwei senkrecht übereinander liegenden Öffnungen, deren Mitten, von denen aus visiert wird, um $a = 15$ m von einander entfernt sind. Die Visierlinien von den bezeichneten Punkten nach dem jenseitigen Ufer bilden mit der Vertikalen die Winkel $\varphi = 85° 25'$ und $\psi = 80° 40'$. Wie breit ist der Fluß? k. 96, 6

Vgl. 93). $x = \frac{a \sin \psi \sin \varphi}{\sin (\varphi - \psi)} = 178{,}172$ m.

98) Hart am Ufer eines Flusses entlang ist eine Standlinie $BC = 112$ m gemessen; von B und C wird nach dem am jenseitigen Ufer stehenden Pfahl A visiert. Die Visierlinie BA bildet mit der Standlinie BC den $\angle \beta = 68° 4' 13''$, die Visierlinie CA mit BC den $\angle \gamma = 71° 13' 10''$. Wie breit ist der Fluß an dieser Stelle? k. 03, 4

$$x = \frac{BC\,.\,\sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} = 150{,}814 \text{ m}.$$

k. 98, 6 99) Auf dem Firste eines Daches, welches mit der horizontalen Ebene einen $\angle \varphi = 35°$ bildet, ist eine $l = 1{,}5$ m hohe Auffangstange eines Blitzableiters vertikal aufgestellt. Der Abstand des unteren Endpunktes der Stange vom Rande des Daches ist $e = 10$ m. Wie weit ist die Spitze des Blitzableiters vom Rande des Daches entfernt?

Die Größen l und e bilden zwei Seiten eines Dreiecks, deren eingeschlossener Winkel $\lambda = (90 + \varphi)$ und dessen dritte Seite die gesuchte Entfernung x ist.

$$x = \sqrt{l^2 + e^2 + 2\,l\,e \sin\varphi} = 10{,}93 \text{ m}.$$

k. 02, 5 100) Eine vertikal stehende Stange von 8 m Höhe erscheint von einem bestimmten Punkt der Horizontalebene unter dem Elevationswinkel $\varepsilon = 20\ 24' 40''$. In der Visierebene wird sie um ihren Fußpunkt um den $\angle \varphi = 45° 30'$ auswärts gedreht; unter welchem Elevationswinkel erscheint sie jetzt?

Die neue Lage $A' B$ der Stange a bildet mit der Entfernung e in der Horizontalebene und der Visierlinie nach A' ein Dreieck, in welchem die an dieser letzteren gelegenen Winkel α und γ seien; so ist:

$$1.\ e = a \operatorname{ctg} \varepsilon \qquad 2.\ \operatorname{tg}\frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{e - a}{e + a} \operatorname{tg}\frac{R - \varphi}{2}$$

woraus $\gamma = 11° 38' 48''$

f) Beziehungen zwischen Winkelfunktionen.

e. 91, 4 101) α u. β aus folgenden beiden Gleichungen zu bestimmen:

$$1.\ \sin\alpha = 2 \sin\beta \qquad 2.\ (\alpha + \beta) = 36° 14' 11''$$

Aus 1. wird $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\alpha = 24° 20' 34''\ ;\ \beta = 11° 53' 37''$$

e. 94, 4 102) Die beiden Winkel α u. β aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$1.\ \cos\alpha + \cos\beta = -\frac{1}{3} \qquad 2.\ (\alpha + \beta) = 200°$$

Aus 1. folgt: $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{-1}{6 \cos\frac{\alpha + \beta}{2}}$

$\alpha = 116° 18'$ und $\beta = 83° 42'$ oder umgekehrt.

e. 93, 4 103) Auf der Hypotenuse BC eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC schneidet man von einem Endpunkt B ein Stück $BD = \frac{1}{8}$ der Hypotenuse ab, vom andern Endpunkt C

ein Stück $CE = \frac{7}{24}$ der Hypotenuse und zieht die Geraden AD und AE. Es soll nun der Sinus des $\angle DAE$ ohne Hilfe von Logarithmentafeln bestimmt und sodann mit Hilfe der Logarithmentafeln aus dem gefundenen Sinus der Winkel selbst berechnet werden.

$\angle DAE$ sei: x, so ist im $\triangle DAE$: $\sin x = \frac{2\triangle}{AD \cdot AE}$;

$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2} = \frac{5}{8}$; $AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \frac{13}{24}$

und $\triangle DAE = \frac{7}{48}$ gibt $\sin x = \frac{56}{65}$; $x = 59° 29' 26''$

oder $\cos x = \frac{AM^2 - DM \cdot ME}{AD \cdot DE} = \frac{33}{65}$, woraus $\sin x = \frac{56}{65}$

III. Geometrie.

(Geordnet nach dem System des Lehrbuchs von Spieker.)

a) **Aufgaben aus dem ersten Kursus** (Abschnitt V).

104) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe nach einer andern und der Differenz der Gegenwinkel dieser Seiten. k. 92, 7
($\triangle$ aus c, h_b, $\beta - \gamma = \delta$)

Zu c und h_b ist α, bzw. $(\beta + \gamma)$ Datum.

105) Parallelogramm aus $(b + h)$, e' u. $\angle \alpha$ k. 91, 6

$\triangle FBE$ konstruierbar aus $BE = (b + h)$, $\angle FBE = (2R - \alpha)$ und $\angle BEF = \frac{\alpha - R}{2}$;

Mittellot über FE gibt C und Kreisbogen um B mit e' gibt D.

106) Gegeben fünf Punkte. Ein Fünfeck zu zeichnen, in welchem die gegebenen Punkte die Halbierungspunkte der fünf Seiten werden. e. 94, 6

Drei aufeinanderfolgende der gegebenen Punkte bilden mit dem Halbierungspunkt einer Diagonale ein Parallelogramm; die Verbindungslinie dieses letzteren Punktes mit dem vierten gegebenen Punkt bestimmt die Richtung und Länge der durch den fünften Punkt gehenden Seite, wodurch zwei Ecken und damit alle andern des Fünfecks gefunden sind.

107) Im Dreieck ABC (α spitz, $AB \angle AC$) die Gerade XY so zu ziehen (X auf AB, Y auf AC), daß $AX = XY$ und $XY = \frac{1}{2} CY$ ist. e. 03, 4

Die Halbierungslinie von α und das Mittellot über AC schneiden sich in D; Parallele durch D zu AC bestimmt X und Kreisbogen um X mit XA den Punkt Y auf AC.

b) Aufgaben aus der Kreislehre (Abschnitt VI).

k. 95, 7 108) Ein Dreieck zu zeichnen aus einem Winkel α, der Summe s der ihn einschließenden Seiten und der Schwerlinie t_a nach der 3. Seite ($\triangle$ aus α, $(b + c) = s$, t_a)

$\triangle AEF$ konstruierbar aus $AE = 2t_a$, $AF = s$, $\angle AFE = R - \frac{\alpha}{2}$, Mittellot über EF gibt C und CD durch die Mitte von AE die Ecke B.

e. 99, 4 109) Ein Dreieck zu konstruieren aus $(b + c - a)$ und 2 Winkeln ($\triangle$ aus $s - a$, α, β)

Durch $(s - a)$ und α ist ϱ bestimmt; Tangente unter dem $\angle \beta$ gegen das verlängerte $(s - a)$ gibt BC. Wäre β und γ statt α und β gegeben, so würde durch $(s - a)$ und β der Halbmesser ϱ_c bestimmt.

k. 92, 6 110) Gegeben der Kreis um M und außerhalb desselben der Punkt P. Durch P die Sekante PXY zu ziehen, so daß der Zentriwinkel $XMY =$ dem gegebenen $\angle \alpha$ wird.

Im Kreis M ist zu α die Sehne a Datum, also konzentrischen Kreis um M mit dem Zentralabstand von a und von P die Tangenten an den letzteren.

e. 94, 5 111) Gegeben ein Kreis und 2 Punkte A u. B. Auf der Peripherie des Kreises 2 Punkte X u. Y so zu finden, daß XA u. YB sich gegenseitig halbieren.

Konzentrischen Kreis zu dem gegebenen mit dem Centralabstand einer Sehne $= AB$ und an diesen die Tangenten $\parallel AB$, bestimmen die Punkte X und Y. — Grenze der Möglichkeit: $AB \leqq 2r$

k. 93, 7 112) Auf einem gegebenen Kreis den Punkt zu finden, von welchem aus die an einen zweiten gegebenen Kreis gezogenen Tangenten den $\angle \alpha$ mit einander bilden.

Zum Halbmesser r' und $\frac{\alpha}{2}$ ist der Zentralabstand des gesuchten Punktes von K' ein Datum, also der konzentrische Kreis mit diesem um K' ein geometrischer Ort für den Punkt.

k. 03, 6 113) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden $2s$ ist. (Vgl. 173.)

Über einem Durchmesser AC den Kreisbogen, welcher einen Winkel von 45° faßt (also die Quadrantensehne zum Halbmesser hat) und vom einen Endpunkt s als Sehne darein.

114) Gegeben drei Punkte P, P', P'' und eine Strecke a. Man soll einen Kreis zeichnen, so daß die Abschnitte der von den drei gegebenen Punkten an den Kreis gezogenen Tangenten je gleich a werden. e. 91, 5

Der Mittelpunkt X des gesuchten Kreises ist Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises des Dreiecks $P\,P'\,P''$; sein Halbmesser $= \sqrt{P\,X^2 - a^2}$

115) Gegeben ein Halbkreis vom Radius r und auf dem Durchmesser ein Punkt P in der Entfernung a vom Mittelpunkte. Einen Kreis zu konstruieren, der den Halbkreis und den Durchmesser in diesem Punkte berührt. (Vgl. 166.) k. 01, 8

Im Mittelpunkt M des Halbkreises auf dem Durchmesser das Lot $M\,O = r$ nach abwärts errichtet und $O\,P$ nebst Verlängerung gezogen, gibt den Berührungspunkt mit dem Halbkreis.

116) Um die 3 Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind 3 Kreise gezeichnet, von denen die beiden um die Endpunkte der Basis beschriebenen einander gleich sind. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, welcher die 3 Kreise alle umschließt und berührt. e. 01, 4

Geometrischer Ort für den gesuchten Mittelpunkt ist die Höhe auf die Basis; Verlängerung derselben um den Radius des Kreises um A gibt den einen Berührungspunkt X; durch B parallelen Radius $B\,P$ im Kreis B (nach aufwärts), so gibt $X\,P$ nebst Verlängerung den zweiten Berührungspunkt Y.

117) Auf der Seite $A\,C$ eines gegebenen Dreiecks $A\,B\,C$ einen Punkt X so zu finden, daß die Summe der von X auf die Seiten $A\,B$ u. $B\,C$ gefällten Lote einer gegebenen Strecke s gleich werde. e. 95, 5

Geometrischer Ort für den Punkt X ist die Basis desjenigen gleichschenkligen Dreiecks mit der Spitze in B und dem $\angle\,\beta$ an der Spitze, das zur Höhe des Schenkels s hat.

118) An 2 ungleich große Kreise ist eine innere gemeinschaftliche Tangente gezogen. Es soll auf dieser außerhalb der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Strecke ein Punkt gefunden werden, von welchem aus die beiden Kreise gleich groß erscheinen. (Vgl. 153.) e. 96, 5

Mittellot über $K\,K'$ schneide die gemeinschaftliche Tangente in E; Mittellot über $E\,K$ (oder $E\,K'$) schneide das erstere in Q; Kreis um Q mit $Q\,K$ gibt den gesuchten Punkt.

119) Gegeben Kreis K, Gerade L und auf L Punkt P; auf L Punkt X so zu finden, daß $P\,X$ gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 132 u. 156.) e. 97, 5

In P Lot auf L; durch K parallelen Radius KO (gleichgerichtet); OP schneide Kreis K in Q; Tangente in Q gibt X.

k. 95, 8 120) Durch 2 auf dem Umfang eines Kreises gegebene Punkte 2 zu einander parallele Sehnen zu ziehen, deren Summe gleich einer gegebenen Strecke s ist.

Erster Fall: Die Sehnen sind gleich gerichtet: konzentrischen Kreis mit dem Zentralabstand von PP'; in diesen vom Berührungspunkt aus $\frac{s}{2}$ als Sehne; die Tangente in deren anderem Endpunkt bestimmt die Endpunkte der gesuchten Sehnen.

Zweiter Fall: Die Sehnen sind entgegengesetzt gerichtet: In dem $R\triangle$ aus PP' als Hypotenuse und $\frac{s}{2}$ als Kathete bestimmt die letztere die Richtung der gesuchten Sehnen.

e. 95, 7 121) *) Gegeben 2 Kreise K u. K'; über dem Zentrabstand derselben als Durchmesser ist ein 3. Kreis K'' gezeichnet. Auf K'' einen Punkt X so zu finden, daß die beiden von X an K gezogenen Tangenten den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden von X an K' gezogenen Tangenten. (Vgl. 154.)

Zentrale KK' in D von innen nach dem Verhältnis $r : r'$ geteilt, so gibt die Verbindungslinie von D mit der Mitte des Halbkreises über KK' in ihrer Verlängerung den Punkt X.

c) **Teilungs- und Verwandlungsaufgaben** (Abschnitt VIII).

k. 02, 8 u. k. 94, 7 122) Auf der Seite AD des Quadrats $ABCD$ steht ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Man soll die ganze Figur von der Ecke A aus halbieren und noch die Lage des Endpunktes der Teillinie angeben.

$ABCDE$ wird in das $\triangle FAG$ verwandelt; FG in x halbiert; $FG = \frac{5}{2} DC$; $Dx = \frac{3}{4} DC$

k. 93, 6 123) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus dem als Dreieck gegebenen Inhalt f^2, der Höhe h und dem $\angle \varepsilon$ der Diagonalen.

Das als Inhalt gegebene $\triangle ABC$ wird in ein anderes DBE mit der vorgeschriebenen Höhe h, dieses wieder in das $\triangle FBE$ mit dem $\angle \varepsilon$ an der Spitze bei F verwandelt, so ist $BG = \frac{1}{2} BE$ die Grundlinie, BF die eine und $GH \parallel EF$ die andere Diagonale des gesuchten Parallelogramms.

*) 121) kann auch unter III. d) oder e) aufgeführt werden.

d) Proportionalität gerader Linien (Abschnitt IX).

124) In einen gegebenen Kreis ein Trapez zu zeichnen, von dem man einen Winkel kennt und zugleich weiß, daß die eine Grundlinie das Doppelte der andern ist. e. 93, 5

Zu r und $\angle A$ ist e Datum; e im Verhältnis 2 : 1 geteilt und durch den Teilungspunkt die Tangente an den konzentrischen Kreis mit dem Zentralabstand von e, gibt die zwei andern Ecken des Trapezes.

e) Ähnlichkeit der Figuren (Abschnitt X).

125) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, wenn gegeben das Verhältnis $m : n$ der Diagonale zu einer Seite. k. 91, 8

Am Endpunkt eines Durchmessers R $\triangle$ aus m als Hypotenuse (auf dem Durchmesser) und n als Kathete, gibt die dritte Ecke des Rechtecks.

126) Von einem gleichschenkligen Dreieck ist gegeben das Verhältnis $h_a : h_b = m : n$ und ϱ. Das Dreieck ist zu konstruieren und sein Inhalt zu berechnen (2. Teil der Aufg. vgl. 178). k. 98, 7

Durch das Verhältnis $b : a = h_a : h_b = m : n$ ist die Gestalt, und durch ϱ die wahre Größe des Dreiecks bestimmt.

127) Ein Dreieck zu konstruieren aus Umfang, Radius eines äußeren Berührungskreises und dem Höhenverhältnis beider andern Seiten ($\triangle$ aus s, ϱ_a, $h_b : h_c$) e. 92, 5

Zu s und ϱ_a ist $\angle \alpha$ Datum und $h_b : h_c$ gibt das Verhältnis der einschließenden Seiten $c : b$

128) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben die Höhe auf eine Seite, ein an dieser Seite liegender Winkel und das Verhältnis einer 2. Seite zu der zugehörigen Schwerlinie. ($\triangle$ aus h_a, γ, $b : t_b = m : n$) k. 93, 8

Durch $b : t_b$ und $\angle \gamma$ ist das Dreieck seiner Gestalt nach, durch h_a seiner wahren Größe nach bestimmt.

129) $\triangle$ aus $(b - c) = \delta$; $h_b : t_a = m : n$ u. $\angle \alpha$. k. 96, 7

Durch $h_b : t_a$ und $\angle \alpha$ ist die Gestalt des Dreiecks, durch $(b - c) = \delta$ die wahre Größe desselben bestimmt.

130) Gegeben $\triangle ABC$ und auf BC Punkt P. Um P einen Kreis zu beschreiben, der AB und AC bzw. deren Verlängerungen in X u. Y so schneidet, daß $XY \parallel BC$ werde. e. 98, 4

Auf PC eine Strecke $PD = PB$ abgetragen, in D nach links geöffnet einen $\angle = \beta$ angelegt, gibt den Punkt Y und PY als Radius. Ist P im Fußpunkt E der Höhe h_a gelegen, fallen X und Y mit A, ist er im Mittelpunkt F von BC gelegen, mit B bzw. C zusammen; liegt

P zwischen E und F, so werden die Seiten AB und AC selbst, liegt er zwischen F und C, oder B und E, deren Verlängerungen über B und C, bzw. über A oder umgekehrt, geschnitten, je nachdem $b \gtreqless c$ ist.

f) Proportionalität gerader Linien am Kreise (Abschnitt XI).

k. 02, 7 131) Ein Dreieck zu konstruieren aus der Grundlinie a, dem Verhältnis der beiden Seiten $b:c=p:q$ und der Mediane des Winkels α. (Vgl. 152.)

(Siehe Spieker: XI. Aufg. 20.) n wird mittels des Sehnensatzes als vierte Proportionale zu BD, DC und m ermittelt, nachdem $BC=a$ in D im Verhältnis $q:p$ geteilt worden; $R\triangle$ aus n und dem Mittellot über BC (nach abwärts) bestimmt die Richtung und damit den Endpunkt A von m_a.

e. 97, 5 132) Gegeben Kreis K, Gerade L u. auf L Punkt P. Auf L Punkt X so zu finden, daß PX gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 119 u. 156.)

Beschreibe beliebigen Kreis, der L in P berührt und K in A und B schneidet, ziehe AB mit Verlängerung, so ist dessen Schnittpunkt mit L der gesuchte Punkt X.

e. 03, 5 133) Gegeben Kreis K; außerhalb desselben 2 Punkte P u. P'; durch dieselben einen Kreis zu legen, der den Kreis K unter einer Sehne von gegebener Größe $=a$ schneidet. (Θ aus P, P', K_s.) (Siehe auch 157.)

Lege durch P und P' einen beliebigen, den Kreis K in C und D schneidenden Kreis, ziehe CD und PP' bis zum Schnitt in O; von O die Tangenten an den zu K konzentrischen Kreis, beschrieben mit dem Zentralabstand von a, geben die weiteren Punkte A und B, bzw. A' und B', durch welche der gesuchte Kreis bestimmt wird (zwei Kreise).

e. 96, 4 134) Im Trapez $ABCD$ mit den Grundlinien AD u. BC soll $EF \parallel BC$ so gezogen werden, daß EF mittlere Proportionale zu AD und BC wird. Hierauf soll bewiesen werden, daß $EBCF = DBC$.

Konstruktion bekannt; aus der Ähnlichkeit der Trapeze $AEFD$ und $EBCF$ folgt auch:
$\triangle AED \sim EBF$, woraus $ED \parallel BF$, also
$\triangle EBF = DBF$; dazu beiderseits $\triangle BFC$ addiert, gibt
$EBCF = DBC$

e. 99, 5 135) Im Dreieck ABC soll zu BC die Parallele XY so gezogen werden, daß sie die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen AX u. BX. (Vgl. auch 165.)

Durch A zu BC die Parallele $AD =$ der dritten Proportionale zu AB und BC (über BC Halbkreis, Sehne $BF = BA$; $FE \perp BC$, $ED \parallel BA$) gezogen und D mit B verbunden, gibt Punkt Y.

136) Man soll in dem Dreieck ABC die Seite AC nach dem goldenen Schnitt teilen und durch den Teilpunkt eine die Dreiecksfläche halbierende Gerade ziehen. k. 03, 7

Beide Lösungen bekannt (cfr. Spieker § 185 und 141).

137) Radius OA eines gegebenen Kreises soll in X so geteilt werden, daß die zwei auf OX und AX als Basis errichteten gleichschenkligen Dreiecke, die ihre Spitzen auf der Peripherie haben, einander ähnlich sind. e. 92, 6

Seien B und C die Spitzen der gleichschenkligen ähnlichen Dreiecke, so ist $\angle BOX = BXO = 2XCA = 2OBX$, d. h. OX ist die maior von OB, bzw. des stetig geteilten Halbmessers OA.

138) In einem regulären Fünfeck sind 2 sich schneidende Diagonalen gezogen; was läßt sich von den Teilen aussagen und beweisen, in welche hiebei diese Diagonalen sich gegenseitig zerlegen, und welche Konstruktion eines regulären Fünfecks über einer gegebenen Strecke AB als Seite folgt aus diesen Aussagen? e. 97, 4

Schneiden sich die beiden Diagonalen AC und BE in F, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABF und ABC und der Vergleichung ihrer Winkel, daß AC durch BE und umgekehrt in F stetig geteilt wird. Verlängere demnach die Strecke AB stetig proportioniert und beschreibe um A und B mit der verlängerten AB (= der Diagonale) Kreisbögen, so ist deren Schnittpunkt die gegenüberliegende Ecke D des Fünfecks.

139) Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises den Punkt X so zu bestimmen, daß von ihm aus die ihrer Lage nach gegebene Strecke AB unter dem $\angle AXB = 36°$ erscheint. (Die Konstruktion ist vollständig auszuführen.) k. 91, 7

Geometrischer Ort für den Punkt X ist der Umkreis des über AB als Seite errichteten regulären Fünfecks (cfr. Constr. 138). Den Mittelpunkt gibt das Mittellot über der Diagonale oder die dritte Teilungslinie des an AB in A angelegten, in fünf gleiche Teile geteilten Rechten. (Im allgemeinen zwei Punkte.)

g) **Ausmessung geradliniger Figuren** (Abschnitt XII).

140) Gegeben ein Winkel mit Spitze A und innerhalb des Winkels Punkt P. Durch P eine die Schenkel des Winkels in X u. Y schneidende Gerade so zu ziehen, daß das Rechteck aus PX u. PY gleich dem Quadrate über AP werde. e. 94, 7

Ziehe AP nebst Verlängerung um sich selbst bis Q, beschreibe über PQ den Kreisbogen, der den Teilwinkel $\varphi = PAY$ faßt, so sind dessen Schnittpunkte mit dem andern Schenkel die Punkte X bzw. X' der gesuchten Geraden; oder mit Benützung des geometrischen Ortes in 142) (cfr. Spieker XII Nr. 47) $PS \perp PY$ mit Verlängerung über P, $QT \perp PQ$ bis zum Schnitt mit PS in T, liefert PT als Durchmesser des Kreises durch P, auf dem auch X gelegen sein muß. (Im allgemeinen zwei Gerade.)

e 98, 5 141) Gegeben 3 Punkte P, P', P''. Durch P eine solche Gerade zu ziehen, daß, wenn von P' und P'' auf dieselbe die Lote $P'X$ und $P''Y$ gefällt werden, das Rechteck aus PX und PY einem gegebenen Quadrat a^2 gleich werde.

$R\triangle$ aus PP' als Projektion (event. Hypotenuse) und $PN = a$ als zugehörige Kathete, $NQ \perp PN$ (bzw. PP') liefert auf PP' (bzw. dessen Verlängerung) Punkt Q, so daß $PQ \cdot PP' = a^2$. Nun ist die Senkrechte auf PQ in Q der eine, der Halbkreis über PP'' der andere geometrische Ort für den Punkt Y. (Im allgemeinen zwei Gerade.)

e.01, 5 142) In einem Kreise zieht man von einem beliebigen Punkte P der Peripherie aus Sehnen, und verlängert dieselben über P hinaus, so daß jeweils das Rechteck aus der Sehne und ihrer Verlängerung gleich dem Quadrat über dem Radius des Kreises wird. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Verlängerungen?

Verlängere den Durchmesser PQ um ein Stück PN, so daß $PN . PQ = r^2$ ($SP \perp PQ$ und $= r$, $SN \perp SQ$); ebenso verlängere eine beliebige andere Sehne PA bis C, so daß $PA . PC = r^2$, dann ist: $PN : PC = PA : PQ$, woraus, da die Scheitelwinkel gleich, $\triangle PNC \sim PAQ$, d. h $\angle PNC = PAQ = R$.

Der gesuchte geometrische Ort ist somit „eine im Abstand $NP\left(= \frac{r}{2}\right)$ vom Punkt P senkrecht zum Durchmesser gezogene Gerade“.

k. 94, 6 143) Ein Tangentenviereck, das ein gleichschenkliges Trapez ist, soll konstruiert und berechnet werden, wenn die beiden Grundlinien b u. d gegeben sind.

$R\triangle EFG$ aus Hypotenuse $EG = \frac{b+d}{2}$ und Kathete $FG = \frac{b-d}{2}$ gibt die Höhe des Trapezes $EF = \sqrt{bd}$, woraus $J = \frac{b+d}{2}\sqrt{bd}$

k. 01, 9 144) Von einem gegebenen Dreieck durch eine Gerade XZ ein gleichschenkliges Dreieck abzuschneiden, das $= \frac{1}{3}$ des gegebenen ist.

Der Schenkel $BX = BZ$ ist die mittlere Proportionale zu a und $\frac{c}{3}$ oder zu $\frac{a}{3}$ und c (Halbkreis über BC, $BE = \frac{BA}{3}$, $EF \perp BC$ gibt $BF = BZ$ oder Halbkreis über $BD = BA$, $BG = \frac{BC}{3}$, $GH \perp BD$, gibt $BH = BZ = BX$).

145) Ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln. k. 03, 8

Viereck $ABCD$ wird in das $\triangle ABE$, dieses in ein $R\triangle$ verwandelt, und zu dessen Katheten die mittlere Proportionale bestimmt.

146) Ein gegebenes Viereck $ABCD$ in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln. k. 99, 7

Cfr. 145).

147) Ein Quadrat in einen Rhombus mit dem $\angle \alpha = 36°$ zu verwandeln. k. 96, 9

Das Quadrat $ABCD$ wird in ein Parallelogramm mit einem Winkel, etwa $B_{,} = 36°$ (Kreisbogen um B mit BC, um C mit der maior von BC, Schnittpunkt U, $\angle UBC = 36°$) verwandelt und zu dessen Seiten die mittlere Proportionale bestimmt.

148) Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von dem 2 Winkel α u. β gegeben sind. e. 91, 6

Verwandle $\triangle ABC$ in $\triangle DBC$ mit gegebenem $\angle\beta$; mache $\angle BDZ =$ gegebenem $\angle\alpha$, suche zu BZ und BC die mittlere Proportionale BY und ziehe $YX \parallel DZ$.

149) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen gleich der Hälfte eines gegebenen. (Vgl. 158.) k. 92, 8

(Cfr. Spieker § 196.)

150) Ein gegebenes Trapez durch eine Parallele mit den Grundlinien zu halbieren. (Vgl. 170.) e. 00, 4

BA und CD schneiden sich in S; Halbkreis über BS, Sehne $SF = SA$, $FE \perp BS$; BE halbiert in G, $GH \perp BS$; $SX =$ Sehne SH und $XY \parallel BC$ gibt die gesuchte Teilungslinie.

h) Harmonische Teilung Abschnitt XV).

151) $\triangle$ aus a, $b:c = m:n$, und $\angle(a, t_a) = \varepsilon$ k. 94, 8

(Cfr. Spieker § 240.) Teile $BC = a$ von innen und von außen im Verhältnis von $m:n$, so ist der Halbkreis über DD' (der Kreis des Apollonius) der eine, der freie Schenkel des $\angle\varepsilon$, angelegt in der Mitte E von BC, der andere geometrische Ort für A. (Im allgemeinen zwei Dreiecke.)

k. 02, 7 152) $\triangle$ aus a, $b:c=p:q$ und m_a. (Vgl. 131.)

Teile $BC=a$ von innen und von außen im Verhältnis von $p:q$, so ist der Halbkreis über DD' der eine, der Kreisbogen um D mit m_a der andere geometrische Ort für A.

e. 96, 5 153) An zwei ungleich große Kreise ist eine innere gemeinschaftliche Tangente gezogen. Es soll auf dieser außerhalb der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Strecke ein Punkt gefunden werden, von welchem aus die beiden Kreise gleich groß erscheinen. (Vgl. 118.)

Der geometrische Ort für den gesuchten Punkt ist der apollonische Kreis, der die Centrale KK' von innen und außen im Verhältnis von $r:r'$ teilt, d. h. der Kreis über der Verbindungslinie des inneren und äußeren Ähnlichkeitspunkts als Durchmesser (cfr. Spieker § 177 u. 250).

e. 95, 7 154) Gegeben 2 Kreise K u. K'; über dem Zentralabstand derselben als Durchmesser ist ein 3. Kreis K'' gezeichnet. Auf K'' einen Punkt X so zu finden, daß die beiden von X an K gezogenen Tangenten den gleichen Winkel einschließen, wie die beiden von X an K' gezogenen Tangenten. (Vgl. 121.)

Lösung wie 153.)

i) **Von den Chordalen** (Abschnitt XVI).

e. 95, 6 155) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis K in einem gegebenen Punkt P berührt, und außerdem einen 2. gegebenen Kreis K' rechtwinklig schneidet. (Vgl. auch 172.)

Sei X der gesuchte Mittelpunkt, XS die Tangente an K', so ist $XK'^2-XS^2=XK'^2-XP^2=r_1^2$, somit der Radius KP nebst Verlängerung der eine, die Chordale (s. § 255 u. 257) zu K' und P (als Kreis) der andere geometrische Ort für X. (Tangente PQ an K', $PO=OQ$, $ON\perp PK'$ ist Chordale; cfr. § 260, 3.)

e. 97, 5 156) Gegeben Kreis K, Gerade L und auf L Punkt P. Auf L Punkt X so zu finden, daß PX gleich der Tangente von X an K werde. (Vgl. 119 u. 132.)

Sei XQ die Tangente an K, so ist $XK^2-XQ^2=XK^2-XP^2=r^2$, also die Chordale zu K und P geometrischer Ort für X (cfr. 155).

e. 03, 5 157) Gegeben Kreis K; außerhalb desselben 2 Punkte P und P'; durch dieselben einen Kreis zu legen, der den Kreis K unter einer Sehne von gegebener Größe $=a$ schneidet. (Vgl. auch 133.)

(Cfr. Spieker XVI Aufg. 13.) Durch P und P' beliebigen Kreis M, der K schneidet, so gibt die Chordale von K und M (s. § 260, 1) mit der Verlängerung von PP' den Chordalpunkt für X, K und M. (Das übrige siehe Aufgabe 133.)

k) Aufgaben mit Anwendung der algebraischen Analysis (Abschnitt XVIII).

158) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen gleich der Hälfte eines k. 92, 8
gegebenen. (Vgl. 149.)

Gesuchte Dreiecksseite: $x = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \sqrt{a \cdot \frac{a}{2}}$

159) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck (Seite $= a$) ist ein k. 98, 8
anderes einzubeschreiben, das das $^3/_4$fache des gegebenen ist, und der Radius des Umkreises für das gesuchte Dreieck zu berechnen.

Umkreisradius des gesuchten Dreiecks sei x, dann ist $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$, daher Gleichung: $x^2 = \frac{1}{4}a^2$ gibt $x = \frac{a}{2}$, d. h. der Kreis um den Mittelpunkt des gegebenen Dreiecks mit $\frac{a}{2}$ gibt die Ecken des gesuchten Dreiecks.

160) Über der Strecke a als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck k. 99, 9
zu konstruieren, von dem die eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete ist. (Cfr. Spieker XVIII Aufg. 16.)

Eine Kathete sei x

Gleichung: $a : \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} : x$ gibt $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$

d. h. x ist die maior der stetig geteilten Hypotenuse a.

161) Auf der Verlängerung des Durchmessers eines Kreises den Punkt k. 96, 8
zu finden, von welchem aus eine Tangente gleich dem Durchmesser gezogen werden kann.

Entfernung $KX = x$ gesetzt, gibt $x = r\sqrt{5}$

162) In dem einen Endpunkte des Durchmessers eines Kreises ist k. 02, 6
die Tangente gezogen; vom andern Endpunkte eine Sekante zu ziehen, daß das Stück zwischen dem Kreis und der Tangente gleich dem Radius des Kreises werde.

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 27.) Innerer Abschnitt der Sekante sei x, Abschnitt der Tangente: y.

Gleichungen: 1. $y^2 = r(r + x)$ 2. $y^2 = (r + x)^2 - 4r^2$

woraus $x = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{17}$, d. h. die um $\frac{r}{2}$ verkürzte Hypotenuse eines $R\triangle$, dessen Katheten $2r$ und $\frac{r}{2}$ sind.

e. 92, 7 163) In einem Rechteck mit den Seiten a u. b soll die kleinere Seite um einen gewissen Betrag verlängert, die größere um denselben Betrag gekürzt werden, daß das neue Rechteck einen doppelt so großen Flächeninhalt als das ursprüngliche bekomme.

Gleichung: $(a+x)(b-x) = 2ab$ oder

$$x^2 + x(a-b) = -ab \text{ gibt } x = \frac{b-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - ab}$$

Grenze der Möglichkeit: $a \gtreqless b(3 \pm 2\sqrt{2}) \gtreqless \begin{cases} 5{,}82\,b \\ 0{,}17\,b \end{cases}$

e. 02, 5 164) Im Halbkreis über dem Durchmesser $2r$ geht durch den linken Endpunkt unter $60°$ eine Sehne. Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Schenkel dieses Winkels und den Halbkreis berührt.

Entfernung des Berührungspunktes vom linken Endpunkt sei x, der gesuchte Halbmesser y.

Gleichungen: $(r-x)^2 = r(r-2y)$ und $x^2 = 3y^2$

geben $x = 2r \mp \frac{2}{3} r\sqrt{3}$, d. h. der Durchmesser $2r$ ist um $\frac{2}{3}$ der Höhe des über ihm errichteten gleichseitigen Dreiecks zu verkürzen bzw. zu verlängern (äußerer Berührungskreis).

e. 99, 5 165) Im Dreieck ABC soll zu BC die Parallele XY so gezogen werden, daß sie die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen AX u. BX. (Vgl. 135.)

(Cfr. Spieker XVIII Aufgabe 46.) Die Parallele xy sei z.

Gleichung: $\frac{c}{a} = \frac{az}{ac - cz}$ gibt $z = \frac{ac^2}{a^2 + c^2}$

z ist die vierte Proportionale zu a, c^2 und $(a^2 + c^2)$

k. 01, 8 166) Gegeben ein Halbkreis vom Radius r und auf dem Durchmesser ein Punkt P in der Entfernung a vom Mittelpunkte. Einen Kreis zu konstruieren, der den Halbkreis und den Durchmesser in diesem Punkte berührt! (Vgl. 115.)

Der Halbmesser des gesuchten Kreises sei x.

Gleichung: $a^2 = r(r-2x)$ gibt $x = \frac{(r+a)(r-a)}{2r}$

($PD \perp$ und $=$ Durchmesser BC, der Kreis durch B, C und D schneidet die verlängerte DP im gesuchten Mittelpunkt X.)

e. 93, 7 167) Gegeben 2 konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M. Um M einen 3. Kreis zu beschreiben, welcher den von den beiden ersten Kreisen gebildeten Kreisring halbiert.

Der Halbmesser des gesuchten dritten Kreises sei x

Gleichung: $\pi(R^2 - x^2) = \pi(x^2 - r^2)$

$$\text{gibt } x = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2} \,.\, \sqrt{2}$$

d. h. $=$ der halben Diagonale eines Quadrats von der Seite $\sqrt{R^2 + r^2}$

168) Gegeben ein Kreis, eine Gerade L und eine Strecke a. In den Kreis eine solche Sehne parallel L zu ziehen, daß die Summe aus der Sehne und ihrem Abstande vom Kreismittelpunkt gleich a werde. e. 91, 7

Der Centralabstand der Sehne sei x.

Gleichung: $r^2 = \frac{(a-x)^2}{4} + x^2$ gibt $x = \frac{1}{5}\{a \pm 2\sqrt{5r^2 - a^2}\}$

(Der Radikalteil ist Kathete eines $R\triangle$, dessen Hypotenuse $r\sqrt{5}$ und dessen andere Kathete a ist; $\frac{1}{5}$ der um diesen doppelten Radikalteil verlängerten bzw. verkürzten Strecke a gibt den Halbmesser des geometrischen Orts für die Mitte der Sehne.)

Zwei Lösungen sind möglich, so lange $a > 2r$ und $\leqq r\sqrt{5}$; nur eine Sehne, wenn $a \leqq 2r$, und keine, wenn $a > r\sqrt{5}$ und $< r$.

169) Ein Dreieck ABC parallel zur Höhe AD zu halbieren. k. 95, 9

(Cfr. Spieker § 284, Aufg. 6.) $CY = x$ und $CD = d$ gesetzt, gibt $x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot d} = \sqrt{a \cdot \frac{d}{2}}$

170) Ein gegebenes Trapez durch eine Parallele mit den Grundlinien zu halbieren. (Vgl. 150.) e. 00, 4

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 45.) Die Parallele XY sei x.

Gleichung: $\frac{x^2 - d^2}{x^2} = \frac{b^2 - x^2}{x^2}$ gibt $x = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{2}}$ (s. 167).

171) Ein gegebenes Dreieck durch eine Gerade sowohl nach Umfang als auch nach Inhalt zu halbieren. e. 00, 5

(Cfr. Spieker XVIII. Aufg. 45a). Die Abschnitte CX (auf BC) und CY (auf AC) seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = s\left(= \frac{a+b+c}{2}\right)$ und 2. $xy = \frac{ab}{2}$

geben $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2}}$ und $y = \frac{s}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2}}$

Konstruktion: BC verlängert um $CF = \frac{b}{2}$; Halbkreis über BF; $CG \perp BF$ gibt $\frac{ab}{2}$; CE (auf BC) $= \frac{s}{2}$; Halbkreis über CE und Kreisbogen um C mit CG schneiden sich in H; Kreisbogen um E mit EH gibt X bzw. X' und endlich Kreisbogen um C mit CX' gibt Y, mit CX gibt Y' (zwei Gerade).

172) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis K in einem gegebenen Punkte P berührt und außerdem einen 2. gegebenen Kreis K' rechtwinklig schneidet. (Vgl. auch 155.) e. 95, 6

Der Halbmesser des gesuchten Kreises sei x, die Projektion von PK' $(= a)$ auf die Zentrale KP sei q.

Gleichung: $x^2 + r_1^2 = a^2 + x^2 - 2xq$

gibt $x = \dfrac{a^2 - r_1^2}{2q}$

d. h. = der dritten Proportionale zu $(a^2 - r_1^2)$ und $2q$

k. 03, 6 173) In einen gegebenen Kreis ein Rechteck zu beschreiben, dessen Umfang gleich einer gegebenen Geraden $2s$ ist. (Vgl. 113.)

Die Rechteckseiten seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = s$ 2. $x^2 + y^2 = 4r^2$ geben

$$x = \frac{1}{2}\left\{s \pm \sqrt{(2r\sqrt{2})^2 - s^2}\right\} \text{ und } y = \frac{1}{2}\left\{s \mp \sqrt{(2r\sqrt{2})^2 - s^2}\right\}$$

d. h. x (y) ist die halbe Summe (Differenz) aus s und der Kathete eines $R\triangle$, dessen Hypotenuse $2r\sqrt{2}$ und dessen andere Kathete s ist.

Grenzen der Möglichkeit: $s \begin{array}{l} > 2r \\ < 2r\sqrt{2} \end{array}$

k. 01, 7 174) In ein gegebenes Dreieck mit der Grundlinie a und der Höhe h ein Rechteck zu konstruieren, so daß 2 Ecken auf der Grundlinie, die beiden andern auf den Seiten liegen und der Umfang desselben $= u$ werde!

Die Rechteckseiten seien x und y.

Gleichungen: 1. $x + y = \dfrac{u}{2}$ 2. $x : a = (h - y) : h$

geben $x = \dfrac{a\left(\dfrac{u}{2} - h\right)}{a - h}$; $EB (= h) \perp BC$; $EF = \dfrac{u}{2}$,

gibt $BF = \left(\dfrac{u}{2} - h\right)$; $EG = a$; gibt $BG = (a - h$; $FD \parallel GC$ und $DY \parallel BA$ gibt eine Ecke Y des Rechtecks auf AC)

Grenze der Möglichkeit: $\dfrac{u}{2} < a$.

k 99, 8 175) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Seiten die Differenz δ haben.

(Cfr. Spieker XVIII Aufgabe 58.) Die Rechteckseiten seien x und y;

Gleichungen: 1. $y - x = \delta$ und 2. $a : y = h : (h - x)$ geben $x = \dfrac{h(a - \delta)}{(a + h)}$

Construktion ähnlich wie bei 174).

l) Metrische Relationen am Dreiecke (Abschnitt XIX).

e. 93, 6 176) Auf der Peripherie eines Kreises sind 2 Punkte A u. B gegeben. Auf derselben Peripherie einen Punkt X so zu finden, daß das Rechteck aus XA u. XB gleich dem Quadrat über dem Radius wird.

Der senkrechte Abstand des Punktes X von AB sei z.
Gleichungen: 1. $XA \,.\, XB = r^2$ 2. $XA \,.\, XB = 2rz$
woraus $z = \frac{r}{2}$, d. h. die Parallelen zu AB im Abstand $\frac{r}{2}$ liefern die gesuchten Punkte (im allgemeinen vier).

177) Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a, der zur Seite b gehörigen Schwerlinie t_b und der Bedingung, daß $b^2 + c^2 = s^2$ werde, wobei s eine gegebene Strecke vorstellt. e. 02, 4

$\triangle BSD$ konstruierbar aus den 3 Seiten $BD = \frac{a}{2}$, $BS = \frac{2}{3} t_b$ und $DS = \frac{1}{3} t_a = \frac{1}{6} \sqrt{2s^2 - a^2}$

DS über S um das Doppelte, BS um die Hälfte verlängert, gibt A, E und damit C. Grenze der Möglichkeit:

$$s > \frac{a}{2} \sqrt{2} \text{ u. } t_b < \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{2s^2 - a^2} \right)$$

178) Von einem gleichschenkligen Dreieck ist gegeben das Verhältnis $h_a : h_b = m : n$ und ϱ. Das Dreieck ist zu konstruieren und sein Inhalt zu berechnen. (1. Teil der Aufg. siehe 126.) k. 98, 7

Der Halbmesser des Inkreises des ähnlichen Dreiecks AUV sei ϱ_x, so ist

$$1. \ \frac{\triangle ABC}{AUV} = \frac{\varrho^2}{\varrho_x^2} \quad 2. \ \triangle AUV = \varrho_x \,.\, \left(m + \frac{n}{2} \right) = \frac{n}{2} \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{4}}$$

$$\text{woraus } \triangle ABC = \varrho^2 \,.\, \frac{2m+n}{n} \sqrt{\frac{2m+n}{2m-n}}$$

IV. Stereometrie.

a) Cylinder.

179) Wie groß ist der Halbmesser und die Höhe eines Cylinders, der mit einem Würfel von der Kante $a = 12{,}5$ cm gleichen Inhalt hat, und dessen Mantel gleich der Oberfläche des Würfels ist? k. 99, 11

Die Gleichungen $\pi r^2 h = a^3$ u. $\pi r h = 6a^2$ geben $r = \frac{a}{3} = 4 \frac{1}{6}$ cm und $h = \frac{9a}{\pi} = 35{,}81$ cm.

180) Die Oberfläche einer Münze beträgt 6 qcm, ihre Dicke verhält sich zum Durchmesser wie 1 : 12; man berechne das Volumen der Münze. k. 98, 10

Die Gleichungen $O = 2\pi r(h + r)$ und $\frac{h}{2r} = \frac{1}{12}$ geben

$$K = \frac{O}{14}\sqrt{\frac{3\,O}{7\,\pi}} = 0{,}3877 \text{ ccm.}$$

k. 94, 9 181) Ein Silberbarren von 500 g Gewicht und dem spezifischen Gewicht $s = 10{,}5$ wird zu einem Draht von 100 m Länge ausgezogen. Wie dick wird derselbe? Wie dick wird ferner die Vergoldung des Drahtes, wenn dazu 150 g Gold vom spezifischen Gewicht $s_1 = 19{,}3$ verwendet werden?

Aus den Gleichungen: $P = \pi r^2 l s$ und $P' = (2r + d)\pi d l s'$ ergibt sich

$$1.\ 2r = 2\sqrt{\frac{P}{\pi l s}} \text{ und } 2.\ d = -r + \sqrt{r^2 + \frac{P'}{\pi l s'}}$$

$$2r = 0{,}778 \text{ mm}; \qquad d = 0{,}0305 \text{ mm.}$$

k. 91, 10 182) Eine cylindrische Röhre hat eine Länge von 1,6 m, eine Wanddicke von 0,45 dm, eine lichte Weite von 1,34 dm. Wie groß die Gesamtoberfläche und das Gewicht derselben, wenn das spezifische Gewicht $= 7{,}2$? (Zuerst allgemein zu lösen, wenn die gegebenen Größen mit l, d, w, s bezeichnet werden.)

$$1.\ O = 2\pi(l + d)(w + d); \qquad 2.\ P = \pi l d s(w + d)$$

$$O = 185{,}012 \text{ qdm}; \qquad P = 291{,}513 \text{ kg.}$$

b) Pyramide.

k. 01, 10 183) Wie schwer ist eine Pyramide aus Messing (spez. Gewicht 8,4), deren Seitenkanten die Länge 13 dm haben und deren Basis ein gleichseitiges Dreieck von der Seite 8 dm ist, und wie groß ist die Oberfläche derselben?

Länge der Grundkante: a; der Seitenkante: l

$$1.\ P = V \,.\, s = \frac{a^2 s}{12}\sqrt{3 l^2 - a^2} = 942{,}925 \text{ kg.}$$

$$2.\ O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a}{2}\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 176{,}142 \text{ qdm.}$$

e. 96, 6 184) Eine Kugel vom Halbmesser $r = 10$ cm ist in der Entfernung des halben Halbmessers vom Mittelpunkt durch eine Ebene geschnitten. In den Schnittkreis ist ein Quadrat gezeichnet und über lelzterem im größeren Kugelabschnitt eine gerade Pyramide beschrieben, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie groß ist der Rauminhalt und wie groß die Oberfläche dieser Pyramide?

$$1.\ V = \frac{3}{4} r^3 = 750 \text{ ccm}; \quad 2.\ O = \frac{3r^2}{2}(1 + \sqrt{7}) = 546{,}8625 \text{ qcm.}$$

185) Auf einem Quadrat von der Seite a steht eine regelmäßige Pyramide gleich dem auf derselben Grundfläche stehenden Würfel. In der halben Höhe wird durch die Pyramide eine Schnittebene parallel der Grundfläche gelegt, und es soll nun die Gesamtoberfläche des Rumpfes unterhalb dieser Schnittebene berechnet werden. k. 93, 9

$$O = \frac{a^2}{4}(5 + 3\sqrt{37}) = 5{,}812\ a^2$$

c) Kegel.

186) Die Höhe und den Inhalt eines senkrechten Kreiskegels zu finden, wenn die Gesamtoberfläche w und der Halbmesser r der Grundfläche gegeben sind. k. 91, 9

Aus der Gleichung: $W = \pi r(s + r) = \pi r\left(r + \sqrt{h^2 + r^2}\right)$

folgt 1. $h = \frac{1}{\pi r}\sqrt{w(w - 2\pi r^2)}$; 2. $V = \frac{r}{3}\sqrt{w(w - 2\pi r^2)}$

187) Ein Halbkreis vom Radius r wird zu einem Kegel gekrümmt; wie groß werden der Radius des Grundkreises, die Höhe und der Neigungswinkel der Mantellinie gegen die Grundkreisebene, und welches ist sein Inhalt? k. 99, 10

1. $r_1 = \frac{r}{2}$; 2. $h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; 3. $\angle\alpha = 60°$; 4. $V = \frac{\pi r^3}{24}\sqrt{3}$

188) Wie groß ist die Mantellinie desjenigen senkrechten Kreiskegels, der die Erdkugel längs des 49. Breitegrades berührt, wenn der Erdhalbmesser 6370 km mißt? Wie groß ist der Zentriwinkel des abgewickelten Kegelmantels, und welcher in der mathematischen Geographie vorkommenden Größe ist dieser Winkel gleich? k. 95, 10

Der Erdhalbmesser sei R, die geographische Breite: φ, so ist

1. die Mantellinie $s = R\ ctg\ \varphi = 5537{,}4$ km
2. der Centriwinkel $\lambda = 360\ sin\ \varphi = 271°\ 42'\ 21'', 6$

also λ gleich dem Winkel, um welchen sich an einem Ort unter dem 49.° geogr. Breite die Pendelebene scheinbar dreht.

189) Die Seitenkanten einer quadratischen Pyramide sind gleich den Grundkanten; auf dem der Basis einbeschriebenen Kreis steht ein Kegel von gleicher Höhe mit der Pyramide, der nach Inhalt und Oberfläche mit der Pyramide zu vergleichen ist. k. 98, 9

$$\frac{V_p}{V_k} = \frac{G_p}{G_k} = \frac{a^2}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4}{\pi} = 1 : 0{,}7854$$

$$\frac{O_p}{O_k} = \frac{a^2 \, (\sqrt{3}+1)}{\frac{\pi a^2}{4} \, (\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{\pi} = 1 : 0{,}7854$$

Inhalte und Oberflächen dieser beiden Körper verhalten sich also gleich $\left(= 1 : \frac{\pi}{4}\right)$

k. 96,10 190) In einen Kegel, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche, ist ein Cylinder beschrieben, dessen Höhe gleich der Hälfte der Höhe des Kegels ist. Wie verhalten sich die Oberflächen der beiden Körper?

$$O_k : O_c = \pi r^2 (\sqrt{5}+1) : \frac{3 \pi r^2}{2} = 2 (\sqrt{5}+1) : 3$$
$$= 2{,}15736 : 1 \quad \text{oder} \quad = 1 : 0{,}46352$$

k. 96,11 191) Ein gleichschenkliges Trapez rotiert um die große Parallelseite. Wie groß ist der Inhalt des Rotationskörpers, wenn ein Winkel des Trapezes $\alpha = 54^\circ 18'$, das Verhältnis der beiden Parallelen 5 : 3 und die Mittellinie des Trapezes 28,8 dm ist?

Der Rotationskörper setzt sich zusammen aus einem Cylinder und zwei gleichen Kegeln. Seien die beiden Grundlinien des Trapezes b und d, so ist die Cylinderhöhe $h = d$ und die Kegelhöhe $h_1 = \frac{b-d}{2}$; der Cylinder- und Kegelgrundkreishalbmesser $r = h_1 \; tg \, \alpha$

$$\text{also} \quad K = \pi h_1^2 \, tg^2 \, \alpha \left(h + \frac{2}{3} h_1\right)$$
$$= 8{,}3266 \text{ cbm.}$$

e. 97, 6 192) Auf der Grundfläche eines Kegels vom Grundkreisradius r und der Höhe h steht ein Würfel, dessen obere Ecken im Mantel des Kegels liegen. Wie groß ist die Kante dieses Würfels?

Sei x die Kante des Würfels, so ergibt sich aus dem Achsenschnitt der beiden Körper:

$$x : h = \left(r - \frac{x}{2} \sqrt{2}\right) : r, \text{ woraus } x = \frac{2 h r}{2 r + h \sqrt{2}}$$

d) Pyramiden- und Kegelrumpf.

e. 01, 6 193) Es soll die Formel zur Berechnung des Kubikinhalts einer abgestumpften Pyramide aus der Formel für den Kubikinhalt der Pyramide abgeleitet und die erhaltene Formel dazu verwendet werden, den Kubikinhalt eines regulären vierseitigen Pyramidenrumpfes zu berechnen, dessen untere Grundkanten $= 4\,a$, dessen obere Grundkanten $= 3\,a$ und dessen Seitenkanten $= 5\,a$ sind.

Der erste Teil der Lösung ist im Lehrbuch enthalten.

Der zweite Teil ergibt: $K = \frac{7\,a}{6}\sqrt{2}\left\{16\,a^2 + 12\,a^2 + 9\,a^2\right\}$

$$= \frac{259\,a^3}{6}\sqrt{2} = 61{,}0469\,a^3$$

194) In einem Kegelrumpf verhalten sich die Halbmesser der Grund- k. 93, 10
flächen wie 5 : 3, die Höhe ist gleich dem doppelten Durchmesser der kleinen Grundfläche. Das Volumen beträgt 2586 cbdm; gesucht die Gesamtoberfläche?

Gegeben: $R : r = 5 : 3$ und $h = 4\,r$; gesucht: O

Aus $V = \frac{\pi\,h}{3}\left\{R^2 + R\,r + r^2\right\}$ ergibt sich damit

$$r = 3\sqrt[3]{\frac{V}{196\,\pi}};\quad \text{also } s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2} = \frac{2\,r}{3}\sqrt{37}$$

und somit $O = \pi\left\{(R+r)\,s + R^2 + r^2\right\} = \frac{1}{7}\,(17 + 8\sqrt{37})\sqrt[3]{\frac{V^2\pi}{14}}$

$= 1073{,}925$ qdm.

195) Das Gewicht einer steinernen Säule von der Form eines abge- k. 02, 10
stumpften Kegels beträgt 6370 kg; es sollen der obere und untere Durchmesser $2\,r$ und $2\,r'$ berechnet werden, wenn sich $r : r' = 5 : 6$ und $r : h = 1 : 16$ verhalten, und wenn das spezifische Gewicht des Steines 2,5 beträgt.

Aus den Gleichungen: $\frac{\pi\,h}{3}\,(r^2 + r\,r_1 + r_1^2) = \frac{P}{s}$; $r_1 = \frac{6}{5}\,r$ u. $h = 16\,r$

ergibt sich $2\,r = \sqrt[3]{\frac{75\,P}{182\,\pi\,s}} = 6{,}94$ dm

und $2\,r' = 8{,}33$ dm.

196) Eine metallene cylindrische Röhre, deren äußerer Durchmesser k. 92, 9
$d = 13$ cm, deren innerer $d' = 6$ cm, deren Länge $l = 18$ cm ist, soll in einen abgestumpften Kegel umgegossen werden, in welchem der untere Durchmesser $2\,r = 10$, der obere $2\,r' = 8$ cm ist. Wie hoch wird der Kegelrumpf?

Aus der Gleichung: $\frac{\pi\,l}{4}\,(d^2 - d_1^2) = \frac{\pi\,h}{3}\,(r^2 + rr_1 + r_1^2)$

wird $h = \frac{3\,l\,(d^2 - d_1^2)}{4\,(r^2 + rr_1 + r_1^2)} = 29{,}434$ cm.

e. 99, 6 197) Aus einem Kegelrumpf, der durch r, r', h bestimmt ist, soll ein Doppelkegel, der die Grundkreise zu Grundflächen hat, herausgeschnitten werden; wie groß ist der Restkörper?

Der Inhalt des ausgeschnittenen Doppelkegels ist

$$K = \frac{\pi h}{3} \cdot \frac{r^3 + r_1^3}{r + r_1} = \frac{\pi h}{3}(r^2 - r r_1 + r_1^2)$$

somit Volumen des Restkörpers:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r r_1 + r_1^2) - \frac{\pi h}{3}(r^2 - r r_1 + r_1^2) = \frac{2 \pi h}{3} \cdot r r_1$$

d. h. gleich dem Doppelten eines Kegels von gleicher Höhe, dessen Grundkreishalbmesser das geometrische Mittel zu r und r_1 ist.

k. 95,11 198) Ein senkrechter Kreiscylinder vom Halbmesser $r = 0{,}75$ m und einer doppelt so großen Höhe hat eine konische Durchbohrung, deren beide Grundhalbmesser r_1 und r_2 sich wie $2 : 3$ verhalten. Wie groß sind diese Halbmesser, und wie groß ist die Gesamtoberfläche des röhrenförmigen Körpers, wenn das Volumen des Hohlraums halb so groß ist als das des massiven Cylinders?

Aus der Gleichung: $\pi r^2 h = \frac{2 \pi h}{3}\left\{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right\}$ wird mit Hilfe der gegebenen Werte $h = 2r$ und $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$

1. $r_1 = \frac{r}{19}\sqrt{114} = 0{,}42$ m; 2. $r_2 = \frac{3r}{38}\sqrt{114} = 0{,}63$ m;

3. $O = 6 \pi r^2 + \pi (r_1 + r_2)\sqrt{4 r^2 + (r_1 - r_2)^2} - \pi (r_1^2 + r_2^2)$

$$= \frac{\pi r^2}{38}\left\{189 + 5\sqrt{465}\right\} = 13{,}8 \text{ qm.}$$

k. 94,10 199) Ein Kegelrumpf und ein Cylinder sollen auf derselben Ebene stehen und dieselbe Achse haben, und der Cylindermantel werde von dem Kegelrumpfmantel in der Mitte der Höhe durchschnitten. Die Differenz der Inhalte der beiden Körper soll berechnet werden, wenn die Höhe h und die Halbmesser des Kegelrumpfes R und r gegeben sind.

$$V = K_K - K_{Cyl.} = \pi h \left\{\frac{R^2 + R r + r^2}{3} - \frac{(R + r)^2}{4}\right\} = \frac{\pi h}{3}\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$$

d. h. der Unterschied der Inhalte beider Körper ist gleich dem Inhalt eines Kegels von derselben Höhe, dessen Grundkreishalbmesser die halbe Differenz der Radien des Kegelrumpfs ist.

e) Regelmässige Körper.

k. 03, 9 200) Ein reguläres Oktaeder hat einen Kubikinhalt von 40 ccm. Wie groß ist seine Kante und seine Oberfläche?

$$1.\ x = \sqrt[3]{\frac{3\,K}{2}\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{9\,K^2}{2}} = 4{,}3943 \text{ cm};$$

$$2.\ O = 2\,x^2\sqrt{3} = 3\sqrt[6]{48\,K^4} = 66{,}892 \text{ qcm}.$$

f) Kugel und Kugelteile.

201) Ein Kegel, dessen Achsenschnitt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist, steht mit vertikaler Achse auf der Spitze und ist bis zur Höhe $h = 10$ cm mit Wasser gefüllt. Um wieviel steigt das Wasser, wenn eine metallene Kugel vom Radius $r = 3$ cm darin untersinkt? k. 03, 10

Die Höhe des Wasserstandes nach Eintauchen der Kugel sei h_1; der gesuchte Höhenunterschied: x, so geben die Gleichungen:

$$1.\ h_1 - h = x;\quad 2.\ \frac{\pi\,h_1^3}{3} - \frac{\pi\,h^3}{3} = \frac{4}{3}\pi\,r^3 \text{ oder}$$

$h_1^3 - h^3 = 4\,r^3$ den Wert $x = -h + \sqrt[3]{4\,r^3 + h^3} = 3{,}48$ mm.

202) Ein auf der Spitze stehender senkrechter hohler Kreiskegel vom Achsenschnitt 60° ist bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllt; eine Kugel vom Halbmesser $R = 0{,}5$ dm wird in denselben geworfen, wodurch das Wasser so hoch steigt, daß dessen Oberfläche die Kugel eben bedeckt. Wieviel Wasser enthielt der Kegel anfangs? k. 92, 10

Ursprüngliche Wassermenge: $x = 3\,\pi\,R^3 - \frac{4}{3}\pi\,R^3 = \frac{5}{3}\,\pi\,R^3$

$= \frac{5\,\pi}{24}$ cdm $= 0{,}6545$ Liter.

203) Um eine Kugel vom Radius R ist ein Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben. Wie verhalten sich die Inhalte und die Oberflächen der drei Körper? k. 02, 9

a) Die Inhalte: Kugel: Cyl : Kegel $= \frac{4}{3}\pi\,R^3 : 2\,\pi\,R^3 : 3\,\pi\,R^3$

$= 4 : 6 : 9;$

b) die Oberflächen: Kugel: Cyl.: Kegel $= 4\,R^2\,\pi : 6\,R^2\,\pi : 9\,R^2\,\pi$

$= 4 : 6 : 9$

204) Wie verhalten sich Mantellinie und Grundkreisradius eines Kegels, dessen Kubikinhalt doppelt so groß ist als der Kubikinhalt seiner Inkugel? e. 98, 6

Inhalt des Kegels: $K = \frac{\pi\,r^2}{3}\sqrt{s^2 - r^2}$

Inhalt der Inkugel: $K_1 = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{r^3\,(s-r)^3}{s^2 - r^2\sqrt{s^2 - r^2}}$

$$\text{Daher Gleichung: } s^2 - r^2 = \frac{8\,r\,(s-r)^2}{(s+r)}$$

$$\text{woraus } \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 6\left(\frac{s}{r}\right) + 9 = 0$$

$$s : r = 3 : 1$$

e. 93, 8 205) In eine Kugel vom Radius R ist ein Cylinder einbeschrieben, d. h. die Grundkreise des Cylinders sind kleine Kreise der Kugel. Wie groß sind Grundkreisradius und Höhe dieses Cylinders, wenn die gesamte Cylinderoberfläche zur Kugeloberfläche sich wie $4 : 5$ verhält?

Der Grundkreisradius sei x, also die Höhe $h = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

$$\text{somit Gleichung: } \frac{4\,R^2}{2\,x\left(x + 2\sqrt{R^2 - x^2}\right)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{gibt } x = \frac{2\,R}{5}\sqrt{5} = h$$

$$\text{oder } x = \frac{4}{5}\,R \quad \text{und} \quad h = \frac{6}{5}\,R$$

e. 91, 8 206) Um einen Kreis vom Radius r ist ein gleichschenkliges Trapez beschrieben, dessen Grundlinien sich wie $1 : 2$ verhalten. Wenn nun diese Figur um den zu den Trapezgrundlinien senkrechten Kreisdurchmesser als Achse gedreht wird, so erzeugt das Trapez einen Kegelrumpf, der Kreis eine Kugel. Wie groß ist Oberfläche und Inhalt des Kegelrumpfes und wie verhält sich Oberfläche und Inhalt des Kegelrumpfes zu Oberfläche und Inhalt der Kugel?

Die Trapezgrundlinien seien $2\,r_1$ und $2\,r_2$, der Schenkel: s

$$\text{so ist } r_1 = r\sqrt{2}\ ;\ r_2 = \frac{r}{2}\sqrt{2} \text{ und } s = \frac{3\,r}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{also 1. } O = \pi\left\{(r_1 + r_2)\,s + r_1^2 + r_2^2\right\} = 7\,\pi\,r^2$$

$$\text{2. } V = \frac{\pi\,h}{3}\left\{r_1^2 + r_1\,r_2 + r_2^2\right\} = \frac{7}{3}\,\pi\,r^3$$

$$\text{und } \frac{O}{O_1} = \frac{7\,\pi\,r^2}{4\,\pi\,r^2} = \frac{7}{4}\quad,\quad \frac{V}{V_1} = \frac{7/_3\,\pi\,r^3}{4/_3\,\pi\,r^3} = \frac{7}{4}$$

d. h. die Oberflächen und Inhalte der beiden Körper haben dasselbe Verhältnis.

e. 03, 6 207) Einem Kreis ist ein gleichschenkliges Trapez mit den parallelen Seiten $2\,R$ und $2\,r$ umbeschrieben; wird die Figur um den auf den parallelen Seiten senkrechten Durchmesser des Kreises gedreht, so stellt sie den Achsenschnitt eines Kegelrumpfes mit den Grundkreisradien R und r dar, dem eine Kugel einbeschrieben ist. Die Differenz zwischen dem Mantel des Kegelrumpfes und der Oberfläche der Kugel, sowie die Differenz zwischen den Volumen beider Körper soll in R und r ausgedrückt werden. $R = 9$; $r = 4$.

Mantel des Kegelrumpfs: $M = (R + r)\,\pi\, s = (R + r)^2\,\pi$

Oberfläche der Kugel: $O = 4\,\pi\, R\, r$

also 1. $D_M = (R - r)^2\,\pi = 78{,}54$

Volumen des Kegelrumpfs: $V = \frac{2\,\pi\sqrt{R\,r}}{3}\left\{R^2 + R\,r + r^2\right\}$

Inhalt der Kugel: $V_1 = \frac{4}{3}\,\pi\, R\, r\sqrt{R\,r}$

somit 2. $D_V = \frac{2\,\pi}{3}\sqrt{R\,r}\left\{R^2 - R\,r + r^2\right\} = 766{,}55$

208) In einer Kugel ist der Durchmesser $2\,r$ im Verhältnis $1 : 5$ geteilt und im Teilpunkt auf ihm eine senkrechte Ebene errichtet. Wie verhält sich die Oberfläche des Kegels, der den Schnittkreis zur Basis und den größeren Abschnitt des Durchmessers als Höhe hat, zur Oberfläche der Kugel, und wie verhalten sich die Inhalte der beiden Körper? k. 01, 11

Halbmesser des Schnittkreises: $r^1 = \frac{r}{3}\sqrt{5}$, somit

Oberfläche des Kegels: $O = \pi\, r^1\left(r^1 + s\right) = \frac{5\,\pi\, r^2}{9}\left\{1 + \sqrt{6}\right\}$

also 1. $O : O_1 = \frac{5}{9}\left(1 + \sqrt{6}\right) : 4 = 0{,}4791 : 1 = 1 : 2{,}087$

Inhalt des Kegels: $V = \frac{\pi\, r_1^2}{3} \cdot \frac{5\,r}{3} = \frac{25}{81}\,\pi\, r^3$

woraus 2. $V : V_1 = \frac{25}{81} : \frac{4}{3} = 0{,}2314 : 1 = 1 : 4{,}32$

209) Einer Kugel ist ein Kegel einbeschrieben. Wie verhalten sich die krummen Oberflächen der Kugelabschnitte, in welche die Grundkreisebene des Kegels die Kugel teilt, wenn der Kegel seinem Kubikinhalte nach der 9. Teil desjenigen der beiden Kugelabschnitte ist, in welchem er nicht liegt? e. 95, 8

Halbmesser der Kugel sei R; die Höhen der beiden Kugelabschnitte: h bzw. $(2\,R - h)$

Aus der Gleichung: $\frac{\pi\, h^2}{3}\left(2\,R - h\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi}{3}\left(2\,R - h\right)^2\left(R + h\right)$

ergibt sich $h = \frac{R}{2}$

somit $\frac{O}{O^1} = \frac{h}{2\,R - h} = \frac{1}{3}$

e. 92, 8 210) Durch eine Kugel einen Schnitt zu legen, daß die in die entstehenden Abschnitte einbeschriebenen Berührungskugeln zusammen $^1|_3$ der gegebenen Kugel sind. Zugleich soll das Verhältnis der krummen Oberflächen und der Volumina beider Kugelteile angegeben werden.

Der Centralabstand der Schnittebene sei x; der Kugelhalbmesser: R, so sind die Radien der beiden Berührungskugeln $\frac{R-x}{2}$ bzw. $\frac{R+x}{2}$

$$\text{Gleichung: } \left(\frac{R-x}{2}\right)^3 + \left(\frac{R+x}{2}\right)^3 = \frac{R^3}{3} \text{ gibt } x = \frac{R}{3}$$

$$\text{also 1. } \frac{O}{O^1} = \frac{R-x}{R+x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{und 2. } \frac{V}{V^1} = \frac{h^2 (3R - h}{h_1^2 (3R - h_1)} = \frac{(R-x)^2 (2R+x)}{(R+x)^2 (2R-x)} = \frac{7}{20}$$

e. 94, 8 211) Von einem Punkte, der von der Oberfläche einer Kugel vom Radius r einen Abstand $= e$ hat, ist an die Kugel der Berührungskegel gelegt. Wie groß ist der zwischen Kegelmantel und Kugeloberfläche befindliche Raum?

Der gesuchte Rauminhalt ist die Differenz des Berührungskegels und des zugewandten Kugelabschnitts; sei des letzteren Höhe x und der Halbmesser seines Kugelkreises: r_1, so ist

$$x = \frac{er}{(e+r)} \quad \text{und} \quad r_1^2 = (e+x)(r-x) = \frac{e r^2 (e + 2r)}{(e+r)^2}$$

$$\text{somit } K = \frac{\pi}{3}\left\{r_1^2 (e+x) - x^2 (3r - x)\right\} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{e^2 r^2}{(e+r)}$$

e. 00, 6 212) Von einem Kreise vom Radius r ist durch eine Sehne s ein Segment, das kleiner als der Halbkreis ist, abgeschnitten. Wie groß ist das Volumen des Umdrehungskörpers, der entsteht, wenn dieses Segment um den zu seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser als Achse gedreht wird, und was ergibt sich aus dem Resultate?

Das Volumen des Umdrehungskörpers ergibt sich als Differenz einer Kugelzone und eines Cylinders je von der Höhe s

$$V_U = V_Z - V_{Cyl.} = \frac{\pi s}{6}\left\{6\left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right) + s^2\right\} - \pi s \left(r^2 - \frac{s^2}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi s^3}{6} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{s^3}{8} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^3$$

d. h. der Umdrehungskörper ist inhaltsgleich einer Kugel, die die Sehne s zum Durchmesser hat.

213) In einer Kugel vom Halbmesser R denke man sich einen Cylinder, dessen Achsenschnitt ein Quadrat ist, eingezeichnet. Wie groß sind die Volumina der vier Stücke, in welche die Begrenzungsflächen des Cylinders die volle Kugel teilen? e. 02, 6

1. Cylinder $V = \pi r^2 h = 2 \pi r^3 \quad = \frac{\pi R^3}{2} \sqrt{2} \quad = 2{,}2214\ R^3$

2. Kugelkappe $V_, = \frac{\pi h_1^2}{3} (3 R - h_1) = \frac{\pi R^3}{12} \left(8 - 5 \sqrt{2}\right) = 0{,}2437\ R^3$

3. Umdrehungskörper (cfr. 212) $V_{,,} \quad = \frac{\pi R^3}{3} \sqrt{2} \quad = 1{,}4809\ R^3$

Zusammenstellung der Aufgaben

nach Jahrgängen.

1891.

Ev. 6. 11. 70. — 101. — 114. 148. 168. — 206.
Kath. 49. 40. 16. 68. — 83. — 105. 139. 125. — 186. 182.

1892.

Ev. 2. 32. 53. — 88. — 127. 137. 163. — 210.
Kath. 1. 41. 22. 65. — 96. — 110. 104. 149. (158.) — 196. 202.

1893.

Ev. 9. 23. 66. — 103. — 124. 176. 167. — 205.
Kath. 8. 43. 21. 64. — 77. — 123. 112. 128. — 185. 194.

1894.

Ev. 17. 62. 45. — 102. — 111. 106. 140. — 211.
Kath. 31. 3. 13. 58. — 75. — 143. 122. 151. — 181. 199.

1895.

Ev. 30. 14. 67. — 90. — 117. 155. (172.) 121. (154.) — 209.
Kath. 38. 4. 50. 72. — 76. 74. — 108. 120. 169. — 188. 198.

1896.

Ev. 28. 12. — 78. — 134. 118. (153.) — 184.
Kath. 39. 48. 59. 15. — 84. 97. — 129. 161. 147. — 190. 191.

1897.

Ev. 7. 37. — 87. — 138. 119. (132. 156.) — 192.
*) Kath. — — — — — —

1898.

Ev. 5. 36. — 92. — 130. 141. — 204.
Kath. 27. 33. 52. 60. — 85. 99. — 126. (178.) 159. — 189. 180.

*) In den Jahren 1897 und 1900 wurde keine besondere katholische Konkursprüfung abgehalten.

1899.

Ev.	15. 35. — 79. — 109. 135. (165.) — 197.
Kath.	24. 57. 47. 19. — 93. 91. — 146. 175. 160. — 187. 179.

1900.

Ev.	46. 44. — 73. — 150. (170.) 171. — 212.
*) Kath.	— — — — — —

1901.

Ev.	10. 69. — 81. — 116. 142. — 193.
Kath.	25. 42. 20. 71. — 82. 95. — 174. 115. (166.) 144. — 183. 208.

1902.

Ev.	26. 55. — 80. — 177. 164. — 213.
Kath.	29. 54. 63. — 86. 100. — 162. 131. (152.) 122. — 203. 195.

1903.

Ev.	51. 34. — 94. — 107. 133. (157.) — 207.
Kath.	56. 18. 61. — 98. 89. — 113. (173.) 136. 145. — 200. 201.

Ev.	15. 35. —	
Kath.	24. 57. 47.	87. 179.
Ev.	46. 44. —	
*) Kath.	— —	
Ev.	10. 69. —	
Kath.	25. 42. 2	) 144. —
	183. 2	
Ev.	26. 55. —	
Kath.	29. 54. 6	203. 195.
Ev.	51. 34. —	
Kath.	56. 18. 6	200. 201.