

PUNKTRECHNUNG UND PROJEKTIVE GEOMETRIE.

ZWEITER TEIL:
GRUNDLAGEN DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN GRASSMANN,
OBERLEHRER AN DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE ZU HALLE A. S.

BEILAGE ZUM PROGRAMM DER LATEINISCHEN HAUPTSCHULE ZU HALLE A. S.
OSTERN 1896.



HALLE A. S.
DRUCK DER BUCHDRUCKEREI DES WAISENHAUSES.
1896.

1896. Progr. Nr. 239.

6
94a (1896)
14

23 96



UNIVERSITÄT
DÜSSELDORF
BIBLIOTHEK

Vierter Abschnitt*).

Das Vereinigungsgesetz. Die Zurückleitung eines Punktes und eines Stabes.

Die im letzten Abschnitte entwickelten Grundformeln der planimetrischen Multiplikation lassen sich noch auf eine andere Form bringen, in der sie für die analytische Behandlung der Projektion eines Punktes und eines Stabes besonders geeignet sind. Führt man nämlich in den beiden sich dualistisch entsprechenden Formeln

$$91) \dots \dots \dots [ab \cdot bc] = [abc]b \text{ und}$$

$$105) \dots \dots \dots [AB \cdot BC] = [ABC]B,$$

in denen wie bisher die kleinen Buchstaben Punkte, die großen aber Stäbe bezeichnen, für die beiden Produkte $[ab]$ und $[AB]$ kurze Bezeichnungen ein, setzt also etwa

$$107) \dots \dots \dots [ab] = A \text{ und}$$

$$108) \dots \dots \dots [AB] = a,$$

so nehmen jene beiden Formeln die Gestalt an

$$109) \dots \dots \dots [A \cdot bc] = [Ac]b \text{ und}$$

$$110) \dots \dots \dots [a \cdot BC] = [aC]B.$$

Diese Formeln sind damit freilich nur unter gewissen Voraussetzungen über die in ihnen vorkommenden Größen A und a bewiesen, die Formel 109) nämlich unter der Voraussetzung, daß der Stab A sich auf die Form 107) bringen lasse, daß er also durch den Punkt b hindurchgehe, und die Formel 110) unter der Voraussetzung, daß der Punkt a sich in der Form $[AB]$ darstellen lasse, daß er also auf der Geraden des Stabes B liege.

Aber es fragt sich noch, ob diese beiden Bedingungen für das Bestehen der Gleichungen 109) und 110) auch erforderlich sind.

Zunächst stellt *die rechte Seite* von 109), wie auch A beschaffen sein mag, den mit einem Zahlfaktor multiplizierten Punkt b dar. *Die linke Seite* dieser Gleichung kann aber, da das Produkt zweier Stäbe der Schnittpunkt ihrer Geraden ist, nur dann dieselbe Bedeutung besitzen, wenn die Gerade des Stabes A von der Geraden des Stabes $[bc]$ im Punkte b getroffen wird.

Andererseits stellt *die rechte Seite* von 110) ein Vielfaches des Stabes B dar. *Die linke Seite* dieser Gleichung aber kann als Produkt zweier Punktfaktoren, von denen der eine $[BC]$ ein Punkt der Geraden B ist, nur dann ein Vielfaches des Stabes B ausdrücken, wenn auch der andere Faktor a in der Geraden des Stabes B liegt.

*) Die drei ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit bilden einen Beitrag für die Festschrift der Lateinischen Hauptschule zur zweihundertjährigen Jubelfeier der Universität Halle-Wittenberg (Halle, 1894) mit dem Titel: Punktrechnung und projektive Geometrie. Erster Teil: Punktrechnung.

In beiden Fällen sind also die für das Bestehen der Gleichungen 109) und 110) angegebenen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch erforderlich.

Man kann nun aber den beiden Formeln 109) und 110) noch zwei andere Formeln an die Seite stellen, die zu ihnen in Bezug auf die erste und dritte Größe der linken Seite dual sind, nämlich die Formeln

$$111) \dots \dots \dots a[bC] = [aC]b \quad \text{und}$$

$$112) \dots \dots \dots A[Bc] = [Ac]B.$$

In diesen Formeln sind die Ausdrücke in den scharfen Klammern als Produkte eines Punktes und eines Stabes bloße Zahlgrößen. Für das Bestehen der beiden Formeln ist daher erforderlich, daß die Punkte a und b in der ersten Formel und die Stäbe A und B in der zweiten sich von einander nur um einen Zahlfaktor unterscheiden, daß also etwa

$$113) \dots \dots \dots b = ga \quad \text{und}$$

$$114) \dots \dots \dots B = \eta A$$

sei, unter g und η zwei Zahlfaktoren verstanden.

Die Gleichungen 113) und 114) sind aber für das Bestehen der Gleichungen 111) und 112) zugleich auch hinreichend. Denn wenn die Größen a und b , A und B den Gleichungen 113) und 114) genügen, so ergeben sich die Formeln 111) und 112) unmittelbar aus den Formeln 62), welche die Verstellbarkeit eines Zahlfaktors aussprechen.

Schließlich kann man noch die vier Formeln 109)—112) und die Bedingungen, an die sie geknüpft sind, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammenfassen. Dazu führe man noch den Begriff der Incidenz ein.

Man nennt nämlich zwei Punkte *incident*, wenn sie denselben Ort haben, sich also höchstens durch ihre Masse unterscheiden; zwei Stäbe, wenn sie derselben Geraden angehören; endlich einen Punkt und einen Stab, wenn der Punkt auf der Geraden des Stabes liegt.

Bezeichnet man ferner für den Augenblick die in den vier Formeln vorkommenden Faktoren in derjenigen Reihenfolge, in der sie auf der linken Seite auftreten, mit I, II, III, so kann man die vier Formeln unter dem Typus zusammenfassen:

$$115) \dots \dots \dots [I \cdot II \text{ III}] = [I \text{ III}] II.$$

Diese Formel ist gültig, sobald

erstens die Stufensumme der beiden Faktoren I und III gleich drei ist, so daß also ihr Produkt eine Zahl wird, und zugleich

zweitens die Größe II mit der Größe I *incident* ist.

Die Formel 115) vertritt gleichsam das für die planimetrische Multiplikation nicht mehr allgemein gültige associative Gesetz*) und möge das Vereinungsgesetz der planimetrischen Multiplikation genannt werden.

Unter der *Zurückleitung eines Punktes x auf den Stab A unter Ausschluss des Punktes b* (vgl. Fig. 32) soll derjenige Punkt y verstanden werden, der erstens der Geraden des Stabes A angehört, und der zweitens der Gleichung

$$116) \dots \dots \dots y + x = x$$

*) Vgl. jedoch die Formeln 49) und 97).

genügt, in welcher der zweite Summand x einen mit dem Punkte b incidenten Punkt bedeutet, wo also

$$117) \dots \dots \dots x = \mathfrak{f}b$$

ist, unter \mathfrak{f} einen Zahlfaktor verstanden. Man kann dann die Gleichung 116) auch in der Form schreiben

$$y + \mathfrak{f}b = x.$$

Aus dieser Erklärung geht schon hervor, daß die Zurückleitung y unabhängig sein wird von der Länge des Stabes A , auf den zurückgeleitet wird, und von der Masse des ausgeschlossenen Punktes b , daß sie also nur abhängt von der Lage der Geraden des Stabes A und der Lage des Punktes b . Man nennt daher jene Gerade „das Grundgebiet der Zurückleitung“ und diesen Punkt, sofern an ihm nur seine Lage in Betracht gezogen wird, „das Leitgebiet der Zurückleitung“. Doch wird es keinen Verwechslungen Raum geben, wenn wir auch kurz von dem Grundgebiete A und dem Leitgebiete b sprechen (statt von dem Stabe A , der das Grundgebiet bestimmt, u. s. w.).

Will man die Zurückleitung y durch die zurückgeleitete Größe x , das Grundgebiet A und das Leitgebiet b allein ausdrücken, so multipliziere man die letzte Gleichung zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete b und erhält wegen Gleichung 20)

$$[yb] = [xb].$$

Diese Gleichung multipliziere man dann planimetrisch mit dem Grundgebiete A und bekommt

$$[A \cdot yb] = [A \cdot xb].$$

Auf die linke Seite dieser Gleichung läßt sich aber das Vereinigungsgesetz anwenden (vgl. die Gl. 115 oder die besondere Gl. 109), dessen Bedingungen erfüllt sind, da nach der Voraussetzung y auf der Geraden des Stabes A liegt. Nach ihm wird die linke Seite $= [Ab]y$. Die Gleichung verwandelt sich daher in

$$[Ab]y = [A \cdot xb],$$

und man erhält also für die Zurückleitung y die Darstellung

$$118) \dots \dots \dots y = \frac{[A \cdot xb]}{[Ab]}.$$

Der in dieser Entwicklung verwendete Hilfspunkt z läßt sich ebenfalls als Zurückleitung des Punktes x auffassen, nämlich als Zurückleitung des Punktes x auf den Punkt b unter Ausschluss des Stabes A . Denn es erscheint nur naturgemäß, den auf S. 32 aufgestellten Begriff der Zurückleitung eines Punktes dualistisch in Bezug auf das Grundgebiet und Leitgebiet in der Weise zu erweitern, daß man unter der Zurückleitung des Punktes x auf den Punkt b unter Ausschluss des Stabes A denjenigen Punkt z versteht, der

- erstens mit dem Grundgebiete b incident ist, und der
- zweitens der Gleichung

$$116) \dots \dots \dots y + z = x$$

genügt, wo der andere Summand y dem Leitgebiete A angehört. Diese Bedingungen erfüllt aber gerade der schon oben benutzte Punkt z .

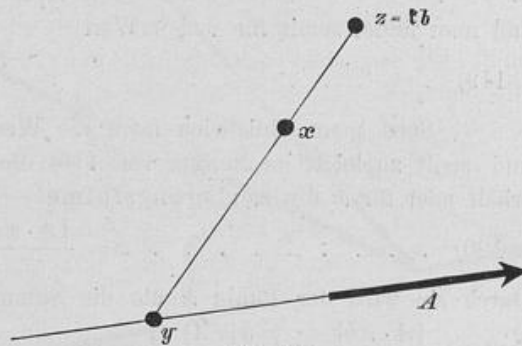


Fig. 32.

Die Zurückleitung z unterscheidet sich von der Zurückleitung y nur dadurch, daß das Grundgebiet und das Leitgebiet mit einander vertauscht sind. Sie giebt ferner zu der Zurückleitung y addiert gerade die zurückgeleitete GröÙe x und möge daher die zu der Zurückleitung y ergänzende Zurückleitung genannt werden.

Auch die Zurückleitung z läÙt sich wieder durch die zurückgeleitete GröÙe x , das Grundgebiet b und das Leitgebiet A ausdrücken. In der That, multipliziert man die Gleichung 116) planimetrisch mit dem Leitgebiete A und berücksichtigt dabei, daß der Punkt y der Geraden des Stabes A angehört, daß also $[yA] = 0$ wird, so erhält man

$$[xA] = [xA];$$

und multipliziert man diese Gleichung mit dem Grundgebiete b , so ergibt sich

$$b[xA] = b[xA].$$

Wegen der Incidenz von z und b ist aber nach dem Vereinigungsgesetz (Gl. 115, 111) die linke Seite dieser Gleichung $= [bA]z$. Die Gleichung verwandelt sich daher in

$$[bA]z = b[xA],$$

und man findet somit für z den Wert

$$119) \dots \dots \dots z = \frac{b[xA]}{[bA]}.$$

Setzt man schließlichs noch die Werte 118) und 119) in die Gleichung 116) ein und stellt zugleich im Nenner von 119) die Faktoren um, was nach 61) erlaubt ist, so erhält man für x die Zerlegungsformel

$$120) \dots \dots \dots x = \frac{[A \cdot xb] + b[xA]}{[Ab]}.$$

Durch sie wird der Punkt x als die Summe zweier Punkte (gleichsam zweier Komponenten) $\frac{[A \cdot xb]}{[Ab]}$ und $\frac{b[xA]}{[bA]}$ dargestellt, von denen der eine in der Geraden des Stabes A liegt, während der andere mit dem Punkte b zusammenfällt.

Unter der Zurückleitung eines Stabes U auf einen Punkt a unter Ausschluss eines Stabes B (vgl. Fig. 33) soll derjenige Stab V verstanden werden, dessen Gerade erstens durch den Punkt a (das Grundgebiet) hindurchgeht, und der zweitens der Gleichung

$$121) \dots \dots \dots V + W = U$$

genügt, in welcher der andere Summand W einen Stab bedeutet, der in der Geraden des Stabes B (dem Leitgebiet) liegt und also in der Form

$$122) \dots \dots \dots W = tB$$

darstellbar ist.

Will man wieder die Zurückleitung V durch den zurückgeleiteten Stab U , das Grundgebiet a und das Leitgebiet B ausdrücken, so multipliziere man die Gleichung 121) wie oben zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete B und berücksichtige dabei, daß das Produkt $[WB]$ wegen 122) verschwindet. So erhält man

$$[VB] = [UB].$$

Sodann multipliziere man diese Gleichung mit dem Grundgebiete a und findet

$$[a \cdot VB] = [a \cdot UB].$$

Da nun aber nach der Voraussetzung V mit a incident ist, so ist nach dem Vereinigungsgesetz (Gl. 115, 110) die linke Seite $= [aB]V$; die Gleichung geht daher über in

$$[aB]V = [a \cdot UB],$$

und man erhält für die Zurückleitung V den Wert

$$123) \dots \dots \dots V = \frac{[a \cdot UB]}{[aB]}.$$

Der in dieser Entwicklung benutzte Hilfsstab W ist wieder die zu V ergänzende Zurückleitung von U , nämlich die Zurückleitung von U auf das Grundgebiet B unter Ausschluss des Leitgebietes a . Denn er ist

erstens mit dem Grundgebiete B dieser Zurückleitung incident und genügt zweitens der Gleichung

$$121) \dots \dots \dots V + W = U,$$

wo der andere Summand V mit dem Leitgebiete a incident ist.

Um den Stab W durch U , a und B auszudrücken, multipliziere man die Gleichung 121) wie sonst zuerst planimetrisch mit dem Leitgebiete a und berücksichtige dabei, daß die Gerade des Stabes V durch den Punkt a hindurchgeht, daß also

$$[Va] = 0$$

ist (vgl. Gl. 66); man erhält daher

$$[Wa] = [Ua].$$

Sodann multipliziere mit dem Grundgebiete B und findet

$$B[Wa] = B[Ua].$$

Da nun aber nach der Voraussetzung die Stäbe B und W incident sind, so wird nach dem Vereinigungsgesetz (Gl. 115, 112) die linke Seite = $[Ba]W$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$[Ba]W = B[Ua],$$

so daß sich für die Zurückleitung W der Wert ergibt

$$124) \dots \dots \dots W = \frac{B[Ua]}{[Ba]}.$$

Setzt man endlich die Werte 123) und 124) für die beiden Zurückleitungen in die Gleichung 121) ein und stellt zugleich im Nenner von 124) die Faktoren um, so bekommt man für U die Zerlegungsformel

$$125) \dots \dots \dots U = \frac{[a \cdot UB] + B[Ua]}{[aB]},$$

durch die der Stab U als die Summe zweier Stäbe (zweier Komponenten) $\frac{[a \cdot UB]}{[aB]}$ und $\frac{B[Ua]}{[Ba]}$ dargestellt wird, von denen der eine durch den Punkt a hindurchgeht, während der andere in der Geraden des Stabes B liegt.

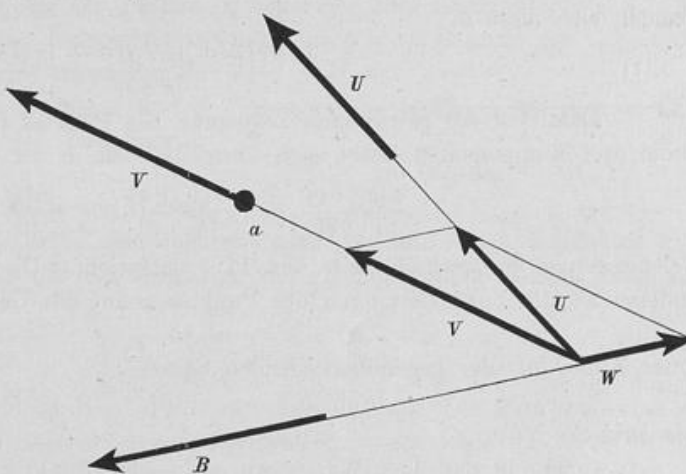


Fig. 33.

Neben den Zerlegungsformeln 120) und 125), durch die ein Punkt oder Stab als Resultante *zweier* Komponenten dargestellt wurde, sind aber für das Folgende auch Zerlegungen in *drei* Komponenten von Interesse. Sind zuerst a, b, c drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, so läßt sich jeder beliebige Punkt x ihrer Ebene als Vielfachensumme von a, b, c , das heißt, in der Form

$$126) \dots \dots \dots x = \xi a + \eta b + \zeta c$$

darstellen. Um die hier auftretenden Ableitzahlen ξ, η, ζ durch den Punkt x und die Grundpunkte a, b, c auszudrücken, multipliziere man die Gleichung 126) der Reihe nach äußerlich mit den Produkten $[bc], [ca], [ab]$ und erhält

$$[xbc] = \xi[abc], \quad [xca] = \eta[abc], \quad [xab] = \zeta[abc].$$

Und setzt man die hieraus folgenden Werte für ξ, η, ζ in die Gleichung 126) ein, so verwandelt sich diese in

$$127) \dots \dots \dots x = \frac{[xbc]a + [xca]b + [xab]c}{[abc]}.$$

Damit ist die gewünschte Zerlegung des Punktes x in drei Komponenten geleistet. Diese drei Komponenten lassen sich übrigens auch in der Form schreiben

$$\frac{a[x \cdot bc]}{[a \cdot bc]}, \quad \frac{b[x \cdot ca]}{[b \cdot ca]}, \quad \frac{c[x \cdot ab]}{[c \cdot ab]},$$

welche genau der rechten Seite von 119) entspricht. Die drei Größen sind daher nichts anderes als die Zurückleitungen des Punktes x auf das Gebiet der Punkte

$$a, \quad b, \quad c$$

unter Ausschluss der gegenüberliegenden Seiten

$$[bc], \quad [ca], \quad [ab]$$

des Dreiecks abc .

Genau in derselben Weise, wie sich jeder Punkt x einer Ebene aus drei, nicht in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c dieser Ebene numerisch ableiten läßt, kann man auch *jeden* Stab U der Ebene als Vielfachensumme von drei Stäben A, B, C darstellen, deren Linien nicht durch denselben Punkt hindurchgehen. In der That erhält man in ganz entsprechender Weise die Formel

$$128) \dots \dots \dots U = \frac{[UBC]A + [UCA]B + [UAB]C}{[ABC]},$$

also eine Zerlegung des Stabes U in drei Komponenten, die den Geraden der Stäbe A, B, C angehören. Diese Komponenten kann man dann wieder in der Form schreiben

$$\frac{A[U \cdot BC]}{[A \cdot BC]}, \quad \frac{B[U \cdot CA]}{[B \cdot CA]}, \quad \frac{C[U \cdot AB]}{[C \cdot AB]},$$

aus der mit Rücksicht auf 124) folgt, daß sie die Zurückleitungen des Stabes U auf die Geraden der Stäbe

$$A, \quad B, \quad C$$

unter Ausschluss der gegenüberliegenden Ecken

$$[BC], \quad [CA], \quad [AB]$$

des Dreiecks ABC sind.

Aus jeder der beiden Gleichungen 127) und 128) läßt sich noch eine wichtige Zahlgleichung herleiten, der je fünf beliebige Punkte oder Stäbe einer Ebene unterliegen. Multipliziert man nämlich die beiden Gleichungen planimetrisch mit den Produkten $[xd]$ und $[UD]$,

in denen d einen ganz beliebigen Punkt der Ebene, D einen beliebigen Stab bezeichnet, so verschwindet in beiden Gleichungen die linke Seite und man erhält die Identitäten

$$129) \dots 0 = [xbc] [xda] + [xca] [xdb] + [xab] [xdc] \text{ und}$$

$$130) \dots 0 = [UBC] [UDA] + [UCA] [UDB] + [UAB] [UDC],$$

deren geometrische Bedeutung sich weiter unten ergeben wird.

Fünfter Abschnitt.

Doppelverhältnis. Projektive Punktreihen und Strahlbüschel.

Eine Schar von vier einfachen oder vielfachen Punkten a, b, c, d derselben Geraden, bei der auch die Reihenfolge der Punkte in beliebiger aber bestimmter Weise, und zwar unabhängig von ihrer Lage, festgesetzt ist, möge nach von Staudt ein „Punktwurf“ genannt werden. Die beiden ersten Punkte a und b und die beiden letzten Punkte c und d sollen zugeordnete Punkte des Punktwurfes heißen (vgl. Fig. 34).

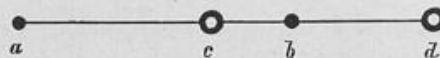


Fig. 34.

Die planimetrischen Produkte von je zwei Punkten eines Wurfes sind als Stäbe derselben Geraden nur um einen Zahlfaktor von einander verschieden und tragen also den Charakter von gleichbenannten Zahlen. Der aus ihnen gebildete Doppelbruch

$$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]}$$

ist somit eine unbenannte Zahl. Er wird das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d genannt und durch das Symbol $(abcd)$ bezeichnet, so daß also

$$131) \dots \dots \dots (abcd) = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]}$$

wird.

Aus der Form des Doppelverhältnisses folgt, daß es seinen Wert nicht ändert, erstens, wenn man gleichzeitig die Punkte eines jeden Paares zugeordneter Punkte unter sich vertauscht;

zweitens aber auch, wenn man die beiden Paare zugeordneter Punkte mit einander vertauscht.

In der That wird

$$\begin{aligned} (badc) &= \frac{[bd]}{[da]} : \frac{[bc]}{[ca]} = \frac{-[db]}{-[ad]} : \frac{-[cb]}{-[ac]} && \text{(nach Gl. 21)} \\ &= \frac{[db]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[ac]} = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = (abcd), \end{aligned}$$

d. h. es wird wirklich

$$132) \dots \dots \dots (badc) = (abcd).$$

Andererseits wird

$$\begin{aligned} (cdab) &= \frac{[ca]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[bd]} = \frac{-[ac]}{[ad]} : \frac{[cb]}{-[db]} && \text{(Gl. 21)} \\ &= \frac{[ac]}{[ad]} : \frac{[cb]}{[db]} = \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = (abcd), \end{aligned}$$

also wird in der That auch

$$133) \dots \dots \dots (edab) = (abcd).$$

Wendet man endlich die Umgestaltung 133) auf die linke Seite von 132) an, so erhält man als vierte Form des Doppelverhältnisses $(abcd)$ den Ausdruck $(dcba)$. Eine weitere Wiederholung der beiden Umformungen 132) und 133) führt dann auf die alten Formen des Doppelverhältnisses zurück. Man erhält daher für das Doppelverhältnis $(abcd)$ vier gleichwertige Formen

$$134) \dots \dots \dots (abcd) = (badc) = (edab) = (dcba).$$

Aus der Form des Doppelverhältnisses läßt sich ferner folgern, daß das Doppelverhältnis eines Punktwurfes von den Massen seiner Punkte unabhängig ist.

Denn sind a', b', \dots die mit den Punkten a, b, \dots kongruenten einfachen Punkte und ist $a = aa', b = bb', \dots$, wo also a, b, \dots die Massen der Punkte a, b, \dots bezeichnen, so wird das obige Doppelverhältnis nach den Gleichungen 18)

$$\frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{ac}{cb} \frac{[a'c']}{[c'b']} : \frac{ab}{db} \frac{[a'd']}{[d'b']}$$

oder, da sich alle Massenfaktoren fortheben,

$$135) \dots \dots \dots \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{[a'c']}{[c'b']} : \frac{[a'd']}{[d'b']}.$$

Das Doppelverhältnis eines Punktwurfes verhält sich also wirklich invariant gegenüber einer Massenänderung seiner Punkte.

Die Gleichung 135) hat nun aber noch ein besonderes Interesse, weil ihre rechte Seite eine einfache geometrische Deutung zuläßt. Denn da a', b', \dots einfache Punkte sind, so sind die Verhältnisse

der Stäbe $[a'c']$ und $[c'b']$ und andererseits der Stäbe $[a'd']$ und $[d'b']$ zugleich die Verhältnisse

der Abstände von a' nach c' und c' nach b' und von a' nach d' und d' nach b' , vorausgesetzt, daß eine Verschiedenheit im Sinne dieser Abstände durch entgegengesetzte Vorzeichen zum Ausdruck gebracht wird (vgl. Fig. 35). Man hat also den Satz:

Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d ist gleich dem Quotienten aus den beiden Abstandsverhältnissen der Punkte c und d von den Punkten a und b .

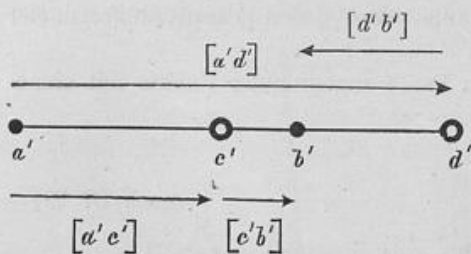


Fig. 35.

Da die Punkte c und d mit a und b in einer Geraden liegen, so werden sie sich als Vielfachensummen von a und b ausdrücken lassen. Und da es bei der Betrachtung des Doppelverhältnisses der vier Punkte a, b, c, d auf die Massen der

Punkte c und d nicht ankommt, so wird man die beiden Punkte sogar durch Gleichungen von der besonderen Form

$$136) \dots \dots \dots c = a + gb \text{ und } d = a + hb$$

darstellen können, in denen g und h Zahlgrößen sind. Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d läßt sich dann durch diese beiden Zahlgrößen ausdrücken. Es wird

$$137) \dots \dots \dots \frac{[ac]}{[cb]} : \frac{[ad]}{[db]} = \frac{g[ab]}{[ab]} : \frac{h[ab]}{[ab]} = \frac{g}{h}.$$

Ist insbesondere $h = -g$, besitzen also die Ausdrücke für die vier Punkte des Wurfes die Form $a, b, a + gb, a - gb$, so wird ihr Doppelverhältnis $= -1$, und der Punktwurf heißt harmonisch.

Denkt man sich drei von den Punkten eines Punktwurfes, etwa die Punkte a, b, c , fest und den vierten d beweglich, so daß dieser die ganze Punktreihe der Geraden $[ab]$ durchlaufen kann, so verfügt man am besten über die Massen der beiden ersten Punkte in der Weise, daß der dritte Punkt c der „Einheitspunkt“ der Punktreihe, d. h. gerade die Summe von a und b wird, daß also

$$138) \dots \dots \dots c = a + b$$

wird. Durch diese Forderung sind die Massen der beiden „Grundpunkte“ a und b bis auf einen willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor vollkommen bestimmt. Der veränderliche Punkt d der Punktreihe läßt sich dann, da es nur auf seine Lage, nicht auf seine Masse ankommt, wieder in der Form

$$139) \dots \dots \dots d = a + fb$$

darstellen, unter f eine Zahlgröße verstanden. Dieser Zahlfaktor f möge der Parameter des Punktes d in Bezug auf die drei Punkte a, b, c genannt werden. Er ist nämlich

erstens durch die Lage des Punktes d aus eindeutig bestimmt, sobald man über das Massenverhältnis der Grundpunkte a und b mit Rücksicht auf die Lage des Einheitspunktes c verfügt hat,

zweitens aber ist auch umgekehrt der Ort des Punktes d durch Angabe seines Parameters f vollkommen festgelegt, sobald die Punkte a, b, c ihrer Lage nach gegeben sind.

Das Doppelverhältnis des Punktwurfes a, b, c, d drückt sich in sehr einfacher Weise durch den Parameter des Punktes d aus; denn aus der Gleichung 137) folgt, daß das Doppelverhältnis

$$140) \dots \dots \dots (abcd) = \frac{1}{f}$$

d. h. gleich dem reciproken Werte des Parameters von d ist.

Eine Schar von vier Stäben A, B, C, D , die durch einen und denselben Punkt gehen, und deren Reihenfolge in bestimmter Weise unabhängig von ihrer Lage festgesetzt ist, möge ein Stabwurf genannt werden (vergl. Fig. 36). Die beiden ersten Stäbe A und B und die beiden letzten Stäbe C und D sollen zugeordnete Stäbe heißen.

Die planimetrischen Produkte von je zwei Stäben eines Wurfes unterscheiden sich von einander nur um einen Zahlfaktor; denn sie stellen (nach Gl. 78) sämtlich den mit einer gewissen Masse belasteten Schnittpunkt der vier Stäbe dar. Sie tragen also den Charakter von gleich benannten Zahlen. Der aus ihnen gebildete Doppelbruch

$$141) \dots (ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]}$$

ist daher wieder eine unbenannte Zahl und wird das Doppelverhältnis des Stabwurfes genannt.

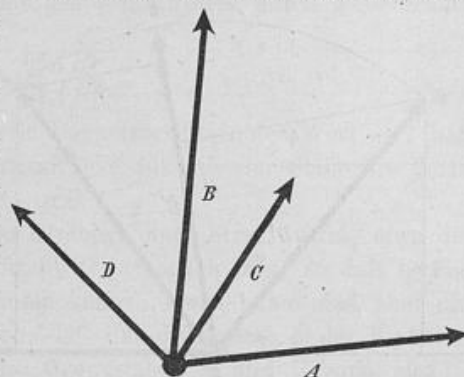


Fig. 36.

Die Eigenschaften dieses Doppelverhältnisses entsprechen genau denen des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes. In der That ändert sich der Wert des Doppelverhältnisses nicht

erstens, wenn man gleichzeitig die Stäbe eines jeden Paares zugeordneter Stäbe unter sich vertauscht,

zweitens, wenn man die beiden Paare zugeordneter Stäbe mit einander vertauscht, was mit Rücksicht auf Gl. 88) ebenso wie bei einem Punktwurf bewiesen werden kann. Man erhält also wieder die Gleichung

$$142) \dots (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Außerdem aber läßt sich auch zeigen, daß das Doppelverhältnis eines Stabwurfes von der Länge seiner Stäbe unabhängig ist. Denn bezeichnet man wieder mit A', B', \dots Stäbe von der Länge 1, die den Geraden der Stäbe A, B, \dots angehören, und deren Sinn noch beliebig gewählt werden darf, und setzt

$$A = \alpha A', B = \beta B', \dots,$$

so stellen die Zahlen α, β, \dots die Längen der Stäbe A, B, \dots dar, versehen mit dem Plus- oder Minuszeichen, je nachdem der Sinn der „einfachen“ Stäbe A', B', \dots mit dem Sinn der Stäbe A, B, \dots übereinstimmt oder nicht. Dann wird (nach den Gleichungen 90) wieder wie oben bei dem Doppelverhältnis eines Punktwurfes

$$(ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{\alpha \beta}{\beta \alpha} \frac{[A'C']}{[C'B']} : \frac{\alpha \beta}{\beta \alpha} \frac{[A'D']}{[D'B']},$$

d. h. da sich sämtliche Zahlfactoren wegheben.

$$143) \dots (ABCD) = \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{[A'C']}{[C'B']} : \frac{[A'D']}{[D'B']} = (A'B'C'D').$$

Das Doppelverhältnis eines Stabwurfes verhält sich daher in der That invariant gegenüber einer Längenänderung seiner Stäbe.

Es ist mithin auch erlaubt, statt von dem Doppelverhältnis der vier Stäbe A, B, C, D von dem Doppelverhältnis der vier Strahlen A, B, C, D zu sprechen.

Die Gleichung 143) ermöglicht nun aber auch eine geometrische Deutung des Doppelverhältnisses von vier Strahlen. Stellt man nämlich die einfachen Stäbe A', B', \dots

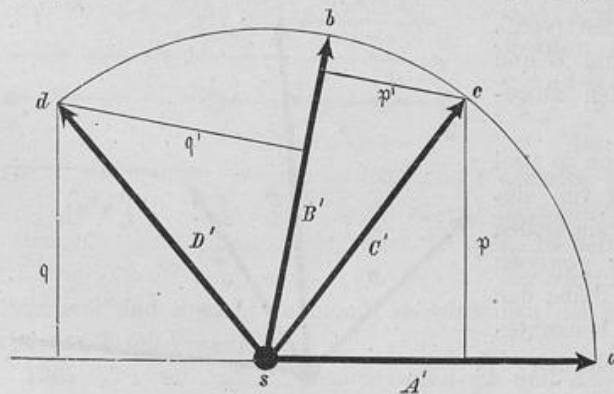


Fig. 37.

der Gleichung 143) als Produkte von je zwei einfachen Punkten dar, von denen der eine jedes Mal der Schnittpunkt s der vier Strahlen ist, setzt also $A' = [sa], B' = [sb], \dots$ (vgl. Fig. 37), so liegen die Punkte a, b, \dots auf einem mit dem Radius 1 um s geschlagenen Kreise, und die Gleichung 143) für das Doppelverhältnis des Strahlwurfes verwandelt sich in

$$(ABCD) = \frac{[sa \cdot sc]}{[sc \cdot sb]} : \frac{[sa \cdot sd]}{[sd \cdot sb]},$$

wofür man nach 78) auch setzen kann

$$(ABCD) = \frac{[sac]s}{[scb]s} : \frac{[sad]s}{[sdb]s}$$

oder endlich

$$(ABCD) = \frac{[sac]}{[sbc]} : \frac{[sad]}{[sdb]}$$

Hier sind dann die Produkte $[sac]$, $[sbc]$, $[sad]$, $[sdb]$ die *Flächenzahlen* der durch die drei Faktoren eines jeden Produktes bestimmten *Rhomben*; und da die Seiten dieser Rhomben die Länge 1 haben, so stimmen jene Flächenzahlen überein mit den *Längenzahlen der Rhombenhöhen*, vorausgesetzt, daß man diesen Längenzahlen das Plus- oder Minuszeichen giebt, je nachdem der Sinn des zugehörigen Rhombus mit dem Sinne des Einheitsblattes übereinstimmt oder nicht (vgl. Gl. 71).

Setzt man daher noch die in diesem Sinne bezeichneten Längenzahlen der Rhombenhöhen, d. h. der Abstände der Punkte c und d von den Stäben A, B gleich p, p' und q, q' , so erhält man für das Doppelverhältnis des Strahlwurfes die Darstellung

$$144) \dots\dots\dots (ABCD) = \frac{p}{p'} : \frac{q}{q'}$$

Und beachtet man endlich noch, daß für alle Punkte eines Strahles C , der durch den Schnittpunkt zweier anderen Strahlen A und B hindurchgeht, das Verhältnis der Abstände von den Strahlen A und B denselben Wert besitzt, so kann man das Abstandsverhältnis $\frac{p}{p'}$ des Punktes c von den Strahlen A und B auch als das Abstandsverhältnis des Strahles C von den Strahlen A und B bezeichnen und erhält somit den Satz:

Das Doppelverhältnis des Strahlwurfes A, B, C, D ist gleich dem Quotienten aus den beiden Abstandsverhältnissen der Strahlen C und D von den Strahlen A und B .

Da die Stäbe C und D durch die Schnittpunkte von A und B hindurchgehen, so lassen sie sich als Vielfachensummen von A und B darstellen, und da es nicht sowohl auf die Länge und den Sinn der Stäbe C und D , als auf ihre Lage ankommt, sogar durch Gleichungen von der besonderen Form

$$145) \dots\dots\dots C = A + gB, D = A + hB,$$

in denen g und h Zahlgrößen sind. Das Doppelverhältnis des Strahlwurfes A, B, C, D läßt sich dann genau wie oben das Doppelverhältnis des Punktwurfes durch diese beiden Zahlgrößen ausdrücken; denn es wird

$$146) \dots\dots\dots \frac{[AC]}{[CB]} : \frac{[AD]}{[DB]} = \frac{g[AB]}{[AB]} : \frac{h[AB]}{[AB]} = \frac{g}{h}$$

Der Strahlwurf heißt wieder harmonisch, wenn sein Doppelverhältnis den Wert -1 hat, wenn somit $h = -g$ ist. Dann besitzen also die Ausdrücke für die vier Stäbe die Form

$$A, B, A + gB, A - gB.$$

Man denke sich jetzt wieder drei von den Strahlen eines Strahlwurfes, etwa die Strahlen A, B, C fest, während man den vierten Strahl D beweglich läßt, so daß er das ganze Strahlbüschel mit dem Scheitel $[AB]$ durchlaufen kann. Dann kann man über die Längen der beiden ersten Stäbe in der Weise verfügen, daß der dritte Stab C der Einheitsstab des Strahlbüschels, d. h. gerade die Summe der „Grundstäbe“ A und B wird, also

$$147) \dots\dots\dots C = A + B$$

wird (vgl. Fig. 38). Der veränderliche Stab D ferner läßt sich, da es auf seine Länge und seinen Sinn nicht ankommt, wieder in der Form

$$148) \dots\dots\dots D = A + iB$$

darstellen. Hier ist die Zahlgröße f dem Strahle D eindeutig zugeordnet, sobald die Strahlen A, B, C ihrer Lage nach gegeben sind, und möge daher der Parameter des Strahles D in Bezug auf die drei Strahlen A, B, C heißen.

Das Doppelverhältnis des Strahlwurfes A, B, C, D wird wieder (nach 146)

$$149) \dots \dots \dots (ABCD) = \frac{1}{f},$$

d. h. gleich dem reciproken Wert des Parameters von D .

Damit hat man für die beiden „Elementargebilde“ der projektiven Geometrie, die Punktreihe und das Strahlbüschel, zwei zu einander durchaus dualistische Darstellungen gefunden und zugleich in dem Parameter f ein Mittel für die Zuordnung *zweier* solcher Elementargebilde gewonnen.

Man kann nämlich die Elemente zweier Elementargebilde, d. h. also die Elemente zweier Punktreihen oder zweier Strahlbüschel oder einer Punktreihe und eines Strahlbüschels in solcher Weise einander zuordnen, daß man den beiden Grundelementen und dem Einheits-elemente des einen Gebildes die beiden Grundelemente und das Einheits-element des andern Gebildes zuweist, außerdem aber einem jeden beliebigen Elemente des einen Gebildes dasjenige Element des andern, das denselben Parameter besitzt. Man sagt dann, die beiden Elementargebilde seien projektiv auf einander bezogen.

Um die projektive Zuordnung zweier Elementargebilde festzulegen, kann man drei der Lage nach beliebig gewählten Elementen des einen Gebildes drei ebenfalls der Lage nach beliebig gewählte Elemente des andern zuweisen. Dadurch ist dann aber zu jedem vierten Elemente

des ersten Gebildes das entsprechende Element des andern eindeutig bestimmt. Denn man braucht nur in den beiden Elementargebilden die Massen oder Längen der beiden ersten Elemente so zu wählen, daß das dritte Element das Einheits-element des Gebildes wird, so ist die gewünschte Zuordnung geleistet.

Der Ausdruck „projektive Zuordnung“ erklärt sich durch folgende Sätze:

1. Projiziert man eine Punktreihe von einem außerhalb ihrer Geraden gelegenen Punkte s aus, so erhält man ein zu der Punktreihe projektives Strahlbüschel.

In der That, bezeichnet man die Grundpunkte der Punktreihe mit a und b und ihre „Scheine“ $[sa]$ und $[sb]$ mit A und B , setzt also $[sa] = A$ und $[sb] = B$ (vgl. Fig. 39), so wird der Schein des Einheitspunktes $a + b$ der Punktreihe gleich

$$[s(a + b)] = [sa] + [sb] = A + B,$$

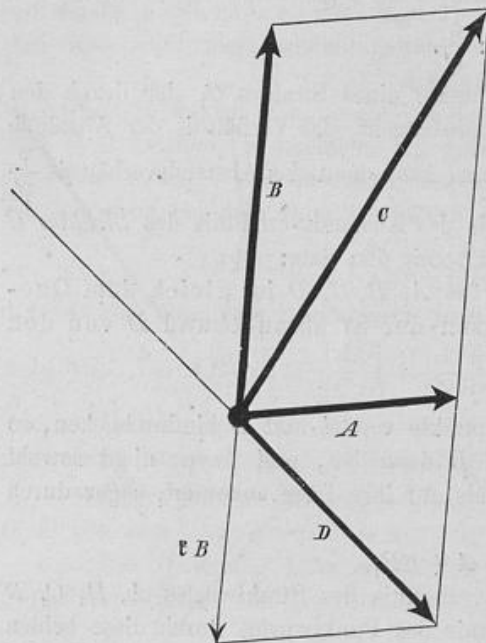


Fig. 38.

d. h. auch der Schein des Einheitspunktes $a + b$ der Punktreihe a, b stellt sich gerade als Summe der aus den Grundpunkten a und b durch die Projektion hervorgehenden Grundstäbe A und B dar. Ebenso wird der Schein des veränderlichen Punktes $a + \epsilon b$ gleich

$$[s(a + \epsilon b)] = [sa] + \epsilon[sb] = A + \epsilon B,$$

sein Parameter wird also gleich dem Parameter des projizierten Punktes $a + \epsilon b$, und es ist daher wirklich das Strahlbüschel A, B der mit ihm „perspektiven“ Punktreihe a, b in dem oben angegebenen Sinne projektiv zugeordnet.

Umgekehrt gilt der Satz:

2. Schneidet man ein Strahlbüschel mit einer nicht durch seinen Scheitel gehenden Geraden G , so erhält man auf der Geraden eine zu dem Strahlbüschel projektive Punktreihe.

Denn bezeichnet man die Grundstäbe des Büschels mit A und B und setzt die Schnittpunkte der Geraden G mit diesen Stäben gleich a und b , setzt also $[GA] = a$ und $[GB] = b$ (vgl. Fig. 40), so wird der Schnittpunkt der Geraden G mit dem Einheitsstabe $A + B$ gleich

$$[G(A + B)] = [GA] + [GB] = a + b$$

und der Schnittpunkt mit dem veränderlichen Stabe $A + \epsilon B$ gleich

$$[G(A + \epsilon B)] = [GA] + \epsilon[GB] = a + \epsilon b.$$

Diese beiden Gleichungen aber besagen, daß die Punktreihe a, b zu dem mit ihr „perspektiven“ Strahlbüschel A, B projektiv ist.

Unmittelbar aus dem Begriffe projektiver Elementargebilde folgt ferner der Satz:

3. Sind zwei Elementargebilde einem dritten projektiv, so sind sie auch unter einander projektiv.

Und hieraus wieder mit Rücksicht auf die Sätze 1. und 2.:

4. Zwei „perspektive“ Punktreihen, d. h. zwei Punktreihen, welche Schnitte eines und desselben Strahlbüschels sind, sind projektiv.

5. Zwei „perspektive“ Strahlbüschel, d. h. zwei Strahlbüschel, welche Scheine einer und derselben Punktreihe sind, sind projektiv.

Andererseits lassen sich je zwei beliebig gelegene projektive Elementargebilde durch wiederholte Anwendung der Perspektive auf einander beziehen, worauf hier indes nicht näher eingegangen werden soll.

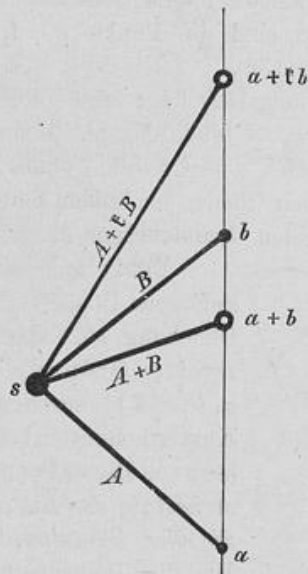


Fig. 39.

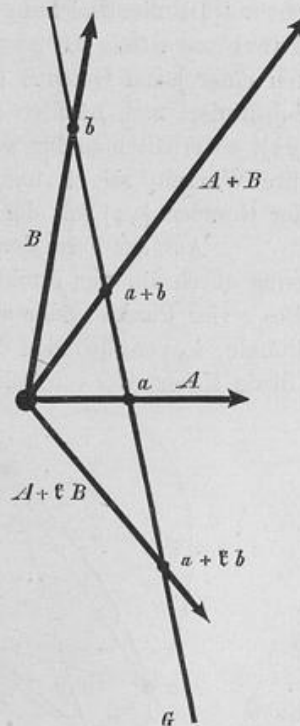


Fig. 40.

Es seien in der Ebene vier feste Punkte a, b, c, d gegeben, von denen keine drei in *einer* geraden Linie liegen. Dann frage man nach denjenigen Punkten x der Ebene, für die der Strahlwurf $[xa], [xb], [xc], [xd]$ ein gegebenes Doppelverhältnis g besitzt, welche also der Gleichung genügen

$$150) \dots \dots \dots \frac{[xa \cdot xc]}{[xc \cdot xb]} : \frac{[xa \cdot xd]}{[xd \cdot xb]} = g.$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich nach dem Vorbilde von S. 40 und 41 umformen, wodurch die Gleichung die Gestalt annimmt

$$151) \dots \dots \dots \frac{[xac]}{[xcb]} : \frac{[xad]}{[xdb]} = g.$$

Hierfür aber kann man auch schreiben:

$$152) \dots \dots \dots [xac] [xdb] - g[xad] [xcb] = 0.$$

Dieser Gleichung müssen alle Punkte x genügen, von denen aus die vier Punkte a, b, c, d durch einen Strahlwurf mit dem Doppelverhältnis g projiziert werden.

Da die Gleichung 152) in Bezug auf x vom zweiten Grade ist, so stellt sie eine Kurve zweiter Ordnung dar. In der That erkennt man sofort, daß die Kurve 152) von einer jeden Geraden $[yz]$ in zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten wird. Substituiert man nämlich in die Gleichung 152) den laufenden Punkt $y + \xi x$ der Geraden $[yz]$, so erhält man für den Parameter ξ eine Gleichung zweiten Grades. Bezeichnet man ihre Wurzeln mit ξ_1 und ξ_2 , so sind die Punkte $y + \xi_1 x$ und $y + \xi_2 x$ die Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Kurve 152).

Aus der Form der Gleichung 152) folgt ferner sogleich, daß die Kurve zweiter Ordnung durch die vier Punkte a, b, c, d hindurchgeht. Denn setzt man x gleich irgend einem dieser vier Punkte, oder auch gleich dem Produkte eines Zahlfaktors mit einem dieser vier Punkte, so verschwinden die beiden Glieder der linken Seite von 152) einzeln, weil in jedem Gliede sicher *eins* von seinen beiden dreifaktorigen Produkten zweigleiche Faktoren enthält.

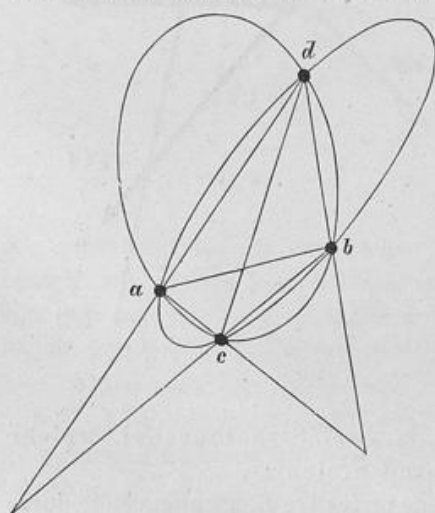


Fig. 41.

Denkt man sich das bisher als gegeben angenommene Doppelverhältnis g *veränderlich*, so stellt die Gleichung 152) das ganze Büschel von Kurven zweiter Ordnung dar, welche durch die vier Punkte a, b, c, d hindurchgehen (vgl. Fig. 41). Jeder von diesen Kurven kommt ein besonderer Wert des Doppelverhältnisses g zu. Dieses Doppelverhältnis kann daher *das Doppelverhältnis der Kurve zweiter Ordnung in Bezug auf die vier Grundpunkte des Büschels* genannt werden. Um dies Doppelverhältnis und damit die Kurve zweiter Ordnung festzulegen, kann man die Forderung stellen, daß die Kurve noch durch einen fünften Punkt e hindurchgehen solle. Der Parameter g dieser Kurve zweiter Ordnung muß dann der Gleichung genügen

$$153) [eac] [edb] - g[ead] [ecb] = 0;$$

aus ihr aber und der Gleichung 152) folgt durch Elimination von g die Gleichung

$$154) \dots \dots \dots \begin{vmatrix} [xac] [xdb] & [xad] [xcb] \\ [eac] [edb] & [ead] [ecb] \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung einer *Kurve zweiter Ordnung, die durch die fünf Punkte a, b, c, d, e hindurchgeht.*

Dem Kurvenbüschel 152) gehören drei zerfallende Kurven zweiter Ordnung an, die den Parameterwerten 0, ∞, 1 entsprechen. Denn für $g = 0$ nimmt die quadratische Gleichung die Form an

155) $[xac] [xdb] = 0,$
 zerlegt sich also in die beiden linearen Gleichungen

$$[xac] = 0 \text{ und } [xdb] = 0$$

und stellt somit das durch die beiden Stäbe $[ac]$ und $[db]$ bestimmte Linienpaar dar.

Andererseits geht die Gleichung 152) für $g = \infty$ über in die Gleichung

156) $[xad] [xcb] = 0;$

die Kurve zweiter Ordnung zerfällt also in das Linienpaar der Stäbe $[ad]$ und $[cb]$.

Für $g = 1$ endlich nimmt die quadratische Gleichung 152) die Form an

(*) $[xac] [xdb] - [xad] [xcb] = 0.$

Dafs auch diese Gleichung ein Linienpaar darstellt, erkennt man am besten mit Hülfe der Identität 129); denn nach dieser ist die linke Seite der Gleichung (*) gleich $[xab] [xdc]$, die Gleichung (*) verwandelt sich daher in

157) $[xab] [xdc] = 0$

und ist also die Gleichung des Linienpaares der Stäbe $[ab]$ und $[dc]$.

Die drei in dem Büschel enthaltenen zerfallenden Kurven zweiter Ordnung sind also nichts anderes als die drei Paare Gegenseiten des vollständigen Vierecks $abcd$.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs die der Gleichung 152) dualistisch entsprechende Gleichung

158) $[UAC][UDB] - g[UAD][UCB] = 0$
 diejenige Schar von Kurven zweiter Klasse darstellt, welche die Geraden der Stäbe A, B, C, D zu Tangenten haben (vgl. Fig. 42).

Dieser Schar gehören dann wieder drei zerfallende Kurven zweiter Klasse an, nämlich die Punktpaare

- $[AC], [DB],$
- $[AD], [CB],$
- $[AB], [DC],$

d. h. die drei Paare von Gegenecken des vollständigen Vierseits der Stäbe A, B, C, D . Ferner erhält man genau wie oben bei der Kurve zweiter Ordnung für eine *Kurve zweiter Klasse, welche die Geraden der fünf Stäbe A, B, C, D, E zu Tangenten hat,* die Gleichung

159) $\begin{vmatrix} [UAC] & [UDB] & [UAD] & [UCB] \\ [EAC] & [EDB] & [EAD] & [ECB] \end{vmatrix} = 0.$

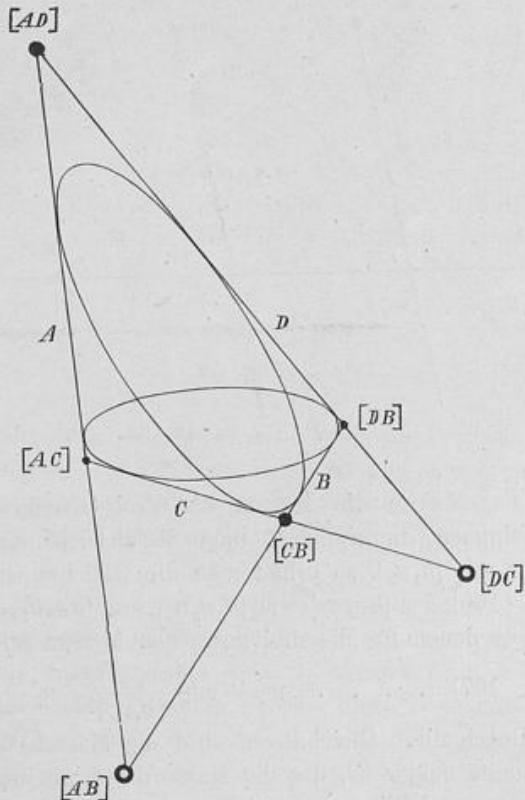


Fig. 42.

Sechster Abschnitt.

Das Fundamentaldreieck. Die Dreieckskoordinaten eines Punktes und eines Stabes.

Wir benutzen als „Grundpunkte“, aus denen alle Punkte der Ebene numerisch abgeleitet werden sollen, drei nicht in gerader Linie liegende vielfache Punkte e_1, e_2, e_3 , deren Massen mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet sein mögen und nennen das durch sie bestimmte Dreieck das Fundamentaldreieck. Sind dann a_1, a_2, a_3 die mit den drei Punkten e_1, e_2, e_3 zusammenfallenden *einfachen* Punkte, so bestehen die Gleichungen

$$160) \dots \dots \dots e_1 = m_1 a_1, \quad e_2 = m_2 a_2, \quad e_3 = m_3 a_3.$$

Dabei soll die *Lage* der drei Grundpunkte ganz beliebig angenommen werden; über ihre *Massen* aber wollen wir in der Weise verfügen, daß ein der Lage nach beliebig gewählter vierter Punkt e , der aber nicht mit zwei Grundpunkten in derselben geraden Linie liegt, *sich gerade als Summe der drei Grundpunkte darstellt*, d. h. die Ableitzahlen 1, 1, 1 erhält*) (vgl. Fig. 43). Dieser Punkt möge der Einheitspunkt der Ebene heißen. Für ihn wird also

$$161) \quad e = e_1 + e_2 + e_3$$

oder wegen 160)

$$162) \quad e = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3.$$

Bezeichnet man ferner noch die Masse des Einheitspunktes mit m' und den mit ihm kongruenten *einfachen* Punkt mit a , so wird außerdem

$$163) \quad \dots \quad e = m' a,$$

und die Gleichung 162) verwandelt sich in

$$164) \quad m' a = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3,$$

woraus (nach S. 3) für die Masse m' des Einheitspunktes der Wert folgt

$$165) \quad m' = m_1 + m_2 + m_3.$$

Um die Massen der drei Grundpunkte entsprechend der Gleichung 164) zu bestimmen, multipliziere man diese Gleichung der Reihe nach mit den Produkten $[a_2 a_3]$, $[a_3 a_1]$, $[a_1 a_2]$, so erhält man die Gleichungen

$$166) \quad m' [a a_2 a_3] = m_1 [a_1 a_2 a_3], \quad m' [a a_3 a_1] = m_2 [a_1 a_2 a_3], \quad m' [a a_1 a_2] = m_3 [a_1 a_2 a_3],$$

aus denen für die drei gesuchten Massen m_1, m_2, m_3 die Werte folgen

$$167) \quad \dots \quad m_1 = m' \frac{[a a_2 a_3]}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad m_2 = \frac{[a a_3 a_1]}{[a_1 a_2 a_3]}, \quad m_3 = \frac{[a a_1 a_2]}{[a_1 a_2 a_3]}.$$

Durch diese Gleichungen sind die Massen der drei Grundpunkte bis auf einen Proportionalitätsfaktor m' , der die Masse des Einheitspunktes darstellt, eindeutig bestimmt.

Will man endlich noch die Willkürlichkeit dieses Proportionalitätsfaktors aufheben, so unterwerfe man noch die drei vielfachen Punkte e_1, e_2, e_3 der Bedingung, *daß ihr äußeres Produkt = 1 sein solle*, daß also

*) Vgl. Möbius, Der barycentrische Calcul, § 235 ff. Gesammelte Werke, Bd. I.

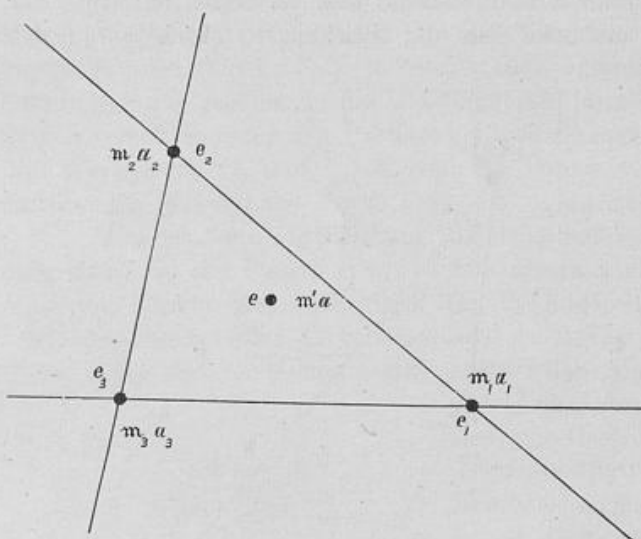


Fig. 43.

168) $[e_1 e_2 e_3] = 1$

sei. Diese Bedingung läßt sich wegen 160) auch in der Form schreiben

169) $m_1 m_2 m_3 [a_1 a_2 a_3] = 1;$

und setzt man in diese Gleichung für m_1, m_2, m_3 ihre Werte aus 167) ein, so erhält man für den Proportionalitätsfaktor m' , d. h. für die Masse des Einheitspunktes, die Darstellung

170) $m' = \sqrt[3]{\frac{[a_1 a_2 a_3]^2}{[a a_2 a_3] [a a_3 a_1] [a a_1 a_2]}}$

Aus den Formeln 167) und 170) folgert man dann:

Ist das Produkt $[a_1 a_2 a_3]$ positiv, stimmt also der Sinn des Blattes $[a_1 a_2 a_3]$ mit dem Sinne des Einheitsblattes überein (vgl. S. 20) und liegt zuerst der Einheitspunkt a innerhalb des Fundamentaldreiecks, so sind die drei Nennerprodukte von 170) positiv, also ist auch m' positiv, und es sind somit nach 167) auch alle drei Massen m_1, m_2, m_3 positiv. Liegt ferner der Einheitspunkt e in einem von den drei „Vierecksräumen“^{*)}, in die man

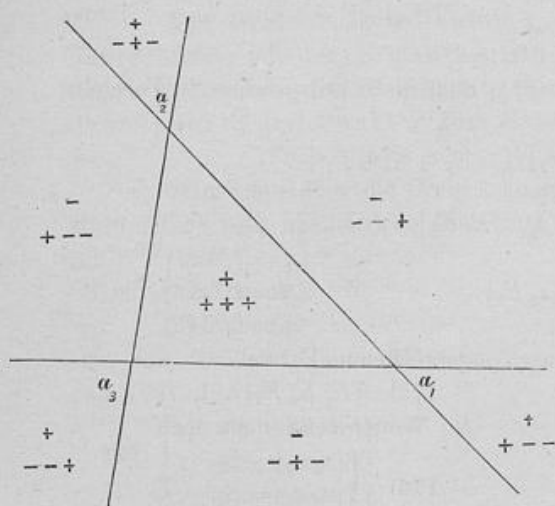


Fig. 44: $[a_1 a_2 a_3] = +$

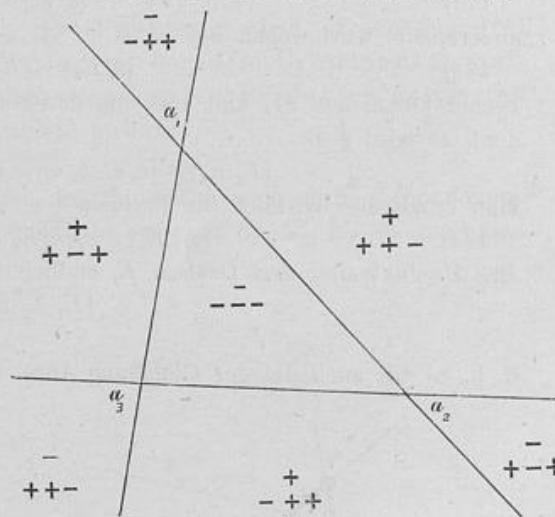


Fig. 45: $[a_1 a_2 a_3] = -$

gelangt, wenn man vom Innern des Fundamentaldreiecks ausgehend eine Seite des Dreiecks überschreitet, etwa in dem an der Seite $a_2 a_3$ liegenden Vierecksraum, so ist von den drei Nennerprodukten in 170) das dieser Seite entsprechende Produkt $[a a_2 a_3]$ negativ, während die beiden andern Produkte positiv bleiben. Es wird daher auch m' negativ, und somit nach 167) m_1 positiv, m_2 und m_3 negativ.

Liegt endlich e in einem der drei „Dreiecksräume“, welche von den Scheitelräumen des Fundamentaldreiecks gebildet werden, etwa in dem Raume, in den man gelangt, wenn man von dem Innern des Dreiecks ausgehend die Ecke a_1 überschreitet, so sind von den drei Nennerprodukten in 170) die beiden Produkte, welche diese Ecke enthalten, nämlich die Produkte $[a a_3 a_1]$ und $[a a_1 a_2]$ negativ; das andere Produkt hingegen bleibt positiv. Die Masse m' des Einheitspunktes ist dann also positiv, und es wird nach 167) ebenso wie in dem gegenüberliegenden Vierecksraume m_1 positiv, m_2 und m_3 negativ (vgl. Fig. 44).

^{*)} Man kann nämlich die unendlich ferne Gerade als die vierte Seite eines solchen Raumes auffassen.

Ist das Produkt $[a_1 a_2 a_3]$ negativ, weicht also der Sinn des Blattes $[a_1 a_2 a_3]$ von dem Sinne des Einheitsblattes ab, so sind sämtliche Vorzeichen umgekehrt (vgl. Fig. 45).

In den beiden Figuren 44 und 45 sind für die beiden Hauptfälle

$$[a_1 a_2 a_3] = + \quad \text{und} \quad [a_1 a_2 a_3] = -$$

die Vorzeichen der vier Größen

$$m', \\ m_1, m_2, m_3$$

in die sieben Räume eingetragen, in denen der Einheitspunkt liegen kann.

Um die analytische Bedeutung der Gleichung 168) deutlicher hervortreten zu lassen, setze man noch

$$[e_2 e_3] = E_1, [e_3 e_1] = E_2, [e_1 e_2] = E_3.$$

Dann zeigt sich zwischen den Größen e_i und E_i eine vollkommene Dualität. Zunächst wird wegen 170)

$$172) \dots \dots \dots [e_i E_i] = [E_i e_i] = 1,$$

andererseits wird wegen 54)

$$173) \dots \dots \dots [e_i E_k] = [E_k e_i] = 0 \quad (i \geq k).$$

Ferner folgen aus 91) und 168) die den Formeln 171) dualistisch entsprechenden Formeln; denn es wird z. B.

$$[E_2 E_3] = [e_3 e_1 \cdot e_1 e_2] = [e_3 e_1 e_2] e_1 = [e_1 e_2 e_3] e_1 = e_1.$$

Man erhält also wirklich die Formeln

$$174) \dots \dots \dots [E_2 E_3] = e_1, [E_3 E_1] = e_2, [E_1 E_2] = e_3.$$

Das Produkt aller drei Größen E_i endlich wird

$$[E_1 E_2 E_3] = [e_3 E_3] \quad (\text{nach 174}) \\ = 1 \quad (\text{nach 172}),$$

d. h. es gilt auch die der Gleichung 168) dualistisch entsprechende Formel

$$175) [E_1 E_2 E_3] = 1.$$

Weiter setze man noch

$$176) \begin{cases} [a_2 a_3] = S_1, \\ [a_3 a_1] = S_2, \\ [a_1 a_2] = S_3; \end{cases}$$

hier sind dann die Größen S_1, S_2, S_3 drei Stäbe, die nicht nur den Linien des Fundamentaldreiecks angehören, sondern auch ihrer Länge nach mit den Seiten des Dreiecks übereinstimmen (vgl. Fig. 46). Ferner wird

$$177) \begin{cases} E_1 = m_2 m_3 S_1, \\ E_2 = m_3 m_1 S_2, \\ E_3 = m_1 m_2 S_3. \end{cases}$$

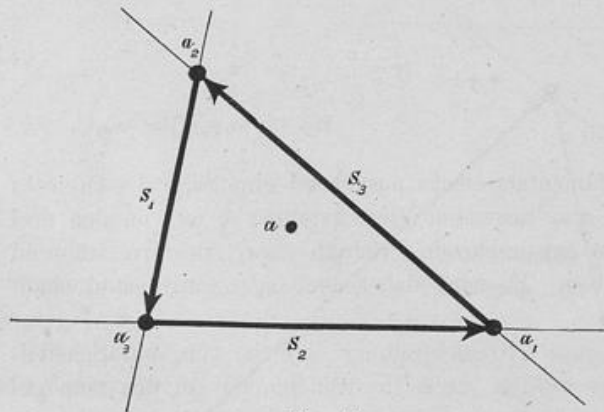


Fig. 46.

Hieraus folgt: Die drei Stäbe E_1, E_2, E_3 gehören zwar auch den Linien des Fundamentaldreiecks an, aber ihre Längen sind von den Längen der Seiten des Dreiecks im allgemeinen verschieden.

Ist jetzt x ein beliebiger einfacher oder vielfacher Punkt der Ebene, so nennt man diejenigen drei Zahlgrößen ξ_1, ξ_2, ξ_3 , durch die sich der Punkt x aus den drei Grundpunkten e_1, e_2, e_3 numerisch ableiten läßt, welche also durch die Gleichung

$$178) \dots \dots \dots x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

definiert sind, die Dreieckskoordinaten des Punktes x .

Setzt man ferner die Masse des Punktes x gleich m und den mit x zusammenfallenden einfachen Punkt gleich t , so wird

$$179) \dots \dots \dots x = m t$$

und die Erklärungsgleichung 178) der Dreieckskoordinaten läßt sich, wenn man zugleich noch die Gleichungen 160) berücksichtigt, in der Form schreiben:

$$180) \dots \dots \dots x = m t = \xi_1 m_1 \cdot a_1 + \xi_2 m_2 \cdot a_2 + \xi_3 m_3 \cdot a_3,$$

aus der sich für die Masse m des Punktes x der Wert ergibt

$$181) \dots \dots \dots m = \xi_1 m_1 + \xi_2 m_2 + \xi_3 m_3.$$

Aus der Gleichung 180) kann man folgern:

Die Dreieckskoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 des Punktes x sind diejenigen drei Zahlgrößen, mit denen man die Massen m_1, m_2, m_3 der drei Grundpunkte multiplizieren muß, damit die mit den so hervorgehenden Produkten belasteten Grundpunkte den Punkt x zum Schwerpunkte haben.

Man kann aber die Dreieckskoordinaten des Punktes x auch noch anders deuten. Multipliziert man nämlich die Gleichung 178) der Reihe nach mit E_1, E_2, E_3 , so erhält man

$$182) \begin{cases} [xE_1] = \xi_1, \\ [xE_2] = \xi_2, \\ [xE_3] = \xi_3 \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf 177) und 179)

$$183) \begin{cases} \xi_1 = m_2 m_3 m [tS_1], \\ \xi_2 = m_3 m_1 m [tS_2], \\ \xi_3 = m_1 m_2 m [tS_3]. \end{cases}$$

Hier sind aber die Produkte $[tS_1], [tS_2], [tS_3]$ die Flächeninhalte der Parallelogramme, die durch den Punkt x und je eine Seite des Fundamentaldreiecks bestimmt werden.

Bezeichnet man also noch die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks mit s_1, s_2, s_3 , und zwar diese Größen positiv oder negativ genommen, je nachdem die Produkte $[aS_1], [aS_2], [aS_3]$ positiv oder negativ sind, und versteht man ferner unter p_1, p_2, p_3 die Abstände des Punktes x von den Seiten des Fundamentaldreiecks, diese Abstände positiv oder negativ genommen, je nachdem x

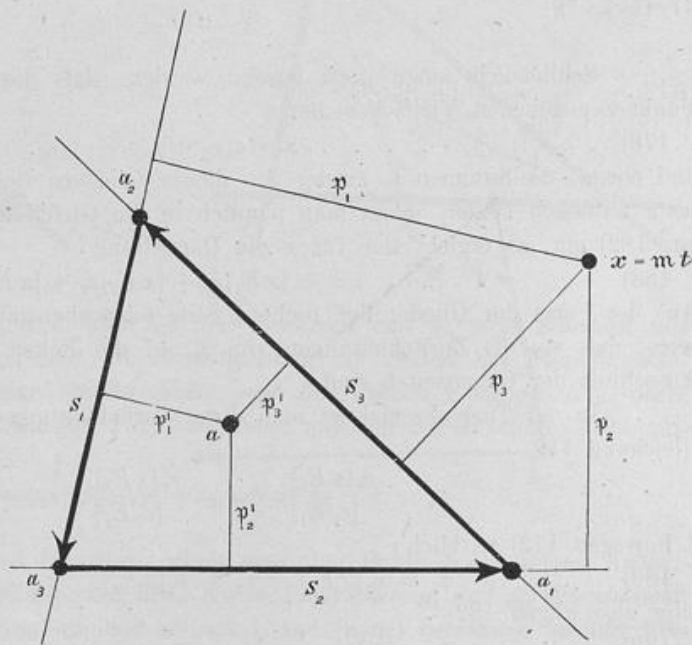


Fig. 47.

auf derselben oder der entgegengesetzten Seite von S_1, S_2, S_3 liegt wie der Einheitspunkt a (vgl. Fig. 47), so wird

$$[tS_1] = \bar{s}_1 p_1, \quad [tS_2] = \bar{s}_2 p_2, \quad [tS_3] = \bar{s}_3 p_3,$$

und die Gleichungen 183) verwandeln sich in

$$184) \quad \dots \quad \bar{x}_1 = m_2 m_3 m \bar{s}_1 p_1, \quad \bar{x}_2 = m_3 m_1 m \bar{s}_2 p_2, \quad \bar{x}_3 = m_1 m_2 m \bar{s}_3 p_3.$$

Setzt man endlich noch die absolut genommenen Abstände des Einheitspunktes $e = m'a$ von den Seiten des Fundamentaldreiecks gleich p_1', p_2', p_3' und wendet die Gleichungen 184) auf den Einheitspunkt e an, dessen Koordinaten gleich 1, 1, 1 und dessen Masse gleich m' ist, so erhält man die Gleichungen:

$$185) \quad \dots \quad 1 = m_2 m_3 m' \bar{s}_1 p_1', \quad 1 = m_3 m_1 m' \bar{s}_2 p_2', \quad 1 = m_1 m_2 m' \bar{s}_3 p_3'$$

und dividiert man dann die Gleichungen 184) durch die Gleichungen 185), so findet man für die Dreieckskoordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ die Darstellung:

$$186) \quad \dots \quad \bar{x}_1 = \frac{m p_1}{m' p_1'}, \quad \bar{x}_2 = \frac{m p_2}{m' p_2'}, \quad \bar{x}_3 = \frac{m p_3}{m' p_3'},$$

aus der die Proportion folgt:

$$187) \quad \dots \quad \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 = \frac{p_1}{p_1'} : \frac{p_2}{p_2'} : \frac{p_3}{p_3'},$$

und man hat den Satz:

Die Dreieckskoordinaten \bar{x}_i eines Punktes x sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\frac{m}{m'}$ gleich den Verhältnissen $\frac{p_i}{p_i'}$ aus den Abständen des Punktes x und denen des Einheitspunktes e von den Seiten S_i des Fundamentaldreiecks.*)

Schließlich möge noch gezeigt werden, daß die einzelnen Glieder der für den Punkt x gegebenen Vielfachensumme

$$178) \quad \dots \quad x = \bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + \bar{x}_3 e_3,$$

und ebenso die Summen je zweier von diesen Gliedern sich als *Zurückleitungen des Punktes x* auffassen lassen. Setzt man nämlich in die Gleichung 178) für $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ihre Werte aus 182) ein, so ergibt sich für x die Darstellung

$$188) \quad \dots \quad x = [xE_1]e_1 + [xE_2]e_2 + [xE_3]e_3.$$

Aus der Form der Glieder der rechten Seite folgt aber mit Rücksicht auf 172) ohne weiteres, daß sie die Zurückleitungen von x auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenseiten sind.

In der That, bezeichnet man diese Zurückleitungen mit $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, so wird (nach Gleichung 119)

$$\bar{x}_1 = \frac{e_1 [xE_1]}{[e_1 E_1]}, \quad \bar{x}_2 = \frac{e_2 [xE_2]}{[e_2 E_2]}, \quad \bar{x}_3 = \frac{e_3 [xE_3]}{[e_3 E_3]},$$

d. h. wegen 172) wirklich

$$189) \quad \dots \quad \bar{x}_1 = e_1 [xE_1], \quad \bar{x}_2 = e_2 [xE_2], \quad \bar{x}_3 = e_3 [xE_3]$$

oder also wegen 182)

$$190) \quad \dots \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_1 e_1, \quad \bar{x}_2 = \bar{x}_2 e_2, \quad \bar{x}_3 = \bar{x}_3 e_3,$$

womit bewiesen ist:

*) Vgl. hierzu und zum Folgenden Gundelfinger, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Dingeldey, Leipzig 1895, S. 2 ff.

Die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 178) für den Punkt x sind die Zurückleitungen von x auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenseiten.

Hieraus aber folgt weiter nach der Entwicklung auf S. 33 u. 34:

Die drei Summen von je zwei Gliedern der Vielfachensumme 178) für x sind nichts anderes als die zu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ergänzenden Zurückleitungen von x , d. h. als die Zurückleitungen von x auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenecken.

Denn diese drei Summen geben zu den Größen α_i addiert die zurückgeleitete Größe x .

Bezeichnet man daher noch diese Zurückleitungen des Punktes x auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenecken mit y_1, y_2, y_3 , so wird

191) $y_1 = \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2, \quad y_3 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3$
 oder mit Rücksicht auf 160)

192) $y_1 = \alpha_2 m_2 a_3 + \alpha_3 m_3 a_1, \quad y_2 = \alpha_3 m_3 a_1 + \alpha_1 m_1 a_2, \quad y_3 = \alpha_1 m_1 a_2 + \alpha_2 m_2 a_3.$
 Andererseits wird nach 118) bei Weglassung der Nenner, die den Wert 1 haben,

193) $y_1 = [E_1 \cdot x e_1], \quad y_2 = [E_2 \cdot x e_2], \quad y_3 = [E_3 \cdot x e_3].$
 Diese Gleichungen besagen (vgl. Fig. 48):

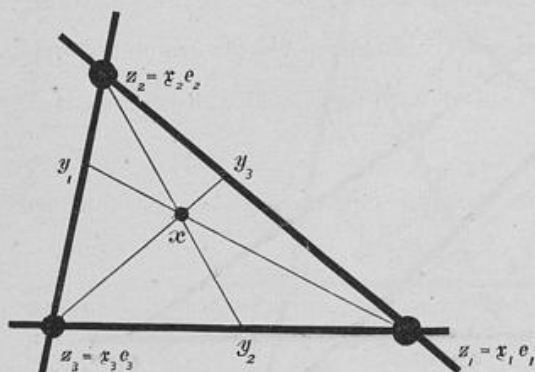


Fig. 48.

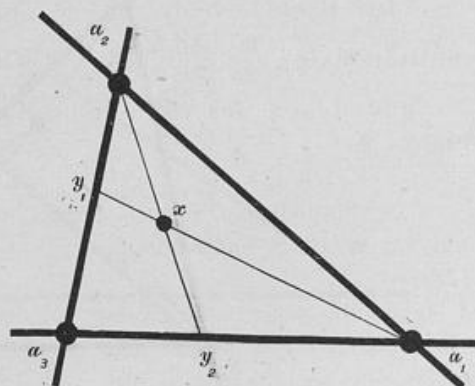


Fig. 49.

Die Zurückleitungen y_i , d. h. also die drei Summen von je zwei Gliedern aus der Vielfachensumme 178) für x , sind die Schnittpunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks mit den von den gegenüberliegenden Ecken nach dem Punkte x gezogenen Geraden, was übrigens auch aus den Gleichungen 191) zusammen mit den zur Gleichung 178) äquivalenten Gleichungen

194) $x = y_1 + \alpha_1 = y_2 + \alpha_2 = y_3 + \alpha_3$
 hervorgeht.

Die Punkte y_i kann man benutzen, wenn man den Punkt x aus seinen Koordinaten konstruieren will. Dazu zeichne man etwa die beiden Punkte y_1 und y_2 , entsprechend den Gleichungen 192), indem man die Seiten $[a_2 a_3]$ und $[a_3 a_1]$ beziehlich in den Verhältnissen $\alpha_3 m_3 : \alpha_2 m_2$ und $\alpha_1 m_1 : \alpha_3 m_3$ teilt. Dann ist der Schnittpunkt der Geraden $[a_1 y_1]$ und $[a_2 y_2]$ der gesuchte Punkt x (vgl. Fig. 49).

Als Dreieckskoordinaten eines Stabes U bezeichnet man diejenigen drei Zahlgrößen u_1, u_2, u_3 , durch die sich der Stab U aus den drei „Grundstäben“ E_1, E_2, E_3 numerisch ableiten läßt, die also der Gleichung genügen

$$195) \dots \dots \dots U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3.$$

Die so definierten Stabkoordinaten u_1, u_2, u_3 gestatten zunächst leicht eine geometrische Deutung, die der zweiten Deutung der Punktkoordinaten (vgl. S. 49 u. 50) entspricht. Multipliziert man nämlich die Gleichung 195) der Reihe nach mit e_1, e_2, e_3 , so erhält man

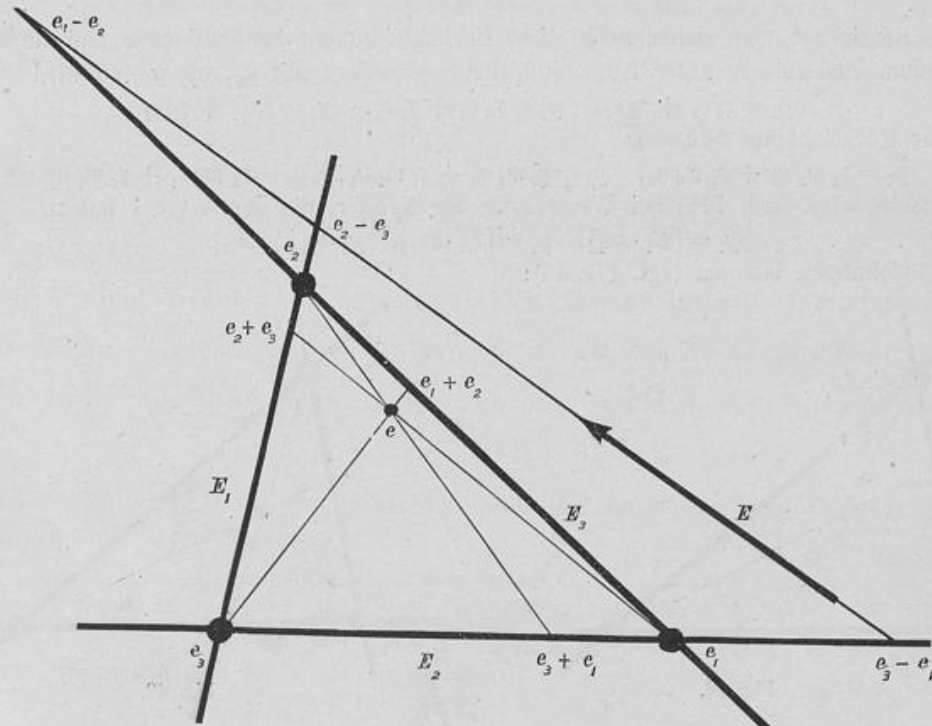


Fig. 50.

$$196) \dots \dots \dots [Ue_1] = u_1, [Ue_2] = u_2, [Ue_3] = u_3.$$

Um die linken Seiten dieser Gleichungen noch weiter umzuformen, bezeichne man noch mit T einen Stab von der Länge 1, welcher der Geraden des Stabes U angehört, und dessen Sinn so gewählt ist, daß das Produkt $[Ta]$ positiv wird, und nenne den positiv oder negativ genommenen Zahlfaktor l , welcher der Gleichung genügt

$$197) \dots \dots \dots U = lT$$

die Längenzahl des Stabes U . Bei Benutzung der Gleichungen 197) und 160) lassen sich die Gleichungen 196) auch in der Form schreiben.

$$198) \dots \dots \dots u_1 = m_1 l [Ta_1], \quad u_2 = m_2 l [Ta_2], \quad u_3 = m_3 l [Ta_3]$$

Hier sind die Produkte $[Ta_1], [Ta_2], [Ta_3]$ nichts anderes als die Abstände q_1, q_2, q_3 des Stabes U von den drei Ecken des Fundamentaldreiecks, diese Abstände positiv oder negativ genommen, je nachdem die Punkte a_1, a_2, a_3 auf derselben

Seite von T liegen wie der Einheitspunkt a oder nicht. Die Gleichungen 198) lassen sich daher auch in der Form schreiben:

199) $u_1 = m_1 l q_1, u_2 = m_2 l q_2, u_3 = m_3 l q_3.$

Um aus diesen Gleichungen 199) für die Stabkoordinaten eine Proportion ableiten zu können, die der Proportion 187) für Punktkoordinaten entspricht, führe man noch den Begriff des Einheitsstabes ein. Wir bezeichnen als Einheitsstab denjenigen Stab E , dessen Koordinaten 1, 1, 1 lauten, der also durch die Gleichung bestimmt wird

200) $E = E_1 + E_2 + E_3.$

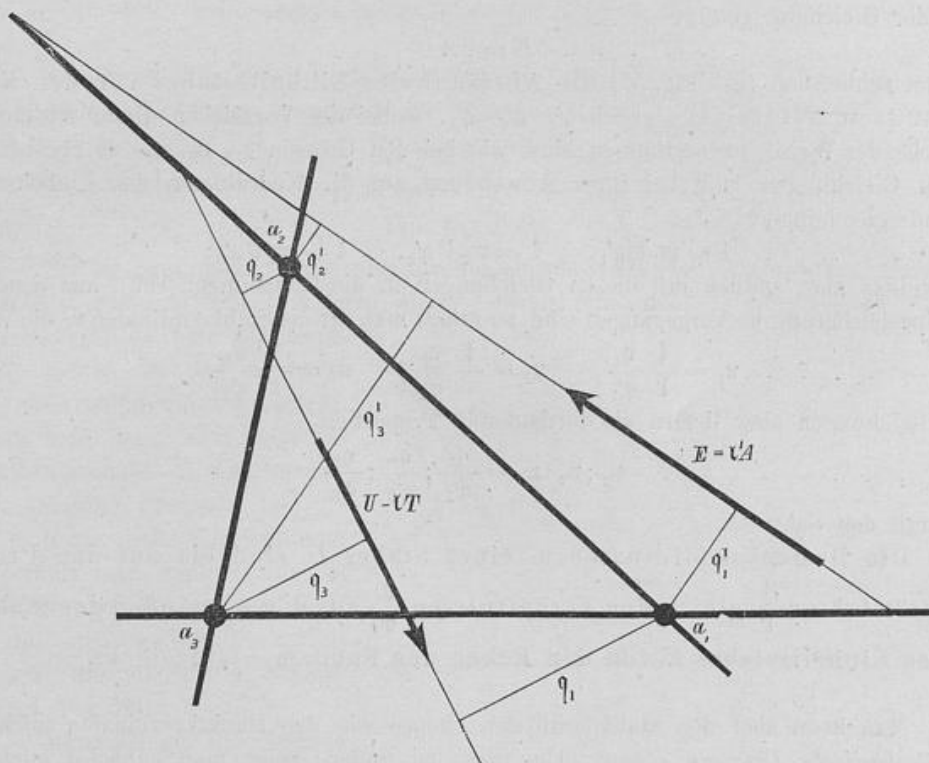


Fig. 51

Will man die *Lagenbeziehung dieses Stabes zum Einheitspunkte* finden, so frage man nach den Schnittpunkten der Geraden des Einheitsstabes mit den Seiten des Fundamentaldreiecks d. h. nach der Lage der Punkte $[EE_1]$, $[EE_2]$, $[EE_3]$ (vgl. Fig. 50). Es wird

$$\begin{aligned} [EE_1] &= [(E_1 + E_2 + E_3) E_1] \\ &= [E_2 E_1] + [E_3 E_1] && \text{(nach Gl. 93)} \\ &= -e_3 + e_2 && \text{(nach Gl. 88 und 174)} \\ &= e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Die *dieser Differenz entsprechende Summe* $e_2 + e_3$ ist nun aber nach S. 51 die Zurückleitung des Punktes $e = e_1 + e_2 + e_3$ auf die Seite E_1 unter Ausschluss der gegenüberliegenden Ecke e_1 , d. h. der Schnittpunkt der Seite E_1 mit der Geraden $[ee_1]$. Und da nach S. 39 die vier Punkte $e_2, e_3, e_2 + e_3, e_2 - e_3$ vier harmonische Punkte sind, so hat man den Satz:

Die Gerade des Einheitsstabes trifft eine jede Seite des Fundamentaldreiecks in demjenigen Punkte der vom Einheitspunkte durch die beiden andern Seiten des Fundamentaldreiecks harmonisch getrennt ist.

Aus diesem Grunde nennt man die Gerade des Einheitsstabes die Polare des Einheitspunktes in Bezug auf das Fundamentaldreieck.

Bezeichnet man jetzt wieder mit A den Stab von der Länge 1, welcher der Geraden des Einheitsstabes E angehört, und dessen Sinn so gewählt ist, daß das Produkt $[Aa]$ positiv wird, und versteht wieder unter der Längenzahl von E diejenige Zahlgröße ν , die der Gleichung genügt

$$201) \quad \dots \dots \dots E = \nu A,$$

und setzt schließlich (vgl. Fig. 51) die Abstände des Einheitsstabes von den Ecken des Fundamentaldreiecks gleich q'_1, q'_2, q'_3 , wobei die Vorzeichen dieser Abstände in entsprechender Weise zu bestimmen sind wie bei den Größen q_1, q_2, q_3 , so ergeben sich aus den Gleichungen 199) bei ihrer Anwendung auf die Koordinaten des Einheitsstabes die Sondergleichungen

$$202) \quad \dots \dots \dots 1 = m_1 \nu q'_1, \quad 1 = m_2 \nu q'_2, \quad 1 = m_3 \nu q'_3;$$

und dividiert man endlich mit diesen Gleichungen in die Gleichungen 199), aus denen sie durch Spezialisierung hervorgegangen sind, so erhält man für die Stabkoordinaten u_i die Werte:

$$203) \quad \dots \dots \dots u_1 = \frac{1}{\nu} \frac{q_1}{q'_1}, \quad u_2 = \frac{1}{\nu} \frac{q_2}{q'_2}, \quad u_3 = \frac{1}{\nu} \frac{q_3}{q'_3}.$$

Diese Gleichungen aber liefern die fortlaufende Proportion

$$204) \quad \dots \dots \dots u_1 : u_2 : u_3 = \frac{q_1}{q'_1} : \frac{q_2}{q'_2} : \frac{q_3}{q'_3}$$

und damit den Satz:

Die Dreieckskoordinaten u_i eines Stabes U sind bis auf den Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{\nu}$ gleich den Verhältnissen $\frac{q_i}{q'_i}$ aus den Abständen des Stabes U und des Einheitsstabes E von den Ecken des Fundamentaldreiecks.

Man kann aber den Stabkoordinaten ebenso wie den Punktkoordinaten auch eine mehr *mechanische Deutung* geben. Um diese zu finden, zeige man zunächst auch hier wiederum, daß die einzelnen Glieder der für den Stab U gegebenen Vielfachensumme

$$195) \quad \dots \dots \dots U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3,$$

und ebenso die Summen je zweier dieser Glieder sich als Zurückleitungen des Stabes U auffassen lassen.

Dazu setze man in die Gleichung 195) für die Stabkoordinaten u_1, u_2, u_3 ihre Werte aus 196) ein und erhält

$$205) \quad \dots \dots \dots U = [Ue_1] E_1 + [Ue_2] E_2 + [Ue_3] E_3.$$

Aus der Form der Glieder rechter Hand folgt aber mit Rücksicht auf 172) sofort, daß die Zurückleitungen des Stabes U auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Ecken sind. Denn bezeichnet man diese Zurückleitungen mit W_1, W_2, W_3 , so wird nach den Gleichungen 124) und 172) in der That

$$206) \quad \dots \dots \dots W_1 = E_1 [Ue_1], \quad W_2 = E_2 [Ue_2], \quad W_3 = E_3 [Ue_3],$$

oder also

$$207) \quad \dots \dots \dots W_1 = u_1 E_1, \quad W_2 = u_2 E_2, \quad W_3 = u_3 E_3.$$

Damit ist aber wirklich bewiesen:

Die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 195) für den Stab U sind die Zurückleitungen von U auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenecken.

Hieraus aber folgt wieder nach der Entwicklung auf S. 35:

Die drei Summen von je zwei Gliedern der Vielfachensumme 195) für U sind die zu W_1, W_2, W_3 ergänzenden Zurückleitungen von U , d. h. die Zurückleitungen von U auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenseiten.

Denn diese drei Summen geben ja zu den Größen W_i addiert die zurückgeleitete Größe U .

Bezeichnet man daher noch diese Zurückleitungen des Stabes U auf die Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss der Gegenseiten mit V_1, V_2, V_3 , so wird

$$208) \quad \dots V_1 = u_2 E_2 + u_3 E_3, \quad V_2 = u_3 E_3 + u_1 E_1, \quad V_3 = u_1 E_1 + u_2 E_2.$$

Andererseits wird nach 123) und 172)

$$209) \quad \dots V_1 = [e_1 \cdot UE_1], \quad V_2 = [e_2 \cdot UE_2], \quad V_3 = [e_3 \cdot UE_3].$$

Die so gewonnene Auffassung für die einzelnen Glieder der Vielfachensumme 195) und für die Summen von je zweien dieser Glieder ermöglicht es nun aber in der That, für diese Größen eine Konstruktion zu geben, die den Kraftzerlegungen in der Mechanik entspricht, so daß man dann also auch für die Stabkoordinaten u_i eine mechanische Deutung gewinnt.

Nach dem Vorbilde von S. 35 erhält man nämlich für die Zurückleitungen W_i des Stabes U und die ergänzenden Zurückleitungen V_i die folgende Konstruktion (vgl. Fig. 52):

Man bringe die Gerade des Stabes U zum Durchschnitt mit der Dreiecksseite E_i im Punkte t_i und verbinde t_i mit der jener Seite gegenüberliegenden Ecke e_i . Sodann zerlege man U in zwei Komponenten, die den Geraden der Stäbe E_i und $[t_i e_i]$ angehören, so sind diese Komponenten die gesuchten Zurückleitungen W_i und V_i .

Für die Koordinaten u_i selbst ergibt sich dann die Darstellung

$$210) \quad \dots \quad u_1 = \frac{W_1}{E_1}, \quad u_2 = \frac{W_2}{E_2}, \quad u_3 = \frac{W_3}{E_3}$$

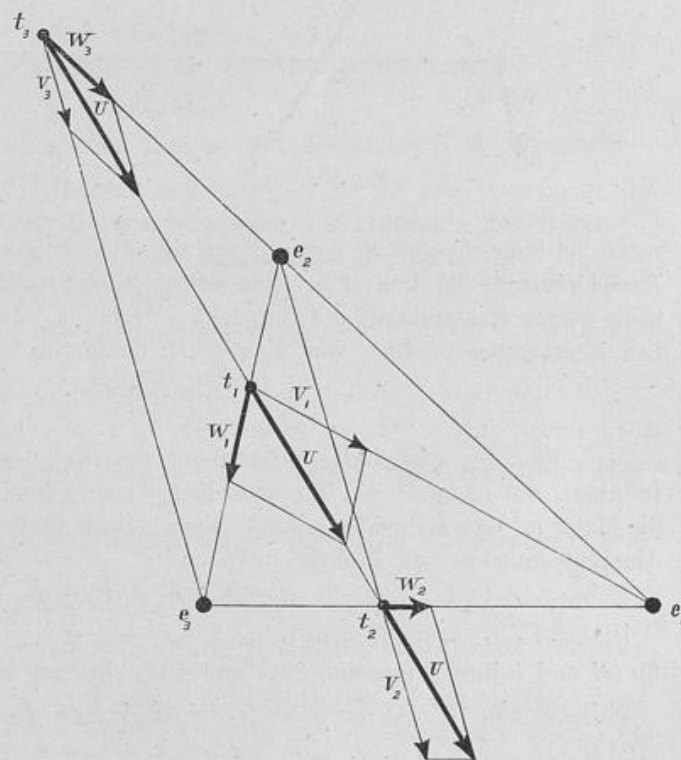


Fig. 52.

das heißt: Die Koordinaten u_i eines Stabes U sind die Verhältnisse aus seinen Zurückleitungen W_i auf die Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluss

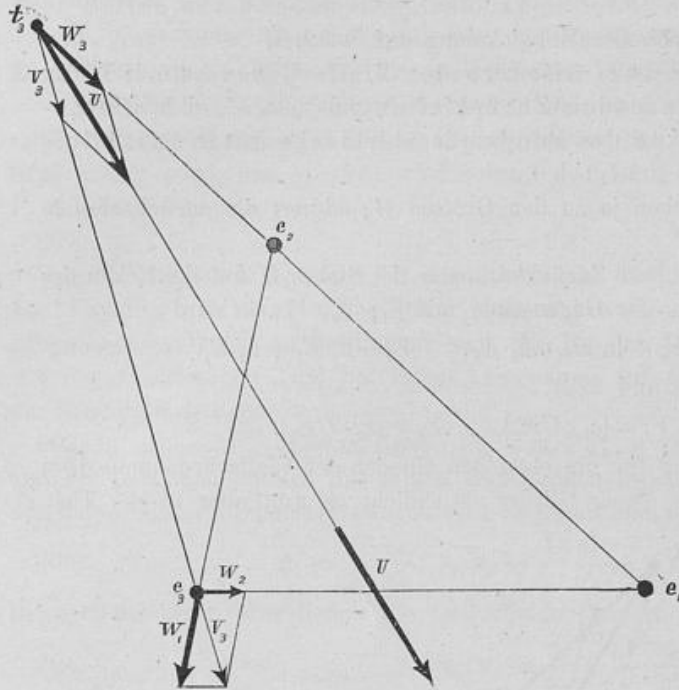


Fig. 53.

der Gegenecken und aus den in diesen Seiten liegenden Grundstäben E_i .

Will man statt der Grundstäbe E_i die Seiten S_i des Fundamentaldreiecks einführen, so hat man noch die Gleichungen 177) zu benutzen und erhält so

$$211) \begin{cases} u_1 = \frac{W_1}{m_2 m_3 S_1}, & u_2 = \frac{W_2}{m_3 m_1 S_2}, \\ & u_3 = \frac{W_3}{m_1 m_2 S_3}. \end{cases}$$

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß zur Konstruktion der drei Zurückleitungen W_i auch schon zwei Parallelogrammkonstruktionen ausreichen. Hat man nämlich nach dem soeben entwickelten Verfahren den Stab U in seine beiden Komponenten V_3 und W_3 zerlegt (vgl. Fig. 53), so braucht man nur noch den Stab V_3 als Summe zweier Stäbe darzustellen, die in den Ge-

raden der Stäbe E_1 und E_2 liegen, dann sind diese beiden Stäbe die gesuchten beiden andern Zurückleitungen W_1 und W_2 . Eine solche Summendarstellung ist immer möglich, da ja nach obiger Konstruktion die Gerade des Stabes V_3 durch den Punkt e_3 , d. h. durch den Schnittpunkt der Geraden von E_1 und E_2 hindurchgeht.

Für die analytische Behandlung der Kollineation und Reciprocität ist es von Interesse, die Länge l' des Einheitsstabes durch seinen Abstand vom Einheitspunkte und die Masse m' dieses Punktes auszudrücken. Dazu führe man in die Erklärungsgleichungen des Einheitsstabes und Einheitspunktes

200) $E = E_1 + E_2 + E_3$ und

161) $e = e_1 + e_2 + e_3$

für E und e ihre Werte aus 201) und 163) ein und erhält die Gleichungen

212) $l'A = E_1 + E_2 + E_3$ und

213) $m'a = e_1 + e_2 + e_3$.

Diese beiden Gleichungen 212) und 213) multipliziere man mit einander unter Berücksichtigung der Gleichungen 172) und 173), so ergibt sich für die Länge l' des Einheitsstabes die Gleichung

214) $l' m' [Aa] = 3$.

Das hier auftretende Produkt $[Aa]$ besitzt nun aber eine einfache geometrische Bedeutung. Denn da der Stab A die Länge 1 hat, und auch der Punkt a ein einfacher Punkt ist, so ist das Blatt $[Aa]$ gleich dem Abstände des Einheitspunktes vom Einheitsstabe und zwar ist dieser Abstand positiv zu nehmen, weil nach der Festsetzung auf S. 54 der Sinn des einfachen Stabes A so gewählt werden sollte, daß das Produkt $[Aa]$ positiv wird. Bezeichnet man daher noch den positiv genommenen Abstand des Einheitspunktes und Einheitsstabes mit q' , so läßt sich die Gleichung 214) in der Form schreiben

$$215) \dots \dots \dots [m'q'] = 3,$$

und man erhält also für die Länge l' des Einheitsstabes den Wert

$$216) \dots \dots \dots l' = \frac{3}{m'q'}.$$

Aus ihm folgt insbesondere, da q' positiv ist:

Die Längenzahl l' des Einheitsstabes hat immer dasselbe Vorzeichen wie die Masse m' des Einheitspunktes.

Die Formeln 215) und 216) lassen sich sehr leicht dadurch verallgemeinern, daß man in der obigen Entwicklung an die Stelle des Einheitsstabes oder des Einheitspunktes einen *beliebigen Stab* U oder einen *beliebigen Punkt* x treten läßt.

Führt man nämlich in die Gleichung

$$195) \dots \dots \dots U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3$$

für U seinen Wert aus 197) ein und multipliziert die entstehende Gleichung

$$217) \dots \dots \dots [T = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3$$

mit der Gleichung 213), so ergibt sich für die Längenzahl l des Stabes U die Gleichung

$$218) \dots \dots \dots [m'[Ta] = u_1 + u_2 + u_3$$

Hier ist dann wieder das Produkt $[Ta]$ der positiv genommene Abstand q des Stabes U vom Einheitspunkte (vgl. S. 52); die Gleichung 218) nimmt daher die Form an

$$219) \dots \dots \dots [m'q = u_1 + u_2 + u_3.$$

Man erhält somit für die Längenzahl l des Stabes U den Wert

$$220) \dots \dots \dots l = \frac{1}{m'} \frac{u_1 + u_2 + u_3}{q}$$

Aus ihm entnimmt man:

Unendlich ferne Stäbe mit unendlichen Koordinaten sind unendlich kurz.

Ferner:

Die Koordinaten eines jeden Stabes, dessen Gerade durch den Einheitspunkt geht, genügen der Gleichung

$$221) \dots \dots \dots u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Die Gleichung 221) ist also die Gleichung des Einheitspunktes in Stabkoordinaten.

Dies ergibt sich übrigens auch direkt; denn die Gleichung 221) ist nur eine Umformung der Gleichung

$$222) \dots \dots \dots [Ue] = 0,$$

welche besagt, daß die Gerade des Stabes U durch den Einheitspunkt e hindurchgeht.

Überhaupt ist ganz allgemein die Gleichung

$$223) \dots \dots \dots [Ux] = 0$$

die Gleichung für die Incidenz des Punktes x und des Stabes U (vgl. S. 32) d. h. die Gleichung des Punktes x in Stabkoordinaten und die Gleichung der Geraden des Stabes U in Punktkoordinaten.

Schließlich hat man noch die zu der Formel 220) dualistisch entsprechende Formel zu entwickeln. Dazu setze man in die Gleichung

$$178) \dots \dots \dots x = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3$$

für x seinen Wert aus 179) ein, wodurch sie übergeht in

$$224) \dots \dots \dots m t = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3,$$

und multipliziere dann diese Gleichung mit der Gleichung 212). So erhält man

$$225) \dots \dots \dots \rho m [At] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Hier stellt das Produkt $[At]$ den Abstand p des Punktes x vom Einheitsstabe E dar, dieser Abstand positiv oder negativ genommen, je nachdem der Punkt x auf derselben Seite des Einheitsstabes liegt wie der Einheitspunkt oder nicht. Die Gleichung läßt sich daher auch in der Form schreiben

$$226) \dots \dots \dots \rho m p = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Man findet also für die Masse m des Punktes x den Wert:

$$227) \dots \dots \dots m = \frac{1}{\rho} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{p}.$$

Aus dieser Gleichung aber folgt wieder:

Unendlich ferne Punkte mit endlichen Koordinaten haben eine unendlich kleine Masse.

Ferner:

Die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden des Einheitsstabes genügen der Gleichung

$$228) \dots \dots \dots \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Diese Gleichung ist also die Gleichung der Geraden des Einheitsstabes in Punktkoordinaten.

Selbstverständlich läßt sich auch diese Gleichung wieder direkt ableiten; denn nach 223) lautet die Gleichung der Geraden des Einheitsstabes

$$229) \dots \dots \dots [Ex] = 0.$$

Setzt man aber in diese Gleichung für den Einheitsstab E seinen Wert 200), für den Punkt x seine Koordinatendarstellung 178) ein und führt die Multiplikation aus, so erhält man in der That die Gleichung 228).

(Fortsetzung folgt.)

die Gleichung
 Gleichung d
 des Stabes U
 Schließ
 zu entwickeln.
 178)
 für x seinen W
 224)
 und multiplizier
 225)
 Hier stellt das
 Abstand positiv
 Einheitsstabes li
 in der Form sch
 226)
 Man findet also
 227)
 Aus dieser Gleich
 Unendl
 lich kleine Mas
 Ferner:
 Die Koo
 Gleichung
 228)
 Diese Gleichun
 Punktkoordinat
 Selbstvers
 223) lautet die Gl
 229)
 Setzt man aber i
 Punkt x seine Koo
 man in der That



des Stabes U (vgl. S. 32) d. h. die
 und die Gleichung der Geraden
 220) dualistisch entsprechende Formel
 e_3
 ht in
 e_3 ,
 ehung 212). So erhält man
 e_3 .
 tes x vom Einheitsstabe E dar, dieser
 der Punkt x auf derselben Seite des
 Die Gleichung läßt sich daher auch
 Vert:
 Koordinaten haben eine unend-
 den des Einheitsstabes genügen der
 Geraden des Einheitsstabes in
 g wieder direkt ableiten; denn nach
 es
 tab E seinen Wert 200), für den
 rt die Multiplikation aus, so erhält