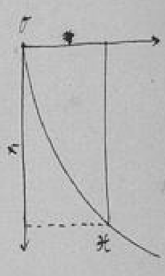
Die Behandlung des Problems:

„In einer Verticalebene sind zwei Punkte O und P gegeben, es soll diejenige die beiden Punkte verbindende Curve gefunden werden, auf welcher ein materieller Punkt, wenn er in O auf die Curve gelegt wird, den Bogen OP in derselben Zeit durchläuft, in welcher er die Gerade OP durchlaufen würde" führte zu dem Satze über die Bernoullische Lemniscate:

Ein materieller Punkt gebraucht zum Herabfallen auf der Lemniscate $r = a \, . \sqrt{\sin 2 \varphi}$, deren Axe unter einem Winkel von 45^0 gegen die Horizontale geneigt ist, vom Coordinaten-Anfangspunkt O bis zu irgend einem Punkte P der Lemniscate dieselbe Zeit, in welcher er von O bis P auf dem Leitstrahle OP fällt.

Es dürfte interessant erscheinen, diese merkwürdige Eigenschaft der Lemniscate zum Gegenstand einer Untersuchung zu machen.

Sehen wir zunächst, wie man zur Auffindung dieses Satzes gelangt.



Man wähle O zum Coordinaten-Anfangspunkt, die vertical abwärts gerichtete Gerade zur x-Axe, die Horizontale zur y-Axe, dann erhält man für die Zeit T, in welcher ein materieller Punkt von O bis zu einem Punkte X mit der Abscisse x auf einer ebenen Curve fällt, die Gleichung

$$1) \quad T = \int_o^x \frac{ds}{\sqrt{2 \, g \, x}}$$

Bezeichnet r die Länge der Gerade OX, und φ den Winkel, welchen OX mit der positiven x-Axe bildet, so ist

$$x = r \, . \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi,$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \, d\varphi \, .$$

Durch die Substitution dieser Werte in 1) erhält man

$$2)\ T = \int_o^\varphi \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{2\,g\,r\,.\,cos\ \varphi}}\ d\varphi$$

Ist t die Zeit, in welcher der materielle Punkt von O bis X auf der Gerade OX fällt, so ist

$$3)\ t = \sqrt{\frac{2\,.\,r}{g\,.\,cos\ \varphi}}$$

Nun stellt man die Bedingung, daß $t = T$ ist, also:

$$\sqrt{\frac{2\,r}{g\,.\,cos\ \varphi}} = \int_o^\varphi \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{2\,g\,r\,.\,cos\ \varphi}}\ d\varphi$$

$$2\sqrt{\frac{r}{cos\ \varphi}} = \int_o^\varphi \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{r\ cos\ \varphi}}\ d\varphi$$

Durch Differentiation erhält man

$$\sqrt{\frac{1}{r\,.\,cos\ \varphi}}\left[\frac{dr}{d\varphi} + r\ tang\ \varphi\right] = \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{r\,.\,cos\ \varphi}}$$

$$\left[\frac{dr}{d\varphi} + r\ tang\ \varphi\right]^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

$$2\,\frac{dr}{d\varphi}\,r\,.\,tang\ \varphi + r^2\ tang^2\ \varphi = r^2$$

$$2\,\frac{dr}{r} = \frac{1 - tang^2\ \varphi}{tang\ \varphi}\ d\varphi$$

$$\int\frac{dr}{r} = \int cotg\,(2\varphi)\ d\varphi$$

$$2\ log\ r = log\,(a^2\,.\,sin\ 2\ \varphi)$$

$$4)\ r = a\sqrt{\sin 2\varphi},$$

wobei a eine willkürliche Konstante.

Die Gleichung 4) stellt nun eine Bernoullische Lemniscate dar. Macht man in 4) die Transformation

$$5)\ \varphi = \psi + \frac{\pi}{4}$$

so ergiebt sich die gewöhnliche Form der Gleichung für die Lemniscate

$$6)\ r = a\sqrt{\cos 2\psi}$$

Aus 5) folgt, daß die Axe der Lemniscate unter einem Winkel von 45° gegen die Horizontale geneigt ist.

Zum Beweise, daß die beiden Fallzeiten des materiellen Punktes von O bis X auf dem Lemniscatenbogen und dem Leitstrahle einander gleich sind, geht man von Gleichung 2) aus

$$2)\ T = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{\sqrt{2gr\cos\varphi}}\, d\varphi$$

Nun ist:

$$r = a\sqrt{\sin 2\varphi},\ \text{also}\ \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a\,.\,\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{a^2\sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}}{\sqrt{a\sqrt{\sin 2\varphi}\,.\,\cos\varphi}}\, d\varphi$$

$$T = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4g\sqrt{2}}} \int_0^{\varphi} \left[\tan\varphi\right]^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$7)\ T = \frac{4\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{4g\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[4]{\tan\varphi}$$

Nun setze man für $a = \frac{r}{\sqrt{\sin 2\,\varphi}}$ (Gleichung 4)

Dann erhält man

$$8)\ T = \sqrt{\frac{2r}{g\,.\,\cos\,\varphi}}$$

Nach Gleichung 3) ist auch die Fallzeit auf dem Leitstrahle OX

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g\,.\,\cos\,\varphi}}$$

folglich $t = T$

Untersuchung der Beschaffenheit der Bewegung auf der Curve.

Nach Gleichung 7) ist die Fallzeit T des Punktes von O bis zu irgend einem Punkte X auf der Lemniscate

$$T = \sqrt{\frac{2\,a\,\sqrt{2}}{g}}\,.\,\sqrt[4]{\tan g\,\varphi}$$

Folglich ist die Fallzeit auf derselben Lemniscate von O bis zu irgend einem Punkte direkt proportional der 4ten Wurzel aus der trigonometrischen Tangente des Winkels φ, dasselbe gilt für die Fallzeit auf irgend einem Leitstrahle.

In der Zeit t durchfällt der materielle Punkt auf einem Leitstrahle OP, für welchen $\varphi = \alpha$, die Strecke l, welche nach

$$3)\ \text{ist}\ l = \frac{1}{2}\,g\,.\,\cos\,\alpha\,.\,t^2$$

Die Abscisse x_1 des Punktes, bis zu welchem der fallende Punkt gelangt, ist $x_1 = l\,.\,\cos\,\alpha$; also $x_1 = \frac{1}{2}\,g\,.\,\cos^2\,\alpha\,.\,t^2$

Die Abscisse x_2 des Punktes, bis zu welchem der materielle Punkt in derselben Zeit auf der Lemniscate von O aus fällt, ergiebt sich aus

$$7)\ t = \sqrt{\frac{2\,a\,\sqrt{2}}{g}}\ \sqrt[4]{\tan g\,\varphi}$$

Also: $tang\ \varphi = \frac{t^4 \cdot g^2}{8\ a^2}$ Man setze $tang\ \varphi = b$ dann ist:

$$sin\ \varphi = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}},\ cos\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}$$

$$\text{Also: } sin\ 2\ \varphi = \frac{2\ b}{1 + b^2}$$

Ferner: $r = a \cdot \sqrt{sin\ 2\ \varphi}$; folglich $r = a \sqrt{\frac{2\ b}{1 + b^2}}$

$$x_2 = r\ .\ cos\ \varphi = r\ . \sqrt{\frac{1}{1 + b^2}}$$

$$x_2 = \frac{a\ \sqrt{2\ b}}{1 + b^2}$$

Für b setze man seinen Wert $b = \frac{t^4\ g^2}{8\ a^2}$, dann erhält man

$$9)\ x_2 = \frac{1}{2}\ gt^2\ . \frac{1}{1 + \frac{t^8\ g^4}{64\ a^4}}$$

Die Abscissen x_1 und x_2 der Punkte, welche der materielle Punkt in der nämlichen Zeit auf einem Leitstrahle, für welchen $\varphi = \alpha$, und auf der Lemniscate erreicht, d. i. die Fallhöhen verhalten sich wie

$$x_1 : x_2 = \left[\frac{1}{2}\ gt^2\ .\ cos^2\ \alpha\right] : \left[\frac{1}{2}\ gt^2\ . \frac{1}{1 + \frac{t^8\ g^4}{64\ a^4}}\right]$$

Für $t = o$ und $t = \sqrt{\frac{2\ L}{g\ .\ cos\ \alpha}}$ werden die Fallhöhen einander gleich, im ersten Falle beide $= o$, im zweiten beide $= L\ .\ cos\ \alpha$, wobei L die Länge des Leitstrahles OP bezeichnet.

Sind die Ordinaten der entsprechenden Punkte, welche in gleicher

Fallzeit von dem fallenden Punkte auf der Gerade OP und der Lemniscate erreicht werden y_1 und y_2 dann ist:

$$y_1 = l \,.\, \sin \alpha, \; l = \frac{1}{2} g\, t^2 \cos \alpha$$

$$y_1 = \frac{1}{4}\, g \,.\, \sin (2\,\alpha) \,.\, t^2$$

Ferner ist

$$y_2 = r \,.\, \sin \varphi \,,\; r = a \sqrt{\frac{2\,b}{1 + b^2}} \,,\; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$$

$$y_2 = \frac{ab \,.\, \sqrt{2\,b}}{1 + b^2} \,,\; b = \frac{t^4\; g^2}{8\; a^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\, g\; t^2\; \frac{8\, a^2\, t^4\, g^2}{64\, a^4 + t^8\, g^4}$$

Sind also die Fallzeiten gleich, so verhalten sich die Ordinaten der auf der Gerade OP und der Lemniscate erreichten Punkte wie

$$y_1 : y_2 = \left[\frac{1}{2}\, g\, t^2 \,.\, \frac{1}{2} \sin (2\,\alpha)\right] : \left[\frac{1}{2}\, g\, t^2 \,.\, \frac{8\, a^2\, t^4\, g^2}{64\;\, a^4 \;+\; g^4\;\, t^8}\right]$$

Für $t = o$ und $t = \sqrt{\dfrac{2\,L}{g \,.\, \cos\,\alpha}}$ sind diese Ordinaten einander gleich, im ersten Falle $= o$, im zweiten $= L \,.\, \sin \alpha$.

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir zunächst bestimmen, für welchen Punkt der Lemniscate die Abscisse x ein Maximum ist, für welchen also die Lemniscate ihren tiefsten Punkt erreicht.

Es ist:

$$r = a\; \sqrt{\sin\, 2\,\varphi}$$

$$x = r \,.\, \cos\, \varphi$$

Soll x ein Maximum sein, so muß $\dfrac{dx}{d\varphi} = o$ und $\dfrac{d^2\, x}{d\varphi^2}$ negativ sein.

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\delta x}{\delta r} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\delta x}{\delta \varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a \,.\, \cos\, 2\,\varphi \,.\, \cos \varphi}{\sqrt{\sin\, 2\,\varphi}} - r \,.\, \sin \varphi = o$$

$$r = a\;\; \sqrt{\sin 2\,\varphi}$$

Also:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a \cdot \cos 3\,\varphi}{\sqrt{\sin 2\,\varphi}}$$

Folglich: $\cos 3\,\varphi = o$

$$3\,\varphi = \frac{\pi}{2}\text{, oder } (2\,\varkappa + 1)\,\frac{\pi}{2} \text{ wobei } \varkappa \text{ eine ganze Zahl ist}$$

Also: $\varphi = 30^0$. Die andern Werte sind 90^0 etc.; diese kommen für unsere Aufgabe nicht in Betracht.

$$\frac{d^2\,x}{d\,\varphi^2} = \frac{-\,a \cdot \sin 2\,\varphi \cdot \sin 3\,\varphi - a \cdot \cos 3\,\varphi \cdot \cos 2\,\varphi}{(\sin \varphi)^{3/2}}$$

Für $\varphi = 30^0$ ist dieser Ausdruck negativ, also x ein Maximum; die Lemniscate erreicht für $\varphi = 30^0$ ihren tiefsten Punkt.

Für diesen Punkt ist also:

$$r = a\,\sqrt{\sin 2\,\varphi} = a\,\sqrt{\sin 60^0}$$

$$x = r \cdot \cos\varphi = a\,\sqrt{\sin 60^0}\,\cos 30^0$$

$$10)\ x = \frac{a}{2}\,\sqrt{\frac{3}{2}\,\sqrt{3}} = a \cdot 0{,}805\,927$$

Dieses ist die Abscisse für den tiefsten Punkt der Lemniscate. Ebenso wollen wir noch den Punkt bestimmen, für welchen die Ordinate ein Maximum ist.

Es ist:

$$y = r \cdot \sin\varphi\,,\ r = a\,\sqrt{\sin 2\,\varphi}$$

Soll y ein Maximum sein, so muß $\frac{dy}{d\varphi} = o$ und $\frac{d^2\,y}{d\varphi^2}$ negativ sein.

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{a \cdot \sin 3\,\varphi}{\sqrt{\sin 2\,\varphi}}$$

Also: $\sin 3\,\varphi = o$

$3\,\varphi = \pi$

$\varphi = 60^0$

Die weiteren Werte fallen wieder in unserer Aufgabe außer Betracht. Für $\varphi = 60^0$ ist $\frac{d^2 y}{d \varphi^2}$ negativ, also y ein Maximum

Ist x_3 die zugehörige Abscisse des Punktes, so ist:

$$x_3 = r \cdot \cos \varphi, \; r = a \sqrt{\sin 2 \varphi}$$

$$x_3 = a \sqrt{\sin 60^0} \cos 60^0$$

Also:

$$x_3 = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{3}} = a \cdot 0{,}465\,302$$

Dieses ist mithin die Abscisse des Punktes der Lemniscate, für welchen die Ordinate ein Maximum ist.

Für den tiefsten Punkt der Lemniscate ist also: $\varphi = 30^0$

Die Fallzeit auf dem Lemniscatenbogen oder dem Leitstrahl OP ist für $\alpha = 30^0$

$$T = \sqrt{\frac{2\,L}{g \cdot \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2\,L}{g \cdot \cos 30}}$$

Also: $T = 2 \sqrt{\frac{L}{g \sqrt{3}}}$

Für den Punkt der Lemniscate, für welchen die Ordinate ein Maximum ist, ist $\varphi = 60^0$. Die Fallzeit von O bis P auf der Lemniscate oder der Geraden OP, wenn $\alpha = 60^0$, ist

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g \cdot \cos 60^0}}$$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ist ein fallender Punkt gezwungen, auf einer Curve zu bleiben, so ist stets die Geschwindigkeit v

$$11) \; v = \sqrt{2gx}.$$

Diejenigen Punkte der Geraden OP und der Lemniscate, welche in gleicher Höhe liegen, werden auch mit derselben Geschwindigkeit von dem fallenden Punkte passiert. Der materielle Punkt kommt also auch mit derselben Geschwindigkeit in P an, wenn er von O auf der Geraden oder der Lemniscate bis P fällt.

Ist die Abscisse des Punktes der Lemniscate, welcher von dem materiellen Punkte durchlaufen wird, ein Maximum, so ist auch die Geschwindigkeit nach 11) ein Maximum. Nun ist dieses der Fall für $\varphi = 30^0$ oder für

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = a \,.\, 0{,}805\,927.$$

Für $\varphi = 30^0$ erreicht also der fallende Punkt das Maximum der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,g\,.\,a\,.\,0{,}805\,927}.$$

Ist $\alpha > 30^0$, so ist die zugehörige Abscisse

$$< \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}}.$$

Die Geschwindigkeit wird also in P geringer sein als im tiefsten Punkte der Lemniscate. Der fallende Punkt erlangt also für $\alpha > 30^0$ auf der Lemniscate zunächst ein Maximum der Geschwindigkeit für $\varphi = 30^0$, sodann nimmt diese wieder ab; der Punkt steigt alsdann auf der Curve. Auf der Geraden OP ist der tiefste Punkt, bis zu welchem der fallende Punkt gelangt, immer der Punkt P. Auf der Geraden ist also immer für P die Geschwindigkeit ein Maximum.

Die Abscisse des Punktes der Lemniscate, für welchen die Ordinate im Maximum, ist, wie entwickelt wurde.

$$x_3 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = a \,.\, 0{,}465\,302$$

Die Geschwindigkeit des fallenden Punktes ist in diesem Punkte also:

$$v = \sqrt{2\,g\,.\,a\,.\,0{,}465\,302}$$

Die Zunahme an Geschwindigkeit in dem Zeitelement dt ist

$$dv = g\,.\,\cos\tau\,.\,dt,$$

wobei τ der Winkel ist, den die geometrische Tangente mit der Abscissenaxe bildet. So lange $\cos\tau$ positiv ist, wird die Geschwindigkeit zunehmen; wenn $\cos\tau$ negativ ist, wird dieselbe wieder abnehmen. Die Zunahme an Geschwindigkeit ist proportional dem *cosinus* des Winkels τ.

Jetzt ist $r = a \sqrt{\sin 2\varphi}$

Für $r = 0$ ist $\varphi = 0$, $\tau = 0$; für diesen Punkt fällt r mit der Richtung der Tangente zusammen. $\cos o$ ist 1. Dieser Wert ist der größte, den $\cos \tau$ annehmen kann. Daher ist im Beginn der Bewegung auf der Lemniscate die Zunahme an Geschwindigkeit in der Zeit dt ein Maximum. Da für O der Winkel $\varphi = 0$ ist, so ist die Richtung des fallenden Punktes im Anfang der Bewegung vertical.

Auf der Geraden OP ist die Zunahme an Geschwindigkeit in einem Zeitelement dt constant. Denn für die Gerade ist

$$\frac{dv}{dt} = g \,.\, \cos \alpha$$

$\cos \alpha$ ist aber bei der geraden Linie OP constant.

Der materielle Punkt erlangt also im Beginn der Bewegung auf der Lemniscate eine größere Geschwindigkeit, wie auf der Geraden OP. Denn für $0^0 < \alpha < 90^0$ ist $\cos \alpha < 1$ also $\frac{dv}{dt} = g \cos \alpha < g$.

Für den Anfang der Bewegung auf der Lemniscate ist aber $\cos \tau = 1$ also $\frac{dv}{dt} = g$. Da nun die Geschwindigkeit des materiellen Punktes im Punkte P dieselbe ist, wenn der Punkt auf der Geraden oder der Lemniscate fällt, entsprechend der Gleichung $v = \sqrt{2gx}$, so muß die Zunahme an Geschwindigkeit des auf der Lemniscate fallenden Punktes in späteren Zeitelementen abnehmen.

Nach Gleichung 9 ist die Abscisse des Punktes, den der fallende Punkt auf der Lemniscate in einer gewissen Zeit t erreicht

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} gt^2}{1 + \frac{g^4}{64\, a^4} \,.\, t^8}$$

Setzt man diesen Wert für x in die Gleichung $v = \sqrt{2gx}$, so ist:

$$v = \frac{tg}{\sqrt{1 + \frac{g^4}{64\, a^4} t^8}}$$

Dieses ist die Geschwindigkeit, welche der fallende Punkt in einer gewissen Zeit t erlangt.

Setzt man

$$\frac{g^4}{64\ a^4} = p \text{ , so ist } v = \frac{t\ .\ g}{\sqrt{1 + pt^8}}$$

$$\text{Also } \frac{dv}{dt} = g\ .\ \frac{1 - 3\ pt^8}{(1 + pt^8)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2\ v}{dt^2} = -\ 12\ g\ .\ p\ .\ t^7\ .\ \frac{3 - pt^8}{(1 + pt^8)^{5/2}}$$

Um zu sehen zu welcher Zeit der fallende Punkt ein Maximum der Geschwindigkeit erreicht, setze man $\frac{dv}{dt} = o$

$$\text{Also } \frac{g\ (1-3\ pt^8)}{(1+3pt^8)^{3/2}} = o$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[8]{3\ p}}$$

Für diesen Wert ist $\frac{d^2\ v}{dt^2}$ negativ, also v ein Maximum.

Stellt man also das Wachsen der Geschwindigkeit des auf der Lemniscate fallenden Punktes graphisch dar, indem man t und v als Coordinaten nimmt, so erhält man eine Curve, die ihre Concavität der t-axe zukehrt. Wie oben gezeigt, ist für $x = o$, also für $t = o$ die Zunahme an Geschwindigkeit auf der Lemniscate ein Maximum. Die Geschwindigkeitscurve steigt also anfangs steil an. Sie erreicht ihren Culminationspunkt für

$$t = \frac{1}{\sqrt[8]{3\ p}} \text{ oder da } p = \frac{g\ 4}{64\ a^4}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \sqrt{\frac{2a\ \sqrt{2}}{g}} = \sqrt[4]{tang\ 30^0}\ \sqrt{\frac{2a\ \sqrt{2}}{g}}$$

Für diesen Fall ist, wie wir sehen, $\varphi = 30^0$

Aus der Gleichung

$$v = \frac{tg}{\sqrt{1 + \frac{g^4\ t^4}{64\ a^8}}} \text{ folgt}$$

daß die Geschwindigkeitscurve die Abscissenaxe für $t = o$ und $t = \infty$ schneidet. Die Curve nähert sich also der Abscissenaxe asymptotisch.

Stellt man die Zunahme der Geschwindigkeit für den auf der Geraden fallenden Punkt dar, wobei t wieder die Abscissenaxe und v die Ordinate ist, so erhält man eine gerade Linie.

Es möchte nicht uninteressant sein, den Weg, welchen der fallende Punkt von O bis P auf dem Lemniscatenbogen zurücklegt, mit der Länge des Leitstrahles $O\,P$ zu vergleichen, den er in derselben Zeit durchlaufen würde.

Wir wählen als specielle Fälle:

1) $OP = (L =)$ 10 meter; der Winkel, den OP mit der Verticalen bildet, $\alpha = 15^0$

2) $OP = 10\sqrt{2}$ meter, $\alpha = 45^0$

3) $OP = 100$ meter, $\alpha = 75^0$

Für diese drei Fälle soll also die Länge des Lemniscatenbogens berechnet werden.

Zu diesem Zwecke geht man von Gleichung 6) aus

$$r = a\sqrt{\cos 2\,\psi}$$

Ist ds das Differential des Bogens, so ist:

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2}\; d\psi$$

$$\text{also: } S = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2}\; d\psi$$

$$\frac{dr}{d\psi} = -\frac{a\,.\,\sin 2\,\psi}{\sqrt{\cos 2\,\psi}}$$

$$S = \int \sqrt{a^2\,.\,\cos 2\,\psi - \frac{a^2 \sin^2 2\,\psi}{\cos 2\,\psi}}\; d\psi$$

$$S = a \int \frac{d\psi}{\sqrt{\cos 2\,\psi}} = a \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\psi}}$$

Es ist hier zu integriren von $r = o$ bis $r = L$

für $r = o$, ist $\varphi = o$

$r = L$, ist $\varphi = \alpha$

Nach Gleichung 5) ist $\psi = \varphi - \frac{\pi}{4}$

Also ist für $\varphi = o$, $\psi = -\frac{\pi}{4}$

$\varphi = \alpha$, $\psi = \alpha - \frac{\pi}{4}$

$$\text{Also: } S = a \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\alpha - \frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2\, sin^2\, \psi}}$$

$$a = \frac{L}{\sqrt{sin\; 2\,\alpha}}$$

Ist α constant, so ist die Länge des entsprechenden Lemniscatenbogens direct proportional der Länge L.

Setzt man in dem Ausdrucke für S, $\psi = -\theta$, dann ist $d\psi = -d\theta$

$$sin^2\,\psi = sin^2\,\theta\,;\ \text{für } \psi = -\frac{\pi}{4}\,,\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\psi = \alpha - \frac{\pi}{4}\,,\ \theta = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

$$\text{Also: } S = -a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\theta}} = a \int_{\frac{\pi}{4}-\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\psi}}$$

$$\text{Also ist } S = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\psi}} - a \int_0^{\frac{\pi}{4}-\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\psi}}$$

Das erste dieser Integrale bezeichnet den Lemniscatenquadranten, das zweite den Bogen, welcher den gesuchten zu einem Quadranten ergänzt.

Ist $\alpha > \frac{\pi}{4}$, so setze man in dem zweiten Integral wieder $\psi = -\theta$ so erhält man

$$-a \int_0^{\frac{\pi}{4}-\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\psi}} = a \int_0^{\alpha-\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\theta}} = a \int_0^{\alpha-\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\,sin^2\,\psi}}$$

Für $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ist der gesuchte Bogen S größer als ein Quadrant.

Es ist dann:

$$S = a\int_o^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} + a\int_o^{\alpha-\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}}$$

Um das elliptische Integral $\int_o^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}}$ auf die Normalform zu bringen, setze man $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

Also: $1-2\sin^2\psi = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

Ferner: $\cos\psi d\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,.\,d\theta$

Also: $d\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\theta\,.\,\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$

Folglich: $\frac{S}{1} = \int_o^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$

Dieses ist ein elliptisches Integral der ersten Gattung in der Normalform, da der Coefficient von $\sin^2\theta$ kleiner als 1 ist.

Es sind noch die Grenzen für unsere Beispiele zu bestimmen.

$$S = a\left[\int_o^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}} - \int_o^{\frac{\pi}{4}-\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}}\right]$$

Es ist $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

Für $\psi = \frac{\pi}{4}$ ist $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$

$$\sin\theta = 1\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

Also: $S = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \int_o^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} \right]$

1) Nun ist im ersten Beispiele: $\alpha = 15^0$.

Also: $\psi = \frac{\pi}{4} - \alpha = 30^0$; $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Also ist für das erste Beispiel

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \int_o^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} \right]$$

2) Im zweiten Beispiele ist $\alpha = 45^0$

Also: $\psi = \frac{\pi}{4} - \alpha = o$

$$\text{Also: } S = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \int_o^{o} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} \right]$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$$

3) Im dritten Beispiele ist: $\alpha = 75^0$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} + a \int_o^{\alpha - \frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-2\sin^2\psi}}$$

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = 30^0$$

$$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}\right]$$

Das Integral $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$

ist ein vollständiges elliptisches Integral der I Gattung.

Nun ist:

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta + \frac{1.\ 3}{2.\ 4}k^4 . \sin^4\theta + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^4 . \sin^6\theta + ..$$

Folglich:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta + \frac{1\ .\ 3}{2\ .\ 4} . k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\, d\theta + \ .\ .$$

Es ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$

Zur Bestimmung der übrigen Integrale gehe man von dem allgemeinen Ausdruck

$$\int sin^{2m}\,\theta\; d\theta \text{ aus}$$

Macht man in diesem die Substitution $sin\,\theta = y$, so geht dasselbe über in

$$\int_0^1 \frac{y^{2m}\; dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2m-1}{2m}\int_0^1 \frac{y^{2m-2}}{\sqrt{1-y^2}}\; dy$$

$$= \frac{(2m-1)\;(2m-3)\;(2m-5)\;.\;.\;.\;5\;.\;3\;.\;1}{2m\,(2m-2)\;(2m-4)\;.\;.\;.\;4\;.\;2}\;.\;\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Also } K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\;.\;3}{2\;.\;4}\right)^2 .\; k^4 + \left(\frac{1\;.\;3\;.\;5}{2\;.\;4\;.\;6}\right)^2 k^6 + ..\right)$$

In unserm Beispiele ist $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit die Reihe schneller convergirt, mache man zunächst die Landensche Transformation.

$$k_0 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$$

$$tang\;\theta_0 = \frac{(1+k^1)\;tang\;\theta}{1-k^1\;tang^2\;\theta},\text{ wobei } k^1 = \sqrt{1-k^2}$$

Dann ist für $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = \pi$

$$\text{Also } K = F\,(\theta,\,k) = \frac{1+k_0}{2}\,F\,(\theta_0\;k_0)$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2},\,k\right) = \frac{1+k_0}{2}\,F\,(\pi,\,k_0) = (1+k_0)\;K_0$$

Mithin ist:

$$K = (1+k_0)\,\frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_0^2 + \left(\frac{1\;.\;3}{2\;.\;4}\right)^2 k_0^4 + ..\right)$$

Oder:

$$K = (1 + k_0)\,\frac{\pi}{2}\left(1 + 0{,}25\,k_0^2 + \frac{9}{64}\,k_0^4 + \frac{25}{256}\,k_0^6 + \ldots\right)$$

$$\text{Nun ist } k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0{,}5}$$

$$\text{Also: } k_0 = \frac{1 - \sqrt{0{,}5}}{1 + \sqrt{0{,}5}} = 0{,}171\,57$$

$$0{,}25\,k_0^2 = 0{,}007\,35\,936$$

$$\frac{9}{64}\,k_0^4 = 0{,}000\ \ 12186$$

$$\frac{25}{256}\,k_0^6 = 0{,}000\,00\,2491$$

Die folgenden Glieder sind so klein, daß wir sie vernachläßigen.

$$\text{Also ist die Summe } \Sigma = \left(1 + 0{,}25\,k_0^2 + \frac{9}{64}\,k_0^4 + \ldots\right) = 1{,}007\,4837$$

$$\text{Nun ist } K = (1 + k_0)\,\frac{\pi}{2}\,.\,\Sigma$$

$$\text{Also } K = 1,\,854\,075.$$

$$\text{Folglich} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\,sin^2\theta}} = 1{,}854\,075$$

Man hätte das Integral auch durch ein unendliches Produkt ausdrücken können.

Setzt man in dem Integral $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta_0}{\sqrt{1 - k_0^2\,sin^2\theta_0}}$ für θ_0 einen andern Winkel (Amplitude) θ_1 ein, so daß zwischen θ_0 und θ_1 die Relation besteht $sin(2\theta_1 - \theta_0)$

$= k_0 \,.\, sin\ \theta_0$, so geht das Integral über in $\frac{2}{1+k_0}\int\limits_0^{\theta_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1-\frac{4k_0}{(1+k_0)^2}\, sin^2\,\theta_1}}$

Setzt man noch für $\frac{2\sqrt{k_0}}{1+k_0} = k_1$, so hat man

$$\int\limits_0^{\theta_0} \frac{d\theta_0}{\sqrt{1-k_0^2\, sin^2\,\theta_0}} = \frac{2}{1+k_0}\int\limits_0^{\theta_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1-k_1^2\, sin^2\,\theta_1}}$$

Der neue Modul ist durch diese Transformation größer geworden, die Amplitude kleiner.

Macht man in dem neuen Integral wieder dieselbe Transformation, indem man

$$sin\ (2\,\theta_2 - \theta_1) = k_1 \,.\, sin\ \theta_1$$
$$\frac{2\,\sqrt{k_1}}{1+k_1} = k_2$$

setzt, dann in dem neuen Integral wieder die gleiche Transformation und so fort, so wird der Modul stets größer, die Amplitude kleiner. Wie sich leicht zeigen läßt, nähert sich der Modul der Grenze 1; hieraus ergiebt sich dann, daß auch die Amplitude sich einer festen Grenze nähert; denn für $k_n = 1$ ist

$$sin\ (2\,\theta_n - \theta_{n-1}) = sin\ \theta_{n-1}$$
$$\text{Also } lim\ \theta_{n-1} = \theta_n = \Phi$$

Als Grenze des elliptischen Integrals erhält man also:

$$lim \int\limits_0^{\theta_n} \frac{d\theta_n}{\sqrt{1-sin^2\,\theta_n}} = log.\ nat.\ tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$$

Folglich ist:

$$\int\limits_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\, sin^2\theta}} = \frac{2}{1+k_0} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} \,.\, log.\ n.\ tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3 \,..\, k_{n-1}}{k_0}} \,.\, lg.\ tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$$

In unserm Beispiel ist zu berechnen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}$$

Hier ist also $k_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}5}, \ \theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Also } k_1 = \frac{2\sqrt{k_0}}{1 + k_0} = 0{,}\ 985\ 1713$$

$$k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1} = 0{,}\ 999\ 9720$$

$$k_3 = \frac{2\sqrt{k_2}}{1 + k_2} = 0{,}\ 999\ 9999$$

k_3 ist also schon nahe gleich 1, so daß wir k_4 nicht mehr zu berechnen brauchen.

$$\sin (2\theta_1 - \theta_0) = k_0 \,.\, \sin \theta_0$$

$$\theta_0 = 45^0, \ \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\,\theta_1 - \theta_0 = 30^0$$
$$2\theta_1 = 75^0$$
$$\theta_1 = 37^0\ 30'\ 0''$$
$$\sin (2\,\theta_2 - \theta_1) = k_1 \,.\, \sin \theta_1$$

Daraus folgt $\theta_2 = 37^0\ 10'\ 31'', 57$

Ferner ergiebt sich

$$\theta_3 = 37^0\ 10'\ 29'', 45$$

$$\text{Also: } \Phi = \theta_3 = 37^0\ 10'\ 29'', 45$$

Nun ist:
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2 \,.\,.\, k_{n-1}}{k_0}} \,.\, \log.\ nat.\ tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right)$$

Daraus folgt: $F\,(\theta_0\, k_0) = 0{,}\ 826\ 0156$

$$\text{Also: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} = 0{,}\ 826\ 0156$$

Dieses Integral hätte man auch in Form einer unendlichen Reihe darstellen können, ähnlich wie das zuerst berechnete vollständige elliptische Integral. Man erhält nämlich

$$\int_o^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = a_0\theta - \frac{1}{2}\, a_2 \sin 2\theta + \frac{1}{4}\, a_4 \sin 4\theta - \frac{1}{6}\, a_6 \sin 6\theta + \ldots,$$

wobei a_0, a_2, a_4 . — Coefficienten bedeuten, welche nur von k abhängig sind.

Im ersten Beispiel ist der zu berechnende Bogen

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta}} - \int_o^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta}}\right]$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[1{,}854\,075 - 0{,}826\,0156\right]$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \,.\, 1{,}028\,0594$$

$$a = \frac{L}{\sqrt{\sin 2\alpha}},\; L = 10 \text{ m. } \alpha = 15^0$$

$$a = 10\sqrt{2}$$

$$S = 10{,}280\,594 \text{ meter.}$$

2) der zweite Bogen ist

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\, 1{,}854\,075$$

$$a = \frac{L}{\sqrt{\sin 2\alpha}},\; L = 10\sqrt{2},\;\; \alpha = 45$$

$$a = 10 \,.\, \sqrt{2}$$

$$S = 18{,}540\,75 \text{ meter.}$$

3) Der dritte Bogen ist:

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}}\right]$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}} \left[1{,}854\,075 + 0{,}826\,0156\right]$$

$$S = \frac{a}{\sqrt{2}}\, 2{,}\ 680\ 0906$$

$$a = \frac{L}{\sqrt{\sin 2\alpha}},\ L = 100,\ \ \alpha = 75^0$$

$$a = 100\sqrt{2}$$

$$S = 268{,}00906 \text{ meter.}$$

Es ergiebt sich also das Resultat:

1) Der materielle Punkt durchläuft eine Gerade OP, welche 10 meter lang ist und mit der Verticalen den Winkel 15^0 bildet, in derselben Zeit, in welcher er den Lemniscatenbogen OP von 10,280 594 meter Länge durchläuft.

2) Eine Gerade OP von 10 $\sqrt{2}$ meter Länge, deren Neigung zur Verticalen 45^0 ist, wird in derselben Zeit durchlaufen, wie der 18,54075 meter lange Lemniscatenbogen OP.

3) Ist die Gerade OP 100 meter lang und unter einem Winkel von 75^0 gegen die Verticale geneigt, so wird sie in derselben Zeit von einem fallenden Punkte durchlaufen wie der 268,00906 meter lange Lemniscatenbogen OP.

Endlich wollen wir noch die Fallzeit des materiellen Punktes auf dem Lemniscatenbogen OP vergleichen mit derjenigen Zeit, in welcher der die beiden Punkte O und P verbindende Bogen der Brachistochrone durchlaufen würde, wobei wir die Beschleunigung der Schwere $g = 9{,}81$ annehmen.

Die Fallzeit T des Punktes von O bis P auf dem Lemniscatenbogen ist nach 8:

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g \cdot \cos\alpha}}$$

1) Im ersten Beispiele erhält man also für $L = 10$ Meter und $\alpha = 15^0$
$T = 1{,}45\,281$ Sekunden.

2) Im zweiten Beispiele für $L = 10\sqrt{2}$ m, $\alpha = 45^0$
$T = 2{,}01\,927$ Sekunden.

3) Im dritten Falle ist $L = 100$ m, $\alpha = 75^0$ also
$T = 8{,}875\,288$ Sekunden.

Die Brachistochrone ist die gemeine Cycloide. Ihre Gleichung

$$y = a \,.\, arc\ cos\, \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$$

a ist der Radius des erzeugenden Kreises, welcher auf der $y$axe rollt; die Cycloide beginnt in O.

Die Fallzeit auf der Brachistochrone von O bis P ist

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Also:}\ T = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$\text{Folglich}\ T = \sqrt{\frac{a}{g}} \,.\, arc\ cos\, \frac{a-x_1}{a}$$

Der Wert a bestimmt sich durch die Bedingung, daß die Cycloide durch den Punkt P geht.

Setzt man in der Gleichung $y = a \,.\, arc\ cos\, \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$

$\begin{cases} x = a\,(1 - cos\,\varphi) \\ y = a\,(\varphi - cos\,\varphi) \end{cases}$ so geht dieselbe über in

Man hat für die Cycloide alsdann diese beiden Gleichungen.

Es ist dann: $\frac{a-x}{a} = cos\,\varphi,\ arc\ cos\,\frac{a-x}{a} = \varphi$

Für T ergiebt sich also:

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \varphi$$

---

1) Im ersten Beispiele ist $L = 10$. $\alpha = 15^0$.

Also: $x_1 = L \,.\, \cos\alpha = 9{,}65\,925$ meter

$y_1 = L \,.\, \sin\alpha = 2{,}58\,819$ meter.

2) Im zweiten Beispiele ist $L = 10\sqrt{2}$, $\alpha = 45^0$.

Also: $x_1 = 10$, $y_1 = 10$.

3) Im dritten Beispiele ist $L = 100$, $\alpha = 75^0$.

Also $x_1 = 25{,}\ 8819$, $y_1 = 96{,}5925$.

Um a zu bestimmen, hat man diese Werte für x und y in die Gleichung

$$y_1 = a \,.\, arc\cos\frac{a - x_1}{a} - \sqrt{2ax_1 - x_1^2}$$

einzusetzen und diese nach a aufzulösen.

Bei der Auflösung dieser Gleichungen wollen wir uns der Methode bedienen, welche Stern in Crelles Journal XXII Band angegeben hat.

Man setze: $f(a) = a \,.\, arc\cos\frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax - x^2} - y$, dann ist

$$f'(a) = arc\cos\frac{a-x}{a} - \frac{2x}{\sqrt{2ax - x^2}} \text{ und}$$

$$f''(a) = -\frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{2x^2}{\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$$

Aus der Eigenschaft der Cycloide folgt, daß $a > \frac{x}{2}$ oder $a = \frac{x}{2}$ sein muß. Für $a \geqq \frac{x}{2}$ ist $f''(a)$ beständig positiv. Wir können also $f''(a)$ als den bestimmenden Differentialquotienten annehmen, da er zwischen $a = \frac{x}{2}$ und $a = \infty$ stets dasselbe Zeichen behält. Aus der Zahl der Zeichenwechsel der Reihe

$f''(a)$, $f'(a)$, $f(a)$ erkennt man, daß jede der drei zu lösenden Gleichungen innerhalb der Grenzen $a = \frac{x}{2}$ und $a = \infty$ eine Wurzel besitzt.

Zieht man die Grenzen enger zusammen, so findet man für die erste Gleichung, wenn man die Reihe für irgend einen Wert α für a kurz mit $[\alpha]$ bezeichnet.

	$f''(a)$	$f'(a)$	$f(a)$
[32,8]	+	—	+
	0,00218 741	0,0434 187	0,00 144
	+	—	—
[32,9]	0,00216 921	0,0432 002	0,00395

Wir wenden nun die von Stern angeführte Näherungsmethode an. Da $f(32{,}8)$ und $f''(32{,}8)$ gleiche Vorzeichen haben, so ist 32,8 die „äußere" Grenze.

Es ist $32{,}9 - 328, = \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \left(\frac{1}{10}\right)^n$

Also: $n = 1$.

Da $f''(32{,}8) > f''(32{,}9)$

und $f'(32{,}9) < f'(32{,}8)$

so bilde man den Quotienten

$$\frac{f''(32{,}8)}{2f'(32{,}9)} = \frac{0{,}00218\ 741}{2 \cdot 0{,}0432\ 002} = 0{,}02$$

Bezeichnet $\left(\frac{1}{10}\right)^k$ die Decimaleinheit, welche unmittelbar größer ist als dieser Quotient, so ist hier

$$k = 1$$

Wenn die folgende Nährungsmethode anwendbar sein soll, so müssen die Grenzen so eng zusammengezogen sein, daß die Bedingung $n \geqq 1 - k$ erfüllt ist, was hier eintrifft.

Da 32,8 die äußere Grenze ist, so entwickele man den Quotienten

$$\frac{f(32{,}8)}{f'(32{,}8)} \text{ bis zur } (2n + k)^{\text{ten}}$$

also bis zur dritten Dezimalstelle. Also

$$\frac{0{,}00\ 144}{0{,}0434\ 187} = 0{,}033$$

Die letzte Stelle dieses Wertes vermehre man um 1 und addire 0,034 zu 3,28, so hat man als Näherungswert für a im ersten Beispiele

$$a = 32,834$$

Für das zweite Beispiel findet man, wenn man die Grenzen enger zusammenzieht

[5,72]	$f'' a$	$f' (a)$	$f (a)$
	+	—	+
	3,199 345	2,85523	0,02607
	+	—	—
[5,73]	3,125 87	2,8226	0,0023.

Hier ist 5,72 für äußere Grenze

$$5,73—572 = \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ also } n = 2$$

$$\frac{3,199\ 345}{2\ .\ 2,8226} = 0,56663$$

Also $k = o$.

Also ist die Bedingung $n \overline{>} 1—k$ erfüllt.

$$2\,n + k = 4.$$

Man entwickelt also $\frac{f\ (5,72)}{f'\ (5,72)}$ bis zur 4ten Decimalstelle $\frac{0,02607}{2,85523} = 0,0091$

Mithin ist ein Näherungswert für a im zweiten Beispiel

$$a = 5,72\ 92.$$

Für das dritte Beispiel erhält man

	$f'' (a)$	$f' (a)$	$f (a)$
	+	+	—
[25,9]	0,038 52 923	2,714 505	0,423
	+	+	+
[26]	0,037941	2,725992	0,04787.

Da f (26) und f'' (26) gleiche Zeichen haben, so ist 26 die äußere Grenze

$$26—25,9 = \left(\frac{1}{10}\right)^1 \text{ also } n = 1$$

$$\frac{0,038\ 52923}{2\ .\ 2,714505} = 0,007097$$

Also $k = 2$.

Die Bedingung $n \overline{>} 1-k$ ist erfüllt

$$2n + k = 4$$

Mithin ist $\frac{f\,(26)}{f'\,(26)}$ bis zur 4ten Decimalstelle zu entwickeln. Also

$$\frac{0,04787}{2,725\ 992} = 0,0175$$

Folglich ist für das dritte Beispiel 26—0,0176 ein Näherungswert von a.

Also: $a = 25,9824.$

Wir wollen diese Näherungswerte von a als hinreichend genau annehmen. Dann ist im ersten Beispiele

$$a = 32,834$$
$$x = 9,65923$$

Nun ist $\varphi = arc\ cos\ \frac{a-x}{a}$

Also $\varphi = 45^0\ 6'\ 16'' = 45^0,\ 104.$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \varphi$$

Also: $T = 1,4402$ Sekunden.

Für das zweite Beispiel ist

$$a = 5,7292,\ x = 10$$

$$\varphi = arc\ cos\ \frac{a-x}{a} = 138^0,\ 1973$$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\ \varphi$$

$T = 1,\ 843\ 308$ Sekunden.

Im dritten Beispiel ist

$$a = 25,9824$$

$$x = 25,8819$$

$$\varphi = arc\cos\frac{a-x}{a} = 270^0,2216$$

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\,\varphi$$

T = 7,675426 Sekunden.

Wir erhalten also das Resultat.

Die Fallzeit des materiellen Punktes von O bis P ist

1) Im ersten Beispiele auf der Lemniscate = 1,45281 Sekunden, auf der Brachistochrone = 1,4402 Sekunden.

2) Im zweiten Beispiele auf der Lemniscate = 2,01927 Sekunden, auf der Brachistochrone = 1,843308 Sekunden.

3) Im dritten Beispiele auf der Lemniscate = 8,875288 Sekunden, auf der Brachistochrone = 7,675426 Sekunden.
