Anwendung der Ausdehnungslehre

auf

die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.

III. Teil: Krumme Flächen.

Zweite Hälfte.

Von

Hermann Grafsmann.

Beilage zum Programm der Lateinischen Hauptschule zu Halle a. S.

Ostern 1893.

Halle a. S.,

Buchdruckerei des Waisenhauses.

1893.

1893. Progr. Nr. 237.

Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.

Dritter Teil: Krumme Flächen. Zweite Hälfte.

Neunter Abschnitt.

Krümmungslinien. Konjugierte Richtungen.

Bei der Behandlung der Normalschnitte einer Fläche wurde gezeigt, dafs es für jeden Punkt einer krummen Fläche zwei zu einander senkrechte Richtungen giebt, in denen die Normalschnittskrümmung ihren gröfsten und kleinsten Wert erreicht. Geht man daher von einem beliebigen Punkte x der Fläche in der Richtung der gröfsten (oder kleinsten) Krümmung auf der Fläche um ein unendlich kleines Stück dx fort bis zu einem Punkte $x_1 = x + dx$ und von diesem Punkte wiederum in der Richtung der gröfsten (oder kleinsten) Krümmung um das Stück dx_1 bis zum Punkte $x_2 = x_1 + dx_1$ u. s. w., so wird man auf der Fläche zwei Kurven erhalten, welche sich im Punkte x senkrecht schneiden und an jeder Stelle die Richtung eines Hauptschnittes anzeigen. Läfst man dann ferner den Punkt x seine Lage auf der Fläche verändern und wiederholt für jede neue Lage die obige Kurvenkonstruktion, so erhält man ein Netz von zwei Scharen sich rechtwinklig durchschneidender Kurven, welche überall die Richtung des Maximums oder Minimums der Normalschnittskrümmung angeben. Man nennt diese Kurven die Krümmungslinien der Fläche, das von ihnen gebildete Netz das Krümmungsnetz.

Eine Reihe von Eigenschaften der Krümmungslinien lassen sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Hauptschnitte ableiten. Wie oben (vgl. S. 53 und 54) gezeigt wurde, tritt ein Maximum oder Minimum der Krümmung für solche und nur für solche Normalschnitte eines Punktes der Fläche ein, für welche die Flächennormale jenes Punktes von der im Nachbarpunkte des Normalschnitts errichteten Flächennormale geschnitten wird. Aus dieser Eigenschaft der Hauptschnitte entnimmt man die folgenden beiden Sätze für die Krümmungslinien:

Je zwei Flächennormalen, die man in zwei Nachbarpunkten einer Krümmungslinie errichtet, schneiden sich,

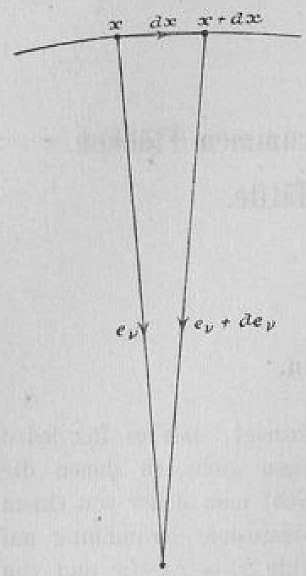
und die Umkehrung:

Eine Kurve auf einer Fläche ist eine Krümmungslinie, wenn je zwei längs der Kurve errichtete unendlich benachbarte Flächennormalen sich schneiden.

Aber auch die Differenzialgleichungen, welche oben zur Darstellung jener Eigenschaft der Hauptschnitte dienten, lassen sich sogleich auf die Krümmungslinien übertragen. Am unmittelbarsten wurde die genannte Eigenschaft der Hauptschnitte ausgedrückt (vgl. Fig. 33) durch die Differenzialgleichung 178) auf S. 54:

$$178) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [(e_\nu + de_\nu)\, dx\, e_\nu] = 0,$$

Fig. 33.



für welche man auch schreiben kann

$$197) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [de_\nu\, dx\, e_\nu] = 0.$$

Diese Gleichung möge die erste Form der Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes heifsen. Sie läfst noch eine Vereinfachung zu. Da nämlich die Strecke e_ν zu gleicher Zeit Normale der betrachteten Fläche und Normale der Einheitskugel ist und somit auf den Linienelementen dx und de_ν beider Flächen senkrecht steht, so läfst sich die Differenzialgleichung 197) nicht anders befriedigen, als wenn

$$198) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [de_\nu\, dx] = 0$$

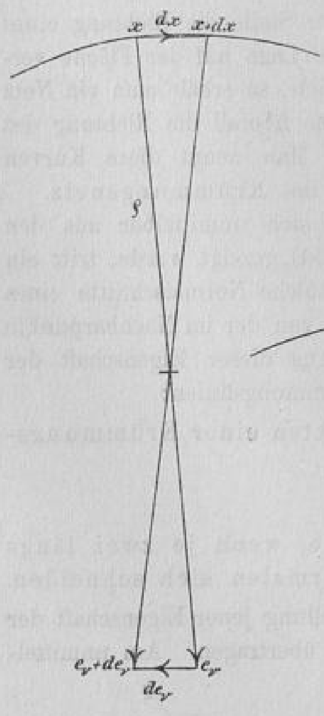
ist. Diese Gleichung ist also eine zweite Form der Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes; sie enthält den Satz:

Das Linienelement dx einer Krümmungslinie ist seinem Bilde de_ν auf der Einheitskugel parallel.

Endlich kann man wieder wie auf S. 54 die Differenzialgleichung 198) durch eine andere ersetzen, welche auch die Gröfsenbeziehung zwischen den Strecken de_ν und dx zum Ausdruck bringt. Man entnimmt sie aus den ähnlichen Dreiecken der Figuren 34 a und b und erhält unter Berücksichtigung der Festsetzungen über das Vorzeichen von ϱ wie oben die Gleichung

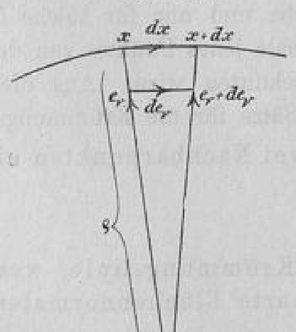
$$180) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad de_\nu = -\frac{1}{\varrho}\, dx,$$

Fig. 34 a.



welche man als dritte Form der Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes bezeichnen kann. Sie bietet insofern noch ein besonderes Interesse, als sie eine Zerfällung in zwei Differenzialgleichungen zuläfst, von denen jede einer Schar von Krümmungslinien zugehört. Benutzt man nämlich als Parameterlinien der Fläche die Krümmungslinien selbst und bezieht also die Gleichung der Fläche $x = x_{(\vartheta, \omega)}$ auf die „Krümmungsparameter" ϑ, ω, so läfst sich die Differenzialgleichung 180) ersetzen durch die beiden Differenzialgleichungen

Fig. 34 b.



$$199) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} = -\dfrac{1}{\varrho_1} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\[2mm] \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} = -\dfrac{1}{\varrho_2} \dfrac{\partial x}{\partial \omega}, \end{cases}$$

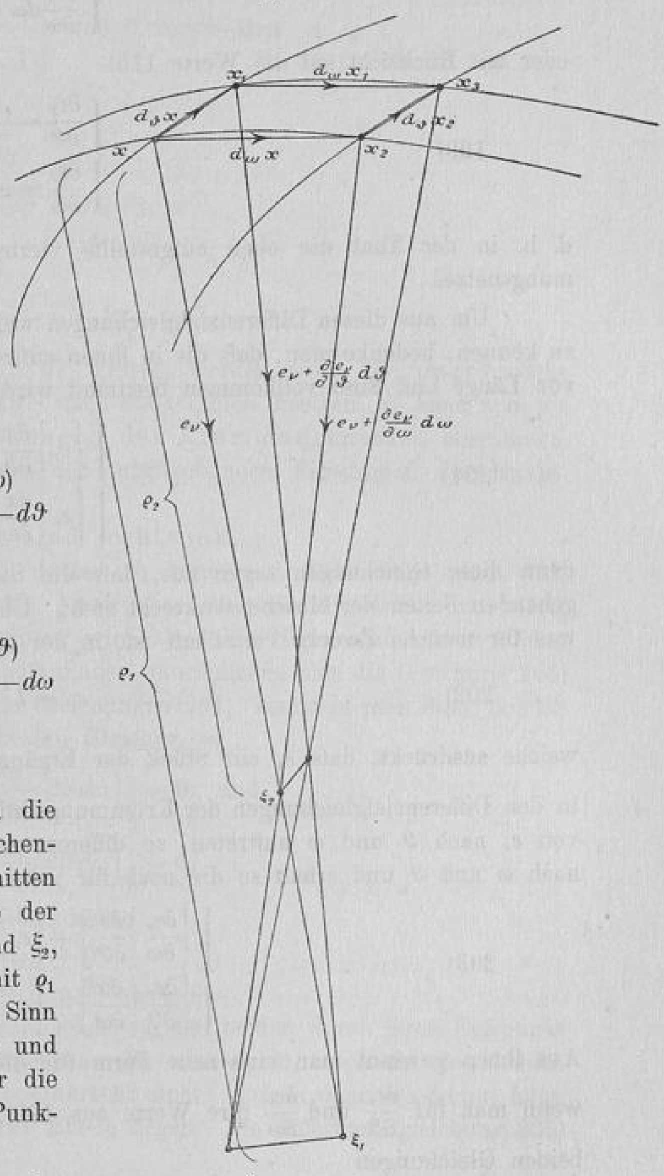
welche eine vierte Form der Differenzialgleichungen des Krümmungsnetzes bilden.

Da diese beiden Gleichungen der weiteren Entwickelung zu Grunde gelegt werden sollen, so mögen sie zunächst noch eine direkte Ableitung erfahren. Sind wieder wie auf S. 37 x, x_1, x_2, x_3 die Träger der 4 Ecken einer unendlich kleinen Masche eines Kurvennetzes ϑ, ω, welches aber diesmal aus Krümmungslinien gebildet wird, setzt man also

$$x = x_{(\vartheta,\omega)},\quad x_1 = x_{(\vartheta+d\vartheta,\omega)},\quad x_2 = x_{(\vartheta,\omega+d\omega)},$$
$$x_3 = x_{(\vartheta+d\vartheta,\ \omega+d\omega)},$$

so werden die beiden von x ausgehenden Seiten der Masche nach Länge und Richtung dargestellt durch die Differenzen (vgl. S. 37)

Fig. 35.



$$115)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 - x &= d_\vartheta x = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\, d\vartheta \\ x_2 - x &= d_\omega x = \frac{\partial x}{\partial \omega}\, d\omega, \end{aligned}\right.$$

während man für die beiden andern Seiten die Ausdrücke erhält (vgl. Fig. 35)

$$200)\quad \left\{\begin{aligned} x_3 - x_2 &= d_\vartheta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta}\, d\vartheta = \frac{\partial\left(x + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right)}{\partial \vartheta}\, d\vartheta \\ &= \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\, d\vartheta + \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\, \partial \omega}\, d\vartheta\, d\omega \\ x_3 - x_1 &= d_\omega x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \omega}\, d\omega = \frac{\partial\left(x + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta\right)}{\partial \omega}\, d\omega \\ &= \frac{\partial x}{\partial \omega}\, d\omega + \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\, \partial \omega}\, d\vartheta\, d\omega. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man ferner die Punkte, in denen die Flächennormale des Punktes x von den Flächennormalen der Nachbarpunkte x_1 und x_2 geschnitten wird, d. h. also die Krümmungsmittelpunkte der beiden Hauptschnitte des Punktes x mit ξ_1 und ξ_2, die dazu gehörigen Hauptkrümmungsradien mit ϱ_1 und ϱ_2 und beachtet die Vorschriften über den Sinn von e_ν (S. 38, Gleichung 117, und S. 5 und 6) und über das Vorzeichen von ϱ, so findet man für die Neigungsstrecke der Flächennormale in den Punkten x, x_1 und x_2 die Werte

$$\left\{\begin{aligned} e_\nu &= -\frac{x - \xi_1}{\varrho_1}, & e_\nu + \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\, d\vartheta &= -\frac{x_1 - \xi_1}{\varrho_1}, \\ e_\nu &= -\frac{x - \xi_2}{\varrho_2}, & e_\nu + \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\, d\omega &= -\frac{x_2 - \xi_2}{\varrho_2}, \end{aligned}\right.$$

aus denen bei Subtraktion der nebeneinanderstehenden Ausdrücke die Gleichungen folgen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} d\vartheta = -\dfrac{x_1 - x}{\varrho_1} \\ \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} d\omega = -\dfrac{x_2 - x}{\varrho_2} \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf die Werte 115)

$$199) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} = -\dfrac{1}{\varrho_1} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} = -\dfrac{1}{\varrho_2} \dfrac{\partial x}{\partial \omega}, \end{cases}$$

d. h. in der That die oben aufgestellte vierte Form der Differenzialgleichungen des Krümmungsnetzes.

Um aus diesen Differenzialgleichungen weitere Eigenschaften der Krümmungslinien ableiten zu können, bedenke man, dafs die in ihnen auftretende Neigung e_ν der Flächennormale abgesehen von Länge und Sinn vollkommen bestimmt wird durch die Gleichungen

$$201) \quad \begin{cases} \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \right] = 0 \\ \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \right] = 0; \end{cases}$$

denn diese Gleichungen sagen aus, dafs die Strecke e_ν auf den beiden durch ihren Fufspunkt gehenden Seiten der Masche senkrecht steht. Übrigens lassen sich die beiden Gleichungen auch, was für manche Zwecke vorteilhaft ist, in der einen Gleichung zusammenfassen:

$$202) \quad e_\nu = \lambda \left| \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] \right.,$$

welche ausdrückt, dafs e_ν ein Stück der Ergänzung des Tangentialfeldes $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right]$ ist. Da nun in den Differenzialgleichungen der Krümmungslinien (Nr. 199) die partiellen Differenzialquotienten von e_ν nach ϑ und ω auftreten, so differenziere man die Differenzialgleichungen 201) partiell nach ω und ϑ und erhält so die noch für jedes beliebige Kurvennetz geltenden Gleichungen:

$$203) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \right] + \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \, \partial \omega} \right] = 0 \quad \text{und} \\ \left[\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \right] + \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \, \partial \omega} \right] = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen gewinnt man eine neue Form für die Differenzialgleichungen des Krümmungsnetzes, wenn man für $\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}$ ihre Werte aus 199) einführt. Dadurch ergeben sich zunächst die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\varrho_2} \left[\dfrac{\partial x}{\partial \omega} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \right] + \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \, \partial \omega} \right] = 0 \quad \text{und} \\ -\dfrac{1}{\varrho_1} \left[\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \right] + \left[e_\nu \middle| \dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \, \partial \omega} \right] = 0. \end{cases}$$

Diese sind homogen und linear in $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]$ und $\left[e_\nu\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\right]$ und können daher, wenigstens für den Fall, dafs ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\varrho_2} & 1 \\ -\frac{1}{\varrho_1} & 1 \end{vmatrix} \text{ von 0 verschieden, d. h.}$$

$$\frac{1}{\varrho_2} \lessgtr \frac{1}{\varrho_1} \text{ ist,}$$

nicht anders zusammenbestehen, als wenn gleichzeitig

$$\left\{\begin{array}{ll} 204) \quad \ldots\ldots\ldots & \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0 \text{ und} \\ 205) \quad \ldots\ldots\ldots & \left[e_\nu\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\right] = 0 \text{ ist.} \end{array}\right.$$

Da diese beiden Gleichungen, wie unten (vgl. S. 67) gezeigt werden wird, die ursprüngliche Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes (Nr. 197) auch vollkommen ersetzen, so kann man sie als eine fünfte Form der Differenzialgleichungen des Krümmungsnetzes bezeichnen. Die erste von ihnen enthält den schon oben aus der entsprechenden Eigenschaft der Hauptschnitte gefolgerten Satz:

Die Maschen des Krümmungsnetzes sind rechtwinklig.

Um die zweite Differenzialgleichung (205) deuten zu können, berücksichtige man, dafs der zweite Faktor ihrer linken Seite auch in den Ausdrücken 200) für die dritte und vierte Seite der Krümmungsmasche auftritt. Jene Gleichung wird also eine Eigenschaft dieser beiden Seiten der Krümmungsmasche darstellen. Um sie aufzufinden, multipliziere man die Gleichung 205) mit $d\vartheta\,d\omega$ und addiere sie dann zu jeder von den Gleichungen 201), nachdem man diese mit $d\vartheta$ und $d\omega$ multipliziert hat. So ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \left[e_\nu\middle|\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}d\vartheta + \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}d\vartheta\,d\omega\right)\right] = 0 \quad \text{und} \\ \left[e_\nu\middle|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}d\omega + \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}d\vartheta\,d\omega\right)\right] = 0, \end{array}\right.$$

welche sich wegen 200) auch in der Form schreiben lassen

$$\left\{\begin{array}{l} [e_\nu\,|\,(x_3 - x_2)] = 0 \\ [e_\nu\,|\,(x_3 - x_1)] = 0. \end{array}\right.$$

Sie besagen, dafs die Flächennormale e_ν, welche als solche zu den beiden durch ihren Fufspunkt gehenden Seiten $x_1 - x$ und $x_2 - x$ der Krümmungsmasche normal ist, auch auf den beiden andern Seiten $x_3 - x_2$ und $x_3 - x_1$ dieser Masche senkrecht steht, woraus dann wiederum folgt, dafs alle 4 Seiten der Krümmungsmasche in einer Ebene liegen. Die Differenzialgleichung 205) enthält somit den Satz:

Die Maschen des Krümmungsnetzes sind ebene Vierecke.

Diese Eigenschaft der Ebenheit der Maschen leitet uns zugleich hinüber zur Betrachtung allgemeinerer Kurvennetze einer Fläche. Denn es leuchtet von vornherein ein, dafs das Krümmungsnetz, welches ja aufserdem noch der Bedingung der Rechtwinkligkeit unterworfen ist, nicht das einzige Kurvennetz sein wird, welches ebene Maschen besitzt. Bezeichnen wir daher allgemein die beiden Scharen eines ebenmaschigen Kurvennetzes als „konjugierte Kurvenscharen“ und die Richtungen, welche 2 von einem Punkte der Fläche ausgehende Kurven solcher Scharen angeben, als „konjugierte Richtungen“, so läfst sich die obige Differenzialgleichung

205) . . . . $$\left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right] = 0$$

als eine erste Form der Differenzialgleichung konjugierter Kurvenscharen auffassen. Es gestattet aber diese Differenzialgleichung noch zwei bemerkenswerte Umformungen.

Führt man nämlich erstens in die Gleichung 205) für e_ν seinen Wert aus 202) ein und berücksichtigt die Formeln 42), 47) und 46), so erhält man als zweite Form der Differenzialgleichung konjugierter Kurvenscharen die Gleichung

206) . . . . $$\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\frac{\partial x}{\partial\omega}\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right] = 0,$$

welche die Eigenschaft der Ebenmaschigkeit noch direkter zum Ausdruck bringt als die Differenzialgleichung 205), denn sie läfst sich offenbar auch in den Formen schreiben

$$\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}d\vartheta\,\frac{\partial x}{\partial\omega}d\omega\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}d\vartheta\,d\omega\right)\right] = 0 \quad \text{und}$$
$$[(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x_2)] = 0,$$

in denen sie unmittelbar aussagt, dafs die 3 Seiten $x_1 - x$, $x_2 - x$ und $x_3 - x_2$ der Kurvenmasche in einer Ebene liegen.

Eine zweite Umformung der Differenzialgleichung 205), welche zugleich eine wichtige Eigenschaft konjugierter Kurvenscharen darstellt, ergiebt sich ferner, wenn man die linke Seite von 205) durch ihre Werte aus 203) ersetzt; dadurch erhält man die Differenzialgleichungen

207) . . . . $$\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\,\middle|\,\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] = 0 \quad \text{und} \\ &\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\,\middle|\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese lassen sich auch in der einen Gleichung zusammenfassen

208) . . . . $$[de_\nu \,|\, \delta x] = 0,$$

in welcher die Charakteristiken d und δ die Differenziale bezeichnen, welche dem Fortschreiten längs zweier konjugierten Richtungen entsprechen. Die Gleichung 208) wäre also eine dritte Form der Differenzialgleichung konjugierter Kurvenscharen. In ihr ist das Differenzial de_ν das Bild des Linienelementes dx auf der Gaufsschen Einheitskugel oder, wie wir kurz sagen wollen, das „Gaufssche Bild“ des Linienelementes dx. Die Differenzialgleichung 208) enthält daher den Satz:

Das Gaufssche Bild de_ν eines Linienelementes dx der Fläche steht auf dem zu dx konjugierten Linienelemente δx senkrecht.

Auf eine andere Deutung der Differenzialgleichung 208) wird man geführt, wenn man zu ihr die Gleichung

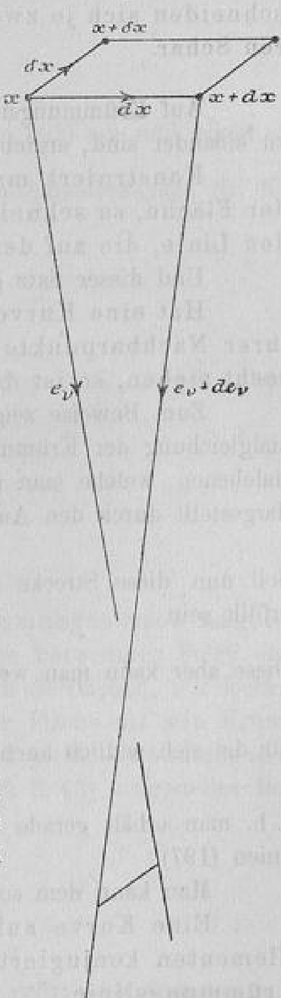
209) . . . . $$[e_\nu \,|\, \delta x] = 0$$

addiert, welche besagt, dafs das Linienelement δx auf der Flächennormale des **Punktes** x senkrecht steht; dadurch erhält man die Gleichung

210) . . . . $[(e_\nu + de_\nu) \,|\, \delta x] = 0.$

Ihr zufolge steht das Linienelement δx auch auf der Flächennormale $e_\nu + de_\nu$ senkrecht, welche im **Endpunkte** $x + dx$ des zu δx konjugierten Linienelementes dx errichtet ist. Für ein beliebiges Linienelement dx werden nun aber die beiden in seinen Endpunkten errichteten Flächennormalen sich kreuzen (vgl. Fig. 36); das auf beiden Normalen senkrechte Linienelement δx wird somit die Richtung ihres Gemeinlotes haben müssen und man erhält den Satz:

Fig. 36.



Konstruiert man in den Endpunkten eines Linienelementes dx einer Fläche die beiden Flächennormalen, so ist ihr Gemeinlot dem zu dx konjugierten Linienelemente δx parallel.

Gehört insbesondere das Linienelement dx einer Krümmungslinie an, so geht das Gemeinlot von e_ν und $e_\nu + de_\nu$ in das Lot auf der Ebene des durch dx gehenden Normalschnitts über. Unser Satz sagt daher in diesem Falle wieder aus, dafs die Krümmungslinien aufeinander senkrecht stehen.

Man kann endlich der Differenzialgleichung konjugierter Linien noch eine vierte Form verleihen. Zu dem Ende vertausche man in den Gleichungen 209) und 210) die Faktoren und berücksichtige, dafs nach dem Begriff der inneren Multiplikation (vgl. S. 7) das innere Produkt zweier Strecken nichts anderes ist als das äufsere Produkt aus der ersten Strecke und der Ergänzung der zweiten. Bei Benutzung dieser Auffassung des inneren Produktes nehmen die Gleichungen 209) und 210) die Gestalt an

$$211) \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} [\delta x \cdot | \, e_\nu] = 0 \ \text{und} \\ [\delta x \cdot | \, (e_\nu + de_\nu)] = 0 \end{cases}$$

und lassen sich überdies, falls man mit λ einen Zahlfaktor bezeichnet, auch in der einen Gleichung zusammenfassen:

$$212) \quad . \; . \; . \; . \quad \delta x = \lambda \, | \, [e_\nu \, (e_\nu + de_\nu)],$$

für die man nach Gleichung 1) auch schreiben kann

$$213) \quad . \; . \; . \; . \quad \delta x = \lambda \, | \, [e_\nu' de_\nu].$$

Führt man dann schliefslich noch, um den Zusammenhang mit den Differenzialgleichungen 207) deutlicher hervortreten zu lassen, in die Gleichung 213) anstatt der Differenziale wieder Differenzial**quotienten** ein, so erhält man die neuen Gleichungen

$$214) \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} = \sigma \left| \left[e_\nu \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} \right] \right. \ \text{und} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \omega} = \tau \left| \left[e_\nu \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \right] \right., \end{cases}$$

in denen wiederum σ und τ gewisse Zahlfaktoren sind, die übrigens noch von ϑ und ω abhängen können. Jede von diesen Gleichungen 214) und ebenso die mit ihnen gleichwertige Gleichung

213) kann als eine vierte Form der Differenzialgleichung konjugierter Linien aufgefaſst werden. In der That ersetzt jede von den 3 Gleichungen 213) und 214) vollkommen die ihr entsprechende unter den Differenzialgleichungen 208) und 207). Denn multipliziert man z. B. die Gleichung 213) innerlich mit de_ν, so erhält man die Gleichung

$$[\delta x \mid de_\nu] = \lambda \mid [e_\nu\, de_\nu\, de_\nu] = 0,$$

also wirklich die obige Differenzialgleichung 208). Die geometrische Bedeutung unserer neuen Form der Differenzialgleichung konjugierter Linien entnimmt man am leichtesten aus den bei ihrer Ableitung benutzten Gleichungen 211) oder 212); denn diese enthalten den Satz:

Überspinnt man eine Fläche mit einem Netze konjugierter Linien und konstruiert längs einer beliebigen Kurve der einen Schar die Tangentialebenen, so schneiden sich je zwei benachbarte Tangentialebenen in einer Tangente der anderen Schar.

Auf Krümmungslinien angewandt, welche nicht nur konjugiert, sondern auch rechtwinklig zu einander sind, ergiebt sich hieraus der Sondersatz:

Konstruiert man längs einer Krümmungslinie sämtliche Tangentialebenen der Fläche, so schneiden sich je zwei benachbarte Tangentialebenen in einer geraden Linie, die auf der Krümmungslinie senkrecht steht.

Und dieser Satz gestattet wieder die folgende Umkehrung:

Hat eine Kurve auf einer Fläche die Eigenschaft, daſs die Tangentialebenen ihrer Nachbarpunkte sich in geraden Linien schneiden, die auf der Kurve senkrecht stehen, so ist die Kurve eine Krümmungslinie.

Zum Beweise zeige man, daſs jede Kurve von der genannten Eigenschaft der Differenzialgleichung der Krümmungslinien Genüge leistet. Es wird die Schnittstrecke zweier Tangentialebenen, welche man in den Endpunkten x und $x + dx$ eines Linienelementes dx konstruiert, dargestellt durch den Ausdruck

$$[\mid e_\nu \mid (e_\nu + de_\nu)].$$

Soll nun diese Strecke auf dem Linienelemente dx senkrecht stehen, so muſs die Gleichung erfüllt sein

$$[\mid e_\nu \mid (e_\nu + de_\nu) \mid dx] = 0.$$

Diese aber kann man wegen 47) und 46) auch durch die Gleichung ersetzen

$$[e_\nu\, (e_\nu + de_\nu)\, dx] = 0,$$

für die sich endlich auch schreiben läſst

$$[e_\nu\, de_\nu\, dx] = 0,$$

d. h. man erhält gerade die obige erste Form für die Differenzialgleichung der Krümmungslinien (197).

Man kann dem soeben bewiesenen Satze auch folgende neue Fassung geben:

Eine Kurve auf der Fläche, welche die Eigenschaft hat, daſs die zu ihren Elementen konjugierten Linienelemente auf der Kurve senkrecht stehen, ist eine Krümmungslinie.

Oder mit Rücksicht auf die Erklärung konjugierter Richtungen:

Ein Kurvennetz auf einer Fläche, dessen Maschen rechtwinklig und eben sind, ist ihr Krümmungsnetz.

Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes möge noch ein zweiter Beweis folgen. Man ersetze in der ursprünglichen Differenzialgleichung der Krümmungslinien

197) . . . . . . $[de_\nu\, dx\, e_\nu] = 0$

die Differenziale durch Differenzialquotienten, schreibe sie also in der Form

215) . . . . $\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \omega} e_\nu\right] = 0$

und zeige, dafs diese Differenzialgleichung befriedigt wird, sobald die beiden Bedingungen der Rechtwinkligkeit (204) und der Ebenmaschigkeit (207) erfüllt sind, d. h. sobald die beiden Differenzialgleichungen bestehen

$$216) \quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0\\ &\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Zu dem Zwecke führe man in die linke Seite von 215) seinen Wert aus 202) ein und erhält so

$$\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \omega} e_\nu\right] = \lambda\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] \text{ oder nach dem Multiplikationssatze Nr. 96.}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] & \left[\frac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] \\ \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] & \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante der rechten Seite aber verschwindet in der That wegen 216), womit unser Satz bewiesen ist.

Zugleich ist dadurch gezeigt, dafs man die Gleichungen

$$216) \quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0\\ &\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0 \end{aligned}\right.$$

als eine sechste Form der Differenzialgleichungen des Krümmungsnetzes ansehen kann. Denn die beiden Differenzialgleichungen 216) sind nicht nur eine notwendige Folge der ursprünglichen Differenzialgleichung (197) des Krümmungsnetzes, sondern sie reichen, wie soeben bewiesen, zugleich auch vollkommen aus, um ein Kurvennetz auf einer Fläche als sein Krümmüngsnetz zu kennzeichnen. Da ferner die zweite Gleichung 216) eine blofse Umformung der Gleichung 205) ist, so ist damit zugleich der Beweis für die oben (vgl. S. 63) aufgestellte Behauptung erbracht, dafs auch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &204) \quad \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0 \text{ und}\\ &205) \quad \left[e_\nu\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\, \partial \omega}\right] = 0 \end{aligned}\right.$$

einen vollkommenen Ersatz der ursprünglichen Differenzialgleichung (197) der Krümmungslinien bilden.

Auf Grund dieser Kenntnis gelingt es nun auch leicht, den schönen von Dupin gefundenen Satz zu beweisen:

Drei zu einander orthogonale Flächenscharen schneiden sich in Krümmungslinien.

Um drei solche Flächensysteme analytisch darzustellen, denke man sich den Träger x eines Punktes im Raume abhängig von 3 Parametern $\vartheta,\ \omega,\ \psi$, setze also

217) . . . . $x = x_{(\vartheta,\omega,\psi)}$.

Dann stellen die Gleichungen

218) . . . . . $\vartheta = \text{const.},\quad \omega = \text{const.},\quad \psi = \text{const.}$

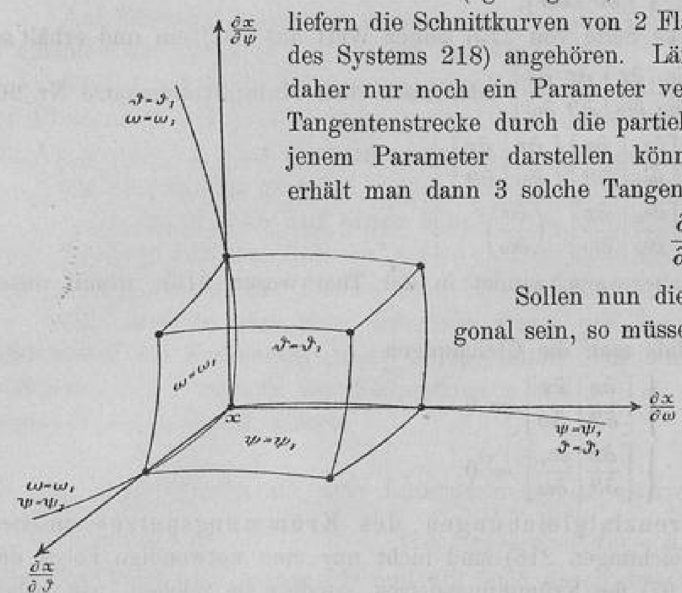
drei Flächenscharen dar. Legt man den 3 Konstanten bestimmte Werte $\vartheta_1,\ \omega_1,\ \psi_1$ bei, ersetzt also die drei Gleichungen 218) durch die bestimmten Gleichungen

219) . . . . . . $\vartheta = \vartheta_1,\quad \omega = \omega_1,\quad \psi = \psi_1,$

so ergiebt jede einzelne von ihnen eine bestimmte Fläche aus einer der 3 Scharen (vgl. Fig. 37). Je zwei von ihnen zusammengenommen liefern die Schnittkurven von 2 Flächen, welche 2 verschiedenen Scharen des Systems 218) angehören. Längs einer solchen Schnittkurve bleibt daher nur noch ein Parameter veränderlich, und man wird somit ihre Tangentenstrecke durch die partiellen Differenzialquotienten von x nach jenem Parameter darstellen können. Für jeden Punkt des Raumes erhält man dann 3 solche Tangentenstrecken

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta},\quad \frac{\partial x}{\partial \omega},\quad \frac{\partial x}{\partial \psi}.$$

Fig. 37.



Sollen nun die 3 Flächenscharen zu einander orthogonal sein, so müssen auch diese 3 Tangentenstrecken aufeinander senkrecht stehen, d. h. sie müssen den 3 Gleichungen genügen

$$220)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\right] = 0 \\[2ex] \left[\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] = 0 \\[2ex] \left[\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0, \end{cases}$$

und zwar müssen diese Gleichungen für jeden Wert der 3 Parameter $\vartheta,\ \omega,\ \psi$ erfüllt sein. Insbesondere wird jede von den 3 Gleichungen auch dann noch gültig bleiben müssen, wenn man immer von der Fläche, deren Tangentenstrecken in der Gleichung enthalten sind, zu ihrer Nachbarfläche übergeht, d. h. wenn man die Gleichung partiell nach dem Parameter der Fläche differenziert, also die erste Gleichung nach ϑ, die zweite nach ω und die dritte nach ψ. Dadurch aber erhält man die Gleichungen

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\dfrac{\partial^2 x}{\partial \psi\,\partial \vartheta}\right] + \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\right] = 0 \\[2ex] \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial \omega\,\partial \psi}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] + \left[\dfrac{\partial x}{\partial \psi}\middle|\dfrac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\right] = 0 \\[2ex] \left[\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\dfrac{\partial^2 x}{\partial \omega\,\partial \psi}\right] + \left[\dfrac{\partial^2 x}{\partial \psi\,\partial \vartheta}\middle|\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0. \end{cases}$$

Diese sind homogen und linear in

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega\,\partial \psi}\right],\quad \left[\frac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \psi\,\partial \vartheta}\right],\quad \left[\frac{\partial x}{\partial \psi}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\right]$$

und können, da ihre Determinante

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ von 0 verschieden ist, nicht anders zusammenbestehen, als wenn gleichzeitig

$$221) \quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega\,\partial \psi}\right] = 0, \\ &\left[\frac{\partial x}{\partial \omega}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \psi\,\partial \vartheta}\right] = 0, \\ &\left[\frac{\partial x}{\partial \psi}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta\,\partial \omega}\right] = 0 \text{ ist.} \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen aber haben, da die Tangentenstrecken $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial x}{\partial \omega}, \frac{\partial x}{\partial \psi}$ wegen 220) zugleich die Normalen der Flächen

$$\vartheta = \text{const.}, \ \omega = \text{const.}, \ \psi = \text{const.}$$

sind, abgesehen von einem Zahlfaktor genau die Form der Differenzialgleichung 205) und sagen daher aus, dafs die auf jeder Fläche der 3 Scharen ausgeschnittenen Kurvennetze ebene Maschen besitzen. Da aber die Maschen nach der Voraussetzung 220) zugleich rechtwinklig sind, so sind diese Netze Krümmungsnetze.

Zehnter Abschnitt.

Asymptotenlinien.

In einem scharfen Gegensatze zu den Krümmungslinien stehen diejenigen Linienscharen einer Fläche, deren Kurven überall die Richtung angeben, längs deren die Normalschnittskrümmung verschwindet, man nennt sie die Asymptotenlinien der Fläche. Von den Krümmungslinien unterscheiden sie sich zunächst schon dadurch, dafs sie nur diejenigen Teile der Fläche überziehen, in denen das Krümmungsmafs negativ oder $= 0$ ist, was sofort aus den obigen Angaben über das Verschwinden der Normalschnittskrümmung (vgl. S. 58) hervorgeht. Übrigens gewährt die dort für die Normalschnitte mit verschwindender Krümmung entwickelte Gleichung

$$196) \quad \ldots\ldots \quad 0 = \frac{1}{\varrho_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{\varrho_2}\sin^2\varphi$$

zugleich einen Aufschlufs über die Anzahl und Lage der Asymptotenlinien. Schreibt man nämlich die Gleichung 196) in der Form

$$222) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

und beachtet, dafs φ den Winkel bedeutet, welchen die Asymptotenlinie mit der zur Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ gehörenden Krümmungslinie einschliefst, so liest man aus der Gleichung unmittelbar den Satz ab:

Durch jeden Flächenpunkt mit negativem Krümmungsmafs gehen 2 Asymptotenlinien hindurch, deren Winkel durch die beiden Krümmungslinien halbiert werden.

Da ferner die rechte Seite von 222) dann und nur dann den Wert ± 1 erhält, wenn die beiden Hauptkrümmungsradien, also auch die beiden Hauptkrümmungen einander entgegengesetzt gleich sind, so erhält man den weiteren Satz:

Die Asymptotenlinien stehen dann und nur dann aufeinander senkrecht, wenn

223) . . . . $$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0 \text{ ist.}$$

Für die ganze Fläche ist diese Bedingung, wie unten gezeigt werden wird, bei den Minimalflächen erfüllt; bei ihnen sind daher die Asymptotenmaschen auf der ganzen Fläche rechtwinklig.

Die Differenzialgleichung des Netzes der Asymptotenlinien hat die Grundeigenschaft dieser Linien auszudrücken, dafs ihre Tangente überall mit der Tangente des Normalschnitts von der Krümmung 0 zusammenfällt. Nun lautete der Ausdruck für die Normalschnittskrümmung (vgl. Nr. 167)

$$\frac{1}{\varrho} = -[e'_\nu | x'],$$

wo e'_ν und x' die nach dem Bogen s des Normalschnitts genommenen Differenzialquotienten bedeuten. Für den Normalschnitt von der Krümmung 0 wird somit

224) . . . . $$[e'_\nu | x'] = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist daher die Differenzialgleichung der Asymptotenlinien zu entwickeln. Bezeichnet man die Parameter der beiden Scharen von Asymptotenlinien mit λ und μ (vgl. S. 40 und 41), so werden die Differenzialquotienten

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \text{ und } \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \\[2ex] \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \mu} \text{ und } \dfrac{\partial x}{\partial \mu} \end{array}\right.$$

zufolge der Grundeigenschaft der Asymptotenlinien jedesmal mit den Differentialquotienten

$$e'_\nu \text{ und } x'$$

des zugehörigen Normalschnitts bis auf einen Zahlfaktor übereinstimmen müssen, und man erhält daher aus 224) für die beiden Scharen der Asymptotenlinien die Differenzialgleichungen

225) . . . . $$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right] = 0 \text{ und} \\[2ex] \left[\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \mu} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right] = 0, \end{array}\right.$$

welche man auch in der einen Gleichung zusammenfassen kann:

226) . . . . $$[de_\nu | dx] = 0;$$

wir wollen sie als die erste Form der Differenzialgleichung des Asymptotennetzes bezeichnen. Sie enthält den Satz:

Das Linienelement dx einer Asymptotenlinie steht senkrecht zu seinem Bilde de_ν auf der Einheitskugel (vgl. den entsprechenden Satz für Krümmungslinien auf S. 60).

Eine zweite Deutung der Differenzialgleichung 226) erhält man, wenn man sie mit der entsprechenden Differenzialgleichung konjugierter Richtungen, nämlich mit der Gleichung

$$208) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [de_\nu \,|\, \delta x] = 0$$

zusammenhält; denn der Vergleich liefert sofort den Satz:

Jedes Linienelement einer Asymptotenlinie ist sich selbst konjugiert.

Addiert man ferner zu der Gleichung 226) die Gleichung

$$227) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [e_\nu \,|\, dx] = 0,$$

welche aussagt, daſs die Flächennormale auf dem Linienelemente der Asymptotenlinie senkrecht steht, so erhält man die neue Gleichung

$$228) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [(e_\nu + de_\nu) \,|\, dx] = 0,$$

welche zusammen mit 227) den Satz darstellt:

Das Linienelement einer Asymptotenlinie ist das Gemeinlot der in seinen Endpunkten errichteten Flächennormalen.*)

Schreibt man ferner die Gleichungen 227) und 228) in der Form

$$229) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} [dx\cdot \,|\, e_\nu] = 0 \quad \text{und} \\ [dx\cdot \,|\, (e_\nu + de_\nu)] = 0, \end{cases}$$

so liefern sie den Satz:

Das Linienelement einer Asymptotenlinie ist der Durchschnitt der beiden in seinen Endpunkten konstruierten Tangentialebenen der Fläche.

Legt man also in 3 aufeinanderfolgenden Punkten x, x_1, x_2 einer Asymptotenlinie, zwischen denen die Linienelemente $dx = x_1 - x$ und $dx_1 = x_2 - x_1$ liegen werden, an die Fläche die 3 Tangentialebenen, so werden

die Tangentialebenen der Punkte x und x_1 sich in dem Linienelemente dx und
die Tangentialebenen der Punkte x_1 und x_2 sich in dem Linienelemente dx_1

schneiden müssen. Die Tangentialebene des Punktes x_1 enthält daher die beiden aufeinanderfolgenden Linienelemente dx und dx_1. Durch diese beiden Linienelemente ist aber zugleich auch die Schmiegungsebene der Asymptotenlinie im Punkte x_1 bestimmt. Beide Ebenen sind daher miteinander identisch, und da diese Beziehung für jeden beliebigen Punkt einer Asymptotenlinie gilt, so hat man den Satz:

Jede Schmiegungsebene einer Asymptotenlinie ist zugleich Tangentialebene der Fläche.

Dieser Satz läſst sich übrigens auch leicht analytisch beweisen. Führt man nämlich in die Gleichung 226) anstatt der Differenziale wieder Differenzialquotienten ein, schreibt also die Gleichung, wie schon oben geschehen, in der Form

$$230) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right] = 0$$

und berücksichtigt die schon oft verwertete, durch Differenziation der Gleichung

$$231) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right] = 0$$

---

*) Hieraus kann man noch folgern: „Jede Asymptotenlinie einer Fläche ist die Striktionslinie der durch sie bestimmten Normalenfläche“ und „Jede längs einer Asymptotenlinie konstruierte Normalenfläche hat die Eigenschaft, daſs die Linienelemente ihrer Striktionslinie zugleich die kürzesten Abstände ihrer Erzeugenden bilden.“

hervorgehende Beziehung (vgl. Nr. 143)

$$\left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}\right] = -\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \middle| \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right],$$

so erhält man an Stelle von 230) die neue Gleichung

$$232) \quad \left[e_\nu \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}\right] = 0,$$

welche eine zweite Form der Differenzialgleichung der Asymptotenlinien bildet. Sie besagt, dafs bei einer Asymptotenlinie nicht nur (wie bei jeder Kurve auf der Fläche) die Tangentenstrecke $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ auf der Flächennormale e_ν senkrecht steht (Gl. 231), sondern ebenso auch die Strecke $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$. Beide Strecken $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$ bestimmen aber zusammengenommen (nach S. 13) die Schmiegungsebene der Asymptotenlinie. Folglich steht auch diese Ebene auf der Flächennormale senkrecht und fällt also mit der Tangentialebene der Fläche zusammen.

Elfter Abschnitt.

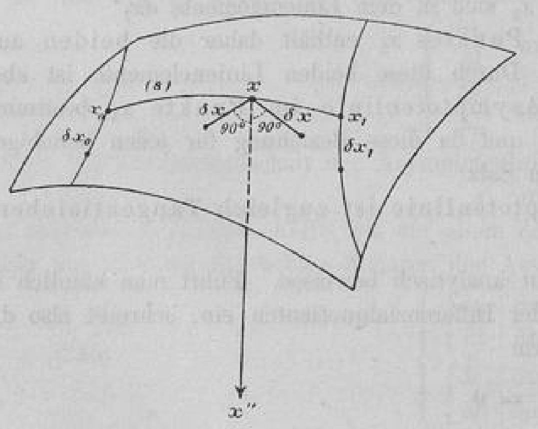
Geodätische Linien.

Eine Linie auf einer krummen Fläche, welche zwischen zwei fest gegebenen Kurven (oder auch zwischen 2 festen Punkten) der Fläche ausgespannt und kürzer ist als alle unendlich benachbarten Linien, die zwischen denselben Kurven (oder Punkten) auf der Fläche gezogen werden können, nennt man eine kürzeste Linie der Fläche.*) Bezeichnet man den laufenden Träger der beiden Grenzkurven mit x_0 und x_1 (vgl. Fig. 38), den einer beliebigen zwischen diesen Kurven gezogenen Linie der Fläche mit x und ihren Bogen gerechnet von der ersten Grenzkurve aus bis zum Punkte x mit s, so wird die Länge dieser Linie durch das Integral ausgedrückt

$$\int_{x_0}^{x_1} ds.$$

Für eine kürzeste Linie wird dann die erste Variation dieses Integrals verschwinden müssen,

Fig. 38.



*) Da nach der obigen Erklärung an eine kürzeste Linie nur die Forderung gestellt ist, dafs sie kürzer sei als alle unendlich benachbarten Linien der Fläche, so sind zwischen zwei Punkten einer Fläche im Sinne dieser Erklärung mehrere kürzeste Linien von verschiedener Länge denkbar. In der That ergeben sich z. B. beim Kreiscylinder als kürzeste Linien zwischen zwei Punkten einer und derselben Erzeugenden aufser ihrer geraden Verbindungslinie auch noch die zwischen den beiden Punkten verlaufenden Schraubenlinien, welche einmal, zweimal, dreimal u. s. w. um den Cylinder herumgehen.

d. h. man erhält für sie als **notwendige**, freilich im allgemeinen **nicht hinreichende** Bedingung die Gleichung

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} ds = 0 \text{ oder}$$

233) . . . . $\int_{x_0}^{x_1} \delta ds = 0.$

Um die in ihr auftretende Variation des Bogenelementes ds zu bilden, variiere man die Gleichung

$$ds^2 = [dx \mid dx], \text{ wodurch man erhält}$$

$$2ds \cdot \delta ds = 2[dx \mid \delta dx] \text{ oder}$$

$$\delta ds = \left[\frac{dx}{ds} \middle| \delta dx\right] \text{ oder endlich}$$

$$\delta ds = \left[\frac{dx}{ds} \middle| d\delta x\right].$$

Die obige Bedingung 233) für die kürzeste Linie geht daher über in

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{dx}{ds} \middle| d\delta x\right] = 0,$$

wofür man bei Anwendung partieller Integration auch schreiben kann

234) . . . $\left[\frac{dx_1}{ds} \middle| \delta x_1\right] - \left[\frac{dx_0}{ds} \middle| \delta x_0\right] - \int_{x_0}^{x_1} \left[d\frac{dx}{ds} \middle| \delta x\right] = 0.$

Diese Gleichung aber zerfällt in die beiden endlichen Gleichungen

235) . . . . $\left[\frac{dx_1}{ds} \middle| \delta x_1\right] = 0$ und $\left[\frac{dx_0}{ds} \middle| \delta x_0\right] = 0,$

welche aussagen, daſs die kürzeste Linie auf den beiden Grenzkurven senkrecht steht*), und in die Differenzialgleichung

$$\left[d\frac{dx}{ds} \middle| \delta x\right] = 0.$$

Dividiert man diese noch mit ds und bezeichnet wie oben den Differentialquotienten $\frac{d^2x}{ds^2}$ mit x'', so erhält sie die Gestalt

236) . . . . $[x'' \mid \delta x] = 0.$

Diese Differenzialgleichung ist also eine notwendige Bedingung dafür, daſs eine Linie auf der Fläche eine kürzeste Linie sei; zu ihr kommen im Falle zweier **Grenzkurven** noch die Bedingungen 235) hinzu. Aber es reicht im allgemeinen die Differenzialgleichung 236) ebenso wenig wie die Gleichung 233) zur Kennzeichnung der kürzesten Linie aus. Es kann nämlich vorkommen (wie schon das Beispiel der Kugel zeigt), daſs eine Linie auf der Fläche, welche der Differenzialgleichung 236) Genüge leistet, zwar in ihren einzelnen (hinreichend klein zu nehmenden) Teilen den Charakter einer kürzesten Linie trägt, ihn aber beim Übergang auf gröſsere

---

*) Ziehen sich die beiden Grenzkurven je in einen Punkt x_0 und x_1 zusammen, so verschwindet δx_0 und δx_1, und die Gleichungen 235) sind von selbst erfüllt.

Linienstücke verliert. Immerhin wird indes eine jede Kurve, welche der Differenzialgleichung 236) gehorcht, eine Reihe wichtiger Eigenschaften mit den kürzesten Linien gemein haben und ist daher als Vertreter einer gröfseren Kurvenklasse aufzufassen, welche die Gruppe der kürzesten Linien als Sonderfall in sich schliefst. Man hat daher für solche Kurven einen besonderen Namen eingeführt; man nennt nämlich eine jede Kurve, welche der Gleichung 236) Genüge leistet, eine „geodätische Linie der Fläche"*) und kann somit die Gleichung 236) als eine erste Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien bezeichnen. Sie besagt, dafs für einen Punkt x einer geodätischen Linie ihre Krümmungsstrecke x'', d. h. also ihre Hauptnormale (vgl. S. 11) auf allen von dem Punkte x ausgehenden Linienelementen δx der Fläche senkrecht steht, sie enthält somit den Satz:

Die Hauptnormale einer geodätischen Linie fällt stets mit der Flächennormale zusammen.

Oder: Die Schmiegungsebene einer geodätischen Linie geht überall durch die Flächennormale hindurch.

Jede von diesen beiden Fassungen des Satzes führt übrigens noch auf eine neue Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien. Bezeichnet man nämlich wie gewöhnlich die Neigungsstrecke der Flächennormale mit e_ν, so lassen sich die beiden Fassungen unseres Satzes durch die Differenzialgleichungen wiedergeben

237) . . . . $x'' = \tau e_\nu$ und

238) . . . . $[e_\nu x' x''] = 0.$

In ihnen ist τ ein Zahlfaktor, während x' und x'' die nach dem Bogen s der Kurve genommenen Differenzialquotienten bedeuten, so dafs also das Feld $[x' x'']$ das Schmiegungsfeld der geodätischen Linie darstellt. Diese beiden Gleichungen lassen sich dann als eine zweite und dritte Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien auffassen. Jede von ihnen gestattet überdies noch eine Umformung. Multipliziert man nämlich die Gleichung 237), um den Zahlfaktor τ zu entfernen, äufserlich mit e_ν, so erhält man als vierte Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien die Gleichung

239) . . . . $[e_\nu x''] = 0.$

Um ferner die Umformung der Gleichung 238) zu erhalten, beachte man, dafs sich das Schmiegungsfeld einer Raumkurve ebenso leicht, wie durch die Differenzialquotienten x' und x'' auch durch die nach einem beliebigen Parameter λ genommenen Differenzialquotienten $\frac{dx}{d\lambda}$ und $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$ ausdrücken läfst. Denn da (nach S. 12) $\frac{dx}{d\lambda}$ ein vielfaches von $\frac{dx}{ds}$ ist, und der zweite Differenzialquotient $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$ (nach S. 13) zwar im allgemeinen nicht mehr auf der Kurve senkrecht steht, aber noch immer ihrer Schmiegungsebene angehört, so stimmt auch das Feld $\left[\frac{dx}{d\lambda}\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right]$ von einem

*) Man könnte vielleicht auch an den Namen „Spannungslinie" denken, zumal sich an ihn ungezwungen die Einteilung in Spannungslinien mit stabilem, labilem und indifferentem Gleichgewicht anschliefsen läfst, von denen sich die Spannungslinien mit stabilem Gleichgewicht genau mit den kürzesten Linien der Fläche decken würden.

Zahlfaktor abgesehen mit dem Felde $[x'x'']$ überein, und man kann daher der Gleichung 238) auch die Gestalt verleihen

$$240) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_\nu \frac{dx}{d\lambda}\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right] = 0,$$

welche somit eine fünfte Form für die Differenzialgleichung der geodätischen Linien bildet.

Zur Anwendung dieser Ergebnisse mögen die geodätischen Linien der Kugel aufgesucht werden. Man benutze dazu die vierte Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien (239) und berücksichtige, daſs bei der Kugel überall die Flächennormale mit dem Träger vom Mittelpunkte aus zusammenfällt. Nimmt man daher den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Träger, so verwandelt sich die Gleichung 239) in

$$241) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [xx''] = 0.$$

In dieser Gleichung ist aber die linke Seite, wegen $[x'x'] = 0$, der Differentialquotient von $[xx']$, und die Integration von 241) ergiebt daher

$$242) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [xx'] = C,$$

wo C ein konstantes Feld bezeichnet. Aus dieser Gleichung aber folgt durch äuſsere Multiplikation mit x die Gleichung

$$243) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 = [Cx]$$

d. h. die Gleichung einer Ebene, welche durch den Kugelmittelpunkt geht und die Stellung des Feldes C besitzt. Man hat also den Satz:

Jede geodätische Linie der Kugel liegt in einer durch den Kugelmittelpunkt gehenden Ebene.

Eine besonders wichtige Rolle spielen die geodätischen Linien in der Mechanik. Dies soll an 2 Beispielen gezeigt werden.

Wirkt auf einen materiellen Punkt, welcher auf einer krummen Fläche zu bleiben gezwungen ist und die Masse μ besitzt, eine Kraft k ein, und ist wie gewöhnlich e_ν die Neigungsstrecke der Flächennormale, so lautet die Differenzialgleichung seiner Bewegung

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = k + \lambda e_\nu,$$

wo λ die Gröſse der Zwangskraft ist, welche die Fläche auf den Punkt ausübt. Verschwindet insbesondere die Kraft k und bewegt sich also der Punkt lediglich auf Grund der mitgeteilten Anfangsgeschwindigkeit, so erhält seine Bewegungsgleichung die Form

$$244) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda e_\nu.$$

Aus ihr gewinnt man die Differenzialgleichung der Bahnkurve, indem man die Zwangskraft λ eliminiert. Dies geschieht am einfachsten durch Multiplikation der Gleichung 244) mit dem Normalschnittsfelde $\left[e_\nu \frac{dx}{dt}\right]$, wodurch die Gleichung hervorgeht

$$245) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_\nu \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right] = 0$$

d. h. gerade die obige fünfte Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien (vgl. Nr. 240), und man erhält den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf einer krummen Fläche, ohne dafs auf ihn abgesehen von der Zwangskraft der Fläche eine äufsere Kraft einwirkt, so beschreibt er eine geodätische Linie.

Es möge ferner die Gleichgewichtslage eines über eine krumme Fläche gespannten undehnbaren Fadens bestimmt werden für den Fall, dafs aufser der Spannung des Fadens und dem Normalwiderstande der Fläche keine Kräfte auf den Faden einwirken. Man bezeichne 3 aufeinanderfolgende Punkte der Fadenkurve mit x, x_1 und x_2, die zwischen ihnen liegenden Linienelemente mit dx und dx_1, und die Gröfse der Spannung in dem Elemente dx mit σ. Dann werden die in diesem Elemente wirkenden Spannungskräfte ihrer Gröfse und Richtung nach dargestellt durch die Strecken

$$\sigma \frac{dx}{ds} \qquad \text{und} \qquad -\sigma \frac{dx}{ds}.$$

Ferner werden die in dem Nachbarelemente dx_1 auftretenden Spannungskräfte die Werte besitzen müssen

$$\sigma \frac{dx}{ds} + d\left(\sigma \frac{dx}{ds}\right) \text{ und } -\left\{\sigma \frac{dx}{ds} + d\left(\sigma \frac{dx}{ds}\right)\right\}$$

Von diesen 4 Spannungskräften greifen die beiden mittleren in ein und demselben Punkte x_1 an, ihre Resultante wird daher durch die Summe beider Kräfte dargestellt und besitzt also den Wert

$$-\sigma \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dx}{ds} + d\left(\sigma \frac{dx}{ds}\right) = d\left(\sigma \frac{dx}{ds}\right).$$

Soll nun der Faden im Gleichgewicht sein, so mufs diese Resultante durch den Normalwiderstand der Fläche aufgehoben werden und wird somit selbst in die Flächennormale fallen müssen. Man erhält daher als Gleichgewichtsbedingung die Differenzialgleichung

$$246) \quad \ldots\ldots\ldots \quad d\left(\sigma \frac{dx}{ds}\right) = \lambda e_\nu$$

oder bei Ausführung der Differenziation

$$d\sigma \cdot \frac{dx}{ds} + \sigma \cdot d\frac{dx}{ds} = \lambda e_\nu.$$

Diese Differenzialgleichung macht man integrabel, indem man sie mit der Neigungsstrecke der Fadenkurve, d. h. mit $\frac{dx}{ds}$ (vgl. S. 10) innerlich multipliziert. Dadurch verschwindet nämlich erstens die rechte Seite der Gleichung, weil die Flächennormale auf der Fadentangente senkrecht steht, so dafs man erhält

$$247) \quad \ldots\ldots\ldots \quad d\sigma \cdot \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \sigma \left[\frac{dx}{ds} \middle| d\frac{dx}{ds}\right] = 0.$$

Es verschwindet aber ferner auch das zweite Glied der linken Seite, denn aus der Gleichung

$$248) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1$$

erhält man durch Differenziation

$$249) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\left[\frac{dx}{ds} \middle| d\frac{dx}{ds}\right] = 0.$$

Die Differenzialgleichung 247) reduziert sich daher auf

250) . . . . $d\sigma = 0,$

woraus durch Integration folgt

251) . . . . $\sigma = \gamma,$

d. h. die Spannung ist längs des ganzen Fadens konstant. Führt man jetzt endlich den Wert von σ in die ursprüngliche Differenzialgleichung 246) ein, so nimmt diese die Gestalt an

$$\gamma\, d\frac{dx}{ds} = \lambda e_\nu$$

oder, wenn man mit γds dividiert und den Bruch $\frac{\lambda}{\gamma\, ds} = \tau$ setzt,

252) . . . . $x'' = \tau e_\nu.$

Dies ist aber gerade die zweite Form der Differenzialgleichung der geodätischen Linien (237) und man hat also den Satz:

Wirken auf einen über eine krumme Fläche gespannten undehnbaren Faden aufser seiner Spannung und dem Normalwiderstande der Fläche keine Kräfte ein, so nimmt er die Gestalt einer geodätischen Linie an.

Zwölfter Abschnitt.

Geradlinige, insbesondere abwickelbare Flächen.

Wie schon oben (vgl. S. 50) erwähnt wurde, nennt man eine Fläche, welche sich durch Verbiegung einer Ebene erzeugen und daher auch umgekehrt auf einer Ebene abrollen läfst, schlechtweg eine abwickelbare Fläche. Nach dem Gaufsschen Satze von der Flächenverbiegung ist für eine solche Fläche das Krümmungsmafs = 0; es bleibt aber nach diesem Satze noch zweifelhaft, ob auch umgekehrt jede Fläche vom Krümmungsmafs 0 sich auf einer Ebene abwickeln läfst, ob also das Verschwinden des Krümmungsmafses nicht nur eine notwendige, sondern zugleich auch eine hinreichende Bedingung für die Abwickelbarkeit einer Fläche ist. Um diese Frage zu beantworten, benutze man die Darstellung des Krümmungsmafses als Produkt der beiden Hauptkrümmungen (vgl. Nr. 195) und untersuche also, ob sich aus dem Bestehen der Gleichung

253) . . . . $\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = 0$

die Abwickelbarkeit der Fläche folgern läfst. Zunächst entnimmt man aus der Gleichung 253), dafs eine der beiden Hauptkrümmungen für jeden Punkt der Fläche verschwinden mufs; es sei etwa allgemein

254) . . . . $\frac{1}{\varrho_1} = 0.$

Denkt man sich dann die Gleichung der Fläche auf Krümmungsparameter ϑ, ω bezogen (vgl. S. 60), so nimmt die Gleichung der zu der Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ gehörenden Krümmungslinie

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$$

(vgl. Nr. 199) die Gestalt an

$$255) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} = 0,$$

woraus durch Integration folgt, dafs e_ν eine Funktion von ω allein ist; wir bezeichnen sie mit $e_{\nu(\omega)}$. Dann lautet das Integral von 255)

$$256) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e_\nu = e_{\nu(\omega)}$$

und besagt, dafs alle Flächennormalen, welche man in den Punkten einer Krümmungslinie $\omega = \text{const.}$, d. h. in den Punkten einer Θ-Linie konstruieren kann, dieselbe Neigung e_ν haben, einander also parallel laufen; oder, was auf dasselbe hinauskommt, dafs sämtliche Tangentialebenen, welche den Punkten einer Θ-Linie zugehören, in eine einzige Ebene zusammenfallen. Da diese Beziehungen aber nicht nur für eine einzelne Linie $\omega = \text{const.}$, sondern ganz allgemein für jede Θ-Linie gelten, so läfst sich schon mittelst geometrischer Schlüsse folgern, dafs die Θ-Linien gerade Linien sein müssen; indes ergiebt es sich auch leicht analytisch. Nach Nr. 214) erhält man nämlich für die Tangentenstrecke einer Θ-Linie den Wert

$$257) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \sigma \left|\left[e_{\nu(\omega)} \frac{de_\nu}{d\omega}\right]\right|.$$

In diesem Ausdrucke aber kann höchstens der die Länge der Strecke bestimmende Zahlfaktor σ noch von ϑ abhängen, der andere Faktor hingegen

$$\left|\left[e_{\nu(\omega)} \frac{de_\nu}{d\omega}\right]\right|,$$

welcher die Richtung der Tangentenstrecke angiebt, ist wegen 256) sicher eine Funktion von ω allein. Die Richtung der Tangentenstrecke ist also längs einer jeden Θ-Linie konstant, jede Θ-Linie somit eine gerade Linie. Man hat daher den Satz:

Jede Fläche vom Krümmungsmafs 0 enthält eine unendliche Schar von geraden Linien, welche zugleich Krümmungslinien der Fläche sind.*)

Beachtet man aber weiter, dafs (nach S. 63) die Krümmungsmaschen einer Fläche ebene Vierecke sind, und dafs immer zwei Nachbargeraden aus der Schar der Θ-Linien das eine Paar Gegenseiten dieser Vierecke bilden, so schliefst man weiter:

Je zwei Nachbargeraden einer Fläche vom Krümmungsmafs 0 liegen in einer Ebene.

Damit ist aber zugleich auch die Abwickelbarkeit der Fläche bewiesen; denn man kann immer das zwischen 2 aufeinanderfolgenden Geraden der Fläche liegende Ebenenstück um seine erste Grenzgerade so lange drehen, bis es mit dem längs dieser Geraden angrenzenden Nachbarstück in eine Ebene fällt, und dies Verfahren so lange fortführen, bis die ganze Fläche auf der Ebene ausgebreitet ist, und erhält also den Satz:

Jede Fläche vom Krümmungsmafs 0 ist abwickelbar.

Da somit nach dem Gaufsschen Satze von der Flächenverbiegung jede abwickelbare Fläche das Krümmungsmafs 0 besitzt, und, wie soeben bewiesen, jede Fläche vom Krümmungsmafs 0 abwickelbar ist, so sind die beiden Begriffe „abwickelbare Fläche" und „Fläche vom Krümmungs-

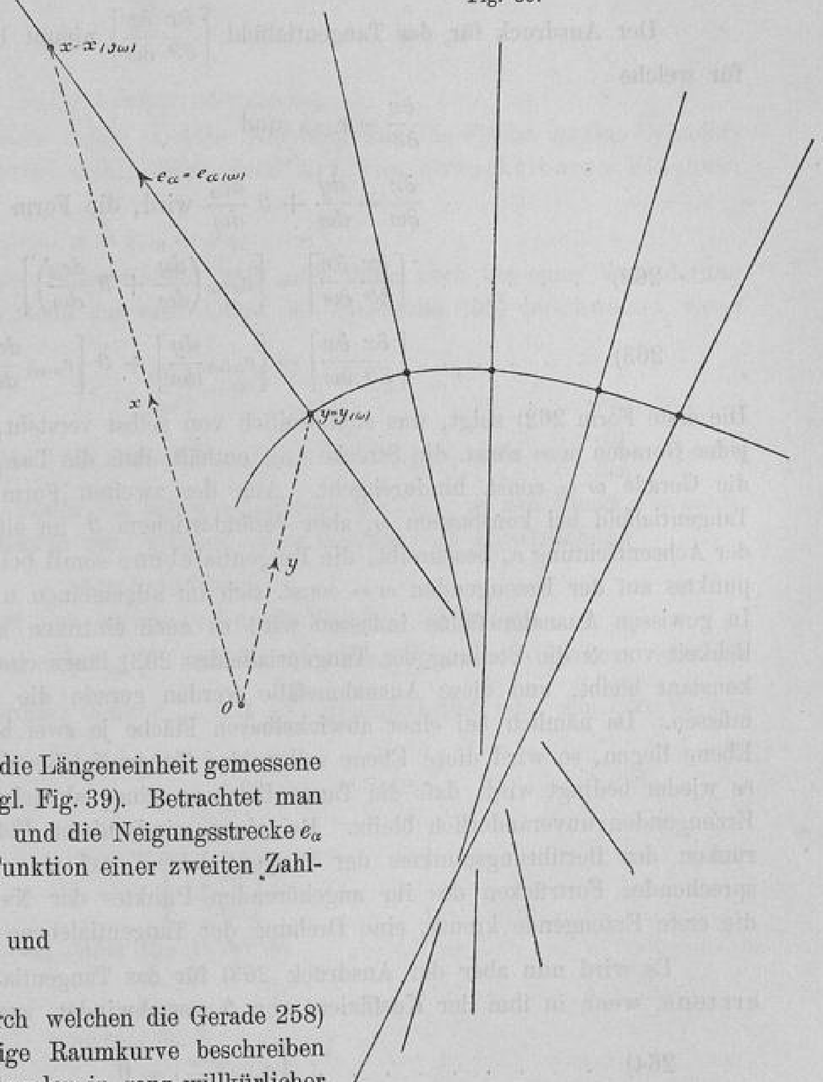
*) Der von Hoppe in seinem sonst vortrefflichen Buche über Flächentheorie (Leipzig, 1876) auf S. 49 gegebene Beweis dieses Satzes ist nicht bindend; denn durch seine Schlufsweise würde sich z. B. auch folgern lassen, dafs bei einem Kreisringe diejenige Krümmungslinie, längs deren das Krümmungsmafs verschwindet, eine gerade Linie sein müsse.

mafs 0“ vollkommen gleichbedeutend und man kann daher den beiden obigen Sätzen über Flächen vom Krümmungsmafs 0 auch die Fassung geben:

Jede abwickelbare Fläche ist geradlinig; ihre geraden Linien sind Krümmungslinien der Fläche, und je zwei Nachbargeraden liegen in einer Ebene.

Weiter schliefst man dann noch: Liegen bei einer geradlinigen Fläche die Nachbargeraden nicht in einer Ebene, so ist die Fläche nicht abwickelbar; eine solche geradlinige Fläche heifst eine windschiefe Fläche und besitzt stets ein negatives Krümmungsmafs. Denn legt man durch eine Gerade der Fläche einen Normalschnitt hindurch, so ist seine Krümmung = 0. Dieser Normalschnitt kann aber nicht ein Hauptschnitt sein, weil sonst das Krümmungsmafs verschwinden, die Fläche somit abwickelbar sein würde. Folglich mufs die eine Hauptkrümmung > 0, die andere < 0, das Krümmungsmafs also negativ sein.

Fig. 39.



Um indes die Eigenschaften der beiden Arten von geradlinigen Flächen, der abwickelbaren und der windschiefen Flächen, genauer untersuchen zu können, wird es notwendig, zunächst die geradlinigen Flächen überhaupt einer kurzen Betrachtung zu unterwerfen.

Eine gerade Linie, welche durch einen Punkt mit dem Träger y hindurchgeht (vgl. S. 9) und die Neigung e_α hat (vgl. S. 10), wird durch die Gleichung dargestellt

258) $x = y + \vartheta e_\alpha$,

wo x den laufenden Träger der Geraden bezeichnet, und ϑ eine Zahlgröfse ist, nämlich der durch die Längeneinheit gemessene Abstand der Punkte x und y (vgl. Fig. 39). Betrachtet man in dieser Gleichung den Punkt y und die Neigungsstrecke e_α nicht als konstant, sondern als Funktion einer zweiten Zahlgröfse ω, setzt also

259) . . . $y = y_{(\omega)}$ und

260) . . . $e_\alpha = e_{\alpha(\omega)}$

und läfst somit den Punkt y, durch welchen die Gerade 258) hindurchgehen soll, eine beliebige Raumkurve beschreiben und zugleich die Neigung der Geraden in ganz willkürlicher

Weise von dem Parameter ω dieser Raumkurve abhängen, so ist die dadurch aus 258) hervorgehende Gleichung

261) . . . . $x = y_{(\omega)} + \vartheta e_{\alpha(\omega)}$

die Gleichung einer unendlichen Schar von geraden Linien, deren geometrischer Ort eine geradlinige Fläche ist. Die Gleichung 261) stellt aber auch eine geradlinige Fläche allgemeinster Art dar, denn es ist weder über ihre „Leitkurve" $y = y_{(\omega)}$ noch auch über die Neigung $e_{\alpha(\omega)}$ ihrer geradlinigen „Erzeugenden" irgend eine besondere Voraussetzung getroffen. Die beiden Scharen der Parameterlinien der Fläche sind ihre Erzeugenden, (für welche $\omega =$ const. ist), und eine Schar von Kurven ($\vartheta =$ const.), welche von der Leitkurve den konstanten längs den Erzeugenden zu messenden Abstand ϑ besitzen.

Der Ausdruck für das Tangentialfeld $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]$ nimmt bei der geradlinigen Fläche 261), für welche

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = e_{\alpha(\omega)} \text{ und}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{dy}{d\omega} + \vartheta \frac{de_\alpha}{d\omega} \text{ wird, die Form an}$$

262) . . . . . $$\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \left[e_{\alpha(\omega)}\left(\frac{dy}{d\omega} + \vartheta \frac{de_\alpha}{d\omega}\right)\right] \text{ oder}$$

263) . . . . . $$\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \left[e_{\alpha(\omega)}\frac{dy}{d\omega}\right] + \vartheta\left[e_{\alpha(\omega)}\frac{de_\alpha}{d\omega}\right]$$

Die erste Form 262) zeigt, was sich freilich von selbst versteht, dafs das Tangentialfeld längs jeder Geraden $\omega =$ const. die Strecke $e_{\alpha(\omega)}$ enthält, dafs die Tangentialebene selbst also durch die Gerade $\omega =$ const. hindurchgeht. Aus der zweiten Form 263) entnimmt man, dafs das Tangentialfeld bei konstantem ω, aber veränderlichem ϑ im allgemeinen einen Feldbüschel mit der Achsenrichtung e_α beschreibt, die Tangentialebene somit bei der Bewegung ihres Berührungspunktes auf der Erzeugenden $\omega =$ const. sich im allgemeinen um diese Erzeugende drehen wird. In gewissen Ausnahmefällen indessen wird es auch eintreten können, dafs trotz der Veränderlichkeit von ϑ die Stellung des Tangentialfeldes 263) längs einer jeden Erzeugenden der Fläche konstant bleibt, und diese Ausnahmefälle werden gerade die abwickelbaren Flächen umfassen müssen. Da nämlich bei einer abwickelbaren Fläche je zwei benachbarte Erzeugende in einer Ebene liegen, so wird diese Ebene selbst eine Tangentialebene der Fläche sein müssen, wodurch es wieder bedingt wird, dafs die Tangentialebene einer abwickelbaren Fläche längs einer jeden Erzeugenden unveränderlich bleibt. Bei einer windschiefen Fläche hingegen bewirkt das Fortrücken des Berührungspunktes der Tangentialebene auf einer Erzeugenden zugleich ein entsprechendes Fortrücken des ihr angehörenden Punktes der Nachbarerzeugenden und, da diese die erste Erzeugende kreuzt, eine Drehung der Tangentialebene um diese Erzeugende.

Es wird nun aber der Ausdruck 263) für das Tangentialfeld von ϑ unabhängig werden erstens, wenn in ihm der Koeffizient von ϑ verschwindet, wenn also

264) . . . . $$\left[e_{\alpha(\omega)}\frac{de_\alpha}{d\omega}\right] = 0$$

ist. Um diese Differenzialgleichung integrieren zu können, beachte man, daſs wegen

$$e_{\alpha(\omega)}{}^2 = 1$$

auch das **innere** Produkt der Strecke $e_{\alpha(\omega)}$ und $\frac{de_\alpha}{d\omega}$ d. h. das Produkt

$$265) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_{\alpha(\omega)} \,\middle|\, \frac{de_\alpha}{d\omega}\right] = 0 \text{ ist,}$$

die Strecke $\frac{de_\alpha}{d\omega}$ also zu gleicher Zeit mit $e_{\alpha(\omega)}$ parallel sein (264) und auf $e_{\alpha(\omega)}$ senkrecht stehen muſs (265), was sich, da $e_{\alpha(\omega)}$ von 0 verschieden ist, nicht anders erfüllen läſst, als wenn

$$\frac{de_\alpha}{d\omega} = 0$$

ist. Die Integration ergiebt also

$$e_{\alpha(\omega)} = \text{const., etwa} = e_\alpha,$$

d. h. sämtliche Erzeugende der Fläche haben dieselbe Richtung und die Fläche ist eine Cylinderfläche. Die **Cylinderflächen** wären somit eine **erste Art von abwickelbaren Flächen**; ihre Gleichung lautet

$$266) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = y_{(\omega)} + \vartheta e_\alpha.$$

Es wird aber **zweitens** das Tangentialfeld 263) auch dann noch bei einer Veränderung von ϑ seine Stellung beibehalten, wenn das erste Glied des Ausdrucks 263) verschwindet, wenn also

$$267) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_{\alpha(\omega)} \frac{dy}{d\omega}\right] = 0$$

ist. Diese Differenzialgleichung läſst sich zunächst dadurch befriedigen, daſs man $\frac{dy}{d\omega} = 0$ setzt, woraus durch Integration folgt $y = \text{const.}$, so daſs die Leitkurve $y = y_{(\omega)}$ in den Punkt $y = \text{const.}$ zusammenschrumpft, die Fläche also in eine **Kegelfläche** ausartet mit der Gleichung

$$268) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = y + \vartheta e_{\alpha(\omega)}.$$

Damit hätten wir eine **zweite Art von abwickelbaren Flächen** gefunden.

Es gestattet die Differenzialgleichung 267) aber noch eine allgemeinere Lösung; denn sie wird offenbar auch noch erfüllt werden, wenn $e_{\alpha(\omega)}$ mit $\frac{dy}{d\omega}$ gleichgerichtet ist. Als Strecke von der Länge 1 wird alsdann $e_{\alpha(\omega)}$ den Wert besitzen müssen

$$e_{\alpha(\omega)} = \frac{\frac{dy}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2}},$$

und die Gleichung der Fläche nimmt daher die Form an

$$269) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = y_{(\omega)} + \vartheta \frac{\frac{dy}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2}}.$$

In ihr zeigt der Bruch $\dfrac{\dfrac{dy}{d\omega}}{\sqrt{\left(\dfrac{dy}{d\omega}\right)^2}}$ die Tangentenneigung der Leitkurve $y = y_{(\omega)}$ an (vgl. Fig. 40).

Die Gleichung 269) stellt daher für gegebenes ω die Tangente der Leitkurve im Punkte ω, für veränderliches ω aber den geometrischen Ort aller Tangenten der Leitkurve oder, wie man sagt, die **Tangentenfläche** der Kurve $y = y_{(\omega)}$ dar; diese Kurve selbst nennt man die **Gratlinie** oder **Wendungskante** der Fläche. Die Tangentenflächen bilden also eine **dritte Art von abwickelbaren Flächen.**

Man könnte indes geneigt sein zu vermuten, dafs mit den genannten 3 Flächenfamilien die Reihe der abwickelbaren Flächen noch nicht erschöpft sei, denn es wird ja offenbar das Tangentialfeld 263) auch dann noch für sämtliche Werte des Parameters ϑ gleiche Stellung haben müssen, wenn die Felder

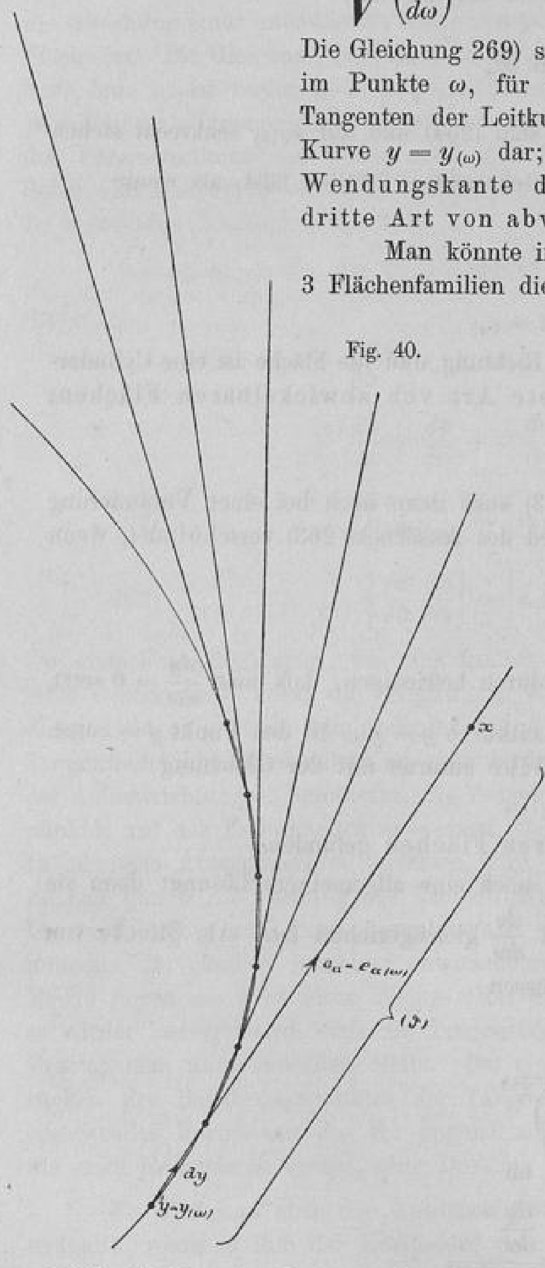


Fig. 40.

$$\left[e_{a(\omega)}\,\frac{dy}{d\omega}\right] \text{ und } \left[e_{a(\omega)}\,\frac{de_a}{d\omega}\right]$$

einander parallel sind, das erste Feld also etwa das λ-fache des zweiten ist. Hierbei kann übrigens der Zahlfaktor λ noch für die verschiedenen Geraden $\omega = \text{const.}$ verschiedene und überdies völlig beliebige Werte besitzen, d. h. er mufs als eine willkürliche Funktion von ω aufgefafst werden, welche mit $\lambda_{(\omega)}$ bezeichnet sein mag. Dann besteht zwischen den beiden Feldern eine Beziehung von der Form

$$270)\quad \left[e_{a(\omega)}\,\frac{dy}{d\omega}\right] = \lambda_{(\omega)}\,\left[e_{a(\omega)}\,\frac{de_a}{d\omega}\right]$$

und der Ausdruck 263) für das Tangentialfeld geht daher über in

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \left(\lambda_{(\omega)} + \vartheta\right)\left[e_{a(\omega)}\,\frac{de_a}{d\omega}\right],$$

das Feld ändert somit wirklich bei veränderlichem ϑ nur seine Gröfse, nicht aber seine Stellung; die Tangentialebenen sämtlicher Punkte einer Erzeugenden $\omega = \text{const.}$ fallen also in der That in eine Ebene zusammen.

Die Differenzialgleichung 270) bietet nun schon insofern ein gewisses Interesse, als sie wegen der Willkürlichkeit der Funktion $\lambda_{(\omega)}$ die beiden Differenzialgleichungen 264) und 267), welche uns oben die 3 Familien der abwickelbaren Flächen lieferten, als Sonderfälle in sich schliefst; denn für $\lambda_{(\omega)} = 0$ geht die Differenzialgleichung 270) in die Gleichung 267) und für $\lambda_{(\omega)} = \infty$ in die Gleichung 264) über. Es bleibt daher nur noch zu untersuchen, ob die Differenzialgleichung 270) auch noch andere Flächenfamilien umfaſst. Zu dem Zwecke bringe man die Gleichung 270) auf 0, gebe ihr also die Gestalt

271) . . . . $$\left[e_{\alpha(\omega)}\left(\frac{dy}{d\omega} - \lambda_{(\omega)}\frac{de_\alpha}{d\omega}\right)\right] = 0.$$

Dann läſst sich der zweite Faktor der linken Seite auch in der Form schreiben

272) . . . $$\frac{dy}{d\omega} - \lambda_{(\omega)}\frac{de_\alpha}{d\omega} = \frac{d(y_{(\omega)} - \lambda_{(\omega)}e_{\alpha(\omega)})}{d\omega} + \frac{d\lambda}{d\omega}e_{\alpha(\omega)}.$$

In diesem Ausdruck setze man noch zur Abkürzung

273) . . . . $$y_{(\omega)} - \lambda_{(\omega)}e_{\alpha(\omega)} = z_{(\omega)}$$

und führe also auf jeder Erzeugenden ω einen Punkt $z_{(\omega)}$ ein, welcher von dem auf derselben Erzeugenden liegenden Punkte $y_{(\omega)}$ der Leitkurve um das Stück $\lambda_{(\omega)}$ entfernt ist und bei positivem $\lambda_{(\omega)}$ von $y_{(\omega)}$ aus betrachtet nach derjenigen Seite zu liegt, deren Neigungsstrecke $= -e_{\alpha(\omega)}$ ist, bei negativem $\lambda_{(\omega)}$ nach der andern Seite. Diese Punkte $z_{(\omega)}$ werden daher ebenso wie die Punkte $y_{(\omega)}$ eine Raumkurve bilden, welche ganz auf der Fläche liegt, und deren Gleichung lautet

274) . . . . $$z = y_{(\omega)} - \lambda_{(\omega)}e_{\alpha(\omega)}.$$

Bei Einführung der Abkürzung 273) erhält der Ausdruck 272) die Form

275) . . . . . . $$\frac{dy}{d\omega} - \lambda_{(\omega)}\frac{de_\alpha}{d\omega} = \frac{dz}{d\omega} + \frac{d\lambda}{d\omega}e_{\alpha(\omega)},$$

und setzt man diesen Wert wiederum in die Differenzialgleichung 271) ein, so verwandelt sie sich in die Gleichung

$$\left[e_{\alpha(\omega)}\left(\frac{dz}{d\omega} + \frac{d\lambda}{d\omega}e_{\alpha(\omega)}\right)\right] = 0,$$

welche sich wegen der Grundeigenschaft des äuſseren Produkts (vgl. S. 5) vereinfacht zu

276) . . . . $$\left[e_{\alpha(\omega)}\frac{dz}{d\omega}\right] = 0.$$

Diese Differenzialgleichung, welche mit der Differenzialgleichung 270) vollkommen gleichwertig ist, stimmt aber ihrer Form nach genau mit der Differenzialgleichung 267) überein und läſst sich auch in entsprechender Weise integrieren, denn sie wird erstens befriedigt, wenn

$$\frac{dz}{d\omega} = 0, \text{ also}$$

277) . . . . $$z = \text{const.}$$

ist. Alsdann besitzen sämtliche Geraden $\omega = \text{const.}$ einen gemeinsamen Punkt z, und die Fläche ist eine Kegelfläche, welche übrigens, falls dieser gemeinsame Punkt im unendlichen liegen sollte, auch in eine Cylinderfläche ausarten kann. Die Gleichung 276) wird aber zweitens auch erfüllt, wenn

278) . . . . $$e_{\alpha(\omega)} = \frac{\frac{dz}{d\omega}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2}}$$

ist. Dann ist die Fläche wieder eine Tangentenfläche, aber ihre Gratlinie fällt nicht mehr wie oben mit der Leitkurve der Fläche zusammen, sondern ist die soeben eingeführte, durch die Gleichung 274) dargestellte Raumkurve.

Eine neue Familie von abwickelbaren Flächen hat somit die Differenzialgleichung 270) nicht ergeben, und es ist daher mit den Cylinder-, Kegel- und Tangenten-Flächen die Klasse der abwickelbaren Flächen wirklich erschöpft; doch gestattet die Gleichung 270) noch die Ableitung einer brauchbaren Differenzialgleichung aller abwickelbaren Flächen. Multipliziert man nämlich die Gleichung 270), um die willkürliche Funktion $\lambda_{(\omega)}$ zu entfernen, äufserlich mit $\frac{dy}{d\omega}$, so erhält man die Gleichung

$$279) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_{\alpha(\omega)} \frac{de_\alpha}{d\omega} \frac{dy}{d\omega}\right] = 0,$$

welche ebenso wie die Gleichung 270) alle 3 Familien der abwickelbaren Flächen umfafst und daher als die Differenzialgleichung der abwickelbaren Flächen bezeichnet werden darf. Aber man überzeugt sich auch leicht, dafs die Gleichung 279) gerade die Grundeigenschaft der abwickelbaren Flächen ausdrückt, dafs je zwei Nachbarerzeugende in einer Ebene liegen. Denn ersetzt man in der Gleichung 279) die Differentialquotienten durch Differenziale und vermehrt noch den zweiten Faktor um e_α, schreibt also die Gleichung in der Form

$$280) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [e_\alpha (e_\alpha + de_\alpha)\, dy] = 0,$$

so sagt sie aus, dafs die beiden Erzeugenden mit den Neigungen e_α und $e_\alpha + de_\alpha$, welche durch die Punkte y und $y + dy$ der Leitkurve hindurchgehen, mit dem zwischen ihnen liegenden Linienelemente dy der Leitkurve in einer Ebene liegen.

Dreizehnter Abschnitt.

Minimalflächen.

Eine Fläche, welche von einer oder mehreren geschlossenen Kurven begrenzt wird und einen kleineren Flächeninhalt besitzt als alle unendlich benachbarten Flächen, die man zwischen derselben Umrandung ausspannen kann, nennt man eine Minimalfläche. Es soll die Differenzialgleichung der Minimalflächen aufgestellt werden.

Um einen Ausdruck für den Inhalt der Fläche zu gewinnen, bilde man zunächst den Flächeninhalt der Masche eines beliebigen Kurvennetzes ϑ, ω der Fläche und bestimme wie gewöhnlich zuerst das Feld dO dieser Masche durch äufsere Multiplikation zweier die Masche begrenzenden anstofsenden Linienelemente

$$\left\{\begin{aligned} d_\vartheta x &= \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta \text{ und} \\ d_\omega x &= \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega. \end{aligned}\right.$$

Dadurch erhält man für das Feld dO den schon oben (vgl. S. 43) entwickelten Ausdruck

$$116) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dO = \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta\, d\omega.$$

Aus ihm leitet man die Flächenzahl dS der Masche ab, indem man ihn (nach dem auf S. 36 angegebenen Verfahren) mit der Stellungsstrecke des Feldes dO, d. h. mit der Neigung e_ν der Flächennormale äußerlich multipliziert. Man bekommt so für die Flächenzahl der Masche die Darstellung

$$281) \quad \ldots \ldots \quad dS = \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta\, d\omega,$$

und der Inhalt der ganzen Fläche wird daher ausgedrückt werden durch das Integral

$$\int d\omega \int d\vartheta \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right].$$

Soll dieses Integral ein Minimum werden, so wird seine erste Variation verschwinden müssen, d. h. man erhält für eine Minimalfläche als notwendige, freilich im allgemeinen nicht hinreichende Bedingung die Gleichung

$$282) \quad \ldots \ldots \quad \delta \int d\omega \int d\vartheta \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0 \text{ oder}$$

$$283) \quad \ldots \ldots \quad \int d\omega \int d\vartheta\, \delta \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0.$$

Die hier unter dem Integral auftretende Variation ergiebt entwickelt:

$$\delta\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \left[\delta e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[e_\nu \frac{\partial \delta x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial \delta x}{\partial \omega}\right].$$

Da aber wegen $e_\nu{}^2 = 1$ $[e_\nu \mid \delta e_\nu] = 0$ ist, δe_ν also auf e_ν senkrecht steht und somit dem Felde $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]$ angehört, so verschwindet das erste Glied dieser Summe; und stellt man ferner im zweiten Gliede die beiden letzten Faktoren um und ändert dafür sein Vorzeichen (vgl. S. 6), so nimmt die Summe die Form an

$$\delta\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = -\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial \delta x}{\partial \vartheta}\right] + \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial \delta x}{\partial \omega}\right].$$

Bei Einführung dieses Wertes verwandelt sich die Bedingungsgleichung 283) für die Minimalflächen in

$$284) \quad . \quad . \quad -\int d\omega \int d\vartheta \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial \delta x}{\partial \vartheta}\right] + \int d\vartheta \int d\omega \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial \delta x}{\partial \omega}\right] = 0.$$

Nun findet man durch partielle Integration

$$\int d\vartheta \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial \delta x}{\partial \vartheta}\right] = \alpha - \int d\vartheta \left[\frac{\partial \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\right]}{\partial \vartheta} \delta x\right]$$

$$\int d\omega \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial \delta x}{\partial \omega}\right] = \beta - \int d\omega \left[\frac{\partial \left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right]}{\partial \omega} \delta x\right],$$

wo die Glieder α und β nur Randvariationen enthalten, und setzt man diese Werte in die Gleichung 284) ein, so ergiebt sich die neue Bedingungsgleichung

$$285) \quad . \quad . \quad . \quad \gamma + \int d\omega \int d\vartheta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] - \frac{\partial}{\partial \omega}\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right]\right)\delta x\right] = 0,$$

in welcher das Anfangsglied γ wiederum nur von den Randvariationen abhängt. Diese Gleichung liefert wegen der Willkürlichkeit der Verrückungen δx aufser der Randbedingung $\gamma = 0$ die Differenzialgleichung

$$286) \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] - \frac{\partial}{\partial \omega}\left[e_\nu \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] = 0.$$

Führt man in ihr die Differenziation aus, so heben sich zwei Glieder fort und man erhält

$$\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] - \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] = 0$$

oder, wenn man noch im zweiten Gliede die Faktoren umstellt, was einen Zeichenwechsel bedingt,

$$287) \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0.$$

Diese Differenzialgleichung 287) ist dann ebenso wie die Gleichung 282), aus der sie entsprungen ist, eine notwendige, aber freilich im allgemeinen nicht hinreichende Bedingung dafür, dafs eine Fläche eine Minimalfläche sei, und möge die Differenzialgleichung der Minimalflächen genannt werden.

Um ihre Deutung zu erleichtern, setze man für den Augenblick voraus, die Parameter ϑ, ω seien Krümmungsparameter, dann wird nach S. 60

$$199) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} = -\dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} = -\dfrac{1}{\varrho_2}\dfrac{\partial x}{\partial \omega} \end{cases}$$

und die Differenzialgleichung 287) verwandelt sich daher in

$$-\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = 0$$

oder, da $\left[\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\right]$ von 0 verschieden ist, in die Gleichung

$$288) \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0,$$

welche den Satz enthält:

In jedem Punkte einer Minimalfläche verschwindet die Summe der beiden Hauptkrümmungen, oder:

Für jeden Punkt einer Minimalfläche sind die beiden Hauptkrümmungen, also auch die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich.

Zu derselben Deutung der Differenzialgleichung 287) gelangt man indes auch ohne ein Zurückgehen auf Krümmungsparameter. Auf S. 57 ergab sich nämlich im Falle beliebiger Parameter ϑ, ω für die Summe der Hauptkrümmungen einer Fläche der Wert

$$193) \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\left[n\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[n\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]}{n^2},$$

wo n die Normalenstrecke der Fläche bedeutet (vgl. S. 38). Dieser Ausdruck wird aber in der That $= 0$, sobald die Differenzialgleichung 287) der Minimalflächen erfüllt ist. Denn multipliziert man die Gleichung 287) äufserlich mit n, so erhält man die Gleichung

$$289) \quad \ldots \ldots \quad \left[n\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[n\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0,$$

d. h. es verschwindet gerade der Zähler des Ausdrucks 193) für die Summe der Hauptkrümmungen, folglich auch diese selbst.

Aus der gewonnenen Grundeigenschaft der Minimalflächen lassen sich nun aber sofort einige weitere Eigenschaften folgern. So ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Eine jede Minimalfläche, welche nicht eben ist, besitzt ein negatives Krümmungsmafs.

Eine weitere Folgerung wurde aus der Gleichung 288) bereits oben (vgl. S. 70) bei der Behandlung der Asymptotenlinien gezogen. Die dort aufgestellte Gleichung

$$222) \quad \ldots \ldots \quad \operatorname{tang} \varphi = \pm\sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}},$$

in welcher φ den Winkel bedeutete, den eine Asymptotenlinie mit der ersten Krümmungslinie bildet, verwandelt sich nämlich für den Fall einer Minimalfläche wegen 288) in die Gleichung

$$290) \quad \ldots \ldots \quad \operatorname{tang} \varphi = \pm 1.$$

Diese aber enthält den Satz:

Die Asymptotenmaschen einer Minimalfläche sind rechtwinklig.

Aber auch die Differenzialgleichungen der Krümmungs- und Asymptotenlinien erfahren für Minimalflächen bei Berücksichtigung ihrer Grundeigenschaft [Gl. 287) oder 288)] eine Vereinfachung.

Um diese zu finden, beziehe man zuerst die obige zweite Form der Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes

$$198) \quad \ldots \ldots \quad [de_\nu\, dx] = 0$$

auf beliebige Parameter ϑ, ω und setze für de_ν und dx ihre Werte

$$291) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} de_\nu = \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} d\vartheta + \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega} d\omega \\ dx = \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \dfrac{\partial x}{\partial \omega} d\omega \end{cases}$$

ein, so verwandelt sie sich in

$$\left[\left(\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega} d\omega\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right)\right] = 0$$

oder bei Ausführung der Multiplikation in die Differenzialgleichung

$$292) \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta^2 + \left\{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]\right\} d\vartheta\, d\omega + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\omega^2 = 0.$$

Diese Gleichung bezieht sich noch auf eine ganz beliebige Fläche. Für Minimalflächen verschwindet nun aber zufolge der Differenzialgleichung 287) der Koëffizient von $d\vartheta\, d\omega$ und man erhält daher als

Differenzialgleichung des Krümmungsnetzes einer Minimalfläche bezogen auf beliebige Parameter ϑ, ω

die Gleichung:

$$293) \quad \ldots \ldots \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right] d\vartheta^2 + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\omega^2 = 0,$$

welche man auch in der Form schreiben kann

$$294) \ldots\ldots \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2 = -\frac{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right]}{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]}.$$

Um zweitens auch die Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer Minimalfläche zu entwickeln, gehe man wieder von derjenigen Differenzialgleichung des Asymptotennetzes aus, welche der Gleichung 198) des Krümmungsnetzes entspricht, d. h. von der Gleichung

$$226) \ldots\ldots [de_\nu \,|\, dx] = 0$$

und setze in sie für de_ν und dx die Werte 291) ein. Dann erhält man die Gleichung

$$\left[\left(\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}d\omega\right)\middle|\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial\omega}d\omega\right)\right] = 0$$

oder bei Ausführung der Multiplikation

$$295) \ . \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right]d\vartheta^2 + \left\{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]\right\}d\vartheta\, d\omega + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]d\omega^2 = 0.$$

Um aber diese Differenzialgleichung zunächst in ähnlicher Weise wie die Differenzialgleichung 292) vereinfachen zu können, führe man noch nachträglich die besondere Voraussetzung ein, daſs die Gleichung der Fläche nicht auf beliebige Parameter, sondern auf Krümmungsparameter ϑ, ω bezogen sei. Unter dieser Bedingung bestehen für die partiellen Differenzialquotienten von e_ν und x nach ϑ und ω die Gleichungen

$$207) \ldots\ldots \begin{cases} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] = 0 \\ \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] = 0 \text{ (vgl. S. 64) und} \end{cases}$$

$$199) \ldots\ldots \begin{cases} \frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial\vartheta} \\ \frac{\partial e_\nu}{\partial\omega} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial\omega} \text{ (vgl. S. 60).} \end{cases}$$

Es verschwindet daher in der Differenzialgleichung 295) das mittlere Glied, während die beiden andern Glieder sich vereinfachen. Somit ergiebt sich als

Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer beliebigen Fläche bezogen auf Krümmungsparameter ϑ, ω

die Gleichung:

$$296) \ldots\ldots \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 d\vartheta^2 + \frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 d\omega^2 = 0 \text{ oder}$$

$$297) \ldots\ldots \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2 = -\frac{\frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2}{\frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2},$$

eine Gleichung, welche das bereits oben (vgl. S. 69) gefundene Ergebnis bestätigt, daſs die Asymptotenlinien nur für diejenigen Teile einer Fläche reell sein können, für welche das

Krümmungsmaſs negativ oder $= 0$ ist. Für Minimalflächen nun vereinfacht sich wegen 288) die Differenzialgleichung 297) noch weiter und man erhält als

Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer Minimalfläche bezogen auf Krümmungsparameter ϑ, ω

die Gleichung:

$$298) \quad \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}.$$

Diese Differenzialgleichung nimmt endlich eine besonders einfache Gestalt an, wenn die Krümmungsparameter ϑ, ω noch der Bedingungsgleichung

$$299) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2$$

unterworfen sind, deren geometrische Bedeutung aus den Ausdrücken für die Bogenelemente der Parameterlinien

$$300) \quad \begin{cases} d_\vartheta s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}\, d\vartheta \\ d_\omega s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}\, d\omega \end{cases}$$

sofort zu entnehmen ist; denn sie besagt offenbar, daſs zwei gleichen Parameterzuwüchsen $d\vartheta$ und $d\omega$ auch gleich lange Bogenelemente $d_\vartheta s$ und $d_\omega s$ der Parameterlinien entsprechen. Ein System von Parameterlinien, welches dieser Bedingung genügt, nennt man isometrisch und man kann daher die Gleichung 299) als die Differenzialgleichung isometrischer Parameterlinien bezeichnen. In dem vorliegenden Falle würde also die Gleichung der Fläche $x = x_{(\vartheta,\,\omega)}$ unter Voraussetzung der Gleichung 299) auf isometrische Krümmungsparameter bezogen sein. Alsdann erhält man an Stelle von 298) als

Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer Minimalfläche bezogen auf isometrische Krümmungsparameter

die Gleichung

$$301) \quad \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2 = 1 \text{ oder}$$

$$302) \quad d\omega = \pm d\vartheta,$$

deren Integration ergiebt

$$303) \quad \begin{cases} \omega_1 = \gamma_1 + \vartheta_1 \\ \omega_2 = \gamma_2 - \vartheta_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen aber enthalten den Satz:

Überspinnt man eine Minimalfläche mit einem Netze isometrischer Krümmungslinien, so ist sein Diagonalnetz das Asymptotennetz der Fläche,

ein Ergebnis, das sich durch geometrische Schlüsse leicht bestätigen läſst.

Halle a/S., den 20. März 1893.

Hermann Graſsmann.

Krümmungsmaſs negativ oder = 0 ist. Für Minimalflächen nun vereinfacht sich wegen 288) die Differenzialgleichung 297) noch weiter

Differenzialgleichung des Asyn ... ie bezogen auf Krümmungsparameter ϑ, ω

die Gleichung:

298) . . . . $\Big($

Diese Differenzialgleichung nimmt endlich ... wenn die Krümmungsparameter ϑ, ω noch der Bedingu

299) . . . . $\Big($

unterworfen sind, deren geometrische Bed ... Bogenelemente der Parameterlinien

300) . . . . $\left\{ \begin{array}{l} d_\vartheta \\ d_\omega \end{array} \right.$

sofort zu entnehmen ist; denn sie besagt ... uwüchsen $d\vartheta$ und $d\omega$ auch gleich lange Bogenelemente $d_\vartheta s$ ... hen. Ein System von Parameterlinien, welches dieser Bedingu ... d man kann daher die Gleichung 299) als die Differenzialgl ... inien bezeichnen. In dem vorliegenden Falle würde also di ... ter Voraussetzung der Gleichung 299) auf isometrische ... . Alsdann erhält man an Stelle von 298) als

Differenzialgleichung des Asy ... he bezogen auf isometrische Krümmungsparam

die Gleichung

301) . . . . $\Big($

302) . . . . d

deren Integration ergiebt

303) . . . . $\Big\{$

Diese Gleichungen aber enthalten den Sa

Überspinnt man eine Minimalfl ... er Krümmungslinien, so ist sein Diagonalnetz

ein Ergebnis, das sich durch geometrisch

Halle a/S., den 20. März 1893.

... rafsmann.

Krümmungsmaß negativ oder = 0 ist. Für Minimalflächen nun vereinfacht sich wegen 286) die Differenzialgleichung 287) noch weiter und man erhält als

Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer Minimalfläche bezogen auf Krümmungsparameter ϑ, ω,

die Gleichung:

$$288) \qquad \frac{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)} = \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)$$

Diese Differenzialgleichung nimmt endlich eine besonders einfache Gestalt an, wenn die Krümmungsparameter ϑ, ω noch der **Bedingungsgleichung**

$$289) \qquad \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2$$

unterworfen sind, deren geometrische Bedeutung aus den Ausdrücken für die Bogenelemente der Parameterlinien:

$$290) \qquad \begin{cases} d_\vartheta s = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta \\ d_\omega s = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2}\, d\omega \end{cases}$$

sofort zu entnehmen ist. Denn sie besagt offenbar, daß zwei gleichen Parameterzuwüchsen $\Delta\vartheta$ und $\Delta\omega$ auch gleich lange Bogenelemente $d_\vartheta s$ und $d_\omega s$ der Parameterlinien entsprechen. Ein System von Parameterlinien, welches dieser Bedingung genügt, nennt man isometrisch und man kann daher die Gleichung 289) als die **Differenzialgleichung isometrischer Parameterlinien** bezeichnen. In dem vorliegenden Falle würde also die Gleichung der Fläche $x = x_{\vartheta,\omega}$ unter Voraussetzung der Gleichung 289) auf **isometrische Krümmungsparameter** bezogen sein. Alsdann erhält man an Stelle von 288) als

Differenzialgleichung des Asymptotennetzes einer Minimalfläche bezogen auf isometrische Krümmungsparameter

die Gleichung

$$291) \qquad \left(\frac{d\omega}{d\vartheta}\right)^2 = 1 \text{ oder}$$

$$292) \qquad d\omega = \pm d\vartheta,$$

deren Integration ergiebt

$$293) \qquad \begin{cases} \omega = \vartheta + C_1, \\ \omega = -\vartheta + C_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen aber enthalten den Satz:

Überspinnt man eine Minimalfläche mit einem Netze isometrischer Krümmungslinien, so ist sein Diagonalnetz das Asymptotennetz der Fläche,

ein Ergebnis, das sich durch geometrische Schlüsse leicht bestätigen läßt.

Halle a/S., den 20. März 1893.

Hermann Graßmann.