Anwendung der Ausdehnungslehre

auf

die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.

II. Teil: Krumme Flächen.

Erste Hälfte.

Von

Hermann Grafsmann.

Beilage zum Programm der Lateinischen Hauptschule zu Halle a. S.
Ostern 1888.

Halle a. S.,
Buchdruckerei des Waisenhauses.
1888.

Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Zweiter Teil: Krumme Flächen. Erste Hälfte.

Fünfter Abschnitt.

Weitere Hülfsmittel aus der Ausdehnungslehre.

Bei der Einführung der äufseren Produkte wurde bereits mehrfach auf die Ähnlichkeit hingewiesen, welche zwischen den Eigenschaften der Determinanten und den Gesetzen der äufseren Multiplikation besteht. Im folgenden soll dieser Zusammenhang genauer untersucht werden.*)

Unter der Determinante

$$70) \quad \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 & \alpha_2{}^1 & \alpha_3{}^1 \\ \alpha_1{}^2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 \\ \alpha_1{}^3 & \alpha_2{}^3 & \alpha_3{}^3 \end{vmatrix}$$

versteht man bekanntlich die Summe

$$\alpha_1{}^1\alpha_2{}^2\alpha_3{}^3 - \alpha_1{}^1\alpha_3{}^2\alpha_2{}^3 + \alpha_2{}^1\alpha_3{}^2\alpha_1{}^3 - \alpha_2{}^1\alpha_1{}^2\alpha_3{}^3 + \alpha_3{}^1\alpha_1{}^2\alpha_2{}^3 - \alpha_3{}^1\alpha_2{}^2\alpha_1{}^3,$$

d. h. jene Determinante ist eine Summe von der Form

$$71) \quad \Sigma \pm \alpha_r{}^1\alpha_s{}^2\alpha_t{}^3,$$

welche ausgedehnt wird über alle die Glieder, die man erhält, wenn man in dem Produkte $\alpha_r{}^1\alpha_s{}^2\alpha_t{}^3$ anstatt der Indices $r\,s\,t$ alle möglichen Permutationen der Zahlen 1 2 3 setzt und dem so entstehenden Produkte das Plus- oder Minuszeichen giebt, je nachdem in demselben die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche unten entgegengesetzt geordnet sind wie oben, eine gerade oder eine ungerade ist.

Um nun die Beziehung einer solchen Determinante zu dem dreifaktorigen äufseren Produkte kennen zu lernen, leiten wir mittelst der 9 Elemente unserer Determinante aus den 3 Grundstrecken e_1, e_2, e_3 drei neue Strecken a^1, a^2, a^3 ab durch die Gleichungen

$$72) \quad \begin{cases} a^1 = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_2{}^1 e_2 + \alpha_3{}^1 e_3 \\ a^2 = \alpha_1{}^2 e_1 + \alpha_2{}^2 e_2 + \alpha_3{}^2 e_3 \\ a^3 = \alpha_1{}^3 e_1 + \alpha_2{}^3 e_2 + \alpha_3{}^3 e_3 \end{cases}$$

und bilden das äufsere Produkt $[a^1 a^2 a^3]$ der 3 erhaltenen Strecken; dann verschwinden auf der rechten Seite alle diejenigen Glieder, welche eine der Einheitsstrecken (also auch einen und den-

*) Vgl. hierzu Schlegel, System der Raumlehre. Teil II: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra (Leipzig, Teubner 1875) S. 121.

selben unteren Index der Ableitzahlen α) mehr als einmal enthalten. Die übrigbleibenden Glieder bilden eine Summe von der Form

$$73) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \alpha_r{}^1 \alpha_s{}^2 \alpha_t{}^3 [e_r e_s e_t],$$

welche über alle die Glieder ausgedehnt wird, die man erhält, wenn man für $r s t$ nacheinander alle möglichen Permutationen der Zahlen 1 2 3 setzt. Das auftretende Produkt $[e_r e_s e_t]$ aber läfst sich durch Umstellung der Faktoren auf die Form $\pm [e_1 e_2 e_3]$ bringen. Es wird nämlich $[e_r e_s e_t] = \pm [e_1 e_2 e_3]$, je nachdem die Anzahl derjenigen Paare von Indices, welche in dem linken Produkt entgegengesetzt geordnet sind wie in dem rechten, eine gerade oder eine ungerade ist, eine Zeichenbestimmung, welche mit der oben bei 71) gegebenen genau übereinstimmt. Setzen wir daher den Wert von $[e_r e_s e_t]$ in die Summe 73) ein, so finden wir

$$[a^1 a^2 a^3] = [e_1 e_2 e_3] \Sigma \pm \alpha_r{}^1 \alpha_s{}^2 \alpha_t{}^3,$$

wo das Summenzeichen genau denselben Sinn hat, den wir oben bei der Formel 71) festgestellt haben. Wir dürfen daher für jene Summe die Determinante Δ_α einsetzen und erhalten

$$74) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [a^1 a^2 a^3] = [e_1 e_2 e_3] \Delta_\alpha;$$

oder bedenken wir endlich noch, dafs $[e_1 e_2 e_3] = 1$ gesetzt war, so ergiebt sich die Schlufsgleichung

$$75) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [a^1 a^2 a^3] = \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 & \alpha_2{}^1 & \alpha_3{}^1 \\ \alpha_1{}^2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 \\ \alpha_1{}^3 & \alpha_2{}^3 & \alpha_3{}^3 \end{vmatrix},$$

welche die gesuchte Beziehung zwischen Determinanten und äufseren Produkten wenigstens für den Fall einer dreigliedrigen Determinante zur Darstellung bringt.

Übrigens ist unser Ergebnis noch einer Erweiterung fähig. Es ist klar, dafs die obige Summe

$$71) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \pm \alpha_r{}^1 \alpha_s{}^2 \alpha_t{}^3$$

ihren Wert nicht ändert, wenn man die unteren Indices mit den oberen vertauscht. Denn ordnen wir in der durch jene Vertauschung entstehenden Summe

$$76) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \pm \alpha_1{}^r \alpha_2{}^s \alpha_3{}^t$$

die Faktoren eines jeden einzelnen Gliedes so um, dafs die oberen Indices wieder die natürliche Aufeinanderfolge 1 2 3 annehmen, so unterscheidet sich die Summe 76) nur noch durch die Reihenfolge der Glieder von der Summe 71) und wir erhalten also in der That die Gleichung

$$77) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \pm \alpha_r{}^1 \alpha_s{}^2 \alpha_t{}^3 = \Sigma \pm \alpha_1{}^r \alpha_2{}^s \alpha_3{}^t,$$

wofür wir auch schreiben können

$$78) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 & \alpha_1{}^2 & \alpha_1{}^3 \\ \alpha_2{}^1 & \alpha_2{}^2 & \alpha_2{}^3 \\ \alpha_3{}^1 & \alpha_3{}^2 & \alpha_3{}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 & \alpha_2{}^1 & \alpha_3{}^1 \\ \alpha_1{}^2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 \\ \alpha_1{}^3 & \alpha_2{}^3 & \alpha_3{}^3 \end{vmatrix},$$

diese Gleichung enthält den Satz:

„In jeder Determinante kann man unbeschadet ihres Wertes die Zeilen zu Kolonnen und die Kolonnen zu Zeilen machen."

Bezeichnen wir die angegegebene Umstellung der Elemente d. h. die Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen kurz mit dem Ausdruck Umordnung der Determinante, so können wir den Satz noch etwas kürzer fassen, indem wir sagen:

„Die Umordnung ändert den Wert einer Determinante nicht.“

Führt man jetzt endlich den Wert 78) in die Gleichung 75) ein, so ergiebt sich für das äufsere Produkt $[a^1 a^2 a^3]$ die Doppelformel

$$79) \quad \ldots\ldots \quad [a^1 a^2 a^3] = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 \alpha_2{}^1 \alpha_3{}^1 \\ \alpha_1{}^2 \alpha_2{}^2 \alpha_3{}^2 \\ \alpha_1{}^3 \alpha_2{}^3 \alpha_3{}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 \alpha_1{}^2 \alpha_1{}^3 \\ \alpha_2{}^1 \alpha_2{}^2 \alpha_2{}^3 \\ \alpha_3{}^1 \alpha_3{}^2 \alpha_3{}^3 \end{vmatrix},$$

welche den von uns gesuchten Hauptsatz enthält. Wir können ihn in der Form aussprechen:

Erster Hauptsatz: „Stellt man die Faktoren eines dreifaktorigen äufseren Produktes $[a^1 a^2 a^3]$ als Vielfachensummen der 3 Grundstrecken e_1, e_2, e_3 dar durch die Gleichungen

$$72) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} a^1 = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_2{}^1 e_2 + \alpha_3{}^1 e_3 \\ a^2 = \alpha_1{}^2 e_1 + \alpha_2{}^2 e_2 + \alpha_3{}^2 e_3 \\ a^3 = \alpha_1{}^3 e_1 + \alpha_2{}^3 e_2 + \alpha_3{}^3 e_3, \end{cases}$$

so wird jenes äufsere Produkt $[a^1 a^2 a^3]$ gleich der Determinante, welche man aus den 9 Ableitzahlen α bilden kann, wenn man die Ableitzahlen der einzelnen Strecken a^1, a^2, a^3 entweder immer in dieselbe Zeile oder immer in dieselbe Kolonne stellt.“

Zum Schlufs sei noch bemerkt, dafs sich mit Rücksicht auf unsern Hauptsatz der Formel 78), welche den Satz von der Umordnung der Determinante enthält, eine entsprechende Formel für äufsere Produkte an die Seite stellen läfst. Bezeichnen wir nämlich mit a_1, a_2, a_3 diejenigen Strecken, welche sich aus a^1, a^2, a^3 dadurch ergeben, dafs man in den Koefficienten α die oberen Indices mit den unteren vertauscht, setzen also

$$80) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_1{}^2 e_2 + \alpha_1{}^3 e_3 \\ a_2 = \alpha_2{}^1 e_1 + \alpha_2{}^2 e_2 + \alpha_2{}^3 e_3 \\ a_3 = \alpha_3{}^1 e_1 + \alpha_3{}^2 e_2 + \alpha_3{}^3 e_3, \end{cases}$$

so kann man von diesen 3 Strecken a_1, a_2, a_3 auch aussagen, sie seien aus den Ausdrücken 72) für a^1, a^2, a^3 dadurch hervorgegangen, dafs man die Koefficienten auf der rechten Seite in dem oben angegebenen Sinne „umordnet.“ Die Gleichung 78) läfst sich dann offenbar auch schreiben in der Form

$$[a^1 a^2 a^3] = [a_1 a_2 a_3]$$

und enthält in dieser Gestalt den Satz:

„Das äufsere Produkt dreier Strecken bleibt ungeändert, wenn man die 3 Strecken durch diejenigen 3 anderen Strecken ersetzt, die sich ergeben, wenn man in den 3 Gleichungen, welche die 3 ursprünglichen Strecken auf die 3 Einheitsstrecken zurückführen, die Ableitzahlen „umordnet“.“

Aus dem von uns bewiesenen Hauptsatz über die Darstellung einer Determinante durch ein äufseres Produkt lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der Determinanten auf das leichteste entwickeln. In der That kann man jeder Eigenschaft der äufseren Produkte einen Satz über die Determinanten an die Seite stellen. So liefert die Formel

$$[a^1 a\, a] = 0$$

in die Sprache der Determinanten übersetzt den Satz:

„Eine Determinante verschwindet, wenn zwei ihrer Reihen einander gleich sind“, wobei der Ausdruck „Reihe“ die beiden Begriffe Zeile und Kolonne umfassen soll.

So folgt ferner aus der Formel

$$[a^1 a^3 a^2] = -[a^1 a^2 a^3]$$

der Determinantensatz:

„Eine Determinante ändert lediglich ihr Vorzeichen, wenn man zwei Reihen miteinander vertauscht.“

So entspringt aus der Formel

$$[a^1 \lambda a^2 a^3] = \lambda [a^1 a^2 a^3]$$

der Satz:

„Wenn man in einer Determinante alle Glieder einer Reihe mit ein und demselben Faktor multipliziert, so geht die Determinante über in das Produkt jenes Faktors und der ursprünglichen Determinante.“

Die Formel

$$[a^1 (b^2 + c^2) a^3] = [a^1 b^2 a^3] + [a^1 c^2 a^3]$$

ergiebt:

„Eine Determinante, in welcher die Elemente einer Reihe Summen sind, ist gleich der Summe zweier Determinanten, deren Elemente in der jener Reihe entsprechenden Reihe die Summanden jener Summe sind“,

und die Formel

$$[a^1 (a^2 + \lambda a^1) a^3] = [a^1 a^2 a^3]$$

liefert den Satz:

„Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu sämtlichen Elementen einer Reihe die mit einem und demselben Faktor multiplizierten Elemente einer andern Reihe addiert.“

Um endlich auch den Multiplikationssatz der Determinanten zu entwickeln, setzen wir wieder wie oben

$$81)\quad \begin{cases} a^1 = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_2{}^1 e_2 + \alpha_3{}^1 e_3 \\ a^2 = \alpha_1{}^2 e_1 + \alpha_2{}^2 e_2 + \alpha_3{}^2 e_3 \\ a^3 = \alpha_1{}^3 e_1 + \alpha_2{}^3 e_2 + \alpha_3{}^3 e_3 \end{cases} \quad \text{und entsprechend} \quad 82)\quad \begin{cases} b^1 = \beta_1{}^1 e_1 + \beta_2{}^1 e_2 + \beta_3{}^1 e_3 \\ b^2 = \beta_1{}^2 e_1 + \beta_2{}^2 e_2 + \beta_3{}^2 e_3 \\ b^3 = \beta_1{}^3 e_1 + \beta_2{}^3 e_2 + \beta_3{}^3 e_3, \end{cases}$$

und stellen diesen 6 Strecken sogleich noch diejenigen 6 andern Strecken a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 gegenüber, welche aus 81) und 82) durch „Umordnung“ der Koefficienten α und β hervorgehen, d. h. wir setzen

$$83)\quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1{}^1 e_1 + \alpha_1{}^2 e_2 + \alpha_1{}^3 e_3 \\ a_2 = \alpha_2{}^1 e_1 + \alpha_2{}^2 e_2 + \alpha_2{}^3 e_3 \\ a_3 = \alpha_3{}^1 e_1 + \alpha_3{}^2 e_2 + \alpha_3{}^3 e_3 \end{cases} \quad \text{und} \quad 84)\quad \begin{cases} b_1 = \beta_1{}^1 e_1 + \beta_1{}^2 e_2 + \beta_1{}^3 e_3 \\ b_2 = \beta_2{}^1 e_1 + \beta_2{}^2 e_2 + \beta_2{}^3 e_3 \\ b_3 = \beta_3{}^1 e_1 + \beta_3{}^2 e_2 + \beta_3{}^3 e_3. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ferner die Determinante der α wieder mit Δ_α und die Determinante der β mit Δ_β, so wird

$$85)\ \ .\ .\ \Delta_\alpha = [a^1 a^2 a^3] = [a_1 a_2 a_3] \quad \text{und} \quad 86)\ \Delta_\beta = [b^1 b^2 b^3] = [b_1 b_2 b_3].$$

Schließlich führen wir noch drei neue Strecken c_1, c_2, c_3 ein, welche aus den Strecken b^1, b^2, b^3 durch dieselben Koefficienten abgeleitet sein mögen, durch welche die Strecken a_1, a_2, a_3 auf die Grundstrecken e_1, e_2, e_3 zurückgeführt sind, d. h. wir setzen

$$87)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad \begin{cases} c_1 = \alpha_1{}^1 b^1 + \alpha_1{}^2 b^2 + \alpha_1{}^3 b^3 \\ c_2 = \alpha_2{}^1 b^1 + \alpha_2{}^2 b^2 + \alpha_2{}^3 b^3 \\ c_3 = \alpha_3{}^1 b^1 + \alpha_3{}^2 b^2 + \alpha_3{}^3 b^3. \end{cases}$$

Bilden wir dann das äufsere Produkt dieser 3 Strecken c_1, c_2, c_3, so erhalten wir eine Gleichung, welche der Gleichung 74) genau entspricht, nämlich

$$88) \quad \ldots\ldots \quad [c_1\, c_2\, c_3] = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1 & \alpha_1{}^2 & \alpha_1{}^3 \\ \alpha_2{}^1 & \alpha_2{}^2 & \alpha_2{}^3 \\ \alpha_3{}^1 & \alpha_3{}^2 & \alpha_3{}^3 \end{vmatrix} . [b^1\, b^2\, b^3].$$

Der einzige Unterschied zwischen beiden Gleichungen besteht darin, dafs in der Formel 74) das auf der rechten Seite neben der Determinante der α auftretende Produkt $[e_1\, e_2\, e_3]$ den Wert 1 hat, während in der Formel 88) an dessen Stelle das Produkt $[b^1\, b^2\, b^3]$ getreten ist, welches zufolge der Gleichung 86) selbst wieder eine Determinante ist. Führen wir daher in unsere Gleichung für dieses Produkt seinen Wert aus 86) ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$89) \quad \ldots\ldots \quad [c_1\, c_2\, c_3] = \varDelta_\alpha\, \varDelta_\beta.$$

Damit haben wir eine Formel gewonnen, welche das Produkt zweier Determinanten durch ein dreifaktoriges äufseres Produkt ausdrückt. Ein solches Produkt aber läfst sich nach unserm ersten Hauptsatz immer durch eine Determinante ersetzen. Um dieselbe zu erhalten, haben wir nur die 3 Faktoren c_1, c_2, c_3 jenes Produkts als Vielfachensummen der 3 Grundstrecken e_1, e_2, e_3 darzustellen, d. h. auf die Form

$$90) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} c_1 = \gamma_1{}^1 e_1 + \gamma_1{}^2 e_2 + \gamma_1{}^3 e_3 \\ c_2 = \gamma_2{}^1 e_1 + \gamma_2{}^2 e_2 + \gamma_2{}^3 e_3 \\ c_3 = \gamma_3{}^1 e_1 + \gamma_3{}^2 e_2 + \gamma_3{}^3 e_3 \end{cases}$$

zu bringen. Gelingt uns diese Darstellung, so geht die Gleichung 89) über in

$$91) \quad \ldots\ldots \quad \varDelta_\alpha\, \varDelta_\beta = \varDelta_\gamma,$$

wo $\varDelta_\gamma$ die Determinante der 9 Koefficienten γ von 90) bezeichnet. Damit wäre dann das Problem gelöst, das Produkt zweier Determinanten wieder durch eine Determinante von gleicher Elementenzahl auszudrücken.

Jene Aufgabe aber, die 3 Strecken c_1, c_2, c_3 als Vielfachensummen der 3 Grundstrecken darzustellen, bietet keinerlei Schwierigkeiten; denn wir brauchen offenbar nur in die Definitionsgleichungen 87) für b^1, b^2, b^3 ihre Werte 82) einzuführen, wodurch sich ergiebt

$$92) \begin{cases} c_1 = (\alpha_1{}^1\beta_1{}^1 + \alpha_1{}^2\beta_1{}^2 + \alpha_1{}^3\beta_1{}^3)e_1 + (\alpha_1{}^1\beta_2{}^1 + \alpha_1{}^2\beta_2{}^2 + \alpha_1{}^3\beta_2{}^3)e_2 + (\alpha_1{}^1\beta_3{}^1 + \alpha_1{}^2\beta_3{}^2 + \alpha_1{}^3\beta_3{}^3)e_3 \\ c_2 = (\alpha_2{}^1\beta_1{}^1 + \alpha_2{}^2\beta_1{}^2 + \alpha_2{}^3\beta_1{}^3)e_1 + (\alpha_2{}^1\beta_2{}^1 + \alpha_2{}^2\beta_2{}^2 + \alpha_2{}^3\beta_2{}^3)e_2 + (\alpha_2{}^1\beta_3{}^1 + \alpha_2{}^2\beta_3{}^2 + \alpha_2{}^3\beta_3{}^3)e_3 \\ c_3 = (\alpha_3{}^1\beta_1{}^1 + \alpha_3{}^2\beta_1{}^2 + \alpha_3{}^3\beta_1{}^3)e_1 + (\alpha_3{}^1\beta_2{}^1 + \alpha_3{}^2\beta_2{}^2 + \alpha_3{}^3\beta_2{}^3)e_2 + (\alpha_3{}^1\beta_3{}^1 + \alpha_3{}^2\beta_3{}^2 + \alpha_3{}^3\beta_3{}^3)e_3. \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Gleichungen 92) mit 90) liefert uns für die neue Koefficienten γ die Werte

$$93) \quad \ldots\ldots \quad \gamma_\varkappa{}^\lambda = \alpha_\varkappa{}^1\beta_\lambda{}^1 + \alpha_\varkappa{}^2\beta_\lambda{}^2 + \alpha_\varkappa{}^3\beta_\lambda{}^3,$$

ein System von Gleichungen, welches zusammen mit 91) die Lösung des von uns gestellten Problems in der gewöhnlichen Form enthält.

Um das gefundene Ergebnis noch etwas übersichtlicher zu gestalten, führen wir zum Schlufs wieder die Strecken a und b ein. Wir bemerken, dafs sich der Ausdruck 93) für die Elemente $\gamma_\varkappa{}^\lambda$ der neuen Determinante mit Hilfe jener Strecken kürzer darstellen läfst in der Form

$$94) \quad \ldots\ldots \quad \gamma_\varkappa{}^\lambda = [a_\varkappa \,|\, b_\lambda].$$

Setzen wir diese Werte 94) in die Determinante Δ_γ unserer Hauptgleichung 91) ein und ersetzen zugleich die Determinanten Δ_α und Δ_β dieser Gleichung durch die gleichwertigen äufseren Produkte aus 85) und 86), so erhalten wir anstelle von 91) die Formel

$$95) \quad . \quad . \quad [a_1\, a_2\, a_3]\,.\,[b_1\, b_2\, b_3] = \begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] & [a_3|b_1] \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] & [a_3|b_2] \\ [a_1|b_3] & [a_2|b_3] & [a_3|b_3] \end{vmatrix},$$

welche den Multiplikationssatz der Determinanten in kürzester Form enthält. Derselbe lautet in Worte gekleidet:

Zweiter Hauptsatz: „Multipliziert man 2 dreifaktorige äufsere Produkte miteinander, so erhält man eine Determinante, deren einzelne Zeilen sich ergeben, wenn man die Faktoren des ersten Produkts der Reihe nach mit den Faktoren des zweiten Produkts innerlich multipliziert."

Es möge schliefslich noch untersucht werden, in welcher Weise sich die Formel 95) ändert, wenn wir in derselben an Stelle der dreifaktorigen zweifaktorige Produkte einführen. Versuchen wir zunächst die Formel 95) mechanisch auf den genannten Fall zu übertragen, so bemerken wir, dafs die der rechten Seite der Gleichung 95) entsprechende Determinante $\begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] \end{vmatrix}$ unter allen Umständen eine Zahlgröfse wird. Auf der linken Seite müssen wir daher die beiden Felder $[a_1\, a_2]$ und $[b_1\, b_2]$*) notwendig auf eine solche Weise miteinander multiplizieren, dafs das Ergebnis ebenfalls eine blofse Zahlgröfse wird, was nur bei innerer Multiplikation stattfindet. Wir gelangen daher durch rein mechanische Übertragung der Formel 95) auf zweifaktorige äufsere Produkte zu der Gleichung

$$96) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [a_1\, a_2|b_1\, b_2] = \begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] \end{vmatrix},$$

welche wir jetzt auf ihre Richtigkeit hin zu prüfen haben.

Zufolge der Definition der inneren Multiplikation zweier Felder ist unter dem inneren Produkt

$$97) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [a_1\, a_2|b_1\, b_2]$$

nichts anderes zu verstehen als das äufsere Produkt $\left[a_1\; a_2 \cdot |[b_1\, b_2]\right]$ aus dem Felde $[a_1\, a_2]$ und der Ergänzung des Feldes $[b_1\, b_2]$, d. h. jenes Produkt kann aufgefafst werden als ein dreifaktoriges äufseres Streckenprodukt, dessen Faktoren die Strecken a_1, a_2 und $|[b_1\, b_2]$ sind. Wenn wir daher unser Produkt 97) mit sich selbst, oder was auf dasselbe hinauskommt, mit dem gleichwertigen Produkte $[b_1\, b_2|a_1\, a_2]$ multiplizieren, dessen Faktoren b_1, b_2 und $|[a_1\, a_2]$ heifsen, so erhalten wir ein Produkt von 2 dreifaktorigen äufseren Produkten, auf welches unser zweiter Hauptsatz anwendbar ist. Nach diesem wird

---

*) Ich werde im folgenden nach dem Vorgange von Mahler (vgl. Mahler, Einleitung in die Grafsmannsche Ausdehnungslehre, Programm des Kgl. Gymnasiums in Ulm. 1884. Seite 6) für das zweifaktorige Streckenprodukt stets den Ausdruck „Feld" verwenden, welcher vor dem nicht ganz unzweideutigen Ausdrucke „Flächenraum" entschiedene Vorzüge besitzt und sich namentlich seiner Kürze wegen auch für Zusammensetzungen vortrefflich eignet.

$$[a_1 a_2 | b_1 b_2] \cdot [b_1 b_2 | a_1 a_2] = \begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] & 0 \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] & 0 \\ 0 & 0 & \big[| [b_1 b_2] \cdot a_1 a_2 \big] \end{vmatrix} \quad \text{oder}$$

$$= [a_1 a_2 | b_1 b_2] \begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] \end{vmatrix},$$

und dividiert man endlich diese Gleichung mit $[b_1 b_2 | a_1 a_2] = [a_1 a_2 | b_1 b_2]$, so erhält man in der That die oben aufgestellte Gleichung

$$96) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [a_1 a_2 | b_1 b_2] = \begin{vmatrix} [a_1|b_1] & [a_2|b_1] \\ [a_1|b_2] & [a_2|b_2] \end{vmatrix}.$$

Dieses Ergebnis, — wir wollen es als den dritten Hauptsatz bezeichnen, — können wir in folgender Form in Worte fassen:

Dritter Hauptsatz: „Das innere Produkt zweier Felder ist gleich der Determinante, deren Zeilen man erhält, wenn man die Faktoren des ersten Feldes nacheinander mit denen des zweiten innerlich multipliziert."

Wir wollen diesen Satz zum Ausgangspunkt für die Entwickelung von weiteren Beziehungen zwischen 2 Feldern verwenden.

Aufgabe 8. Es soll vermittelst der Formel 96) das innere Quadrat eines Feldes $[ab]$ bestimmt werden. Setzen wir in der Gleichung 96) das Produkt $[a_1 a_2] = [b_1 b_2] = [ab]$, so geht dieselbe über in

$$[ab]^{\underline{2}} = \begin{vmatrix} a^{\underline{2}} & [a|b] \\ [b|a] & b^{\underline{2}} \end{vmatrix} \quad \text{oder}$$

$$98) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [ab]^{\underline{2}} = a^{\underline{2}} b^{\underline{2}} - [a|b]^2,$$

eine Formel, die bereits oben (vgl. Nr. 37) bewiesen ist.

Aufgabe 9. Es soll die Bedingungsgleichung dafür aufgestellt werden, dafs zwei Felder $[a_1 a_2]$ und $[b_1 b_2]$ aufeinander senkrecht stehen.

Wenn das Feld $[b_1 b_2]$ zu dem Felde $[a_1 a_2]$ normal ist, so läuft seine Ergänzungsstrecke $|[b_1 b_2]$ dem Felde $[a_1 a_2]$ parallel und es mufs daher das Produkt

$$\big[a_1 a_2 \cdot | [b_1 b_2] \big] = 0$$

sein, wofür wir zufolge der Gleichung 36) auch schreiben können:

$$99) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [a_1 a_2 | b_1 b_2] = 0.$$

Das Bestehen dieser Gleichung ist also eine notwendige Bedingung dafür, dafs die beiden Felder aufeinander senkrecht stehen. Sie ist aber auch die hinreichende Bedingung; denn sobald die Gleichung 99) erfüllt ist, läuft auch umgekehrt die Strecke $|[b_1 b_2]$ dem Felde $[a_1 a_2]$ parallel, ihr Ergänzungsfeld $[b_1 b_2]$ steht also auf dem Felde $[a_1 a_2]$ senkrecht.

Um noch eine Bestätigung für das gewonnene Ergebnis zu gewinnen, seien insbesondere die beiden Felder in solcher Weise als Streckenprodukte dargestellt, dafs ihre Schnittstrecke den ersten Faktor dieser Produkte bildet, d. h. in der Form $[ab]$ und $[ac]$. Dann lautet die Bedingung des Senkrechtstehens wieder

100) . . . . $[ab \mid ac] = 0,$

wofür wir, da zufolge unseres dritten Hauptsatzes

$$[ab|ac] = \begin{vmatrix} a^2 & [b|a] \\ [a|c] & [b|c] \end{vmatrix} = a^2 [b|c] - [a|b][a|c] \text{ ist,}$$

auch schreiben können

101) . . . . $a^2 [b|c] - [a|b][a|c] = 0.$

Treffen wir dann endlich noch betreffs der zweiten Faktoren b und c unserer beiden Produkte $[ab]$ und $[ac]$ die Voraussetzung, dafs sie auf der Schnittstrecke a beider Felder senkrecht stehen sollen, setzen also fest, es solle

102) . . . . $\begin{cases} [a|b] = 0 \text{ und} \\ [a|c] = 0 \end{cases}$

sein, so reduziert sich die Gleichung 101) auf die Bedingungsgleichung

103) . . . . $[b|c] = 0.$

Damit haben wir die Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Felder auf die einfachste Form zurückgeführt. Mit Rücksicht auf die Gleichung 102) nämlich sagt die Gleichung 103) nichts anderes aus, als dafs der Neigungswinkel der beiden Felder ein Rechter sein mufs.

Aufgabe 10. Es soll das Produkt $[ab|c|d]$ ermittelt werden. Wir setzen $[ab] = |e$, woraus dann folgt, dafs auch umgekehrt $|[ab] = e$ ist. Dann wird

104) . . $[ab|c|d] = [|e|c|d] = |[ecd] = [ecd] = [cde] = [cd|ab] = [ab|cd].$

Aufgabe 11. Es möge das äufsere Produkt $[ab \cdot ac]$ der beiden Felder $[ab]$ und $[ac]$ bestimmt werden. Nach der Definition des äufseren Produktes zweier Felder (vgl. die Formel 42) ist unter dem Produkte $[ab \cdot ac]$ ein Stück der Schnittstrecke a beider Felder zu verstehen. Wir haben daher zu setzen

105) . . . . $[ab.ac] = \lambda a,$

wo λ einen Zahlfaktor bedeutet, dessen Gröfse noch zu bestimmen bleibt. Zur Ermittelung desselben haben wir uns aus der Streckengleichung 105) durch Multiplikation mit einem Felde eine Zahlgleichung abzuleiten. Wir setzen zu dem Zwecke

106) . . . . $\begin{cases} [ac] = |x \\ [bc] = |y \end{cases}$

und multiplizieren die Gleichung 105) mit dem Felde $|y = [bc]$, wodurch sich ergiebt

$$[ab|x|y] = \lambda\,[abc]$$

oder mit Rücksicht auf 104)

$$[ab|xy] = \lambda\,[abc].$$

Die linke Seite dieser Hülfsgleichung läfst sich nun nach unserm dritten Hauptsatze ersetzen durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} [a|x] & [b|x] \\ [a|y] & [b|y] \end{vmatrix},$$

welche sich, da die Produkte $[a|x]$ und $[b|y]$ verschwinden, auf den Ausdruck reduziert

$$-[b|x]\,[a|y] = -[bac]\,[abc] = [abc]^2,$$

so dafs unsere Hülfsgleichung die Form annimmt

$$[abc]^2 = \lambda\,[abc],$$

aus der für λ der Wert folgt

$$\lambda = [abc].$$

Die Gleichung 105) geht daher über in die Schlufsformel

107) . . . . $[ab\,.\,ac] = [abc]\,a$

Zum Schlufs möge hier noch ein Gegenstand eine kurze Besprechung finden, welcher schon in unserer letzten Aufgabe eine Rolle spielte und für die folgende Untersuchung besonders wichtig ist. Bei der Behandlung der Flächenkrümmung nämlich wird es sich mehrfach um die Aufgabe handeln, aus einer Strecken- oder Feldgleichung eine Zahlgleichung abzuleiten. Für diesen Übergang bieten sich zwei Methoden dar. Das erste Verfahren ist bereits oben (vgl. Formel 6 und 38) eingehend entwickelt.

Wie dort gezeigt wurde, „erhält man die Längenzahl $\mathfrak{a}$ einer Strecke a, indem man aus deren innerem Quadrat die Wurzel zieht“, d. h. vermittelst der Formel

108) . . . . $\mathfrak{a} = \sqrt{a^{\underline{2}}}$.

Und ebenso „erhält man die Flächenzahl $\mathfrak{A}$ eines Feldes A, indem man aus seinem inneren Quadrat die Wurzel zieht“, d. h. vermittelst der Formel

109) . . . . $\mathfrak{A} = \sqrt{A^{\underline{2}}}$.

Fafst man in dem letzten Falle das Feld A als Ergänzung einer Strecke a auf, so ist zufolge des Begriffs der Ergänzung die Längenzahl $\mathfrak{a}$ dieser Strecke gleich der Flächenzahl $\mathfrak{A}$ jenes Feldes, folglich wird $\mathfrak{A}$ auch darstellbar in der Form

110) . . . . $\mathfrak{A} = \sqrt{a^{\underline{2}}}$,

d. h. „Man kann die Flächenzahl $\mathfrak{A}$ eines Feldes A auch bestimmen, indem man die Ergänzung a des betrachteten Feldes ins innere Quadrat erhebt und aus diesem Quadrat die Wurzel zieht.“

Für manche Zwecke wird indes das soeben entwickelte Verfahren wegen der auftretenden Quadratwurzel unbequem; dann kann man den folgenden **zweiten** Weg einschlagen. Wir bezeichnen mit e_α die Neigung der Strecke a, d. h. eine Strecke, welche mit a gleiche Richtung und gleichen Lauf hat, aber die Länge 1 besitzt. Dann läfst sich offenbar (vgl. die Formel 4) die Längenzahl $\mathfrak{a}$ der Strecke a auch vermittelst der Formel gewinnen

111) . . . . $\mathfrak{a} = [e_\alpha | a]$,

welche den Satz in sich schliefst:

„Man erhält die Längenzahl $\mathfrak{a}$ einer Strecke a, indem man diese Strecke mit ihrer Neigung e_α innerlich multipliziert.“

Es sei andererseits A ein Feld, dessen Ergänzung $|A = a$ gesetzt sein möge, woraus folgt, dafs auch umgekehrt . . . . $A = |a$ sein mufs; bezeichnen wir ferner noch die Neigung der Strecke a mit e_α und nennen diese Strecke die **Stellungsstrecke des Feldes** A, so dafs also unter der Stellungsstrecke eines Feldes nichts anderes zu verstehen ist als die Neigung seiner Ergänzung, so wird die Flächenzahl $\mathfrak{A}$ des Feldes A, welche mit der Längenzahl $\mathfrak{a}$ seiner Ergänzung a übereinstimmt mit Rücksicht auf 111)

$$112) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{a} = [e_\alpha | a] = [e_\alpha . A],$$

worin der Satz liegt:

„Man erhält die Flächenzahl eines Feldes A, indem man dasselbe mit seiner Stellungsstrecke e_α äufserlich multipliziert.“

Sechster Abschnitt.

Tangentialebene und Flächennormale. Bogenelement. Kurven auf der Fläche.

Wir bezeichnen wieder wie in der Theorie der Raumkurven mit x die Strecke, welche von einem festen Punkte O aus nach einem im Raum beweglichen Punkt P hin gezogen wird, und nennen diese Strecke den Träger des Punktes P. Ist dann ϑ eine veränderliche Zahlgröfse, so wird die Gleichung

$$113) \quad x = x_{(\vartheta)}$$

die Gleichung einer Raumkurve sein, welche von dem Punkte P beschrieben wird, und die Gleichung $\vartheta = const.$ giebt einen bestimmten Punkt dieser Raumkurve an. Lassen wir also die Funktion x aufser von ϑ noch von einer zweiten Zahlgröfse ω abhängen, setzen also

$$114) \quad x = x_{(\vartheta, \omega)},$$

so stellt diese Gleichung eine krumme Fläche dar. Denn jeder Punkt $\vartheta = const.$ der oben betrachteten Kurve erzeugt bei veränderlichem ω eine neue Kurve, und alle diese Kurven bilden zusammen eine Fläche.

Schon diese Entstehungsweise der Fläche weist uns darauf hin, der bei der Erzeugung der Fläche auftretenden Kurvenschar, deren Gleichung wir kurz in der Form $\vartheta = const.$ schreiben können, und ebenso auch der zweiten durchaus gleichberechtigten Schar $\omega = const.$ unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden. Da eine jede Kurve der einen Schar jede Kurve der andern schneidet, so bilden beide Scharen zusammen ein Netz, mit welchem die Fläche gewissermafsen übersponnen ist.

Wir wollen die Kurven der ersten Schar $\vartheta = const.$, längs deren allein ω variabel ist, kurz als die Kurven Ω bezeichnen,

während wir die Kurven der zweiten Schar $\omega = const.$, längs deren allein ϑ variiert, die Kurven Θ nennen wollen. Sind dann

Θ und Θ_1 zwei Nachbarkurven der einen Schar,
ω und $\omega + d\omega$ die diesen Kurven zugehörenden konstanten Parameterwerte

und sind andererseits

Ω und Ω_1 zwei Nachbarkurven der anderen Schar,
ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ die diesen Kurven zugehörenden konstanten Parameterwerte,

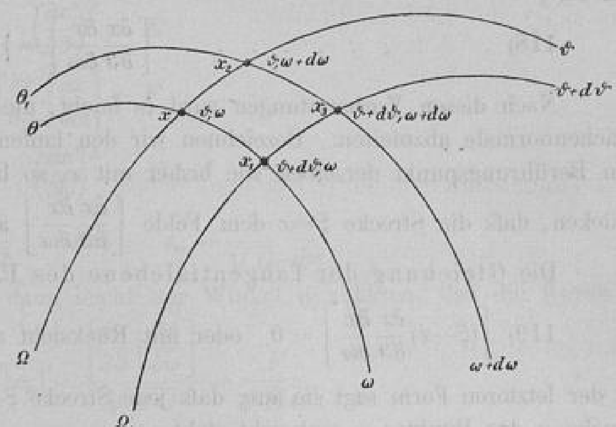
so schliefsen diese 4 Kurven eine unendlich kleine Masche unseres Kurvennetzes ein, deren

Stellung zugleich die Stellung der Tangentialebene des Punktes ϑ, ω angiebt. Den 4 Eckpunkten dieser Masche (Fig. 27) gehören die Träger zu

$$x = x_{(\vartheta,\,\omega)},\quad x_1 = x_{(\vartheta + d\vartheta,\,\omega)},\quad x_2 = x_{(\vartheta,\,\omega + d\omega)},\quad x_3 = x_{(\vartheta + d\vartheta,\,\omega + d\omega)},$$

und es werden daher die beiden von x ausgehenden Linienelemente ihrer Länge und Richtung nach dargestellt durch die Ausdrücke

Fig. 27.



$$115)\quad \begin{cases} d_\vartheta x = x_1 - x = \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\, d\vartheta \\[2mm] d_\omega x = x_2 - x = \dfrac{\partial x}{\partial \omega}\, d\omega \end{cases}$$

d. h. „Man erhält die vom Punkte x ausgehenden Linienelemente der Kurven Θ und Ω der Länge und Richtung nach, indem man die partiellen Differenzialquotienten $\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}$ und $\dfrac{\partial x}{\partial \omega}$ bezüglich mit $d\vartheta$ und $d\omega$ multipliziert."

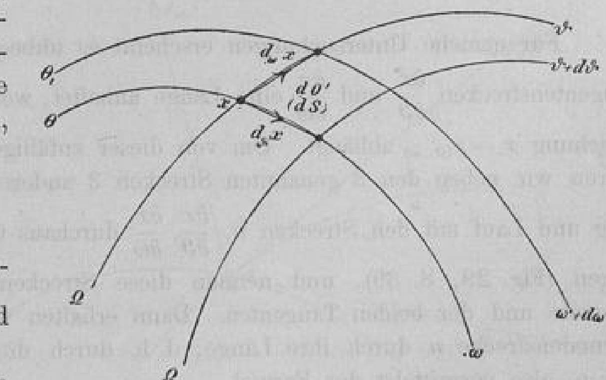
Hieraus folgt sofort die geometrische Bedeutung jener Differenzialquotienten selbst:

der Differenzialquotient $\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}$ stellt ein begrenztes, endliches Stück der Tangente der Kurve Θ,

und der Differenzialquotient $\dfrac{\partial x}{\partial \omega}$ ein begrenztes, endliches Stück der Tangente der Kurve Ω dar.

Das von den 4 Kurven (Fig. 28) eingeschlossene, unendlich kleine Feld dO, — wir wollen es nennen das **Maschenfeld des Punktes** x — werden wir erhalten, wenn wir die beiden Differenziale 115) äufserlich miteinander multiplizieren, wodurch sich ergiebt

Fig. 28.



$$116)\quad .\quad dO = \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta\, d\omega.$$

Multipliziert man anstelle der Differenziale die Differenzialquotienten $\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}$ und $\dfrac{\partial x}{\partial \omega}$, bildet also das Produkt $\left[\dfrac{\partial x}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial x}{\partial \omega}\right]$, so erhält man ein endliches Stück der Tangentialebene des Punktes x seiner Gröfse und Stellung nach, — wir wollen es das **Tangentialfeld des Punktes** x nennen. Bezeichnen wir endlich noch die Ergänzungsstrecke dieses Feldes mit n, setzen also

$$117) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = \left| \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] \right.,$$

so stellt die so definierte Strecke n ein Stück der Flächennormale dar und möge die **Normalenstrecke des Punktes** x heifsen. Übrigens ist dann auch umgekehrt das Tangentialfeld $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right]$ die Ergänzung der Normalenstrecke n, so dafs wir noch die Gleichung aufstellen können

$$118) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] = | n$$

Nach diesen Vorbereitungen wird es leicht, die Gleichungen der Tangentialebene und der Flächennormale abzuleiten. Bezeichnen wir den laufenden Träger der Tangentialebene mit ξ und den Berührungspunkt derselben wie bisher mit x, so hat die Gleichung dieser Ebene nur auszudrücken, dafs die Strecke $\xi - x$ dem Felde $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right]$ angehört.

Die **Gleichung der Tangentialebene des Punktes** x wird also lauten

$$119) \quad \left[(\xi - x) \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] = 0 \quad \text{oder mit Rücksicht auf} \quad 118) \; [(\xi - x) \,|\, n] = 0$$

In der letzteren Form sagt sie aus, dafs jede Strecke $\xi - x$ der Tangentialebene auf der Normalenstrecke n des Punktes x senkrecht steht.

Entsprechend erhalten wir für die **Flächennormale des Punktes** x ohne weiteres die beiden **Gleichungsformen**

$$120) \quad \left[(\xi - x) \,\Big|\, \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right) \right] = 0 \qquad \text{und} \qquad [(\xi - x) \,.\, n] = 0,$$

in denen jetzt ξ den laufenden Träger der Flächennormale, x den Fufspunkt derselben bezeichnet.

Für manche Untersuchungen erscheint es unbequem, dafs der Normalenstrecke n und den Tangentenstrecken $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ eine Länge anhaftet, welche von der Form der zu Grunde gelegten Gleichung $x = x_{(\vartheta, \omega)}$ abhängt. Um von dieser zufälligen Gleichungsform unabhängig zu werden, führen wir neben den 3 genannten Strecken 3 andere Strecken e_ν, e_ϑ, e_ω ein, welche in Richtung und Lauf mit den Strecken n, $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ durchaus übereinstimmen, aber die Länge 1 besitzen mögen (Fig. 29, S. 39), und nennen diese Strecken bezüglich die **Neigungsstrecken** der Normale und der beiden Tangenten. Dann erhalten wir die Neigungsstrecke e_ν, indem wir die Normalenstrecke n durch ihre Länge, d. h. durch die Wurzel aus ihrem inneren Quadrat dividieren, also vermittelst der Formel

$$121) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e_\nu = \frac{n}{\sqrt{n^2}}.$$

Entsprechend ergeben sich für die Neigungsstrecken der beiden Tangenten die Werte

$$122) \quad \ldots\ldots \quad e_\vartheta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}} \quad \text{und} \quad e_\omega = \frac{\frac{\partial x}{\partial \omega}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}},$$

für welche wir, falls wir mit Gaufs die Bezeichnungen einführen

$$123) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 = E \\ \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \middle| \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = F \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 = G, \end{cases}$$

auch schreiben können

$$124) \quad \ldots\ldots \quad e_\vartheta = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad e_\omega = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \omega}.$$

Aus diesen Gleichungen läfst sich dann leicht der Winkel ψ ableiten, den die Kurve Θ mit der Kurve Ω bildet. Man findet

$$125) \quad \ldots\ldots \quad \cos\psi = [e_\vartheta \mid e_\omega] = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \middle| \frac{\partial x}{\partial \omega}\right]}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

eine Formel, aus welcher folgt, dafs die beiden Kurven aufeinander senkrecht stehen, wenn

$$126) \quad . \quad . \quad F = 0$$

ist, was sich übrigens bei der Bedeutung von F von selbst versteht.

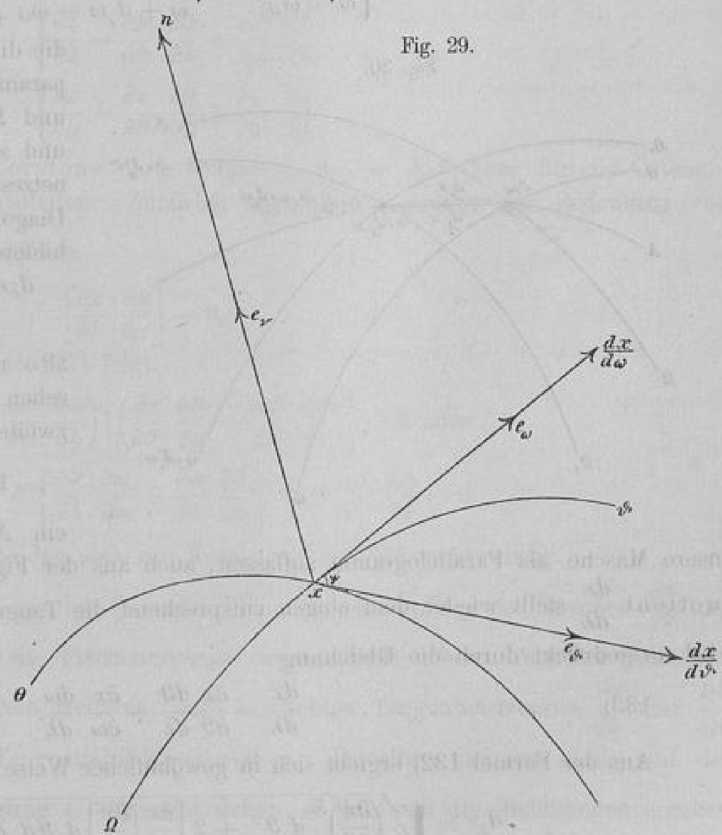


Fig. 29.

Aus den oben entwickelten Formeln 115) für die Bogenelemente der Kurven Θ und Ω ergeben sich die Längen $d_\vartheta s$ und $d_\omega s$ dieser Elemente in gewöhnlicher Weise durch Ausziehung der Wurzel aus dem inneren Quadrat dieser Strecken, wodurch wir erhalten

$$127) \quad \begin{cases} d_\vartheta s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}\, d\vartheta \\ \quad = \sqrt{E}\, d\vartheta \\ d_\omega s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}\, d\omega \\ \quad = \sqrt{G}\, d\omega \end{cases}$$

Um aber auch ein auf der Fläche ganz beliebig verlaufendes Bogenelement bestimmen zu können, verzeichnen wir auf der gegebenen Fläche eine durch den Punkt ϑ, ω gehende, im übrigen aber ganz beliebige Kurve $\varLambda$ und denken uns dieselbe analytisch durch die beiden simultanen Gleichungen

$$128) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \vartheta = \vartheta_{(\lambda)} \\ \omega = \omega_{(\lambda)} \end{cases}$$

ausgedrückt, welche zusammen mit der Gleichung der Fläche

$$129) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = x_{(\vartheta,\, \omega)}$$

die betrachtete Kurve darstellen. Setzt man die Werte 128) in die Gleichung 129) ein, so erhält man die neue Gleichung

$$130) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = x\left(\vartheta_{(\lambda)},\, \omega_{(\lambda)}\right)$$

oder kürzer geschrieben die Gleichung

$$131) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = x_{(\lambda)},$$

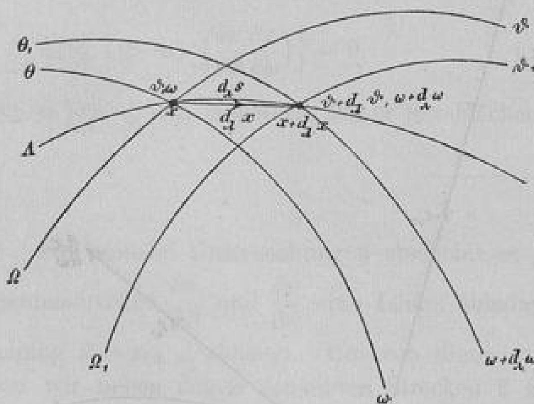
welche die Gleichungen 128) und 129) vollständig ersetzt. Sind dann

$$x = x_{(\lambda)} \text{ und } x_1 = x + d_\lambda x = x_{(\lambda + d\lambda)}$$

die Träger zweier Nachbarpunkte der Kurve $\varLambda$ und

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_{(\lambda)} \\ \omega = \omega_{(\lambda)} \end{cases} \text{ und } \begin{matrix} \vartheta + d_\lambda \vartheta = \vartheta_{(\lambda + d\lambda)} \\ \omega + d_\lambda \omega = \omega_{(\lambda + d\lambda)} \end{matrix}$$

Fig. 30.



die diesen Punkten zugehörigen Flächenparameter, sind endlich Θ und Ω, Θ_1 und Ω_1, die vier durch die Punkte x und x_1 bestimmten Kurven des Kurvennetzes, so wird das Differenzial $d_\lambda x$ zur Diagonale der durch die 4 Kurven gebildeten Masche (Fig. 30) und analytisch

$$\begin{aligned} d_\lambda x &= x_{(\lambda + d\lambda)} - x_{(\lambda)} \\ &= x_{(\vartheta + d_\lambda \vartheta,\ \omega + d_\lambda \omega)} - x_{(\vartheta,\, \omega)}, \end{aligned}$$

also nach dem Taylorschen Satze abgesehen von unendlich kleinen Gröfsen zweiter Ordnung

$$132) \quad d_\lambda x = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} d_\lambda \vartheta + \frac{\partial x}{\partial \omega} d_\lambda \omega,$$

ein Ausdruck, welcher sich, falls wir unsere Masche als Parallelogramm auffassen, auch aus der Figur ablesen läfst. Der Differenzialquotient $\frac{dx}{d\lambda}$ stellt wieder dem obigen entsprechend die Tangentenstrecke der Kurve $\varLambda$ dar und wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$133) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\lambda} + \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\lambda}.$$

Aus der Formel 132) ergiebt sich in gewöhnlicher Weise die Länge $d_\lambda s$ des Bogenelementes

$$d_\lambda s = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 d_\lambda \vartheta^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \middle| \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d_\lambda \vartheta\, d_\lambda \omega + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 d_\lambda \omega^2}$$

oder, falls wir unsere Bezeichnungen 123) einführen,

134) . . . . . $d_\lambda s = \sqrt{E d_\lambda \vartheta^2 + 2 F d_\lambda \vartheta d_\lambda \omega + G d_\lambda \omega^2}$.

Die Formel 133) wird sogleich noch eine andere Verwendung finden. Denken wir uns auf der Fläche neben dem Netze der Kurven Θ und Ω noch ein zweites Kurvennetz konstruiert, dessen Kurven mit Λ und M bezeichnet sein mögen, und stellen dasselbe analytisch durch die Gleichungen

135) . . . . $\begin{cases} \vartheta = \vartheta_{(\lambda, \mu)} \\ \omega = \omega_{(\lambda, \mu)} \end{cases}$ dar, aus denen

für konstantes μ eine Kurve Λ und
für konstantes λ eine Kurve M entspringt,

so ergiebt sich für x durch Einführung der Werte 135) in die Gleichung $x = x_{(\vartheta, \omega)}$ die neue Parameterdarstellung

136) . . . . $x = x_{(\vartheta_{(\lambda, \mu)},\ \omega_{(\lambda, \mu)})}$.

Auf die Kurven Λ und M unseres neuen Netzes läfst sich dann die oben gefundene Formel 133) ohne weiteres anwenden, nur müssen wir anstelle der totalen partielle Differenzialquotienten nach λ und μ einführen und erhalten daher für die Tangentenstrecken der Kurven Λ und M die beiden Formeln

137) . . . . $\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} = \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + \dfrac{\partial x}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \mu}. \end{cases}$

Wir wollen diese Formeln **erstens** dazu benutzen, um die Bedingung für die Orthogonalität der Kurven Λ und M abzuleiten. Zunächst ergiebt sich zufolge der Bedeutung von $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ jene Bedingung in der Form

138) . . . . $\left[\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \middle| \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\right] = 0,$

woraus durch Einführung der Werte 137) folgt

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}\right) \middle| \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \mu}\right)\right] = 0 \text{ oder}$$

139) . . . $E \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + F \left\{\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \omega}{\partial \mu} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \mu}\right\} + G \dfrac{\partial \omega}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \omega}{\partial \mu} = 0.$

Ist diese Gleichung erfüllt, so schneiden sich die Kurven Λ und M rechtwinklig.

Zweitens aber können wir aus den Formeln 137) auch auf die Lage der Strecken $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ gegen die Tangentialebene und die Flächennormale einen Schlufs ziehen. Aus der Form der Gleichungen 137) folgt nämlich ohne weiteres, dafs die beiden Tangentenstrecken $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ dem Felde $\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega}\right]$, d. h. dem Tangentialfelde angehören. Dieselben müssen daher auf der Normalenstrecke n und deren Neigung e_ν senkrecht stehen, so dafs sich die Gleichungen ergeben

$$140) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} &\left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right] = 0, \\ &\left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \mu} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen, welche übrigens, falls die Strecken $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ gegeben sein sollten, auch zur Bestimmung der Richtung von e_ν dienen können, werden dadurch für die weiteren Untersuchungen besonders wichtig, daſs sie für jede Lage des Punktes x Gültigkeit haben und daher auch richtig bleiben, wenn man sie nach λ und μ differenziert. Dasselbe gilt auch von der die Länge der Neigungsstrecke e_ν bestimmenden Gleichung

$$141) \quad \ldots\ldots \quad e_\nu{}^2 = 1.$$

Führen wir die angegebene Differenziation der Gleichungen 141) und 140) nach λ und μ wirklich aus, so ergeben sich die 6 Gleichungen

$$142) \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \right] = 0 \quad \text{und} \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial e_\nu}{\partial \mu} \right] = 0,$$

$$143) \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \right] = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right] \quad \text{und} \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} \right] = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \mu} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right],$$

$$144) \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} \right] = -\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \mu} \right] \quad \text{und} \quad \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2} \right] = -\left[\frac{d e_\nu}{\partial \mu} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \mu} \right],$$

durch deren Verknüpfung endlich noch eine siebente Gleichung

$$145) \quad \ldots\ldots \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \lambda} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \mu} \right] = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \mu} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]$$

entspringt.

Da diese 7 Gleichungen für ein ganz beliebiges Kurvensystem Λ, M abgeleitet sind, so gelten sie selbstverständlich auch für das unserer ganzen Betrachtung zu Grunde gelegte Kurvennetz Θ, Ω. Bezeichnen wir daher mit Gauſs die drei äuſseren Produkte

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} \right], \quad \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega} \right], \quad \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} \right]$$

mit D, D', D'', so ergeben sich, falls wir noch die Gleichungen 118) und 121) berücksichtigen, die folgenden Formeln

$$146) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} \right] = \left[n \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} \right] = \sqrt{n^2} \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2} \right] = -\sqrt{n^2} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right] \\ D' &= \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega} \right] = \left[n \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega} \right] = \sqrt{n^2} \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega} \right] = -\sqrt{n^2} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right] = -\sqrt{n^2} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] \\ D'' &= \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} \right] = \left[n \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} \right] = \sqrt{n^2} \left[e_\nu \,\middle|\, \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} \right] = -\sqrt{n^2} \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega} \,\middle|\, \frac{\partial x}{\partial \omega} \right]. \end{aligned} \right.$$

Siebenter Abschnitt.

Das Krümmungsmafs und die Abwickelung der Flächen.

Um den Begriff der Krümmung einer Fläche festzustellen, erscheint es zweckmäfsig, auf den entsprechenden Begriff bei Kurven zurückzugehen. Wir verstanden unter der Krümmung $\varkappa$ einer Raumkurve den reziproken Wert des Krümmungsradius und fanden für dieselbe noch einen zweiten Ausdruck (vgl. Formel 22) $\varkappa = \frac{d\tau}{ds}$, in welchem $d\tau$ den Kontingenzwinkel und ds die Länge des dazugehörigen Bogenelementes bezeichnete. Diese letzte Darstellung nun läfst eine Auffassung zu, bei welcher eine unmittelbare Übertragung des Begriffs der Krümmung einer Kurve auf die Krümmung von Flächen möglich wird. Der Winkel $d\tau$ liegt nämlich aufser zwischen 2 benachbarten Tangenten auch zwischen den dazugehörigen Hauptnormalen der Kurve. Erzeugt man sich nun auf einer Kugel mit dem Radius 1 ein Bild der Raumkurve in der Weise, dafs man durch den Mittelpunkt der Kugel zu der Hauptnormale eines jeden Punktes der Raumkurve eine Parallele zieht und nennt denjenigen Punkt, in welchem diese Parallele die Kugelfläche schneidet, das Bild jenes Punktes, so ergiebt sich als Bild des Bogens ds, auf der Kugel ein Bogen von der Länge $d\tau$; und wir gelangen daher zu der folgenden neuen Definition der Krümmung einer Kurve:

„Die Krümmung einer Kurve in einem Punkte x ist ein Bruch, der sich ergiebt, wenn man das an jenen Punkt angrenzende Bogenelement mit Hülfe der Hauptnormalen auf einer Kugel vom Radius 1 abbildet und die Länge $d\tau$ des Bildes durch die Länge ds des Bogenelementes selbst dividiert."

Dem entsprechend nun stellen wir für das Krümmungsmafs einer Fläche die folgende Erklärung auf:

„Unter dem Krümmungsmafs $\varkappa$ einer Fläche in einem Punkte x verstehen wir einen Bruch, der sich ergiebt, wenn man das an jenen Punkt angrenzende Flächenelement mit Hülfe der Flächennormalen auf einer Kugel vom Radius 1 abbildet und den Inhalt $d\mathbf{T}$ des Bildes durch den Inhalt dS des Elementes selbst dividiert."

Im folgenden soll nun das so definierte Krümmungsmafs

147) . . . . $\varkappa = \frac{d\mathbf{T}}{dS}$ (erster Wert)

durch die Funktion $x = x_{(\vartheta,\, \omega)}$ und ihre Differenzialquotienten ausgedrückt werden. Bevor wir aber dazu übergehen, haben wir noch eine Bestimmung über das Vorzeichen der Gröfsen dS und $d\mathbf{T}$ zu treffen. Wir wählen als das an den Punkt x angrenzende Flächenelement das Maschenfeld des Punktes x, für welches wir oben (Formel 116) den Ausdruck gefunden haben

116) . . . . $dO = \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta d\omega,$

eine Darstellung, durch welche dem Element dO zugleich ein bestimmter Umlaufungssinn beigelegt ist. Wir denken uns dann ferner die zur Konstruktion des Bildes erforderlichen Parallelen vom Mittelpunkte der Einheitskugel aus — wir nehmen denselben im Anfangspunkt der Träger an — stets nach derjenigen Seite hin gezogen, nach welcher die Normale n unserer Fläche läuft. Alsdann gewinnt die Gleichung der Einheitskugel die einfache Form

148) . . . . $\xi = e_{\nu\,(\vartheta,\,\omega)}$,

in dem Sinne, dafs jedem Punkte ϑ, ω der gegebenen Fläche derjenige Punkt ξ der Einheitskugel entspricht, welchem dieselben Parameterwerte ϑ, ω zugehören. Dem Kurvennetz Θ, Ω unserer Fläche entspricht demnach wieder ein Kurvennetz Θ, Ω auf der Kugel, dem Maschenfeld dO der Fläche ein Maschenfeld dT der Kugel, und dieses Feld dT ist zugleich das gesuchte Bild des Feldes dO. Als analytischer Ausdruck ergiebt sich für dasselbe nach Analogie von 116) und mit Rücksicht auf 148) der Wert

149) . . . . $dT = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] d\vartheta d\omega,$

durch welchen auch für das Bild dT auf der Kugel ein bestimmter Umlaufungssinn festgelegt ist. Wir setzen dann betreffs der den Feldern dO und dT zugehörigen Flächeninhalte dS und $d\mathbf{T}$ fest, es solle dS stets positiv genommen, $d\mathbf{T}$ aber $\left\{\begin{matrix}\text{positiv oder}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gewählt werden, je nachdem von derjenigen Seite aus betrachtet, nach welcher e_ν läuft, $dT \left\{\begin{matrix}\text{in demselben oder}\\ \text{entgegengesetztem}\end{matrix}\right\}$ Sinn umlaufen wird wie dO .

Die wirkliche Bestimmung der Gröfsen dS und $d\mathbf{T}$ bietet jetzt keine Schwierigkeiten mehr, da die oben für die Bildung der Flächenzahl eines Feldes entwickelten Formeln 110) und 112) uns den einzuschlagenden Weg vorschreiben. Um dS zu ermitteln, benutzen wir die Formel 110); ihr zufolge haben wir zunächst die Ergänzungsstrecke von dO zu bilden, welche lautet

$$|dO = \left|\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] d\vartheta d\omega = n d\vartheta d\omega,\right.$$

diese Strecke ins innere Quadrat zu erheben und aus dem Quadrat die Wurzel zu ziehen. Dadurch ergiebt sich

150) . . . . $dS = \sqrt{n^2}\, d\vartheta d\omega,$

wobei die Wurzel zufolge unserer obigen Festsetzung positiv zu nehmen ist.

Zur Bestimmung der Gröfse $d\mathbf{T}$ andererseits verwenden wir die Formel 112), welche in diesem Falle vor der Formel 110) den Vorzug verdient, da sie gestattet, auch die im obigen getroffene Wahl des Vorzeichens von $d\mathbf{T}$ in einfacher Weise zum Ausdruck zu bringen. Nach der Formel 112) erhalten wir die Flächenzahl des Feldes dT, also den absoluten Wert der Gröfse $d\mathbf{T}$, indem wir das Feld dT mit seiner Stellungsstrecke, d. h. mit der Neigung seiner Ergänzung äufserlich multiplizieren. Die Stellungsstrecke des Kugelfeldes dT aber wird offenbar — falls wir von ihrem Lauf, welcher von dem Umlaufungssinn des Feldes dT abhängt, für den Augenblick absehen — durch den Träger e_ν des dazugehörigen Kugelpunktes dargestellt; und zwar wird mit Rücksicht auf den Begriff der Ergänzung (vgl. S. 6 und 16) jene Stellungsstrecke $= \left\{\begin{matrix}+e_\nu \text{ oder}\\ -e_\nu\end{matrix}\right\}$, je nachdem von der Seite aus gesehen, nach welcher e_ν läuft, dT

$\left\{\begin{array}{l}\text{in demselben oder} \\ \text{in entgegengesetztem}\end{array}\right\}$ Sinne umlaufen wird wie dO. Wir bekommen somit für den absoluten Wert der Gröſse $d\mathbf{T}$ den folgenden Ausdruck:

151) Der absolute Wert von $d\mathbf{T}$ ist $=\left[\pm e_\nu \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]$,

wo die Wahl des Vorzeichens nach dem soeben angegebenen Kriterium zu treffen ist. Da nun aber diese Zeichenregel mit der oben für das Vorzeichen von $d\mathbf{T}$ gegebenen durchaus übereinstimmt, so muſs sich die Gröſse $d\mathbf{T}$ (mit Vorzeichen) aus dem Ausdruck 151) einfach dadurch gewinnen lassen, daſs wir in diesem das doppelte Vorzeichen unterdrücken; denn dann wird wirklich $d\mathbf{T}$ positiv, wenn von der Seite ausgesehen, nach welcher e_ν läuft, dT in demselben Sinne umlaufen wird wie dO, im entgegengesetzten Falle aber negativ. Wir erhalten somit für $d\mathbf{T}$ die folgende auch dem Zeichen nach gültige Schluſsformel:

152) . . . . $$d\mathbf{T}=\left[e_\nu \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] d\vartheta d\omega.$$

Führen wir schlieſslich noch die gefundenen Ausdrücke 150) und 152) in die Gleichung 147) ein, so erhalten wir für das Krümmungsmaſs der Fläche den folgenden zweiten Wert:

153) . . . . $$\varkappa=\frac{\left[e_\nu \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]}{\sqrt{n^2}},$$

aus welchem durch Erweiterung mit $\sqrt{n^2}$ noch die Nebenform entspringt

154) . . . . $$\varkappa=\frac{\left[n \dfrac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\dfrac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]}{n^2}.$$

Übrigens können wir diesen Ausdrücken 153) und 154) sofort noch einen dritten Wert des Krümmungsmaſses an die Seite stellen, in welchem auch in den Differenzialquotienten des Zählers anstelle der Neigung e_ν der Flächennormale die Normalenstrecke n selbst auftritt. Bezeichnen wir der Kürze halber den reziproken Wert der Länge von n mit λ, d. h. setzen wir

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{n_{(\vartheta,\,\omega)}{}^2}},$$

so daſs also λ einen von ϑ und ω abhängenden Zahlwert darstellt, so wird

$$e_\nu=\lambda n, \text{ folglich}$$
$$\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}=\lambda\frac{\partial n}{\partial \vartheta}+\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta}n$$
$$\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}=\lambda\frac{\partial n}{\partial \omega}+\frac{\partial \lambda}{\partial \omega}n.$$

Der Zähler unserer Formel 154) nimmt somit die Form an

$$\left[n\,\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\right]=\lambda^2\left[n\,\frac{\partial n}{\partial\vartheta}\frac{\partial n}{\partial\omega}\right]$$

$$=\frac{\left[n\,\frac{\partial n}{\partial\vartheta}\frac{\partial n}{\partial\omega}\right]}{n^{\underline{2}}},$$

und für das Krümmungsmaſs ergiebt sich daher der folgende dritte Wert:

155) . . . . $\varkappa=\frac{\left[n\,\frac{\partial n}{\partial\vartheta}\frac{\partial n}{\partial\omega}\right]}{(n^{\underline{2}})^2}$

Eine weitere Umformung des Ausdrucks 154) erhalten wir, wenn wir im Zähler für n seinen Wert $\left|\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]\right.$ einführen, wodurch jener Ausdruck übergeht in

$$\varkappa=\frac{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]}{n^{\underline{2}}}$$

d. h. nach unserm dritten Hauptsatz (vgl. S. 33) in:

$$\varkappa=\frac{1}{n^{\underline{2}}}\begin{vmatrix}\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] & \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right]\\ \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] & \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]\end{vmatrix}$$

oder mit Rücksicht auf 146)

$$=\frac{1}{n^{\underline{2}}}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{n^{\underline{2}}}}D & -\frac{1}{\sqrt{n^{\underline{2}}}}D'\\ -\frac{1}{\sqrt{n^{\underline{2}}}}D' & -\frac{1}{\sqrt{n^{\underline{2}}}}D''\end{vmatrix}$$

Es ergiebt sich also für das Krümmungsmaſs der vierte Wert

156) . . . . $\varkappa=\frac{DD''-D'^2}{(n^{\underline{2}})^2}.$

In diesem Ausdruck 156) nun läſst sich wieder der Nenner leicht durch die Gröſsen E, F, G ausdrücken. Denn es ist (vgl. Formel 39)

$$n^{\underline{2}}=\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]^{\underline{2}},$$

wofür wir zufolge der Formel 37) auch schreiben können

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^{\underline{2}}\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^{\underline{2}}-\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]^2$$

oder mit Rücksicht auf unsere Bezeichnungen 123)

157) . . . . $n^{\underline{2}}=EG-F^2$

Der Nenner des Wertes 155) wird daher

$$(n^{\underline{2}})^2=(EG-F^2)^2.$$

Aber auch der Zähler unseres Ausdruckes 156) läſst eine Umformung zu, vermöge deren er sich in eine Funktion der 3 Gröſsen E, F, G und ihrer Differenzialquotienten verwandelt, eine Umformung, welche uns zu einer wichtigen Eigenschaft des Krümmungsmaſses führen wird. Wir rechnen, um jene Umwandlung zu erhalten, die Produkte DD'' und D'^2 wirklich aus. Es ist

$$DD'' = \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\;\frac{\partial x}{\partial\omega}\;\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\right]\cdot\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\;\frac{\partial x}{\partial\omega}\;\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right],$$

und dieses Produkt wird nach dem Multiplikationssatz der äuſseren Produkte (vgl. S. 32)

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 & \left[\frac{\partial x}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] & \left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right] & \left[\frac{\partial x}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right] & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right] \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2}{\partial\vartheta} \\ F & G & \frac{\partial\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]}{\partial\vartheta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right]}{\partial\omega} - \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2}{\partial\vartheta} & \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2}{\partial\omega} & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right] \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\vartheta} \\ F & G & \frac{\partial F}{\partial\vartheta} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\omega} \\ \frac{\partial F}{\partial\omega} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\vartheta} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\omega} & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right] \end{vmatrix}$$

Hiermit ist das Produkt DD'' abgesehen von dem letzten Elemente der Determinante in der That bereits als Funktion der Gröſsen E, F, G und ihrer Differenzialquotienten dargestellt. Eine entsprechende Entwickelung ergiebt sich aber auch für das Quadrat von D', denn es wird

$$D'^2 = \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\;\frac{\partial x}{\partial\omega}\;\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right]\cdot\left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\;\frac{\partial x}{\partial\omega}\;\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)^2 & \left[\frac{\partial x}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] & \left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2 & \left[\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial\omega}\right] \\ \left[\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right] & \left[\frac{\partial x}{\partial\omega}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right] & \left(\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial\omega}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \omega} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \omega} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \vartheta} & \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Es ist somit auch hier abgesehen vom letzten Element überall die Einführung der Gröfsen E, F, G gelungen. Bilden wir daher jetzt die Differenz $DD'' - D'^2$, so erhalten wir eine grofse Anzahl von Gliedern, welche nur von den Gröfsen E, F, G und deren Differenzialquotienten abhängen, aufserdem aber noch das folgende Produkt:

$$158) \quad \ldots\ldots \quad (EG - F^2)\left\{\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}\right] - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega}\right)^2\right\},$$

und es kommt mithin nur noch darauf an, den zweiten Faktor dieses Produktes durch E, F, G auszudrücken. Es ist

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \frac{\partial\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]}{\partial \vartheta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}{\partial \omega}.$$

Diese Gleichung differenzieren wir, um $\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}\right]$ zu erhalten, nach ω, wodurch sich ergiebt

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}\right] + \left[\frac{\partial^3 x}{\partial \vartheta^2 \partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \frac{\partial^2\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]}{\partial \vartheta \partial \omega} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2}{\partial \omega^2}.$$

Es ist ferner

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}{\partial \vartheta},$$

woraus durch Differenziation nach ϑ folgt

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega}\right)^2 + \left[\frac{\partial^3 x}{\partial \vartheta^2 \partial \omega}\middle|\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}{\partial \vartheta^2}.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung endlich von der Drittletzten, so ergiebt sich uns für den gesuchten zweiten Faktor des Produktes 158) der Ausdruck

$$\left[\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta^2}\middle|\frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2}\right] - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \vartheta \partial \omega}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta \partial \omega} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \omega^2},$$

welcher in der That der oben gestellten Forderung entspricht. Schliefslich erhalten wir für das Krümmungsmafs $\varkappa$ den folgenden f ü n f t e n, allein von E, F, G und deren Differenzialquotienten abhängenden W e r t

$$159)\quad \varkappa = \frac{1}{4(EG-F^2)^2}\left\{\begin{array}{l} E\left(\frac{\partial E}{\partial\omega}\frac{\partial G}{\partial\omega} - 2\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial G}{\partial\omega} + \left(\frac{\partial G}{\partial\vartheta}\right)^2\right) \\ + F\left(\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\frac{\partial G}{\partial\omega} - \frac{\partial E}{\partial\omega}\frac{\partial G}{\partial\vartheta} - 2\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial G}{\partial\vartheta} - 2\frac{\partial E}{\partial\omega}\frac{\partial F}{\partial\omega} + 4\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial F}{\partial\omega}\right) \\ + G\left(\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\frac{\partial G}{\partial\vartheta} - 2\frac{\partial E}{\partial\vartheta}\frac{\partial F}{\partial\omega} + \left(\frac{\partial E}{\partial\omega}\right)^2\right) \\ - 2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\vartheta^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial\vartheta\partial\omega} + \frac{\partial^2 E}{\partial\omega^2}\right) \end{array}\right]$$

Die oben gekennzeichnete und durch die Formel 159) ausgedrückte analytische Eigenschaft des Krümmungsmaſses hat nun auch eine wichtige geometrische Bedeutung. Auf diese werden wir geführt, wenn wir bemerken, daſs auch der Ausdruck für das Bogenelement der Fläche (vgl. die Formel 134, bei welcher wir jetzt nur den Index λ unterdrücken)

$$160)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots ds = \sqrt{Ed\vartheta^2 + 2Fd\vartheta d\omega + Gd\omega^2}$$

auſser von den Differentialen $d\vartheta$ und $d\omega$ nur von den Gröſsen $E,\ F,\ G$ abhängt. Um die Bedeutung dieser Thatsache zu übersehen, denken wir uns zwei Flächen gegeben $x = x_{(\vartheta,\omega)}$ und $x_1 = x_{1(\vartheta,\omega)}$ und auf beiden diejenigen Punkte einander zugeordnet, welche denselben Werten von ϑ und ω zugehören. Dann wird das Bogenelement ds_1 der zweiten Fläche, welches dargestellt sein wird durch die Formel

$$161)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots ds_1 = \sqrt{E_1 d\vartheta^2 + 2F_1 d\vartheta d\omega + G_1 d\omega^2},$$

im allgemeinen von dem korrespondierenden Bogenelemente 160) der ersten Fläche verschieden sein. Setzen wir aber von der zweiten Fläche voraus, ihre Gleichung sei nicht vollkommen willkürlich, sondern habe die Eigenschaft, daſs die ihr zugehörigen Gröſsen $E_1,\ F_1,\ G_1$ mit den entsprechenden Gröſsen $E,\ F,\ G$ der ersten Fläche für je zwei korrespondierende Punkte beider Flächen einander gleich sind, so wird auch $ds_1 = ds$ werden. Und da diese Beziehung für je zwei entsprechende Bogenelemente gültig ist, so wird sich die zweite Fläche so verbiegen lassen müssen, daſs jeder von ihren Punkten auf den entsprechenden Punkt der ersten Fläche zu liegen kommt, d. h. es wird, wie man zu sagen pflegt, die zweite Fläche sich auf der ersten „abwickeln" lassen. Wir haben somit als erstes Ergebnis unserer Betrachtung den Satz gewonnen:

Gelten für 2 Flächen $x = x_{(\vartheta,\omega)}$ und $x_1 = x_{1(\vartheta,\omega)}$ allgemein die Gleichungen

$$162)\quad \ldots\quad E_{(\vartheta,\omega)} = E_{1(\vartheta,\omega)},\ F_{(\vartheta,\omega)} = F_{1(\vartheta,\omega)},\ G_{(\vartheta,\omega)} = G_{1(\vartheta,\omega)}$$

so sind die beiden Flächen aufeinander abwickelbar.

Wir können aber zweitens auch die Umkehrung dieses Satzes, d. h. den Satz beweisen:

Läſst sich von 2 Flächen $x = x_{(\vartheta,\omega)}$ und $x_1 = x_{1(\vartheta,\omega)}$ die eine aus der andern durch bloſse Biegung erzeugen, derart daſs bei dieser Verbiegung je zwei Punkte aufeinander fallen, welche gleichen Werten von ϑ und ω zugehören, so bestehen für diese Flächen die drei Gleichungen

$$162)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots E = E_1,\ F = F_1,\ G = G_1.$$

Denn da in dem angegebenen Falle für jeden Wert von ϑ und ω und für beliebige Zuwüchse $d\vartheta$ und $d\omega$ $\qquad ds = ds_1$ oder mit Rücksicht auf 160) und 161)

$$Ed\vartheta^2 + 2Fd\vartheta d\omega + Gd\omega^2 = E_1 d\vartheta^2 + 2F_1 d\vartheta d\omega + G_1 d\omega^2$$

ist, so mufs wegen der völligen Willkürlichkeit der Zuwüchse $d\vartheta$ und $d\omega$ für jeden Wert von ϑ und ω einzeln

$$162) \quad . \quad . \quad . \quad E = E_1, \; F = F_1, \; G = G_1$$

sein, ein Ergebnis, welches wir auch aussprechen können in der Form „Bei der Verbiegung einer Fläche ändern die 3 Funktionen E, F, G ihren Wert nicht.“ Und damit ist bewiesen, dafs die Gleichheit der 3 Funktionen E, F, G für die Abwickelbarkeit zweier Flächen aufeinander nicht nur die hinreichende sondern auch die notwendige Bedingung ist.

Nach der Formel 159) nun hängt der Wert des Krümmungsmafses einer Fläche allein von den Gröfsen E, F, G und deren Differenzialquotienten ab. Sind daher wieder 2 Flächen gegeben, für welche jene Gröfsen gleiche Werte besitzen — und dies ist nach unserm soeben bewiesenen Satze bei 2 aufeinander abwickelbaren Flächen stets der Fall — so besitzen beide in je zwei entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmafs; und wir können daher den Satz aussprechen:

Durch Verbiegung einer Fläche ändert sich ihr Krümmungsmafs nicht.

Diejenigen Flächen, welche sich durch Verbiegung einer Ebene erzeugen lassen, nennt man schlechtweg abwickelbare Flächen. Da nun für eine Ebene das Krümmungsmafs $= 0$ ist, — denn in dem Bruche $\frac{d\mathrm{T}}{dS}$ verschwindet seiner Bedeutung zufolge der Zähler $d\mathrm{T}$ — so wird für alle abwickelbaren Flächen das Krümmungsmafs $= 0$.

Achter Abschnitt.

Ebene Schnitte einer Fläche: Normalschnitte, schiefe Schnitte, Hauptschnitte. Beziehung zum Krümmungsmafs.

Wir wenden uns nunmehr zur Untersuchung des Zusammenhanges, welcher zwischen dem Krümmungsmafs einer Fläche und den Krümmungen der durch dieselbe gelegten ebenen Schnitte besteht und betrachten zunächst die durch einen Punkt der Fläche gelegten Normalschnitte. Es sei in einem beliebigen Punkte $x = x_{(\vartheta, \omega)}$ die Normale $n = \left| \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \; \frac{\partial x}{\partial \omega} \right] \right.$ errichtet, und sei durch diese Normale eine beliebige Ebene hindurchgelegt, welche die Fläche in einer Kurve schneiden möge. Die Gleichung dieser Kurve wollen wir, um im Folgenden möglichst einfache Formeln zu erhalten, in der Form

$$163) \quad . \quad . \quad . \quad x = x_{(s)}$$

voraussetzen, in welcher s die Länge des von einem festen Punkte der Kurve aus gerechneten Bogens bezeichnet. Dann werden wir für die Krümmung dieser Kurve unmittelbar die Ausdrücke verwenden dürfen, welche wir im ersten Teil dieser Abhandlung auf S. 11 und 12 für die Krümmung einer Raumkurve entwickelt haben. Nur in einer Beziehung wollen wir von den dort abgeleiteten Formeln abweichen.

Bei der Betrachtung der Krümmungen in den verschiedenen Punkten einer einzigen Raumkurve nämlich ergab sich uns nirgends ein dualistischer Gegensatz, welcher uns genötigt hätte, bei diesen Krümmungen eine Scheidung nach dem Vorzeichen vorzunehmen, d. h. neben positiven auch negative Krümmungen einzuführen, sondern wir setzten die Krümmung einfach gleich dem reciproken Wert des Krümmungsradius oder, was auf dasselbe hinauskommt, gleich der absolut genommenen Länge der Krümmungsstrecke x''. Anders wird dies, wenn wir zu den Krümmungen der verschiedenen Normalschnitte in einem Punkte einer krummen Fläche übergehen. Hier ist es offenbar möglich, daſs unter den Krümmungsstrecken der verschiedenen Normalschnitte die einen nach der einen, die andern nach der anderen Seite der Fläche laufen, und es empfiehlt sich daher, diese Verschiedenheit in dem Lauf der Krümmungsstrecken der Normalschnitte durch ungleiche Vorzeichen der Krümmungen selbst zum Ausdruck zu bringen. Um eine solche Verfügung über das Vorzeichen der Krümmung in bequemer Weise treffen zu können, bezeichnen wir die Neigung der oben definierten Flächennormale n wie bisher mit e_ν und im Gegensatz dazu die Neigung der Krümmungsstrecke x'' des gerade betrachteten Normalschnitts $x = x_{(s)}$ mit e_λ und setzen fest, es solle die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ des Normalschnitts $x = x_{(s)}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv oder}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ gewählt werden, je nachdem die Krümmungsstrecke x'' mit der Normalenstrecke n $\left\{\begin{matrix}\text{gleich oder}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ gerichtet ist, d. h. je nachdem

164) . . . . $e_\lambda = \pm e_\nu$ ist.

Diese Vorschrift über das Vorzeichen der Krümmung des Normalschnitts läſst sich in dem Ausdruck für die Krümmung am leichtesten zur Geltung bringen, wenn man die Krümmung des Normalschnitts auf Grund der Formel 111) zu ermitteln sucht, nach welcher die Länge der Krümmungsstrecke x'' oder, was dasselbe ist, der absolute Wert der Krümmung gefunden wird, indem man die Krümmungsstrecke x'' mit ihrer Neigung e_λ innerlich multipliziert. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\text{der absolute Wert der Krümmung} = [e_\lambda | x''],$$

und die oben definierte Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ wird somit ausgedrückt durch die Formel

165) . . . . $\frac{1}{\varrho} = \pm [e_\lambda | x''],$

in welcher das Vorzeichen so zu wählen ist, daſs es mit dem der Gleichung 164) übereinstimmt. Setzen wir also den Wert von e_λ aus der Gleichung 164) in die Formel 165) ein, so verschwindet das Doppelzeichen, und wir erhalten die einfache Gleichung

166) . . . . $\frac{1}{\varrho} = [e_\nu | x''],$

welche wir mit Rüchsicht auf 143) auch ersetzen können durch die andere

167) . . . . $\frac{1}{\varrho} = -[e_\nu' | x'],$

in der die Strecke e_ν' unserer bisherigen Bezeichnung entsprechend den nach s genommenen Differenzialquotienten von e_ν bedeutet.

Die gewonnenen Formeln ermöglichen es uns bereits, einen wichtigen Satz über die Beziehung aufzustellen, welche zwischen der Krümmung eines schief durch die Fläche gelegten Schnittes und der Krümmung des durch dieselbe Tangente der Fläche gehenden Normalschnitts besteht. Bezeichnen wir für einen solchen schiefen Schnitt die den Strecken x' und x''

entsprechenden Differenzialquotienten zur Unterscheidung für den Augenblick mit $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{d^2x}{ds^2}$ und die Neigung von $\frac{d^2x}{ds^2}$ mit e_μ, wo dann übrigens zufolge der oben gemachten Voraussetzung über die Lage beider Schnitte zu einander $\frac{dx}{ds} = x'$ wird, und setzen betreffs des Vorzeichens der Krümmung $\frac{1}{r}$ eines solchen schiefen Schnittes in Übereinstimmung mit dem obigen fest, daſs dieselbe $\left\{\begin{matrix}\text{positiv oder}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ zu nehmen sei, je nachdem die Projektion von e_μ auf e_ν mit e_ν $\left\{\begin{matrix}\text{gleich oder}\\ \text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ gerichtet ist, d. h. je nachdem das Produkt $[e_\mu|e_\nu]$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv oder}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, so wird die Länge der Krümmungsstrecke $\frac{d^2x}{ds^2}$, d. h.

der absolute Wert der Krümmung des schiefen Schnitts $= \pm \frac{1}{r}$, je nachdem

$$168) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [e_\mu|e_\nu] \left\{\begin{matrix}\text{positiv oder}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\} \text{ ist,}$$

und es besteht daher die Gleichung

$$169) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \pm \frac{1}{r} e_\mu,$$

in welcher wieder das Vorzeichen von der Bedingung 168) abhängt. Um nun aus dieser Formel 169) eine Beziehung zur Krümmung des unserem Schnitte zugehörigen Normalschnitts abzuleiten, multiplizieren wir die Gleichung 169) innerlich mit e_ν, wodurch wir auf der linken Seite bereits einen Ausdruck erhalten, welcher dem Werte 166) für die Normalschnittskrümmung ähnlich ist. Es ergiebt sich nämlich die Gleichung

$$170) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[e_\nu \middle| \frac{d^2x}{ds^2}\right] = \pm \frac{1}{r} [e_\mu|e_\nu],$$

deren Vorzeichen immer noch an die Bedingung 168) geknüpft ist. Dieser Bedingung zufolge ist aber der Ausdruck $\pm [e_\mu|e_\nu]$ auf der rechten Seite der Gleichung 170) eine unter allen Umständen positive Gröſse, nämlich gleich dem Cosinus des spitzen Neigungswinkels χ, welcher von dem schiefen Schnitt und dem dazugehörigen Normalschnitt gebildet wird; andererseits aber können wir die linke Seite der Gleichung 170) mit Hülfe der Formel 143) umgestalten und erhalten dadurch die neue Gleichung

$$171) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\left[\frac{de_\nu}{ds} \middle| \frac{dx}{ds}\right] = \frac{1}{r} \cos\chi.$$

Da nun aber die Kurve des schiefen Schnittes die Kurve des dazugehörigen Normalschnitts im Punkte x berühren soll, mit ihr also auſser dem Punkte x auch noch den Nachbarpunkt $x_1 = x + dx$ gemein haben muſs, so wird nicht nur, wie schon oben erwähnt,

$$\frac{dx}{ds} = x'$$

sondern auch

$$\frac{de_\nu}{ds} = e_\nu'$$

sein müssen, und unsere Formel 171) geht daher über in:

$$-[e_\nu{}' \mid x'] = \frac{1}{r} \cos\chi$$

oder mit Rücksicht auf 167) in: $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} \cos\chi$

d. h. wir erhalten die Formel

172) . . . . $\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\cos\chi}$,

welche den von **Meusnier** gefundenen Satz enthält:

Man findet die Krümmung eines beliebigen schiefen Schnitts einer Fläche, indem man die Krümmung des dazugehörigen Normalschnitts mit dem Cosinus des zwischen beiden Schnitten liegenden spitzen Neigungswinkels dividiert.

Durch diesen Satz ist die Krümmung schiefer Schnitte auf die Krümmung der Normalschnitte zurückgeführt und wir brauchen uns somit im folgenden nur noch mit diesen zu beschäftigen. Wir stellen uns daher jetzt die Aufgabe, zu untersuchen, in welcher Weise die Krümmung der verschiedenen Normalschnitte variiert, welche sich durch einen beliebigen Punkt einer Fläche hindurchlegen lassen, und bestimmen zu dem Zwecke zunächst die Lage derjenigen Normalschnitte, für welche die Krümmung ihren gröfsten und ihren kleinsten Wert annimmt. Diese Schnitte wollen wir die **Hauptschnitte** des betrachteten Punktes nennen.

Die Bedingung, welcher ein Normalschnitt genügen mufs, damit er ein Hauptschnitt der Fläche sei, wird sich uns ergeben, wenn wir die Variation der durch die Formel

167) . . . . $\frac{1}{\varrho} = -[e_\nu{}' \mid x']$

bestimmten Krümmung des Normalschnitts $= 0$ setzen, wobei wir uns den Normalschnitt unendlich wenig um die durch ihn hindurchgehende Flächennormale gedreht zu denken haben. Dadurch gewinnen wir die Gleichung

173) . . . . $[\delta e_\nu{}' \mid x'] + [e_\nu{}' \mid \delta x'] = 0.$

Da nun aber jene Drehung um die Axe e_ν erfolgt, so wird $\delta e_\nu = 0$, folglich auch $\delta e_\nu{}' = (\delta e_\nu)' = 0$. Unsere Gleichung 173) reduziert sich also auf die einfachere Bedingungsgleichung

174) . . . . $[e_\nu{}' \mid \delta x'] = 0,$

in welcher nur noch $\delta x'$ zu bestimmen bleibt. Zunächst läfst sich die Richtung von $\delta x'$ leicht ermitteln, denn durch Variation der Formeln

175) . . . . . $x'^{\underline{2}} = 1$ und 176) . . . . . $[e_\nu \mid x'] = 0$

ergeben sich ohne weiteres für $\delta x'$ die Gleichungen

$$[x' \mid \delta x'] = 0 \quad \text{und} \qquad [e_\nu \mid \delta x'] = 0,$$

welche aussagen, dafs der gesuchte Zuwachs $\delta x'$ auf x' und e_ν senkrecht steht; seine Neigung mufs daher durch die Strecke $\mid [x' e_\nu]$ dargestellt sein, während seine Länge offenbar durch den Drehungswinkel $\delta\varphi$ ausgedrückt wird. Wir erhalten also für unsern Zuwachs $\delta x'$ den Wert

$$\delta x' = \delta\varphi \mid [x' e_\nu]$$

und setzen wir diesen Ausdruck in unsere Gleichung 174) ein, so ergiebt sich die folgende **erste Form der Hauptschnittsgleichung**

177) . . . . $[e_\nu{}' x' e_\nu] = 0,$

deren geometrische Bedeutung sich ohne Mühe ablesen läſst. Geben wir nämlich unserer Gleichung 177) die Gestalt

$$178) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [(e_\nu + de_\nu)\, dx\, e_\nu] = 0,$$

so sagt dieselbe aus, daſs die Flächennormale des Punktes x und die Flächennormale des Nachbarpunktes $x + dx$ unseres Hauptschnittes mit dem Linienelement dx in einer Ebene liegen und sich also gegenseitig schneiden. Damit haben wir die Grundeigenschaft der Hauptschnitte gefunden. Sie ist enthalten in dem Satz:

Die Hauptschnitte eines Punktes einer Fläche sind dadurch ausgezeichnet, daſs die Flächennormale des betrachteten Punktes von der im Nachbarpunkte des Hauptschnitts errichteten Flächennormale geschnitten wird.

Übrigens können wir unsere Gleichung 177) noch etwas weiter vereinfachen. Zufolge der Gleichungen 142) und 176) stehen nämlich die beiden ersten Strecken e_ν' und x' des Produktes 177) auf der dritten Strecke e_ν senkrecht, was mit der Gleichung 177) nicht anders vereinbar ist, als wenn auch schon das Produkt der beiden ersten Faktoren verschwindet, d. h. wenn auch

$$179) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [e_\nu' x'] = 0$$

ist. Diese Gleichung aber sagt aus, daſs e_ν' ein Vielfaches von x' sein muſs, also etwa

$$e_\nu' = \sigma \cdot x',$$

wofür wir auch schreiben können

$$de_\nu = \sigma \cdot dx.$$

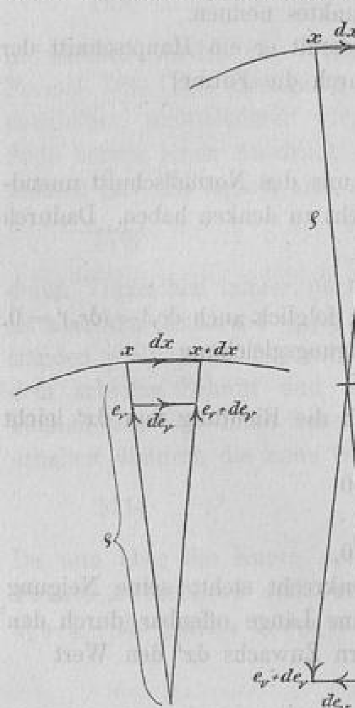


Fig. 31 b. Fig. 31 a.

Die geometrische Bedeutung des hier auftretenden Zahlfaktors σ ergiebt sich sofort, wenn wir die Strecke de_ν konstruktiv darstellen. Wir errichten zu dem Zwecke in den Punkten x und $x + dx$ die Flächennormalen und tragen auf denselben von ihrem Schnittpunkte, dem Krümmungsmittelpunkte des betrachteten Hauptschnitts, aus die Neigungsstrecken e_ν und $e_\nu + de_\nu$ ab; dann ist die Strecke vom Endpunkt der ersten bis zum Endpunkt der zweiten Strecke die gesuchte Strecke de_ν. Dabei ergeben sich nun zwei Möglichkeiten. Erstens kann die Neigung e_ν der Flächennormale mit der Neigung der Hauptnormale des Hauptschnitts übereinstimmen (Fig. 31 a). In diesem Falle ist de_ν entgegengesetzt gerichtet mit dx und der Krümmungsradius ϱ unserer obigen Festsetzung zufolge (vgl. S. 51) positiv zu nehmen, so daſs sich aus den entstandenen ähnlichen Dreiecken als zweite Form der Hauptschnittsgleichung die Formel ergiebt

$$180) \quad . \; . \quad de_\nu = -\frac{1}{\varrho}\, dx.$$

In dem zweiten Falle, in welchem die Neigungen der beiden Normalen entgegengesetzt sind (Fig. 31 b), ist zwar de_ν mit dx gleichgerichtet, dafür aber ϱ nach unserer Zeichenregel auf S. 51 negativ zu wählen. Wir erhalten daher auch hier dieselbe Formel wie in dem ersten Falle.

Die Gleichung 180) kann dazu dienen, die Werte der Krümmungen für die Hauptschnitte, die Anzahl der Hauptschnitte und ihre Lage gegeneinander zu bestimmen. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichung 180) in der Form

$$\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega} d\omega = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \omega} d\omega\right)$$

oder

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\right) d\vartheta + \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right) d\omega = 0,$$

in welcher sie aussagt, dafs die beiden in Klammern eingeschlossenen Strecken einander parallel laufen, woraus wieder folgt, dafs ihr äufseres Produkt verschwinden mufs. Es ergiebt sich somit die neue Gleichung

$$181) \quad \left[\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\right)\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right)\right] = 0$$

oder ausgerechnet

$$|\, n\frac{1}{\varrho^2} + \left\{\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]\right\}\frac{1}{\varrho} + \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0.$$

Aus dieser Feldgleichung bilden wir eine Zahlgleichung, indem wir sie mit der Strecke $n = \left|\left[\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right]\right.$ äufserlich multiplizieren, wodurch wir erhalten

$$182) \quad n^2\frac{1}{\varrho^2} + \left\{\left[n\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[n\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]\right\}\frac{1}{\varrho} + \left[n\frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta}\frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right] = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung zeigt uns, dafs jedem Punkte x der Fläche zwei Hauptschnitte zugehören, deren Krümmungen sich aus der Gleichung 182) bestimmen lassen, und von denen die eine den gröfsten, die andere den kleinsten Wert der Normalschnittskrümmung darstellen wird. Bezeichnen wir die Krümmungsradien dieser beiden Hauptschnitte mit ϱ_1 und ϱ_2 und nennen dieselben die Hauptkrümmungsradien des Punktes x, so ergeben sich uns ihre reciproken Werte $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ — sie mögen die Hauptkrümmungen des Punktes x heifsen — als die Wurzeln der Gleichung 182), und wir dürfen dieselben daher fortan wie durchaus bekannte Gröfsen behandeln.

Unsere Hauptschnittsgleichung 180) kann aber weiter auch dazu verwendet werden, uns über die Lage der beiden Hauptschnitte gegeneinander Aufschlufs zu verschaffen. Bezeichnen wir die Bögen der beiden Hauptschnitte mit s_1 und s_2 und stellen die Hauptschnittsgleichung 180) für jeden einzelnen der beiden Hauptschnitte auf, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$183) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial e_\nu}{\partial s_1} = -\dfrac{1}{\varrho_1}\dfrac{\partial x}{\partial s_1} \quad \text{und} \\ \dfrac{\partial e_\nu}{\partial s_2} = -\dfrac{1}{\varrho_2}\dfrac{\partial x}{\partial s_2}. \end{cases}$$

Nun müssen aber die beiden partiellen Differenzialquotienten $\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial e_\nu}{\partial s_2}$ der oben entwickelten Gleichung 145) Genüge leisten, welche, auf die beiden Hauptschnittskurven angewandt, die Form annimmt

$$184) \quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right] = \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_2}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_1}\right].$$

Führen wir in diese Gleichung 184) die Werte 183) ein, so geht dieselbe über in die neue Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial x}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right]=\frac{1}{\varrho_2}\left[\frac{\partial x}{\partial s_2}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_1}\right],$$

für welche wir auch schreiben können

$$185)\quad \ldots\ldots\ldots \left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\left[\frac{\partial x}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right]=0,$$

eine Gleichung, welche aussagt, daſs, wenn nicht gerade die beiden Hauptkrümmungen — und somit sämtliche Normalschnittskrümmungen des Punktes x — einander gleich sind,

$$186)\quad \ldots\ldots\ldots \left[\frac{\partial x}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right]=0$$

sein muſs. Darin aber liegt der Satz:

Die beiden Hauptschnitte stehen (von gewissen Ausnahmefällen abgesehen) aufeinander senkrecht.

Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis nun wird es leicht, auch die Krümmung eines beliebigen Normalschnitts durch die beiden Hauptkrümmungen auszudrücken. Wir bezeichnen den Bogen dieses beliebigen Normalschnitts mit s_α, seinen Krümmungsradius mit ϱ_α, dann wird nach Formel 167)

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=-\left[\frac{de_\nu}{ds_\alpha}\middle|\frac{dx}{ds_\alpha}\right],$$

wofür wir, da es gilt, die Beziehung zu den Hauptschnitten herzustellen, hier schreiben wollen

$$187)\quad \ldots\; \frac{1}{\varrho_\alpha}=-\left[\left(\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds_\alpha}+\frac{\partial e_\nu}{\partial s_2}\frac{ds_2}{ds_\alpha}\right)\middle|\left(\frac{\partial x}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds_\alpha}+\frac{\partial x}{\partial s_2}\frac{ds_2}{ds_\alpha}\right)\right].$$

Von den vier bei Ausführung der inneren Multiplikation auf der rechten Seite dieser Gleichung entstehenden Produkten aber müssen zwei infolge der Gleichungen 186) und 183) verschwinden; es wird nämlich

$$188)\quad \ldots\ldots \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right]=0 \quad\text{und}\quad \left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_2}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_1}\right]=0$$

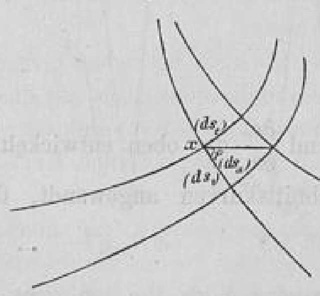
und es verwandelt sich daher die Gleichung 187) in:

$$\frac{1}{\varrho_\alpha}=-\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_1}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_1}\right]\left(\frac{ds_1}{ds_\alpha}\right)^2-\left[\frac{\partial e_\nu}{\partial s_2}\middle|\frac{\partial x}{\partial s_2}\right]\left(\frac{ds_2}{ds_\alpha}\right)^2$$

oder bei Berücksichtigung der Gleichung 167) in:

$$189)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{ds_1}{ds_\alpha}\right)^2+\frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{ds_2}{ds_\alpha}\right)^2.$$

Fig. 32.



Beachten wir endlich noch, daſs sich die beiden Kurven s_1 und s_2 rechtwinklig durchschneiden, und bezeichnen wir den Winkel, welchen die Kurve s_α mit der Kurve s_1 einschlieſst, mit φ (vgl. Fig. 32), so wird $\frac{ds_1}{ds_\alpha}=\cos\varphi$ und $\frac{ds_2}{ds_\alpha}=\sin\varphi$, und wir erhalten daher anstelle der Formel 189) die folgende von **Euler** herrührende Gleichung

$$190)\quad \ldots\; \frac{1}{\varrho_\alpha}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\varphi,$$

durch welche die oben gestellte Aufgabe, die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes durch die Hauptkrümmungen auszudrücken, in einfacher Weise gelöst ist.

Aus der Eulerschen Gleichung 190) lassen sich leicht noch weitere Folgerungen ziehen. Ist s_β der Bogen eines neuen Normalschnitts, dessen Ebene auf der Ebene des Normalschnitts s_α senkrecht steht, und ist ϱ_β der dazu gehörige Krümmungsradius, so wird entsprechend der Gleichung 190)

$$191) \quad \frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{1}{\varrho_1} \sin^2\varphi + \frac{1}{\varrho_2} \cos^2\varphi,$$

und es ergiebt sich somit durch Addition der Formeln 190) und 191) die neue Gleichung

$$192) \quad \frac{1}{\varrho_\alpha} + \frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2},$$

welche den Satz enthält:

Die Summe der Krümmungen zweier zu einander senkrechten Normalschnitte ist für jeden Punkt der Fläche konstant, nämlich gleich der Summe der beiden Hauptkrümmungen.

Die in dem letzten Satze auftretende Summe der beiden Hauptkrümmungen läfst sich übrigens aus der Gleichung 182) ohne weiteres ablesen; wir finden:

$$193) \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\left[n \, \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \, \frac{\partial x}{\partial \omega}\right] + \left[n \, \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \, \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]}{n^2}.$$

Aus derselben Gleichung entnehmen wir noch für das Produkt der Hauptkrümmungen des Punktes x den Wert

$$194) \quad \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\left[n \, \frac{\partial e_\nu}{\partial \vartheta} \, \frac{\partial e_\nu}{\partial \omega}\right]}{n^2},$$

d. h. wir erhalten für dieses Produkt denselben Ausdruck, der sich uns oben (vgl. Formel 154) für das Krümmungsmafs der Fläche im Punkte x ergeben hat. Es liefert uns daher die Formel 194) den folgenden sechsten Wert für das Krümmungsmafs der Fläche

$$195) \quad \varkappa = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2}$$

und damit den Satz:

Das Krümmungsmafs einer Fläche ist für jeden Punkt derselben gleich dem Produkt der beiden Hauptschnittskrümmungen dieses Punktes.

Dieser Satz erscheint zusammen mit der Eulerschen Gleichung 190) ganz besonders geeignet, um zu zeigen, dafs die Gröfse und insbesondere das Vorzeichen des Krümmungsmafses die Eigenart der Fläche in ihren einzelnen Punkten in vortrefflicher Weise kennzeichnet. Wir unterscheiden drei Arten der Flächenkrümmung. Erstens kann das Krümmungsmafs positiv, zweitens negativ und drittens gleich 0 sein.

Erstens. Ist das Krümmungsmafs in einem Punkte der Fläche positiv, so sind die beiden Hauptkrümmungen und somit zufolge der Gleichung 190) sämtliche Normalschnittskrümmungen von 0 verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Es laufen daher die Krümmungsstrecken dieser Normalschnitte sämtlich nach derselben Seite. Die Fläche liegt also wenigstens in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes ganz auf derselben Seite der Tangentialebene.

Zweitens. Ist das Krümmungsmafs in einem Punkte der Fläche negativ, so sind wieder die beiden Hauptkrümmungen von 0 verschieden, aber diesmal von entgegengesetztem Vorzeichen. Infolgedessen sind mit Rücksicht auf 190) die übrigen Normalschnittskrümmungen zum Teil positiv, zum Teil negativ. Die Grenzschnitte, in denen die Krümmung verschwindet, ergeben sich aus der Gleichung

$$196) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0 = \frac{1}{\varrho_1} \cos^2\varphi + \frac{1}{\varrho_2} \sin^2\varphi,$$

welche uns 2 Werte für den Winkel φ und damit 2 solche Grenzschnitte liefert, in denen der Übergang von der positiven Krümmung zur negativen und umgekehrt stattfindet. Die Krümmungsstrecken der Normalschnitte sind nach verschiedenen Seiten der Fläche gerichtet, und es liegen daher die Normalschnitte der Fläche zum Teil auf der einen, zum Teil auf der andern Seite der Tangentialebene, d. h. die Fläche wird von der Tangentialebene geschnitten.

Drittens. Ist das Krümmungsmafs in einem Punkte der Fläche gleich 0, so mufs mindestens eine der beiden Hauptkrümmungen verschwinden. Hat die andere Hauptkrümmung einen von 0 verschiedenen Wert, so sind zufolge der Gleichung 190) auch die Krümmungen aller übrigen Normalschnitte von 0 verschieden und haben dasselbe Vorzeichen. Dieser Fall wird uns später bei den abwickelbaren Flächen beschäftigen. Ist in einem Punkte der Fläche auch die zweite Hauptkrümmung gleich 0, so verschwinden überhaupt sämtliche Normalschnittskrümmungen, und die Fläche hat daher in dem betreffenden Punkte den Charakter einer Ebene.

(Schlufs folgt.)

Halle a/S., den 19. März 1888.

Hermann Grafsmann.

strecken dieser Normalschni … Die Fläche liegt also wenigstens
in der Nachbarschaft des b … Seite der Tangentialebene.

Zweitens. Ist das … der Fläche negativ, so sind
wieder die beiden Hauptkr … diesmal von entgegengesetztem
Vorzeichen. Infolgedessen … gen Normalschnittskrümmungen
zum Teil positiv, zum Teil … n die Krümmung verschwindet,
ergeben sich aus der Gleich …

196) . . . . .

welche uns 2 Werte für der … zschnitte liefert, in denen der
Übergang von der positive … gekehrt stattfindet. Die Krüm-
mungsstrecken der Normals … der Fläche gerichtet, und es
liegen daher die Normalsch … nen, zum Teil auf der andern
Seite der Tangentialebene, d … alebene geschnitten.

Drittens. Ist das … r Fläche gleich 0, so muſs
mindestens eine der beiden … t die andere Hauptkrümmung
einen von 0 verschiedenen … 190) auch die Krümmungen
aller übrigen Normalschnitte … Vorzeichen. Dieser Fall wird
uns später bei den abwickel … inem Punkte der Fläche auch
die zweite Hauptkrümmung … upt sämtliche Normalschnitts-
krümmungen, und die Fläch … te den Charakter einer Ebene.

Halle a/S., den 19. …

Hermann Graſsmann.