Ueber

die Kurven,

welche die Tangentialebenen mit einer Fläche gemein haben,

und über

die Beziehungen der Berührungspunkte

zu diesen gemeinschaftlichen Kurven,

von

A. Behlau,
Gymnasiallehrer.

Heiligenstadt,
gedruckt bei J. C. Dölle & C. Brunn.

Wenn an irgend eine Fläche eine Tangentialebene gelegt wird, welche Beschaffenheit hat im Allgemeinen die Kurve, die der Tangentialebene und der Fläche gemein ist; in welcher Beziehung steht der Berührungspunkt zu dieser Kurve und welche besonderen Fälle können dabei stattfinden?

---

1)

Eine Gleichung mit den drei Variablen x, y, z auf ein recht- oder schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen, drückt eine Fläche im Allgemeinen aus, deren Natur von dem Grad der Gleichung und von der Beschaffenheit der Koefficienten abhängt.

$$1)\quad T^{(n)}_{(x,y,z)} + T^{(n-1)}_{(x,y,z)} + T^{(n-2)}_{(x,y.z)} + \ldots T^{(1)}_{(x,y,z)} + T^{(0)}_{(x,y,z)} = 0$$

sei eine Gleichung vom nten Grade, durch welche eine Fläche vom nten Grade ausgedrückt werde

$T^{(n)}_{(x,y,z)}$, $T^{(n-1)}_{(x,y,z)}$ . . . . $T^{(1)}_{(x,y,z)}$, $T^{(0)}_{(x,y,z)}$ sollen eine ganz allgemeine Bedeutung haben, so daß auch einzelne Glieder gleich Null sein können; nur müssen die einzelnen Glieder homogen in Bezug auf x, y, z gedacht werden.

Nimmt man in einem Punkte einer Fläche ein Element so klein an, daß man es als eben betrachten kann und denkt man sich dieses Element nach allen ihm eigenthümlichen Richtungen verlängert, so kommt man zu dem allgemeinen Begriffe einer Tangente. Ich will nun die Gleichung der Tangentialebene an einer Fläche der n^{ten} Ordnung aufstellen, welche durch die Gleichung 1) ausgedrückt wird. Die Tangentialebene muß mit ihr wenigstens einen Punkt gemein haben, dessen Koordinaten $x=x^1$, $y=y^1$ und $z=z^1$ seien. Die Gleichung der Ebene, welche durch diesen Punkt geht, wird sein

$$(x-x^1) + (y-y^1)\,B + (z-z^1)\,C = 0$$

differentiire ich diese Gleichung partiell nach den Variablen x,y,z, so erhalte ich

$$\frac{dx}{dy} = -\,B \text{ und } \frac{dx}{dz} = -\,C$$

Nach der Substitution dieser Werthe erhalte ich

$$(x^1-x) = (y^1-y)\,\frac{dx}{dy} + (z^1-z)\,\frac{dx}{dz}$$

In dieser Gleichung ist nur ausgedrückt, daß die Ebene durch den Punkt, dessen Koordinaten x^1,y^1,z^1 sind, geht. Damit sie die Fläche berühre, ist nöthig, daß $\frac{dx^1}{dy^1}=\frac{dx}{dy}$ u. $\frac{dx^1}{dz^1}=\frac{dx}{dz}$ sei. Substituirt man diese Werthe, so erhält man die Gleichung

$$(x-x^1) = (y-y^1)\,\frac{dx^1}{dy^1} + (z-z^1)\,\frac{dx^1}{dz^1} \qquad 2)$$

x, y, z sind die Koordinaten der Ebene, x^1 y^1 z^1 die des Punktes der Fläche, welche ihr und der Tangentialebene gemein ist. Es muß demnach die Gleichung 1.) sich für diesen Punkt umwandeln in

$$T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)} + T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z)} + T^{(n-2)}_{(x^1,y^1,z^1)} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+ T^{(1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + T^{(0)}_{(x^1,y^1,z^1)} = 0 \qquad 1^1.)$$

Hieraus ziehe ich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dx^1}{dy^1} = -\,\frac{\frac{dT^1}{dy^1}}{\frac{dT^1}{dx^1}} \text{ und } \frac{dx^1}{dz^1} = -\,\frac{\frac{dT^1}{dz^1}}{\frac{dT^1}{dx^1}}$$

Setzt man diese Werthe für $\frac{dx'}{dy'}$ und $\frac{dx'}{dz'}$, in die Gl. 2.) so erhält man als allgemeinsten Ausdruck der Tangentialebene an einer Fläche die n^{te} Ordnung:

$$
\begin{aligned}
&(x-x')\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot\; T^{(1)}_{(x',y',z')} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right.}{dx'}\\
&+(y-y')\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot\; T^{(1)}_{(x',y',z)} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right.}{dy'} = 0\\
&+(z-z')\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot\; T^{(1)}_{(x',y',z')} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right.}{dz'}
\end{aligned}
$$

führe ich die angedeutete Multiplikation aus, so erhalte ich als linke Seite der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&x\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot + T^{(1)}_{(x',y',z')} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right]}{dx'}\\
&\qquad -\left[x'\frac{d\,T^{(n)}_{(x',y',z')}}{dx'} + \cdot\cdot + x'\frac{d\,T^{(1)}_{(x',y',z')}}{dx'}\right]\\
&+y\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot + T^{(1)}_{(x',y',z')} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right]}{dy'}\\
&\qquad -\left[y'\frac{d\,T^{(n)}_{(x',y',z')}}{dy'} + \cdot\cdot + y'\frac{d\,T^{(1)}_{(x',y',z')}}{dy'}\right]\\
&+z\,\frac{d\left[T^{(n)}_{(x',y',z')} + T^{(n-1)}_{(x',y',z')} + \cdot\cdot + T^{(1)}_{(x',y',z')} + T^{(0)}_{(x',y',z')}\right]}{dz'}\\
&\qquad -\left(z'\frac{d\,T^{(n)}_{(x',y',z')}}{dz'} + z'\frac{d\,T^{(n-1)}_{(x',y',z')}}{dz'} + \cdot\cdot + z_1\frac{d\,T^{(1)}_{(x',y',z')}}{dz'}\right)
\end{aligned}
$$

Da die einzelnen Glieder homogen sind, so ist

$$x^1 \frac{d T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dx^1} + y^1 \frac{d T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dy^1} + z^1 \frac{d T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dz^1} = n T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)}$$

$$x^1 \frac{d T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dx^1} + y^1 \frac{d T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dy^1} + z^1 \frac{d T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)}}{dz^1} = (n-1) T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Wenn ich diese Substitution in Betracht ziehe und die so erhaltene letzte Gleichung zu der mit n multiplicirten Gleichung 1[1]) addire, so ergiebt sich schließlich:

$$4.)\quad 0 = \begin{cases} x \dfrac{d\left(T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)} + T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + \,.\,.\, T^{(1)}_{(x^1,y^1,z^1)}\right)}{dx^1} \\ + y \dfrac{d\left(T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)} + T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + \,.\,.\, T^{(1)}_{(x^1,y^1,z^1)}\right)}{dy^1} \\ + z \dfrac{d\left(T^{(n)}_{(x^1,y^1,z^1)} + T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + \,.\,.\, T^{(1)}_{(x^1,y^1,z^1)}\right)}{dz^1} \\ + 1\, T^{(n-1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + 2\, T^{(n-2)}_{(x^1,y^1,z^1)} + 3\, T^{(n-3)}_{(x^1,y^1,z^1)} + \,.\,. \\ \qquad + (n-1)\, T^{(1)}_{(x^1,y^1,z^1)} + n\, T^{(0)}_{(x^1,y^1,z^1)} \end{cases}$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Anmerkung. Wenn die Differentialquotienten in der Gleichung 4.) einzeln oder paarweise gleich Null werden, so folgt daraus, daß die Tangentialebene entweder der betreffenden Koordinatenachse oder Koordinatenebene parallel ist. Sind aber alle drei Differentialquotienten gleich Null, so deutet dies auf besondere Eigenschaften der Fläche, in dem Berührungspunkte.

2)

Bestehen die Gleichungen 1.) und 4.) zugleich, d. h., erfüllen dieselben Werthe für die Variablen die beiden Gleichungen zugleich, so drücken dieselben zusammengenommen eine ebene Kurve im Raume aus; und diese Kurve, deren Koordinaten

x, y, z sind, ist der Fläche und der Tangentialebene gemeinsam. Diese Kurve kann auch in gerade Linien und in Punkte übergehen.

3)

Welche Beschaffenheit hat die durch Gl. 1.) und 4.) ausgedrückte Kurve?

Aus der allgemeinen Betrachtung geht im Allgemeinen hervor, daß die Tangentialebene nicht immer nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat. Die Berührung kann in mehreren Punkten, in einer oder in mehr Kurven stattfinden. Außer der Tangirung kann die Tangentialebene auch die Fläche sogar schneiden. Man kann überhaupt folgende Fälle unterscheiden:

1) Die Tangentialebene berührt die Fläche in einem oder in mehreren Punkten.
2) Sie berührt in einem oder in mehreren Punkten und zugleich in Kurven.
3) Sie berührt in einer oder in mehreren Kurven.
4) Sie berührt in einem Punkte und schneidet zugleich die Fläche in einer Kurve.
5) Sie berührt und schneidet zugleich die Fläche in Kurven.

Um diese Fälle analytisch auszudrücken, kommt es darauf an, die Gleichungen der Tangentialebene und der Fläche geschickt zu verbinden. Eliminirt man aus den Gleichungen 1.) und 4.) eine der Variablen x, y, z, so erhält man eine Endgleichung mit zwei Koordinaten, welche die Projektion der gemeinschaftlichen Kurve auf die Koordinatenebene der in der Endgleichung enthaltenen Koordinaten ausdrückt. Die Elimination muß sich immer ausführen lassen, da die eine der Gleichungen lineär ist; aber man erhält nur die Projektion der Kurve und nicht diese selbst. Außerdem ist die ganze Operation oft langwierig und sogar schwierig, um vollständig die Natur der Kurve zu erkennen. Häufig ist es vortheilhafter, sich der Koordinatentransformation zu bedienen, obgleich dieselbe für jede besondere Lage der Tangentialebene besonders vorgenommen werden muß und nicht ein so allgemeines Resultat liefert, wie die erste Methode.

Für den Uebergang aus einem rechtwinkligen in ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem hat man folgende Substitutionen zu machen:

$$\text{5)}\quad \begin{aligned} x &= \xi\,(\cos.\psi\cos.\varphi - \cos.\vartheta\sin.\psi\sin.\varphi) - \eta\,(\cos.\psi\sin.\varphi + \cos.\vartheta\sin\psi\cos.\varphi) + p \\ y &= \xi\,(\sin.\psi\cos.\varphi + \cos.\vartheta\cos.\psi\sin.\varphi) - \eta\,(\sin.\psi\sin.\varphi - \cos.\vartheta\cos.\psi\cos.\varphi) + q \\ z &= \xi\,(\sin.\vartheta\sin.\varphi + \eta\sin.\vartheta\cos.\varphi + r \end{aligned}$$

und $\zeta = 0$ zu setzen, so erhält man die Projektion der Kurve auf die Koordinatenebene der $\xi\eta$. Hierin ist ϑ der Neigungswinkel der $\xi\eta$ = Ebene gegen die alte Koordinatenebene der x y. φ ist der Winkel, den die Durchschnittslinie der x y = und der $\xi\eta$=Ebene mit der ξ=Achse, und ψ ist der Winkel, den dieselbe Durchschnittslinie mit der x=Achse bildet. Um die andern Projektionen zu erhalten, hat man die entsprechenden Abänderungen zu machen und nach der angegebenen Weise zu verfahren.

4)

Um die vorher angegebenen allgemeinen Betrachtungen durch analytische Untersuchungen näher zu begründen, will ich einzelne der vorhin unterschiedenen Fälle näher betrachten.

1) Die Tangentialebene berührt die Fläche in einem oder in mehreren Punkten.

Findet sich ein System von Werthen für die ξ u. η in der transformirten Gleichung, oder für die x, y, z in den Gleichungen 1) und 4), welches genügt; oder finden sich mehrere Systeme von Werthen (nicht Funktionen): so hat die Tangentialebene mit der Fläche einen oder mehrere Punkte gemein.

6) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist die Gleichung eines Ellipsoids, wenn alle drei Größen a, b, c reell sind, oder die Gleichung eines elliptischen Hyperboloids, wenn zwei von ihnen imaginär sind. Welche Punkte hat die Tangentialebene mit dieser Fläche gemein? Die Tangentialebene in einem Punkte der Fläche, dessen Koordinaten x^1, y^1, z^1 sind, hat die Gleichung

α) $$\frac{xx^1}{a^2} + \frac{yy^1}{b^2} + \frac{zz^1}{c^2} = 1$$

Es muß aber auch für den Punkt x^1, y^1, z^1 die Gleichung

β) $$\frac{x^{1\,2}}{a^2} + \frac{y^{1\,2}}{b^2} + \frac{z^{1\,2}}{c^2} = 1$$

stattfinden. Ich muß nun zusehen, ob sich aus α) und β) Werthe für x, y, z finden lassen, welche zugleich genügen. Zu diesem Zwecke addire ich 6) und β) und ziehe das Doppelte der Gleichung α) ab, so erhalte ich:

$$\frac{(x-x^1)^2}{a^2} + \frac{(y-y^1)^2}{b^2} + \frac{(z-z^1)^2}{c^2} = 0$$

Ziehe ich β und α ab, so folgt

$$\frac{x'(x-x')}{a^2}+\frac{y'(y-y')}{b^2}+\frac{z_1(z-z_1)}{c^2}=0$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen kann ich nun eine von den Größen $x-x'$, $y-y'$ und $z-z'$ eliminiren. Für $z-z'=-\frac{c^2x'(x-x')}{a^2z'}$ ergiebt sich die Gleichung

$$\gamma)\quad \frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^4}\cdot\frac{x'^2}{z'^2}(x-x')^2+\frac{c^2}{b^4}\cdot\frac{y'^2}{z'^2}(y-y')^2+\frac{2c^2}{a^2b^2}\frac{x'y'}{z'^2}(x-x')(y-y')=0$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{c^2}{a^4}\frac{x'^2}{z'^2}\right)(x-x')^2+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2}{b^4}\frac{y'^2}{z'^2}\right)(y-y')^2+\frac{2c^2}{a^2b^2}\frac{x'y'}{z'^2}(x-x')(y-y')=0$$

Um diese Gleichung näher zu untersuchen, multiplizire ich sie mit

$\frac{1}{b^2}+\frac{c^2}{b^4}\frac{y'^2}{z'^2}$, so erhält $(x-x')^2$ den Koefficient

$$\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{c^2}{a^4b^2}\frac{x'^2}{z'^2}+\frac{c^2}{a^2b^4}\frac{y'^2}{z'^2}+\frac{c^4}{a^4b^4}\frac{x'^2y'^2}{z'^4}\right)\text{ oder}$$

$$\frac{c^4}{a^4b^4}\frac{x'^2y'^2}{z'^4}+\frac{c^2}{a^2b^2z'^2}\left(\frac{z'^2}{c^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}\right)$$

Also verwandelt sich die Gleichung, da $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$ ist, in:

$$\frac{c^2}{a^2b^2z^{1\,2}}(x-x^1)^2+\frac{c^4}{a^4b^4}\frac{x^{1\,2}y^{1\,2}}{z^{1\,4}}(x-x^1)^2+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2}{b^4}\frac{y^{1\,2}}{z^{1\,2}}\right)(y-y^1)^2$$

$$+\frac{2c^2}{a^2b^2}\frac{x^1\,y^1}{z^{1\,2}}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2}{b^4}\frac{y^{1\,2}}{z^{1\,2}}\right)(x-x^1)\,(y-y^1)=0 \text{ oder}$$

7) $$\frac{c^2}{a^2b^2z^{1\,2}}(x-x^1)^2+\left[\frac{c^2}{a^2b^2}\frac{x^1y^1}{z^{1\,2}}\;(x-x^1)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{c^2}{b^4}\frac{y^{1\,2}}{z^{1\,2}}\right)(y-y^1)\right]^2=0$$

Sind alle drei Größen a^2, b^2, c^2 positiv oder sind von ihnen je zwei negativ, so ist immer $\frac{c^2}{a^2b^2z^{1\,2}}(x-x^1)^2$ positiv. Das zweite Glied ist unter jeder Bedingung positiv. Man hat also die Summe zweier Quadrate gleich Null; es muß also jedes Quadrat für sich allein gleich Null sein. Hieraus folgert sich

$x=x^1$ und $y=y^1$ und aus $z-z^1=\frac{c^2}{a^2}\frac{x^1}{z^1}(x-x^1)$ folgt auch $z=z^1$

Für die Koordinaten ergiebt sich also e i n S y s t e m von Werthen, d. h. die Tangentialebene hat mit dem Ellipsoid und mit dem elliptischen Hyperboloid nur einen Punkt gemein.

Durch die Koordinatentransformation würde man für die verschiedenen Lagen der Tangentialebene auch nur immer gemeinschaftliche P u n k t e finden.

Wenn bei dem Hyperboloid die Tangentialebene in der Richtung der Asymptoten liegt, so hat dieselbe mit ihm zwei in unendlicher Ferne liegende Punkte gemein, die als in e i n e n zusammenfallend gedacht werden können.

5)

Wenn ich die Lemniskate, deren Gleichung $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ist, um die Achse a rotiren lasse, so erhalte ich die Rotationsfläche, deren Gleichung

8) $$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2-z^2) \text{ ist.}$$

Je nachdem die Tangentialebene an dieser Fläche verschiedene Lagen hat, hat sie mit derselben verschiedene Kurven gemein.

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x^1, y^1, z^1 dieser Fläche ist

$$x x^1 . \left(2(x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2}) - a^2 \right) + y y^1 . \left(2(x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2}) + a^2 \right)$$

$$+ z z^1 \left(2\,(x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2}) + a_2 \right) - 2a_2\,(x^{1\,2}-y^{1\,2}-z^{1\,2}) = 0.$$

Legt man die Tangentialebene parallel der x=Achse, so muß $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} = 0$ sein, also $\frac{dz}{dx} = \frac{x^1}{z^1} \frac{a^2 - 2\,(x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2})}{a^2 + 2(x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2})} = 0$, also $\frac{a^2}{2} = x^{1\,2}+y^{1\,2}+z^{1\,2}$. $\frac{dy}{dx} = 0$ liefert dasselbe Resultat. Substituirt man den Werth für $y^{1\,2}+z^{1\,2}$ in die Gleichung der Fläche, so erhält man

$$x_1 = \pm a \sqrt{\frac{3}{8}} \text{ und } y^{1\,2} + y^{1\,2} \text{ selbst ist } = \frac{a^2}{8}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Tangentialebene ein, so erhält man

$$yy^1 + zz^1 = \frac{a^2}{8}$$

Dies ist die Gleichung der Tangente an einen Kreis. In unserm Falle giebt es zwei Kreise $y^{1\,2}+z^{1\,2} = \frac{a^2}{8}$, die um $\pm a\sqrt{\frac{3}{8}} = x^1$ vom Koordinatenanfangspunkte entfernt liegen, in welchen die Tangentialebene die vorgenannte Rotationsfläche berührt, wenn sie parallel der x=Achse läuft. Die Tangentialebene hat also in der vorgeschriebenen Lage mit dieser Fläche zwei Punkte gemein, deren Koordinaten für $y=0$ sind:

$$z = a\sqrt{\frac{1}{8}}\,,\; x = \pm a\sqrt{\frac{3}{8}} \text{ oder } z = -a\sqrt{\frac{1}{8}}\,,\; x = \pm a\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Legt man die Tangentialebene senkrecht zur x=Achse, so daß $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dz} = 0$ wird, so erhält man für x^1 die Werthe: $x^{1\,2} = 0$ und $x^{1\,2} = a^2$. Den Werthen $\pm$ a entsprechen Berührungspunkte für $y^1 = z^1 = 0$, indem alsdann $\frac{dx}{dy} = \frac{y_1}{a} = 0$ und

$\frac{dx}{dz} = \frac{z'}{a} = 0$ wird. Für $x' = 0$ erhält man $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ und $\frac{dx}{dz} = \frac{0}{0}$ Im Punkte, dessen alle drei Koordinaten gleich Null sind, also im Koordinatenanfangspunkt hat die Fläche besondere Eigenschaften.

6)

Was die Anzahl der einzeln vorkommenden Berührungspunkte betrifft, d. h. solcher Punkte, die nicht in steter Aufeinanderfolge auf einer Berührungslinie liegen, so läßt sich darüber Folgendes bemerken.

Eine Tangentialebene kann eine Fläche vom n^{ten} Grade höchstens in $\frac{n}{2}$ Punkten berühren. Schneidet man nämlich diese Fläche durch eine gerade Linie, so finden höhstens n Durchschnittspunkte statt, deren Koordinaten durch die n Wurzeln der Gleichung bestimmt werden. Damit eine gerade Linie eine Flache in einem Punkte berühre, müssen zwei zunächst an einander liegende Durchschnitttspunkte in einen zusammenfallen. Zwei Wurzeln der Gleichung müssen also einander gleich sein. Wenn also ein Berührungspunkt durch die Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung der Fläche bedingt wird, so ist es ersichtlich, daß bei einer Fläche n^{ten} Grades höchstens $\frac{n}{2}$ einzelne Berührungspunkte vorkommen können. Hieraus folgt auch, daß, wenn n ungerade ist, höchstens $\frac{n-1}{2}$ Berührungspunkte statthaben können. Die Fläche wird in diesem Falle dann noch von der Tangentialebene geschnitten. Es können aber auch mehrere Wurzeln der Gleichung gleiche Werthe annehmen, so daß die Anzahl der Berührungspunkte eine geringere wird.

7)

2) Die Tangentialebene hat mit der Fläche Linien gemein.

Finden sich zwei oder überhaupt 2p paarweise zusammengehörende Funktionen $x=\varphi(z)$ und $y=\psi(z)$ von der Beschaffenheit, daß sie an die Stelle von x und y in die Gleichungen von 1) und 4) gesetzt, dieselben für jeden Werth von z zu gleicher befriedigen, so hat die Fläche mit der Tangentialebene eine oder p Linien gemein. Transformirt man, um die gemeinschaftliche Kurve zu finden, die Gleichung der Fläche nach der in 3) angegebenen Weise, so erhält man die gemeinschaftlichen Linien unmittelbar.

Nehme ich in der Gleichung 6) eine der Größen a_2, b_2 oder c^2 negativ und die beiden andern positiv, so erhalte ich die Gleichung eines hyperbolischen Hyperboloids. Nehme ich also etwa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y_2}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 1$$

an, so nimmt die Gleichung 7) folgende Gestalt an:

$$-\frac{c^2}{a^2b^2z^{1^2}}(x-x^1)^2 + \left[-\frac{c^2}{a^2b^2}\frac{x^1y^1}{z^{1^2}}(x-x_1) - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{c_2}{b^4}\frac{y^{1^2}}{z^{1^2}}\right)(y-y^1)\right]^2 = 0$$

Dies ist eine Differrenz zweier Quadrate, welche in Faktoren zerlegt folgende Gleichungen geben:

$$\frac{c}{a\,b\,z^1}(x-x^1) - \frac{c^2}{a^2b^2}\frac{x^1y^1}{z^{1^2}}(x-x^1) - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{c_2}{b^4}\frac{y_1^2}{z^{1^2}}\right)(y-y^1) = 0$$

12)

$$\frac{c}{a\,b\,z^1}(x-x^1) + \frac{c^2}{a^2\,b^2}\frac{x^1\,y^1}{z^{1^2}}(x-x^1) + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{c^2}{b^4}\frac{y^{1^2}}{z^{1^2}}\right)(y-y^1) = 0$$

Diesen Gleichungen genügen ebenfalls die Werthe $x = x^1$, $y = y^1$. Die Fläche hat aber außerdem noch zwei gerade Linien mit der Tangentialebene gemein, welche durch den Berührungspunkt gehen und deren Projektionen durch vorstehende Gleichungen ausgedrückt sind.

13) Die Gleichung des Paraboloids ist $a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2z$.

Suche ich die gemeinschaftliche Berührungskurve, so erhalte ich

$$a^2(y-y^1)^2 + b^2(x-x^1)^2 = 0$$

Sind a^2 und b^2 positiv, so ergiebt sich nur $x = x^1$ und $y = y^1$. Ist eine von den Größen negativ, etwa a^2, so folgt

14)

$$\left[a(y-y^1) + b(x-x^1)\right]\left[a(y-y^1) - b(x-x^1)\right] = 0$$

d. h. das elliptische Paraboloid hat mit der Tangentialebene nur einen Punkt gemein; das hyperbolische Paraboloid aber wird von der Tangentialebene in zwei geraden Linien geschnitten, welche durch den Berührungspunkt gehen.

8)

Die Gleichung eines Cylinders, dessen Generatrix $x = mz + \alpha$
$y = nz + \alpha'$

und dessen Direktrix $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist,

15) ist $\frac{(x-mz)^2}{a^2} + \frac{(y-nz)^2}{b^2} = 1$

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\frac{(x'-mz')(x-mz)}{a_2} + \frac{(y'-nz')(y-nz)}{b^2} = 1$$

Ferner ist auch $\frac{(x'-mz')^2}{a^2} + \frac{(y'-nz')^2}{b^2} = 1$

Aus diesen drei Gleichungen folgt

α) $$\left[\frac{(x-mz)-(x'-mz')}{a}\right]^2 + \left[\frac{(y-nz)-(y'-nz')}{b}\right]^2 = 0$$

Aus der Gl. der Tangentialebene und der Gl. der Fläche für den Punkt x', y', z' erhalte ich durch Subtraktion

$$(x'-mz')\left[\frac{(x-mz)-(x'-mz')}{a^2}\right] + (y'-nz')\left[\frac{(y-nz)-(y'-nz')}{b^2}\right] = 0$$

und hieraus zieht man

$$\frac{(x-mz)-(x'-mz')}{a} = -\frac{a}{b^2}\frac{y'-nz'}{x'-mz'}\left[(y-nz)-(y'-nz')\right] = 0$$

Setze ich dieses Resultat für $\frac{(x-mz)-(x'-mz')}{a}$ in die Gl. α), so erhalte ich

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{(y'-nz')^2}{(x'-mz')^2}\left[\frac{(y-nz)-(y'-nz')}{b}\right]^2 + \left[\frac{(y-nz)-(y'-nz')}{b}\right]^2 = 0$$

oder $$\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{(y'-nz')^2}{(x'-mz')^2} + 1\right)\left(\frac{(y-nz)-(y'-nz')}{b}\right)^2 = 0$$

Diese letzte Gleichung enthält also zwei Faktoren, von denen aber nur der zweite Werthe für x und y giebt, welche der Gleichung der Fläche und der Gleichung der Tangentialebene zugleich genügen. Ich erhalte die Werthe $y-nz = y'-nz'$ und durch ein ähnliches Verfahren $x-mz = x'-mz'$ 16)

Diese beiden Gleichungen oder die Gleichung $nx-my = nx_1-my^1$ genügen den Gleichungen der Fläche und der Tangentialebene und stellen also eine gerade Linie dar, welche der Tangentialebene und der Fläche gemein ist. Da das Resultat unabhängig von a^2 und b^2 ist, so gilt dasselbe zugleich für den elliptischen, sowie für den hyperbolischen Cylinder.

9.

Bei allen Regelflächen, d. h. bei solchen Flächen, welche eine geradlinige Erzeugende zulassen, muß eben diese Gerade ganz in der Tangentialebene enthalten sein; und wenn es zwei Erzeugungslinien dieser Art giebt, welche beide durch einen gegebenen Punkt gehen, so bestimmen diese beiden zusammen die Tangentialebene für denjenigen Punkt der Fläche, in welchem sie sich schneiden. Dies ist aber der Fall, wie wir gesehen haben, bei dem hyperbolischen Hyperboloid und bei dem hyperbolischen Paraboloid. Die gemeinschaftlichen Linien der Tangentialebene und der Regelfläche bieten einen wesentlichen Unterschied dar. Alle Regelflächen enthalten Gerade, welche sie mit der Tangentialebene gemein haben, aber bei den einen, den entwickelbaren Flächen, berührt die Tangentialebene die Flächen in den Geraden, bei den andern schneidet sie dieselben in ihnen.

10)

In den vorher angegebenen Beispielen hat die Tangentialebene mit der Fläche nur gerade Linien gemein. Die Funktionen $x=\varphi(z)$ und $y=\psi(z)$ waren nur vom ersten Grade. Der Grad derselben ist überhaupt im Allgemeinen abhängig vom Grad der Fläche und von der Lage der Tangentialebene. Untersucht man die gemeinschaftliche Kurve vermittelst der Transformation der Koordinaten und der Feststellung der Lage der Tangentialebene, so ergiebt sich mit der Endgleichung auch zugleich ganz klar der Grad der gemeinschaftlichen Kurve. Wenn sich aber nach der Elimination einer der Koordinaten aus den Gleichungen 1) und 4) Resultate ergeben, wie $x=\varphi(z)$ und $y=\psi(z)$, so ist der höchste Grad der einen oder der andern dieser Funktionen maßgebend für den Grad der gemeinschaftlichen Kurve. Die Funktionen drücken, wie gesagt, die Projektionen der Kurve im Raume auf eine der Koordinatenebenen aus. Es ist nun leicht begreiflich, daß diese Funktionen von verschiedenen Graden sein können. Steht z. B. die Ebene der Kurve senkrecht auf der yz=Ebene, so ist die orthogonale Projektion der Kurve auf diese Koordinatenebene eine gerade Linie und die Funktion $y=\psi(z)$ lineär. Wenn die Ebene der Kurve nicht zugleich senkrecht auf der xz=

Ebene steht, so muß die Projektion auf diese Koordinatenebene den Grad der Kurve geben und $x=\varphi(z)$ hat den Grad der Kurve. Steht die Ebene der Kurve senkrecht auf zwei Koordinatenebenen, so muß sie parallel mit der dritten Koordinatenebene sein und die Projektion auf diese Ebene giebt dann die Kurve selbst.

Die Kurve kann natürlich nicht von einem höheren Grade als die Fläche sein; denn hat diese mit einer Ebene eine Kurve gemein, so findet man letztere, wenn man die Werthe der Koordinaten der Ebene und der Fläche gleich setzt. Man hat also immer nur eine lineäre Substitution zu machen und dadurch wird der Grad der resultirenden Gleichung nicht erhöht.

Ueber den Grad der gemeinschaftlichen Berührungskurve werde ich später etwas Näheres angeben.

11)

Giebt man der Tangentialebene an einem Rotationslemniskatoid Gleichung 8) eine solche Lage, daß der Berührungspunkt zwischen $y=0$ und $x=\pm a\sqrt{\frac{3}{8}}$ liegt, so ergiebt die Diskussion der Gleichung der gemeinschaftlichen Kurve einen Berührungspunkt und außerdem noch eine gemeinschaftliche Kurve, in welcher die Tangentialebene die Fläche schneidet. Wir haben also

3) den Fall, wo die Tangentialebene außer der Tangirung die Fläche noch schneidet.

Läßt man auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r einen andern Kreis mit dem Radius ϱ sich so bewegen, daß der Mittelpunkt des letzteren stets auf der Peripherie des erstern bleibt, daß die beiden Kreisebenen stets senkrecht auf einander stehen und daß ferner die verlängerte Ebene des letztern durch den Mittelpunkt des erstern geht, so entsteht ein kreisringförmiger Körper. Die Gleichung ist

17) $$r^2+\varrho^2\pm 2\,r\sqrt{(\varrho^2-z^2)}=x^2+y^2+z^2$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$xx^1+yy^1+zz^1\left(1\pm\frac{r}{\sqrt{(\varrho^2-{z^1}^2)}}\right)=r^2+\varrho^2\pm 2\sqrt{(\varrho^2-{z^1}^2)}$$

Ich will nun einzelne Lagen der Tangentialebene betrachten und untersuchen, welche Kurven sie mit der Fläche gemein hat.

Steht die Tangentialebene senkrecht auf der x-Achse, so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dz} = 0, \frac{dx}{dy} = -\frac{y'}{x'} = 0 \text{ und } \frac{dx}{dz} = \frac{z'}{x'}\left(\frac{r}{\sqrt{(\varrho^2 - z'^2)}} - 1\right) = 0.$$

Hieraus erhalte ich die Werthe $y' = 0$, $z' = 0$ und $z'^2 = \varrho^2 - r^2$

Für $y' = z' = 0$ folgt $x' = (r \pm \varrho)$

Der zweite Werth $z' = \pm\sqrt{(\varrho^2 - r^2)}$ ist imaginär, wenn $r > \varrho$.

Setzt man $x' = z' = 0$ und $x' = r + \varrho$ in die Gleichung der Tangentialebene und substituirt den Werth für $x' = r + \varrho$ in die Gl. der Fläche, so erhält man $x = \pm(r + \varrho)$ $y = 0$ und $z = 0$, also zwei Punkte, in welchen die Tangentialebene die Fläche berührt. Setzt man $x = (r - \varrho)$ in die Gleichung der Fläche ein, so erhält man

18) $$(y^2 + z^2)^2 = 4r\,(\varrho y^2 + \varrho z^2 - rz^2)$$

als Gleichung der gemeinschaftlichen Kurve.

Dieser Gleichung genügen ebenfalls die Werthe $y = z = 0$ und man erhält dann $x = r - \varrho$, $y = 0$ und $z = 0$ als die Koordinaten des Berührungspunktes. Außerdem schneidet aber die Tangentialebene die Fläche noch in der Kurve, deren Gleichung 18) ist. Das Kennzeichen hierfür soll späterhin noch angegeben werden.

Wenn ich die Tangentialebene parallel der xy-Ebene an die kreisringförmige Fläche lege, so ergiebt sich $z = \varrho$, und die gemeinschaftliche Kurve ist der Kreis $x_2 + y_2 = r^2$, in welcher die Tangentialebene die Fläche berührt.

12)

Welches ist das Kriterium dafür, daß die Tangentialebene die gegebene Fläche in der gemeinschaftlichen Kurve berühre?

Transformirt man die Gleichung der gegebenen Fläche so, daß eine der Koordinatenebenen, etwa die Ebene der xy, parallell der Tangentialebene wird und untersucht, ob für den betreffenden gemeinschafttichen Punkt ein **Maximum** oder **Minimum** der Ordinate stattfindet, so gilt Folgendes:

Die Tangentialebene berührt nur die Fläche, ohne sie noch in einer andern Kurve zu schneiden, wenn z gleich einem **Maximum** wird, und wenn in Folge dessen das **Maximum** plus einer beliebigen variablen Größe h für z substituirt, einen imaginären Schnitt erzeugt; oder wenn z gleich einem **Minimum** wird, und wenn das **Minimum** minus einer beliebigen variablen Größe h substituirt einen imaginären Schnitt hervorbringt. Diese Untersuchungen muß man für jeden besonderen Fall anstellen, da die Analysis für alle besonderen Punkte und Linien einer Fläche (zu denen die Maxima und Minima auch zu rechnen sind) nur ein allgemeines Kennzeichen giebt, indem die Differentialquotienten $=0$ oder $=\infty$ oder $=\frac{0}{0}$ werden. Diese besondern Punkte oder Linien sind Grenzen, innerhalb welcher und über welchen die Flächen eine andere Beschaffenheit zeigen.

Legt man durch einen Punkt der z-Achse an die kreisringförmige Fläche alle nur möglichen Tangentenlinien, so erhält man zwei Tangentenkegel, welche für besondere Werthe für z in eine Ebene oder einen Cylinder übergehen, also bestimmte Grenzen erreichen. Ist der Scheitelpunkt des Kegels vom Koordinatenanfangspunkt um $z=\varrho$ entfernt, so wird z. B. der außere Kegel in eine Ebene übergehen. Ist $z=\infty$, so geht der Kegel in einen Cylinder über.

Wenn die Tangentialebene an der kreisringförmigen Fläche parallel mit der xy-Achse ist, so erhält man für das **Maximum** von z

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{z}\,\frac{\sqrt{(\varrho^2-z^2)}}{r\mp\sqrt{(\varrho^2-z^2)}}=0 \text{ und } \frac{dz}{dy}=\frac{y}{z}\,\frac{(\sqrt{\varrho^2-z^2})}{r-\sqrt{(\varrho^2-z^2)}}=0$$

Hieraus findet man $x=y=0$ oder $\varrho^2=z^2$; $x=y=0$ kann nicht stattfinden; denn substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Fläche, so erhält man

$$r^2+\varrho^2-z^2=2r\sqrt{(\varrho^2-z^2)}$$

$$r^4+\varrho^4+z^4+2r^2\varrho^2-2r^2z^2-2\varrho^2z^2=4r^2\varrho^2-4r^2z^2$$

$$r^4+\varrho^4+z^4-2r^2\varrho^2+2r^2z^2-2\varrho^2z^2=0;\ (z^2+r^2-\varrho^2)^2=0$$

oder $z^2=\varrho^2-r^2$, welches imaginär ist, wenn $r>\varrho$ ist.

Es kann also nur $z^2=\varrho^2$ gelten, dafür erhalte ich $x^2+y^2=r^2$ als die Gleichung der gemeinschaftlichen Kurve, für deren jeden Punkt $z^2=\varrho^2$ gleich einem **Maximum** ist, Setze ich $z+h$ für z ein, so erhalte ich $r^2+\varrho^2\mp2r\sqrt{(-h^2-2h\varrho)}=x^2+y^2+(\varrho+h)^2$. Dies ist für x^2+y^2 ein imaginärer Werth. Es ist also $x^2+y^2=r^2$ eine Berührungskurve. Für den Cylinder wird man nach dieser Methode ebenfalls finden, daß er in einer geraden Linie nur berührt wird.

13)

Findet man für z ein Maximum oder Minimum $z_{,}=M$ und für diesen Werth ein System oder mehrere Systeme zugehöriger Abscissen $x_{,}$, $y_{,}$, (welche einen oder mehrere Punkte ausdrücken), so ergiebt sich im ersten Falle für z ein kleinerer Werth als das Maximum und im zweiten Falle ein größerer Werth als das Minimum, wenn ich die Abscissen $x_{,}$ und $y_{,}$ um eine kleine Größe wachsen oder abnehmen lasse. Unter diesen Bedingungen habe ich Berührungspunkte erhalten. Lasse ich x und y immerfort wachsen oder abnehmen, so kann man doch endlich auf eine Funktion $f(x_{,}+\alpha, y_{,}+\beta)$ kommen, welche wieder dem $z_{,}=M$ entspricht. Die Tangentialebene hat dann außer den Berührungspunkten noch eine Kurve mit der Fläche gemein, welche unter den vorhergenannten Bedingungen eine Berührungskurve oder andern Falls eine Schnittkurve sein kann.

14)

Ueber den Grad der Gleichung der gemeinschaftlichen Berührungskurve.

Die Tangentialebene berührt den Kegel, den Cylinder ꝛc. überhaupt alle entwickelbaren Flächen in geraden und zwar die Flächen vom zweiten Grade in einer geraden Linie. Ferner haben wir gesehen, daß die Berührungskurve bei der kreisringförmigen Fläche ein Kreis ist. Die Gleichung der genannten Fläche ist vom vierten Grade, die des Kreises vom zweiten. Diese und ähnliche Betrachtungen leiten zu dem Schlusse, daß die gemeinschaftliche Berührungskurve zwischen der Tangentialebene und einer Fläche des n^{ten} Grades höchstens vom $\frac{n}{2}$ten Grade sein kann.

Ziehe ich durch die Fläche eine Linie parallel der Tangentialebene, so kann diese Linie die Fläche höchstens in n Punkten schneiden. Diese n Punkte geben n Wurzeln der Gleichung. Nähert sich nun diese gerade Linie immer mehr der Tangentialebene, so rücken je zwei und zwei Durchschnittspunkte immer näher zusammen, bis sie im Berührungspunkte in einen zusammenfallen. Alsdann liegt diese Linie in der Tangentialebene und es folgt klar, daß diese Tangentiallinie mit der Fläche höchstens $\frac{n}{2}$ Punkte gemein hat. Dies sind aber nur Punkte der gemeinschaftlichen Berührungskurve. Da nun die Linie jede beliebige Lage in der Tangentialebene haben kann, so kann sie die gemeinschaftliche Berührungskurve auch nur in höchstens $\frac{n}{2}$ Punkten schneiden. Dies kann aber nur stattfinden, wenn die Gleichung, also auch die Kurve selbst vom $\frac{n}{2}$ ten Grade ist.

15)

An dieser Stelle könnte man auch Untersuchungen über die Krümmung der Flächen in den Punkten der gemeinschaftlichen Berührungskurve anstellen, z. B. ob der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes, den man durch die Tangente der gemeinschaftlichen Berührungskurve führt, ein Maximum sei und dergl.; aber dies bezieht sich wohl mehr auf die Eigenschaft der Flächen, als auf die gemeinschaftliche Berührungskurve selbst.

16)

Findet, obgleich $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0$, oder die Tangentialebene parallel der xy-Ebene ist, für deren Berührungspunkt weder ein Maximum noch ein Minimum statt, so schneidet die Tangentialebene die Fläche in einer Kurve, welche durch den Berührungspunkt geht. Hierzu liefert der Schnitt ein Beispiel, welchen die Tangentialebene mit der Kreisringfläche bildet, wenn für den Berührungspunkt $x'^2 + y'^2 = (r-\varrho)^2$ oder noch specieller $y' = 0$ und $x' = \pm(r-\varrho)$ ist, d. h. wenn die Tangentialebene parallel der yz-Ebene ist; denn alsdann ist $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dz} = 0$; und alle Differentialquotienten sind ebenfalls gleich Null, weil $x = \pm(r-\varrho)$ constant ist. Setze ich für x in die Gleichung der Fläche $x = r-\varrho+h$, wo h positiv und negativ sein kann, so erhalte ich für y und für z reelle Werthe, so lange h zwischen $+2\varrho$ und $-2r$ liegt.

Aehnliche Beispiele liefern die nicht abwickelbaren Flächen, welche gerade Linien enthalten, wie das hyperbolische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

17)

Findet ein Maximum oder finden mehrere Maxima für die Ordinate statt, genügt aber auch ein Werth der Ordinate, welcher größer ist als das Maximum, und welcher Abscissen entspricht, die zwischen gewissen Grenzen zu- oder abgenommen haben, der Gleichung der Fläche, so daß die dadurch entstehenden Schnitte reell werden; oder findet ein Minimum oder finden mehrere Minima statt, und genügt die Ordinate gleich dem Minimum minus einer Größe h der Gleichung der Fläche ganz in ähnlicher Weise, so berührt die Tangentialebene die Fläche und schneidet sie außerdem noch in einer Kurve, welche nicht durch den Berührungspunkt geht. Ist $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche und findet für $z_{,} = f(x_{,}, y_{,})$ ein Maximum statt, so sollen in unserm Falle alle Werthe der Ordinaten für jeden andern nahe liegenden Werth von $f(x, y)$ kleiner sein als z, und $z_{,} + h = f(x_{,} + g, y_{,} + k)$ in die Gleichung der Fläche substituirt, giebt einen imaginären Werth. Läßt man aber x und y weiter wachsen, und kommt man endlich auf eine Funktion $f(x_m, y_m)$, welche gleich $z_{,}$ wird, so daß aber für diesen Punkt kein Maximum stattfindet, so schneidet alsdann die Tangentialebene die Fläche.

Lasse ich die Kurve, deren Gleichung $y = \pm\sqrt{x(x^2-b^2)}$ ist, sich um die x-Achse so drehen, daß jeder Punkt etwa eine Ellipse beschreibe, so erhalte ich eine Fläche deren Gleichung

$$y^2 + n^2 z^2 = x(x^2-b^2) \text{ ist.}$$

Die Tangentialebene soll parallel der xz-Ebene gelegt werden, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = 0$ also $-\frac{n^2 z}{y} = 0$ und $\frac{3x^2-b^2}{2y} = 0$ Daraus ziehe ich die Werthe $z = 0$ u. $x = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}$ und für $z = 0$, $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$ erhalte ich für y das Maximum $\pm\sqrt{b^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{27}}}$.

Lasse ich nun x von $-\frac{b}{\sqrt{3}}$ wachsen, so muß ich endlich wieder auf einen Werth für x kommen, welcher dem Maximum von y entspricht. Dieser Werth, den ich aus $\frac{2b^3}{\sqrt{27}} = x(x^2-b^2)$ finde, ist $x = \frac{2b}{\sqrt{3}}$. Alle Werthe von y für $x > b$ sind reell.

Die Tangentialebene berührt also die Fläche in dem Punkte $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{2b^3}{\sqrt{27}}}$ und schneidet sie außerdem noch in einer Kurve, deren Gleichung

$$x(x^2-b^2) - n^2 z^2 = \frac{2b^3}{\sqrt{27}} \text{ ist.}$$

18)

Wie die Tangentialebene mit der gegebenen Fläche in Verbindung treten könne, habe ich im Vorhergehenden angegeben. Es bleibt nur noch übrig zu untersuchen, in welchen Beziehungen der Berührungspunkt zu der der Tangentialebene und der Fläche gemeinsamen Kurve stehe. Es können folgende Fälle stattfinden:

1) Der Berührungspunkt kommt nur isolirt liegend vor.
2) Der Berührungspunkt liegt isolirt; die Tangentialebene hat aber mit der Fläche noch Kurven gemein, welche also nicht durch den Berührungspunkt gehen.
3) Die gemeinschaftliche Kurve geht durch den Berührungspunkt.

Es ist nun zu untersuchen, welche Eigenschaften die Berührungspunkte in Bezug auf die gemeinschaftliche Kurve haben.

19)

Der Berührungspunkt kann als eine unendlich kleine Ellipse angesehen werden.

$F(x,y,z) = 0$ sei die Gleichung der Fläche; x^1, y^1, z^1 seien die Koordinaten eines Punktes auf derselben. Es muß demnach auch $F(x^1,y^1,z^1) = 0$ sein.

Ist x^1,y^1,z^1 der Berührungspunkt der Tangentialebene, so ist

$$(x-x^1)\frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1} + (y-y^1)\frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dy^1} + (z-z^1)\frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dz^1} = 0$$

Nehme ich irgend einen beliebigen, jedoch sehr nahe am Punkt x^1,y^1,z^1 liegenden Punkt auf der Fläche, dessen Koordinaten in Bezug auf den Punkt x^1,y^1,z^1 (welchen ich hier als Koordinatenanfangspunkt betrachte) $\triangle x^1$, $\triangle y^1$, $\triangle z^1$ sind, so sind die Koordinaten dieses letzten Punktes in Beziehung auf den ursprünglichen Koordinatenanfangspunkt $x^1+\triangle x^1$, $y^1+\triangle y^1$, $z^1+\triangle z^1$; und weil es ein Punkt der Fläche ist, so muß auch die Gleichung $F(x^1+\triangle x^1, y^1+\triangle y^1, z^1+\triangle z^1) = 0$ stattfinden. Entwickele ich den linken Theil der Gleichung nach dem Taylorschen Satze, so erhalte ich

$$F(x^1+\Delta x^1, y^1+\Delta y^1, z^1+\Delta z^1) = F(x^1,y^1,z^1)$$

$$+\left[\frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1}\Delta x^1 + \frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dy^1}\Delta y^1 + \frac{d\,F(x^1,y^1,z^1)}{dz^1}\Delta z^1\right]$$

$$+\frac{1}{1.2}\Big[\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^{1^2}}\Delta x^{1^2}+\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dy^{1^2}}\Delta y^{1^2}+\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dz^{1^2}}\Delta z^{1^2}$$

$$+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1\,dy^1}\Delta x^1\,\Delta y^1+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1\,dz^1}\Delta x^1\,\Delta z^1+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dy^1\,dz^1}\Delta y^1\,\Delta z^1\Big]$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\Big[\frac{d^3F(x^1,y^1,z^1)}{dx^{1^3}}\Delta x^{1^3}+\ldots\ldots\Big]$$

$F(x^1,y^1,z^1)$ ist $=0$. Das zweite Glied der Entwickelung ist ebenfalls gleich Null, weil es der linke Theil der Gleichung für die Tangentialebene ist; denn es ist $x=x^1+\Delta x^1$, $y=y^1+\Delta y^1$, $z=z^1+\Delta z^1$.

Nimmt man ferner $\Delta x^1,\Delta y^1,\Delta z^1$ sehr klein an, (da doch zur Bedingung, daß die Ebene die Fläche berühre, gehört, daß die beiden gemeinsamen Punkte in einen zusammenfallen, d. h. $\Delta x^1,\Delta y^1,\Delta z^1$ gleich Null werden,) so kann man alle Glieder von einer in Bezug auf $\Delta x^1,\Delta y^1,\Delta z^1$ höheren Dimension, als der zweiten, fortlassen, weil sie gegen diese als unendlich klein zu betrachten sind. Man erhält auf diese Weise

$$0=\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^{1^2}}\Delta x^{1^2}+\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dy^{1^2}}\Delta y^{1^2}+\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dz^{1^2}}\Delta z^{1^2}$$

$$+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1\,dy^1}\Delta x^1\Delta y^1+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dx^1\,dz^1}\Delta x^1\Delta z^1+2\frac{d^2F(x^1,y^1,z^1)}{dy^1\,dz^1}\Delta y^1\,\Delta z^1$$

Diese Gleichung drückt eine Fläche des zweiten Grades mit einem Mittelpunkte aus. Sie fällt in dem Punkte x^1,y^1,z^1 mit der Fläche $F(x,y,z)=0$ zusammen. Hieraus folgt nun, daß wenn man durch den bestimmten Punkt der Fläche eine Tangentialebene legt, diese die Fläche in einer unendlich kleinen Kurve des zweiten Grades schneidet. Diese Kurve ist aber eine Ellipse. Verwandelt man die Koordinaten so, daß die Tangentialebene und die Ebene der xy einander parallel sind, so nimmt alsdann die Gleichung der unendlich kleinen Kurve folgende Form an:

$$0=\frac{d^2F(x^1,y^1,)}{dx^{1^2}}\Delta x^{1^2}+\frac{d^2F(x^1,y^1,)}{dy^{1^2}}\Delta y^{1^2}+2\frac{d^2F(x^1,y^1,)}{dx^1\,dy^1}\Delta x^1\,\Delta y^1$$

Es wird nun der Werth für $\frac{dy}{dx}$ imaginär, also ist

$$\pm\sqrt{\Big[\Big(\frac{d^2F(x^1,y^1)}{dx^1\,dy^1}\Big)^2-\frac{d^2F(x^1,y^1)}{dx^{1^2}}\quad\frac{d^2F(x^1,y^1)}{dy^{1^2}}\Big]}$$

imaginär, also

$$\left(\frac{d^2F(x^1,y^1)}{dx^1\,dy^1}\right)^2 - \frac{d^2F(x^1,y^1)}{dx^{1^2}} \cdot \frac{d^2F(x^1,y^1)}{dy^{1^2}} < 0$$

Dies ist zugleich die Bedingung, daß die unendlich kleine Kurve, welche durch obige Gleichung ausgedrückt wird, eine Ellipse ist.

20)

Der Berührungspunkt kommt als isolirter, konjugirter Punkt vor.

Hat die Tangentialebene mit der Fläche außer den isolirten Punkten noch Kurven gemein, welche nicht durch die Berührungspunkte gehen (gleichviel ob die Fläche von der Tangentialebene geschnitten oder berührt wird), so sind die Berührungspunkte zu den Kurven zugehörige, isolirte Punkte.

Die erste Bedingung, welche hiebei erforderlich ist, besteht darin, daß die Punkte zugleich mit in der Gleichung der gemeinschaftlichen Kurve ausgedrückt sind. Dies muß der Fall sein, denn setzt man den Werth für z, welcher nach der oftmals erwähnten Transformation der Tangentialebene entspricht, in die Gleichung der Fläche, so entsteht im Allgemeinen nur eine Gleichung, welche die gemeinschaftliche Kurve ausdrückt. Diese Gleichung kann sich nun in Faktoren zerlegen lassen, welche einzeln für sich von einander verschiedene Kurven oder auch Punkte ausdrücken können. Ursprünglich aber sind alle gemeinschaftliche Kurven und Punkte in einer Gleichung enthalten. Der Punkt ist dann ein zur Kurve zugehöriger. So enthält z. B. die Gleichung $x(x^2-b^2)-n^2z^2 = \frac{2\,b^3}{\sqrt{27}}$ auch die Koordinaten des Berührungspunktes, nämlich $z=0$ und $x = -\frac{b}{\sqrt{3}}$, wenn $y = \sqrt{\frac{2b^3}{\sqrt{27}}}$ gleich dem Maximum war.

Ferner müssen, wenn der Berührungspunkt ein isolirter sein soll, die Differentialquotienten der Koordinaten der Kurve vom ersten ab alle imaginär werden, oder, was dasselbe ist, es kann in diesem Punkte an der Kurve keine Tangente gezogen werden.

Ist $F(x,y,c) = 0$ die Gleichung der gemeinschaftlichen Kurve, so ist

$$\frac{dF(x,y,c)}{dx}dx + \frac{dF(x,y,c)}{dy}dy = 0 \text{ oder } \frac{dF(x,y,c)}{dx} + \frac{dF(x,y,c)}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

Da aber wegen der Parallelität der Tangentialebene mit der xy-Ebene diese letzte Gleichung identisch gleich Null wird, so läßt sich $\frac{dy}{dx}$ nicht bestimmen. Man muß deswegen zum zweiten Differentialquotient übergehen. Man erhält, wenn man dx als konstant betrachtet:

$$\frac{d^2F(x,y,c)}{dx^2} + 2\,\frac{d^2F(x,y,c)}{dx\ dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F(x,y,c)}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Werden diese zweiten Differentialquotienten nicht gleich Null, so erhält man also für die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Tangentiallinie in dem Berührungspunkt mit der x-Achse bildet,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{d^2F(x,y,c)}{dx\ dy} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{d^2F(x,y,c)}{dx\ dy}\right)^2 - \frac{d^2F(x,y,c)}{dx^2}.\ \frac{d^2F(x,y,c)}{dy^2}\right]}}{\frac{d^2F(x,y,c)}{dy^2}}$$

Soll nun keine Tangente in dem isolirten Punkte möglich sein, so muß dieser Werth für $\frac{dy}{dx}$ imaginär, also

$$\left(\frac{d^2F(x,y,c)}{dx\ dy}\right)^2 - \frac{d^2F(x,y,c)}{dx^2}.\ \frac{d^2F(x,y,c)}{dy^2} < 0$$

werden.

Die Bedingung, daß die Kurve nicht durch den isolirten Punkt gehe, ist, daß $F(x,y,\pm k,c) = 0$ für x oder $F(x,\pm h,y,c) = 0$ für y imaginäre Werthe liefert, wenn nämlich x,, y, die Koordinaten des Berührungspunktes und k und h kleine Incremente sind. Alle diese Bedingungen werden bei der Gleichung $x(x^2 - b^2) - n^2 z^2 = \frac{2b^3}{\sqrt{27}}$ erfüllt.

21)

Berührt die Tangentialebene die Fläche in einer gemeinschaftlichen Kurve, so hat ein Berührungspunkt als solcher vor allen andern, die in stetiger Folge auf der Kurve liegen, keine besondere Eigenschaften voraus. Berührt die Tangentialebene die Fläche in einem Punkte und schneidet sie noch außerdem in einer Kurve, die durch den Berührungspunkt geht, so kann der Berührungspunkt zur gemeinschaftlichen Kurve in alle Beziehungen treten, wie jeder besondere Punkt zu seiner Kurve.

Man erhält Haltpunkte, Rückkehrpunkte, Doppel- oder vielfache Punkte, Wendepunkte. Ueber diese besonderen Punkte findet man vollständige Auseinandersetzungen in verschiedenen Lehrbüchern über Differentialrechnung; und es wäre demnach überflüssig, wenn ich hier etwas darüber sagen wollte.

22)

Zum Schluß will ich noch Andeutungen über die besonderen Punkte und Linien bei Flächen anführen. Da sie auf die verschiedensten Arten entstehen können, und da es überhaupt schwierig ist, allgemein die verschiedenen Lagen und Gestalten derselben nachzuweisen, so will ich nur an den folgenden sechs Gattungen zu zeigen suchen, wie sie allein durch Umdrehung der Kurven sich schon so vielfältig zeigen. Betrachte ich bei einer ebenen Kurve:

1) Doppelpunkte im engeren Sinne des Wortes,
2) Spitzen,
3) Isolirte, konjugirte Punkte,

und dreht man die Kurve, welche den einen oder den andern dieser Punkte enthält, um eine Achse, so bietet die dadurch entstehende Rotationsfläche folgende besondere Punkte und Linien dar:

1) den konischen Doppelpunkt,
2) die konische Spitze,
3) den konjugirten konischen Punkt.

Diese Fälle treten dann ein, wenn bei der rotirenden Kurve der besondere Punkt ruht, oder, was dasselbe ist, wenn die Rotationsachse durch den besonderen Punkt geht. Geht aber die Rotationsachse nicht durch den besonderen Punkt, sondern bewegt sich derselbe, so entsteht

1) eine besondere Linie von Doppelpunkten,
2) eine besondere Linie von Spitzen und
3) eine besondere Linie von konjugirten Punkten.

Setze ich in der allgemeinen Gleichung $y = \pm\sqrt{x(x-b)(x+c)}$ $c=0$, so erhalte ich eine Kurve, welche im Koordinatenanfangspunkt einen isolirten Punkt hat. Man drehe nun diese Kurve um die x-Achse, so daß jeder Punkt eine Ellipse beschreibe, so wird die Gleichung dieser Rotationsfläche $y^2+n^2z^2=x^2(x-b)$. Diese Fläche hat nur einen konischen, isolirten Punkt im Koordinatenanfangspunkte.

Wenn ich in der Gleichung $y=\pm\sqrt{x(x-b)(x+c)}$ $c=0$ und $y=y+d$ setze, so geht die Gleichung über in $y+d=\pm\sqrt{x^2(x-b)}$; wird nun die Kurve um die x=Achse bewegt, so erzeugt der konjugirte Punkt eine Linie von konjugirten Punkten, oder eine besondere isolirte Linie im engern Sinne. Die Fläche, welche durch diese Operation entsteht, wird durch die Gleichung $\sqrt{(y^2+n^2z^2)}+d=\sqrt{x^2(x-b)}$ ausgedrückt.

Wenn b und c zugleich verschwinden, so hat die Kurve $y=\pm\sqrt{x(x-b)(x+c)}$ eine Spitze im Koordinatenanfang. Die Rotation der Kurve $y^2=x^3$ um die x=Achse erzeugt eine Fläche mit einer konischen Spitze.

Setzt man aber $y=y+d$ und bewegt nun die Kurve um die x=Achse, so entsteht die besondere Spitzenlinie. Die beiden dadurch entstehenden Flächen werden bezeichnet durch $y^2+n^2z^2=x^3$ und durch $\sqrt{(y^2+n^2z^2)}+d=\pm x\sqrt{x}$.

Macht man $b=0$, ohne daß c verschwindet, so entspricht der Gleichung $y^2=x^2(x+c)$ eine Kurve, welche im Koordinatenanfang einen Doppelpunkt hat. Man drehe nun diese Kurve um die x=Achse, so entsteht die Fläche $y^2+n^2z^2=x^2(x+c)$, welche einen konischen Doppelpunkt im Koordinatenanfang hat. Dreht man die Kurve $y+\delta=\pm\sqrt{x^2(x+c)}$ um die x=Achse, so entsteht eine besondere Linie von konischen Doppelpunkten.

23)

Es sollen die vielfachen und isolirten Punkte und Linien einer Fläche gefunden werden, wenn sie dergleichen hat. Wir verlegen den Anfangspunkt der Koordinaten nach dem noch unbestimmten Punkte $x^1y^1z^1$, indem ich für $x\,y\,z$ setze $x+x^1$, $y+y^1$, $z+z^1$. Sind nun $Px+Qy+Rz+S$ die vier letzten Glieder der resultirenden Gleichung, worin P, Q, R, S Funktionen von $x^1y^1z^1$ bedeuten, so setze man $P=Q=R=S=0$. Findet sich dann ein System von Werthen von $x^1y^1z^1$, welches zu gleicher Zeit diese 4 Gleichungen befriedigt, oder finden sich mehrere solche Systeme, so hat die gegebene Fläche einen oder mehrere vielfache Punkte, deren Koordinaten $x^1y^1z^1$ auf diese Weise gefunden sind, und welche auch isolirte Punkte sein können. Finden sich aber zwei Funktionen $x^1=\varphi(z^1)$ und $y^1=\psi(z^1)$ von der Beschaffenheit, daß sie an Stelle von x^1 und y^1 in die genannten 4 Gleichungen gesetzt, diese Gleichungen für jeden Werth

4

von z' befriedigen, so hat die Fläche eine vielfache Linie, deren Gleichungen $x=\varphi(z)$ und $y=\psi(z)$ auf diese Weise gefunden sind, und welche auch eine isolirte Linie sein kann.

In dem Vorliegenden habe ich eigentlich mehr Andeutungen, als Ausführungen gegeben, ohne Ansprüche auf Vollständigkeit machen zu können. Das Zusammentreffen äußerer Umstände hat zum Theil die Art und Weise, so wie die Ausdehnung dieser Arbeit bestimmt.

A. Behlau.