DE

ELLIPSI MINIMA
DATO QUADRANGULO CIRCUMSCRIPTA

QUAESIVIT

FRANCISCUS SEYDEWITZ.

HAGIOPOLI,

EX OFFICINA J. C. DOELLII ET C. BRUNNII.

1848.

Perlegenti nuper, quae de problemate suprascripto Illustr. Angerus, gymnasii Danzici Director, disseruit, in mentem mihi venit propositionis cuiusdam, in quam paullo antea incideram, quum de persimili re, scilicet de ellipsi maxima quadrilatero inscribenda quaererem, et qua iam tunc mihi videbatur ad eiusdem problematis solutionem via ab illa Euleriana plane diversa aperiri. Neque ea me spes fefellit; intellexi tamen, postquam propius ad rem accessi, solutionem, quam inde obtinui, ad eas quidem figuras, quae ad universum quadrangulorum genus pertinent, accommodatissimam esse ac praesertim peculiari geometriae usui magis se applicare, quam illam, cuius Eulerus inventor fuit, paene totam in numerorum spinis versantem: in speciebus vero, ut in trapezio, in parallelogrammo et in quadrangulo decurtato sive triangulo, excepta una, ubi alterutra diagonalium per alteram bipartitur, omni plane usu carere. In his igitur ad alias methodos confugiendum erit, quas tamen, quum nihil difficultatis habeant, hic praetermittam.

§. 1.

Fingamus, esse rectas PQ, QR, RP tres polares harmonicas coniugatas, ad ellipsin ABCD relatas; rectam MZ semidiametrum huius ellipseos per punctum R ductam et lineam PQ in puncto V secantem, atque MX esse semidiametrum lineae PQ parallelam: primum apparet, puncta R et V duos polos esse harmonicos coniugatos rectae MZ, et ob eam caussam

$$MR \,.\, MV = MZ^2.$$

Deinde quum sit PQ polaris harmonica puncti R, eademque lineae MX parallela, erit MX semidiametro MZ coniugata, atque ideo puncta Y et y, ubi MX per lineam PR et per lineam Qy, rectae MZ parallelam, secatur, erunt duo poli harmonici coniugati lineae MX, itaque

$$MY \,.\, My = MX^2.$$

Jam vero, si angulos QRV, PRV, RMY (seu RVP), QPR et PRQ deinceps literis α, β, φ, γ, ψ designemus, aequationes prodeunt hae:

$$MY = MR. \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{et} \quad My = QV = RQ. \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = PQ. \frac{\sin\alpha.\ \sin\gamma}{\sin\varphi.\ \sin\psi};$$

unde sequitur:

$$[MZ.MX.\sin\varphi]^2 = [2\triangle ZMX]^2 = MR.MV.MY.My.\sin^2\varphi = MR^2.MV.PQ. \frac{\sin\alpha.\ \sin\beta.\ \sin\varphi}{\sin\psi};$$

vel si literis p, q, r rectae perpendiculares e centro M ad QR, PR, PQ demissae notentur:

$$[2\triangle ZMX]^2 = \frac{PQ}{\sin\psi}.\, p.\, q.\, r,$$

quia $p = MR.\ \sin\alpha$, $q = MR.\ \sin\beta$ et $r = MV.\ \sin\varphi$ esse debent.

Quoniam duarum ellipsium areae ut triangula a binis semidiametris coniugatis earum constituta se habent: si tres polares harmonicas coniugatas PQ, QR, RP easdem simul ad diversas ellipses referamus, et literis p, p_1; q, q_1; r, r_1 aut, perinde ut supra, ternas rectas perpendiculares aut omnino ternas parallelas, e centris earum ad lineas QR, RP, PQ demissas designemus, ex aequatione modo inventa colligimus, areas illarum ellipsium quadratas esse sicut producta $p.q.r$ et $p_1.q_1.r_1$; id quod in hunc modum exprimere possumus:

Theorema 1.

Binarum ellipsium areae quadratae sunt inter se, ut ternorum segmentorum producta, quae, tribus rectis lineis utcunque datis parallela, inter centra ipsarum et tres rectas polares harmonicas coniugatas, curvis ipsis communes, intercipiuntur.

Hinc autem, quoniam lineae PQ, QR, RP, quae intersectiones P, Q, R laterum oppositorum quadranguli completi ABCD inter se iungunt, quoad omnes ellipses per puncta A, B, C, D transeuntes, polares tres harmonicae coniugatae sunt, sine ullo negotio efficitur:

Theorema 2.

Inter omnes ellipses, per eadem quattuor puncta transeuntes, eius area minima erit, e cuius centro si ad eas lineas, quae coraustorum*) quadranguli completi, per illa puncta constituti, intersectiones tres coniungunt, tria segmenta datis quibuslibet rectis parallela ducantur, istorum segmentorum productum omnium minimum existet.

Praeterea constat, quod etiam in tomo quarto „Archivi Grunertiani" geometrice a me ostensum est:

---

*) Haec vox, a lexicographis neglecta, apud Boëtium vel potius Julium Frontinum, quem ille sequitur, quadranguli latus basi oppositum, hic omnino latera eius opposita significat (Chasle's Gesch. d. Geom., übersetzt v. Sohnke, p. 522.)

Theorema 3.

Omnium sectionum conicarum, per eadem quattuor puncta transeuntium, centra in alius sectionis conicae peripheria sita esse, quae quadranguli completi, per illa puncta constituti, latera sex bifariam secet atque insuper coraustorum eius tres intersectiones contineat.

Duobus hisce theorematis posterioribus perspectis, cetera omnia per se patent. Primum enim aequatio eius sectionis conicae, quae omnium ellipsium quadrangulo dato circumscriptarum centra complectitur, quaerenda et, quo facilior theorematis secundi applicatio fiat, ita conformanda erit, ut segmenta, quae tria numero e singulis huius sectionis conicae punctis ad polares harmonicas coniugatas, illis ellipsibus communes, ducuntur, simul coordinatarum vices sustineant; deinde istius aequationis ope oportebit productum trium illorum segmentorum per haec ipsa segmenta variabilia exprimatur et differentiale eius = o ponatur; quo facto, assumptaque ad duas aequationes ita ortas tertia, quae inter tres cuiusque puncti coordinatas intercedit, conditiones centri ellipseos quaesitae apparebunt.

§. 2.

Ponamus igitur, esse A, B, C, D puncta quattuor data, per quae ellipsis minima ducatur: ante omnia moneo, haec puncta ita debere inter se collocata esse, ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat. Sint porro P, Q, R intersectiones coraustorum AB et CD, AC et BD, AD et BC quadranguli completi, quod per illa puncta constituitur; puncta J, G, L, E, F, H medietates istorum laterum, et P_1, Q_1, R_1 ea puncta, ubi lineae QR, PR, PQ a lineis PA, QA, RA secantur. Supponitur autem hic, A illud esse e quattuor punctis A, B, C, D, quod intra triangulum PQR se habet. Denique segmenta PP_1, QQ_1, RR_1; AP_1, AQ_1, AR_1 deinceps literulis p_1, q_1, r_1; π, $\varkappa$, ϱ designentur.

Consentaneum est, coordinatarum munus eis segmentis iniungere, quae rectis PP_1, QQ_1, RR_1 parallela ex quolibet puncto usque ad rectas QR, PR, PQ tendunt, istaque, literis p, q, r notanda, sensu aut positivo aut negativo accipere, prout punctum, quod definiunt, ex eadem parte linearum QP, PR, PQ atque anguli eis oppositi P, Q, R, aut ex parte contraria sumatur. Hoc autem pacto, notum est, inter cuiuslibet puncti coordinatas hanc aequationem existere:

$$\frac{p}{p_1} + \frac{q}{q_1} + \frac{r}{r_1} = 1. \qquad \text{(I)}$$

Et quoniam sectio conica, ellipsium illarum centra continens, per puncta P, Q et R meat, aequationi igitur eius binis coordinatis p et q, p et r vel q et r = o positis satisfieri necesse est; praetereaque quum omnis sectio conica quinque punctis suis datis ab omni parte determinata sit, perspicuum est, aequationem istius sectionis sic debere comparatam esse:

$$pq + \mu . pr + \nu . qr = o;$$

ubi μ et ν quantitates duas denotant constantes, quarum valores e duorum adhuc curvae punctorum coordinatis eruendi sunt.

§. 3.

Coordinatae p et q omnis puncti, quod ad rectam infinitam RR_1 pertinet, legem sequuntur hanc:

$$\frac{p}{q} = \frac{AP_1}{AQ_1} = \frac{\pi}{\varkappa};$$

et si e puncto C ad rectam QR linea CP_{II}, lineae AP_I parallela ducatur, punctorum Q, A, Q_I, C quattuor harmonicorum ratione habita, proportio haec evadit:

$$\frac{CP_{II}}{AP_I} = \frac{CQ}{AQ} = \frac{CQ_I}{AQ_I}, \text{ sive } \frac{CP_{II}}{CQ_I} = \frac{\pi}{\varkappa} = \frac{p}{-q}.$$

Itaque linearum infinitarum

RA et RC aequationes

erunt: $\frac{p}{\pi} - \frac{q}{\varkappa} = 0$ et $\frac{p}{\pi} + \frac{q}{\varkappa} = 0$; **(1)**

perindeque pro lineis

QA et QB aequationes:

$\frac{r}{\varrho} - \frac{p}{\pi} = 0$ et $\frac{r}{\varrho} + \frac{p}{\pi} = 0$; **(2)**

et pro lineis

PA et PC aequationes:

$\frac{q}{\varkappa} - \frac{r}{\varrho} = 0$ et $\frac{q}{\varkappa} + \frac{r}{\varrho} = 0$ **(3)**

obtinentur.

Jam ad determinationem punctorum A, B, C et D venimus. Primi quidem iam supra statuimus coordinatas esse

$p = \pi$, $q = \varkappa$, $r = \varrho$, quamobrem aequatio (I) ad istud punctum relata in hanc abit:

$$\frac{\pi}{p_I} + \frac{\varkappa}{q_I} + \frac{\varrho}{r_I} = 1. \quad \textbf{(4)}$$

Deinde, quum sit $DR : AR = DR_I : AR_I$, sive $DR_I - r_I : r_I - \varrho = DR_I : \varrho$, erit $DR_1 = \frac{r_1 \varrho}{2\varrho - r_1}$, quo valore pro r in aequationes linearum QB et PC transscripto, puncti D coordinatae prodeunt:

$$p = -\frac{r_1 \pi}{2\varrho - r_1}\,; \quad q = -\frac{r_1 \varkappa}{2\varrho - r_1}\,; \quad r = \frac{r_1 \varrho}{2\varrho - r_1}\,;$$

et quum sit $CQ_1 : AQ_1 = CQ : AQ$, sive

$$CQ_1 : \varkappa = CQ_1 + q_1 : q_1 - \varkappa,$$

ubi segmentum CQ_1 negative sumendum est et $q_1 > 2\varkappa$, efficitur $CQ_1 = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}$, indeque, adhibitis linearum RC et PC aequationibus, coordinatae puncti C, nimirum:

$$p = \frac{q_1 \pi}{q_1 - 2\varkappa}\,; \quad q = -\frac{q_1 \varkappa}{q_1 - 2\varkappa}\,; \quad r = \frac{q_1 \varrho}{q_1 - 2\varkappa}\,;$$

similique modo coordinatae puncti B:

$$p = -\frac{p_1 \pi}{p_1 - 2\pi}\,; \quad q = \frac{p_1 \varkappa}{p_1 - 2\pi}\,; \quad r = \frac{p_1 \varrho}{p_1 - 2\pi}$$ gignuntur.

Horum tandem valorum ope et adhibita aequatione (4) facili negotio iam linearum AD, BC, AC, BD, AB, CD medietates i. e. puncta F, H, L, E, J, G determinari possunt. Procul dubio enim erunt coordinatae

puncti F:

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \frac{r_1 \pi}{2\varrho - r_1}\right) = -\pi\,\frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1}\,;$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{r_1 \varkappa}{2\varrho - r_1}\right) = -\varkappa\,\frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1}\,;$$

$$r = \tfrac{1}{2}\left(\varrho + \frac{r_1 \varrho}{2\varrho - r_1}\right) = \varrho\,\frac{\varrho}{2\varrho - r_1}\,;$$

puncti H:

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q_1\pi}{q_1-2\varkappa} - \frac{p_1\pi}{p_1-2\pi}\right) = -\pi\,\frac{q_1\pi - p_1\varkappa}{(p_1-2\pi)(q_1-2\varkappa)};$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_1\varkappa}{p_1-2\pi} - \frac{q_1\varkappa}{q_1-2\varkappa}\right) = \varkappa\,\frac{q_1\pi - p_1\varkappa}{(p_1-2\pi)(q_1-2\varkappa)};$$

$$r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_1\varrho}{p_1-2\pi} + \frac{q_1\varrho}{q_1-2\varkappa}\right) = \varrho\,\frac{p_1 q_1 \varrho}{r_1(p_1-2\pi)(q_1-2\varkappa)};$$

puncti L:

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\pi + \frac{q_1\pi}{q_1-2\varkappa}\right) = \pi\,\frac{q_1-\varkappa}{q_1-2\varkappa};$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(\varkappa - \frac{q_1\varkappa}{q_1-2\varkappa}\right) = -\varkappa\,\frac{\varkappa}{q_1-2\varkappa};$$

$$r = \tfrac{1}{2}\left(\varrho + \frac{q_1\varrho}{q_1-2\varkappa}\right) = \varrho\,\frac{q_1-\varkappa}{q_1-2\varkappa};$$

puncti E:

$$p = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{r_1\pi}{2\varrho-r_1} + \frac{p_1\pi}{p_1-2\pi}\right) = -\pi\,\frac{p_1\varrho - r_1\pi}{(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$

$$q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_1\varkappa}{p_1-2\pi} - \frac{r_1\varkappa}{2\varrho-r_1}\right) = -\varkappa\,\frac{p_1 r_1 \varkappa}{q_1(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$

$$r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{r_1\varrho}{2\varrho-r_1} + \frac{p_1\varrho}{p_1-2\pi}\right) = \varrho\,\frac{p_1\varrho - r_1\pi}{(p_1-2\pi)(2\varrho-r_1)};$$

puncti J:

$$p = -\pi\,\frac{\pi}{p_1-2\pi}; \qquad q = \varkappa\,\frac{p_1-\pi}{p_1-2\pi}; \qquad r = \varrho\,\frac{p_1-\pi}{p_1-2\pi};$$

et puncti G:

$$p = -\varkappa\,\frac{q_1 r_1 \pi}{p_1(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)}; \quad q = -\varkappa\,\frac{q_1\varrho - r_1\varkappa}{(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)}; \quad r = \varrho\,\frac{q_1\varrho - r_1\varkappa}{(q_1-2\varkappa)(2\varrho-r_1)}.$$

§. 4.

Ex his posterioribus sex punctis iam ad computandas quantitates μ et ν duorum quorumlibet coordinatae sufficient. Ex gr. si punctorum L et J coordinatarum valores in aequationem $pq + \mu . pr + \nu . qr = o$ transscribuntur, praesto sunt aequationes:

$$\pi\varkappa^2 - \pi\varrho\,(q_1 - \varkappa).\mu + \varrho\varkappa^2.\nu = o;$$

$$\text{et} \quad \varkappa\pi^2 + \varrho\pi^2.\mu - \varkappa\varrho\,(p_1 - \pi).\nu = o;$$

e quibus $\mu = \dfrac{p_1\,\varkappa^2}{\varrho(p_1 q_1 - p_1\varkappa - q_1\pi)} = \dfrac{r_1\,\varkappa^2}{q_1\,\varrho^2}$;

et $\nu = \dfrac{q_1\,\pi^2}{\varrho(p_1 q_1 - p_1\varkappa - q_1\pi)} = \dfrac{r_1\,\pi^2}{p_1\,\varrho^2}$ nanciscimur.

Hinc igitur compertum est, sectionis conicae, per centra omnium illarum ellipsium transeuntis, aequationem esse hanc quae sequitur:

$$pq.p_1q_1.\varrho^2 + pr.p_1r_1.\varkappa^2 + qr.q_1r_1.\pi^2 = o,$$

vel elegantius scriptam:

$$\frac{\pi^2}{pp_1} + \frac{\varkappa^2}{qq_1} + \frac{\varrho^2}{rr_1} = o. \qquad \textbf{(II)}$$

Ceterum eandem nos aequationem nactos fuisse, si pro punctis L et J bina quaepiam e quattuor reliquis cepissemus, facile ex eo comprobabitur, quod introductis in illam aequationem ceteris valoribus, quos in fine antecedentis §. invenimus, aequationis veritas haud perit.

§. 5.

Jam consideremus aequationes hasce tres:

$$pq_1r_1 + qp_1r_1 + rp_1q_1 = p_1q_1r_1; \qquad (I).$$

$$qr \cdot q_1 r_1 \cdot \pi^2 + pr \cdot p_1 r_1 \cdot \varkappa^2 + pq \cdot p_1 q_1 \cdot \varrho^2 = 0\,; \qquad \text{(II).}$$

et $$r^2 (qq_1 \pi^2 + pp_1 \varkappa^2) r_1 + p_1 q_1 \cdot \varrho^2 . R = 0\,; \qquad \text{(III).}$$

quae posterior ex antecedente nascitur, litera R productum $p \cdot q \cdot r$ designante.

Differentiemus unamquamque earum secundum quantitates variabiles p, q et r, et ut producti minimi R conditio in rationes inferatur, differentiale huius producti $= 0$ ponamus. Quod si fit, aequationes differentiales prodeunt hae:

$$q_1 r_1 . dp + p_1 r_1 . dq + p_1 q_1 . dr = 0; \qquad \text{(IV).}$$

$$p_1 (qq_1 \varrho^2 + rr_1 \varkappa^2) . dp + q_1 (rr_1 \pi^2 + pp_1 \varrho^2) . dq + r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2) . dr = 0\,; \qquad \text{(V).}$$

$$p_1 \varkappa^2 . r . dp + q_1 \pi^2 . r . dq + 2 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2) . dr = 0; \qquad \text{(VI).}$$

ad quas nova accedit, si postrema ab antecedente subducitur, postquam factore r_1 affecta est, videlicet haec:

$$p_1 q_1 \varrho^2 \cdot q \cdot dp + p_1 q_1 \varrho^2 \cdot p \cdot dq - r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2) . dr = 0. \qquad \text{(VII).}$$

E duabus posterioribus inter se iunctis colliguntur differentialia:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2pp_1 \varrho^2 + rr_1 \pi^2)}{p_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) r}\,;$$

et $$\frac{dq}{dr} = - \frac{(pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2qq_1 \varrho^2 + rr_1 \varkappa^2)}{q_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) r}.$$

Quorum valorum ope nunc si ipsa differentialia ex aequatione (IV.) expelluntur, ista aequatio hanc formam induet:

$$q_1^2 r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2pp_1 \varrho^2 + rr_1 \pi^2) - p_1^2 r_1 (pp_1 \varkappa^2 + qq_1 \pi^2)(2qq_1 \varrho^2 + rr_1 \varkappa^2)$$
$$+ q_1^2 p_1^2 \varrho^2 r (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) = 0. \qquad \text{(VIII).}$$

Hic primum, iuxta aequationem (I), pro $q_1 p_1 r$ scribere licet

$$(p_1 q_1 - q_1 p - p_1 q)\, r_1$$

ac dein, extruso factore r_1, partes termini aequationis tertii:

$$-q_1^2 p_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) p\,; \; -p_1^2 q_1 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2) q \text{ et } p_1^2 q_1^2 \varrho^2 (qq_1 \pi^2 - pp_1 \varkappa^2)$$

ita distribuere, ut prima cum primo, secunda cum secundo termino coeant, tertia denique sola relinquatur. Quo facto, eadem aequatio primum in hanc formam:

$$q_1^2\,[3p^2p_1^2\varkappa^2\varrho^2 + \pi^2(qr.q_1r_1.\pi^2 + pr.p_1r_1.\varkappa^2 + pq.p_1q_1.\varrho^2)] -$$
$$p_1^2\,[3q^2q_1^2\pi^2\varrho^2 + \varkappa^2(qr.q_1r_1.\pi^2 + pr.p_1r_1.\varkappa^2 + pq.p_1q_1.\varrho^2)] +$$
$$p_1^2q_1^2\varrho^2(qq_1\pi^2 - pp_1\varkappa^2) = o;$$

ac tandem, aequatione (II) consulta, in sequentem, multo etiam simpliciorem, redigetur:

$$3(p^2\varkappa^2 - q^2\pi^2) = pp_1\varkappa^2 - qq_1\pi^2, \quad \text{sive}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3(p\varkappa + q\pi)(p\varkappa - q\pi) = pp_1\varkappa^2 - qq_1\pi^2. \\ \text{Praeter istam autem has quoque alias:} \\ 3(p\varrho + r\pi)(p\varrho - r\pi) = pp_1\varrho^2 - rr_1\pi^2; \\ \text{et}\ \ 3(q\varrho + r\varkappa)(q\varrho - r\varkappa) = qq_1\varrho^2 - rr_1\varkappa^2 \end{array}\right\}\ (\mathrm{IX})$$

valere, vix est quod moneam.

§. 6.

Aequationes (IX) invicem ita se habent, ut unaquaeque earum e duabus reliquis a se subtractis proficiscatur; tales igitur oportet tres sectiones conicas exprimant, quae per eadem quattuor puncta vadant vel omnino duas secantes coniugatas communes habeant. Et quoniam e conspiratione aequationum (II) et (VI) coortae sunt, manifestum est, curvas ipsas, quas repraesentant, illam sectionem conicam, quae omnium ellipsium, per puncta **A**, **B**, **C** et **D** ductarum, centra complectitur, in eo puncto secare, quod ad ellipsin omnium minimam spectet. Praeter istud autem punctum cum eadem sectione conica etiam duo alia communia habent, de quorum significatione posthac videbimus.

Etenim, ut rem accuratius scrutemur, primum clarum est, tres illas sectiones conicas omnes per centrum gravitatis **S** trianguli **PQR** transire — quod quidem punctum in curva per aequationem (II) expressa non inest — quia unaquaeque aequationum (IX) valores

$$p = \tfrac{1}{3}p_1;\quad q = \tfrac{1}{3}q_1;\quad r = \tfrac{1}{3}r_1$$

admittit. Deinde quoniam iisdem aequationibus singulis, videlicet

primae valores:

$$p = 0,\quad q = 0;\quad p = \tfrac{1}{3}p_1,\quad q = 0;\quad p = 0,\quad q = \tfrac{1}{3}q_1;$$

secundae:

$$p = 0,\quad r = 0;\quad p = \tfrac{1}{3}p_1,\quad r = 0;\quad p = 0,\quad r = \tfrac{1}{3}r_1;$$

tertiae:

$$q = 0,\quad r = 0;\quad q = \tfrac{1}{3}q_1,\quad r = 0;\quad q = 0,\quad r = \tfrac{1}{3}r_1$$

satisfaciunt, necesse est, curvas ipsas tribus parallelogrammis circumscriptas esse, quae per latera trianguli **PQR** et tres rectas, eis parallelas et e centro gravitatis profectas, concinnantur, primam videlicet pallgr. Sq_1Rp_{11}, secundam pallgr. Sp_1Qr_{11} et tertiam pallgr. Sr_1Pq_{11}, ut figura monstrat. Quapropter nunc centra quoque r, q, p istarum curvarum patent.

Praeterea, si ex. c. in prima aequationum (IX)

$$(p\varkappa + q\pi)(p\varkappa - q\pi) = 0 \qquad \text{ponatur,}$$

$pp_1\varkappa^2 = qq_1\pi^2$ concluditur esse, id quod fieri nequit, nisi aut $p = q = 0$, aut $p = q = \infty$, aut simul $p_1\varkappa \pm q_1\pi = 0$ eveniat. Atqui hoc tertium conditionem particularem, a consilio nostro alienam, involvit; ergo systema rectarum **RA** et **RC**, quod aequatione illa exprimi §. 3. vidimus, cum prima trium illarum curvarum praeter punctum **R** nulla alia nisi ad infinitum remota communia habet; ac propterea, si per centrum r huius curvae duae rectae ard et crb, lineis **ARD** et **CRB** parallelae ducantur, asymptotae ipsius, similiterque duarum reliquarum, deprehenduntur, ita ut iam plura, quam opus sunt, elementa ad istas curvas punctatim et solius regulae ope delineandas nobis suppetant.

Ceterum neminem fugerit, quia lineae quaternae pq, pa, pr, pd; qp, qa, qr, qd et rq, ra, rp, rc, ex ordine, lineis PQ, PA, PR, PD; QP, QA, QR, QD et RQ, RA, RP, RC parallelae sunt, figuras ex utrisque hisce linearum fasciculis compositas inter se similes et similiter collocatas esse, ob eamque caussam, sicut rectas PA, QA, RA; PD, QD, RA; PA, QD, RC et PD, QA, RC in quattuor punctis A, D, B, C: ita etiam asymptotas pa, qa, ra; pd, qd, ra; pa, qd, rc et pd, qa, rc ternas in quattuor punctis a, d, b, c concurrere.

§. 7.

E mutuo situ punctorum P, L, R, J, Q et G, F, E, quae cuncta in eadem sectione conica sunt, concludere licet, priora quinque ad unum eundemque, tria reliqua ad alterum curvae ramum pertinere, ipsamque igitur ex hyperbolarum genere esse. Nam ex illis nullum intra triangula per quattuor reliqua constituta cadit; at contra, quoties ex iisdem quinque punctis aut quattuor, aut tria, aut duo deinceps cum uno, vel duobus, vel tribus e posterioribus coniunxeris, nova quaeque haec quinque puncta sic disposita erunt, ut saltem unum eorum in aliquo triangulo per reliqua constituto includatur.

Istinc sequitur, chordam PG et rectam pd, quae illi parallela est, utrumque curvae ramum perscindere, ideoque illud punctum, ubi ramus PRQ a linea pd secatur, inter puncta p et d cadere; contra vero rectas PJ et αpab solum hunc posteriorem ramum secare, duarumque intersectionum alteram a dextra, alteram a laeva parte puncti p iacere. Ergo manifestum est, angulum αpd, qui per asymptotas pa, in contrariam partem prolongatam, et pd formatur, totum i. e. inde ab altero usque ad alterum crus, per aliquem rami PRQ arcum praesepiri, proptereaque hunc ipsum arcum atque eum hyperbolae $Sr_{I}Pq_{II}$ ramum, qui in eodem angulo extenditur, quia infinitus est et punctum q_{II}, a curva PRQ inclusum, continet, in duobus se invicem punctis P et N perscindere.

Quodsi tandem totius hyperbolae $Sr_I Pq_{II}$ cursum, quatenus ad asymptotam αpab inclinatur, inde a punctis q_{II} et P usque ad punctum eius infinite remotum atque istinc, ad alterum ramum traiecti, rursus usque ad punctum S, mente prosequimur, modo illam in P ab interiore ad exteriorem rami PQR partem transmigrantem, modo ab exteriore ad interiorem reversam videmus, id quod fieri non potest, nisi eundem ramum in novo puncto K perrumpat.

Ex his apparet, hyperbolas $Sr_I Pq_{II}$ et PRQGE revera sese invicem in tribus punctis P, N et K, et ob eam ipsam caussam etiam in quarto M penetrare; quod vero de una hyperbolarum $Sr_I Pq_{II}$, $Sp_I Qr_{II}$ et $Sq_I Rp_{II}$ demonstratum est, idem sine dubio de reliquis quoque valet. Atque igitur puncta illa, quae supra tribus istis hyperbolis cum hyperbola PRQGE communia esse diximus, haud fictitia sunt sive imaginaria putanda, sed revera existunt. Plura autem illa quam tria numero non esse, ipsa figura docet. Nimirum duo, N et K, ad ramum PRQ, tertium vero, M, solum ad alterum curvae ramum GFE pertinent.

§. 8.

Etiamnunc superest, ut naturam sectionum conicarum, quae quadrangulo ABCD circumscriptae centris M, N et K utuntur, investigemus. Ad parabolarum quidem genus eas non pertinere, certum est; nam illa centra loca finita obtinent; utrum autem ellipsibus an hyperbolis, et quaenam quibusnam, adnumerandae sint, hoc ex sequentibus diiudicari poterit:

Omnis puncti polaris harmonica, prout illud extra vel intra curvam se habet, ad ellipsin relata aut eam secat et inter centrum eius atque illud ipsum punctum migrat, aut extrinsecus et ab eadem centri parte atque illud punctum existit;

ad hyperbolam vero relata aut curvam secat et e contraria centri parte atque polus suus iacet, aut non secat et inter centrum curvae et polum suum transit.

Quae quum ita sint, puncta N et K ellipsium centra, per A, B, C, D meantium, esse non possunt. Nam lineae QR, PR, PQ punctorum P, Q, R polares harmonicae sunt respectu omnium sectionum conicarum, quae per A, B, C, D transeunt; neque tamen QR aut inter puncta P et N, aut ab eadem parte centri N atque P se habet; eademque rectae PR et punctorum Q et K ratio est. Ex contrario autem neque centrum M ad hyperbolam potest referri; quia, hoc si fieret, recta QR, quum inter P et M intercedat, tota extra curvam caderet, ergo PR, externi puncti Q polaris harmonica, ultra Q et M dimoveretur; id quod absurdum est. Persuasum igitur habemus, M ellipseos, N et K duarum hyperbolarum centra esse. Neque vero, quid istae quidem hic sibi velint, latere poterit, dum ad originem aequationis (II) regrediamur. Etenim quum expressio $MZ.MX.\sin\varphi$, quae §. 1. usuvenit, in hyperbola triangulum, ambabus asymptotis et tangenti cuilibet interiectum significet, perspicuum est, triangulum istud in duabus illis hyperbolis omnium minimum esse.

Fieri denique potest, ut hyperbolarum Sr_1Pq_{11}, Sp_1Qr_{11}, Sq_1Rp_{11} aut una aut tres ad duarum rectarum systemata redigantur. Quod si enim aut

$$\frac{p_1}{q_1} = \pm \frac{\pi}{\varkappa}, \text{ aut } \frac{p_1}{r_1} = \pm \frac{\pi}{\varrho}, \text{ aut } \frac{q_1}{r_1} = \pm \frac{\varkappa}{\varrho}$$

eveniat, vel, quod eodem redit, si aut rectarum BC et AD, aut CA et BD, aut AB et CD una per alteram in partes aequales secetur, aequationes (IX) singulae in binas hasce simpliciores dissolvuntur:

$$3(p\varkappa \pm q\pi) = p_1\varkappa \quad \text{et} \quad p\varkappa \mp q\pi = 0;$$
$$3(p\varrho \pm r\pi) = p_1\varrho \quad \text{et} \quad p\varrho \mp r\pi = 0;$$
$$3(q\varrho \pm r\varkappa) = q_1\varrho \quad \text{et} \quad q\varrho \mp r\varkappa = 0.$$

Ex gr. si ex illis sex conditionibus eam, quae sola ad figuram nostram quadrat, admittimus, videlicet ut $\frac{p_1}{q_1} = \frac{\pi}{\varkappa}$ evadat, sive ut recta BC per AD bifariam secetur, erit:

$3(p\varkappa + q\pi) = p_1\varkappa$ et $p\varkappa - q\pi = 0$; unde, assumptis aequationibus (I) et (II), centrorum N, K et M coordinatae efficiuntur hae:

puncti N:

$$p = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2 + 2(r_1 - \varrho)^2}\right);\ q = \tfrac{1}{6}\frac{q_1}{\varrho}\left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 + 2(r_1 - \varrho)^2}\right);\ r = \tfrac{2}{3}r_1;$$

puncti K:

$$p = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{p_1}{\varrho}\left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 + 2(r_1 - \varrho)^2}\right);\ q = \tfrac{1}{6}\frac{q_1}{\varrho}\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2 + 2(r_1 - \varrho)^2}\right);\ r = \tfrac{2}{3}r_1;$$

et puncti M:

$$p = -\pi\frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};\ q = -\varkappa\frac{r_1 - \varrho}{2\varrho - r_1};\ r = \varrho\frac{\varrho}{2\varrho - r}.$$

Sub illa igitur conditione centrum ellipseos quaesitae cum puncto F confunditur.

§. 9.

Totius iam disquisitionis nostrae haec fere summa erit:

Theorema 4.

Si in quadrangulo completo per centrum gravitatis eius trianguli, quod coraustorum intersectionibus determinatur, tres rectae lateribus parallelae ducantur, primo: unicuique parallelogrammorum, quae sic oriuntur, hyperbola circumscribi poterit, cuius asymptotae coraustis, in ipsa curva concurrentibus, parallelae sint; deinde: tres istae hyper-

bolae praeter gravitatis centrum per nova tria eademque puncta transibunt, et ea quidem puncta simul in quarta hyperbola sita erunt, quae coraustorum quadranguli et medietates et intersectiones complectitur; denique, id quod gravissimum est: si quattuor puncta, quibus quadrangulum constituitur, ita disposita fuerint, ut nullum eorum intra triangulum a reliquis effectum cadat, unum e tribus illis punctis, quod intra ipsum quadrangulum est, centrum erit ellipseos, omnium, quae huic quadrangulo circumscribi possunt, minimae; et duo reliqua duarum hyperbolarum, eidem quadrangulo circumscriptarum, centra erunt, in quibus triangula, inter asymptotas et tangentes quaslibet interiecta, omnium minima et ob eam ipsam caussam inter se aequalia existent.

Theorema 5.

Quodsi in quadrangulo simplici una diagonalium per alteram bifariam secetur, inter omnes ellipses, ei quadrangulo circumscriptas, illa minima erit, cuius centrum medietatem diagonalis inaequaliter divisae obtinuerit.

§. 10.

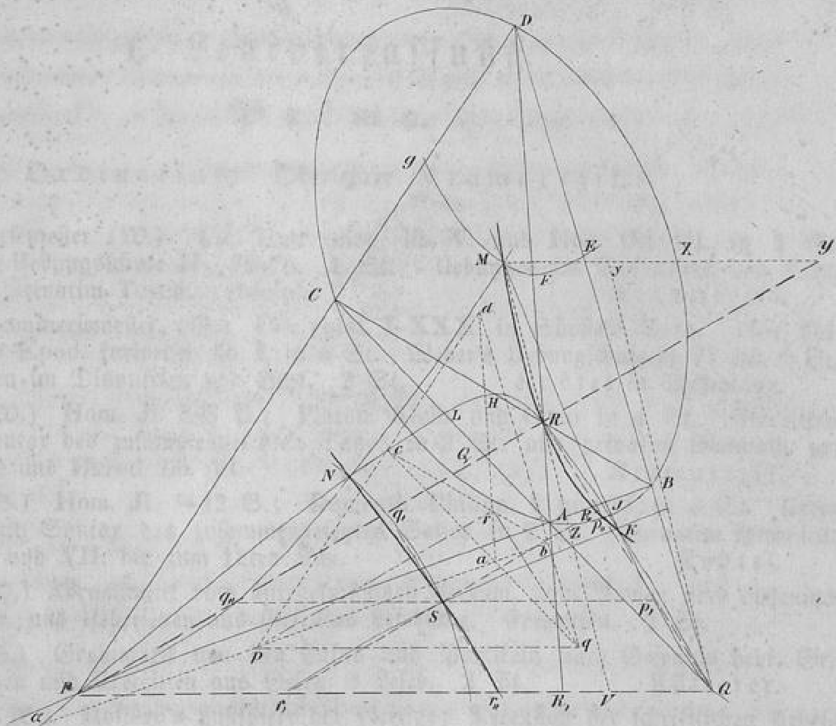
Illust. Angerus problematis nostri inventionem ad resolutionem aequationis cubicae redegit atque ita ellipsin quaesitam per numeros irrationales sive per appropinquationem determinavit. Nostrae solutionis similis ratio est, tantum quod duarum hyperbolarum intersectione machinamur, quod ille duarum radicum cubicarum extractione efficit. Quanto autem facilior illa geometrica descriptio numerorum ista computatione evadat, praesertim si ab initio ellipsis non computari sed delineari iussa fuerit, facile ex eo perspicitur, quod ad inveniendam illam intersectionem perpaucis duntaxat punctis determinatis opus est. Nam quum is hyperbolae $Sq_I Rp_{II}$ ramus, qui punctum M continet, inter rectas AD et rd porrigatur oporteat, et quum eiusdem hyperbolae curvatura prope centrum M satis exigua sit, totum negotium in eo consistet, ut hyperbolae PRQGE ea particula, quae inter F punctum et rectam rd interiacet, punctatim describatur, et praeterea duo puncta hyperbolae $Sq_I Rp_{II}$ sive $Sr_I Pq_{II}$, $Sp_I Qr_{II}$, quae in ea regione sunt, per rectam lineam coniungantur.

Annotatio.

Quum in comparatione problematum sibi invicem cognatorum multum saepe utilitatis insit, haud abs re puto, alterius quoque illius, de quo initio mentionem feci, problematis solutionem, quod sciam, adhuc incognitam proponere, cuius rationes vel e theoremate 1., quod supra demonstravimus, vel ex iis, quae Claris. Gauss in Zachii „Monatl. Corresp. August. 1810. p. 112 - 121" de eodem problemate docuit, repetendae sunt:

Theorema.

Si in quadrilatero completo super tribus segmentis, quae trium diagonalium medietates coniungunt, totidem triangula aequilatera erigantur, circulus, qui per gravitatis centra istorum triangulorum transit, rectam medietates illas continentem in duobus punctis secat, quorum alterum ellipseos centrum est, inter omnes illi quadrilatero inscriptas maximae, alterum hyperbolae, eidem quadrilatero inscriptae, cuius inter asymptotas et tangentem quamlibet triangulum omnium maximum intercipitur.


D
g
M
E
F
Z
y
C
d
H
L
R
N
B
A
J
K
S
P
q
V