Theorie

der

periodisch-homologen Punkte, Geraden und Ebenen,

in Bezug

auf das System dreier Kegelschnitte,
welche einen vierten doppelt berühren,

und

auf das von vier Flächen der zweiten Ordnung oder Klasse,
welche eine fünfte umhüllen,

von

Fr. Seydewitz.

„C'est ainsi que les cas particuliers retien-
„nent toujours, par des propriétés singuliè-
„res, une sorte d'empreinte de celles qui
„appartiennent aux cas généraux."

Vallée, Géometrie descriptive.

Heiligenstadt,
gedruckt bei J. C. Dölle & C. Brunn.

Vorwort.

Die beiden Aufgaben des Apollonius und des Fermat, welche unter dem Namen der Kreis- und der Kugel-Berührungen bekannt sind, bieten noch den unterscheidenden Charakter besonderer Fälle dar, selbst wenn man, nach dem Vorgange des berühmten Verfassers des *Traité des propriétés projectives des figures*, die drei gegebenen Kreise mit beliebigen Kegelschnitten, und die vier gegebenen Kugeln mit beliebigen Flächen des zweiten Grades vertauscht, von denen erstere sämmtlich eine Sekante, und letztere sämmtlich einen ebenen Schnitt gemein haben.

Denn was offenbar schon z. B. den Fall der drei Kreise als einen besonderen bezeichnet, und was vor Allem auffordert, darüber hinauszugehen, dieß nämlich, daß sie nur ein Radikalcentrum, und doch vier Aehnlichkeits- oder Radikal-Achsen besitzen, die bekanntlich diesem Centrum im Sinne des Dualitäts-Prinzipes entsprechen, oder vielmehr, daß von vier Radikalcentris drei in gerader Linie liegen, nämlich auf der unendlich-weit entfernten gemeinschaftlichen Sekante, während die vier Achsen ein wirkliches Vierseit bilden — derselbe Uebelstand stellt sich nicht minder auch noch in dem Falle dreier Kegelschnitte dar, welche eine Sekante in endlicher Entfernung gemein haben; und es wäre leicht zu zeigen, daß aus diesem Grunde von 32 möglichen Auflösungen des betreffenden Problems 24 in Systeme von zwei Geraden ausarten, und daß nur diejenigen 8, welche von dem isolirten Radikalcentrum abhängen, ihre allgemeine Form behalten, ganz so wie es auch bei drei beliebigen Kreisen der Fall ist. Und auf ähnliche Weise gestatten vier Flächen des zweiten Grades mit einem gemeinschaftlichen ebenen Schnitte zwar acht Radikal-Ebenen, aber nicht mehr als ein ordentliches Radikalcentrum, indem die sieben anderen alle in der Ebene des gemeinschaftlichen Schnittes sich befinden; und es gibt daher unter 128 möglichen Auflösungen des betreffenden Problems nur 16, welche den Bedingungen desselben in aller Strenge genügen.

Hiernach also, scheint es, ist noch ein Schritt zu thun übrig, um die Gegenseitigkeit, welche zwischen den Radikalcentris und den Radikal-Achsen oder Ebenen besteht, zur vollkommenen zu erheben; und dieß dürfte zunächst insofern keine besondere Schwierigkeit darbieten, als Herr **Poncelet** im Supplemente zu seinem Werke selbst noch die Möglichkeit nachgewiesen hat, die projektivischen Eigenschaften der Kreise auf das System dreier oder mehrerer Kegelschnitte, welche einen und denselben anderen doppelt berühren, auszudehnen. *) Man hätte nur zu diesem Zwecke den direkten Weg einzuschlagen, und sämmtlichen verschiedenen Arten periodisch-homologer Punkte und Geraden, welche in einem solchen Systeme vorkommen, gleiche Aufmerksamkeit zu widmen. Auf diese Weise würde man dann auch, was wesentlich zu bemerken ist, ohne Mühe dahin gelangen, das Problem des Fermat von der letzten Schranke zu befreien, mit welcher es auch in jenem Supplemente noch behaftet geblieben ist.

---

*) Gleichwohl muß der Verf. gestehen, daß er selbst weder von dieser Stelle noch von der, Seite 10. erwähnten hat Nutzen ziehen können, indem er beide erst entdeckte, als er bereits durch den Versuch, die Eigenschaften der **Centra und Achsen der Homologie** zu verallgemeinern, zu demselben Resultate gekommen war.

In der That wird sich aus dem Folgenden mit hinlänglicher Evidenz ergeben, daß, um die beiden berühmten Aufgaben, von denen hier die Rede ist, in ihrer ganzen Allgemeinheit zu umfassen, man den Wortlaut derselben so wie folgt festzustellen hat:

I.

Wenn ein beliebiger Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, und wenn drei andere Kegelschnitte der Bedingung unterworfen sind, ein jeder den ersteren doppelt zu berühren und durch drei Punkte zu gehen oder drei Gerade zu berühren, welche beliebig in seiner Ebene gegeben sind, was also dreimal drei gegebene Punkte oder Gerade macht; einen fünften zu zeichnen, welcher jeden der drei letzteren einfach, und den ersteren ebenfalls doppelt berühre; das Ganze mittels des Lineals allein;

II.

Wenn eine beliebige Fläche des zweiten Grades gezeichnet vorliegt, und wenn vier andere Flächen desselben Grades der Bedingung unterworfen sind, eine jede die erstere zu umhüllen und durch vier Punkte zu gehen oder vier Ebenen zu berühren, welche beliebig im Raume gegeben sind, was also viermal vier gegebene Punkte oder Ebenen macht; eine sechste zu zeichnen, welche jede der vier letzteren berühre und die erstere ebenfalls umhülle; das Ganze mittels des Lineals allein;

zwei Aufgaben, deren Grad von Allgemeinheit man schon darnach wird beurtheilen können, daß sie, genau genommen, einer respektiven Anzahl von $4^3 \times 4^2 \cdot 2$ oder 2048 und von $8^4 \times 8^2 \cdot 2$ oder 524288 Auflösungen fähig sind.

Heiligenstadt, im Januar 1842.

Theorie
der periodisch = homologen Punkte und Geraden,
in Bezug auf das System dreier Kegelschnitte, welche einen und denselben vierten doppelt berühren.

Diese ganze Theorie gründet sich hauptsächlich auf einen besonderen Fall des folgenden bekannten Doppelsatzes:

Drei beliebige Kegelschnitte A, B, C, welche durch die nämlichen vier Punkte gehen, haben mit einer beliebigen Geraden drei Paar reelle oder imaginäre Punkte a, a_1; b, b_1; c, c_1 gemein, welche unter sich eine Involution bilden;

Drei beliebige Kegelschnitte A, B, C, welche die nämlichen vier Geraden berühren, haben mit einem beliebigen Punkte drei Paar reelle oder imaginäre Tangenten a, a_1; b, b_1; c, c_1 gemein, welche unter sich eine Involution bilden;

dieß heißt, man hat die Relationen:

$$\frac{ab \cdot ab_1}{ac \cdot ac_1} = \frac{a_1b \cdot a_1b_1}{a_1c \cdot a_1c_1}; \qquad \frac{\sin. ab \cdot \sin. ab_1}{\sin. ac \cdot \sin. ac_1} = \frac{\sin. a_1b \cdot \sin. a_1b_1}{\sin. a_1c \cdot \sin. a_1c_1};$$

$$\frac{bc \cdot bc_1}{ba \cdot ba_1} = \frac{b_1c \cdot b_1c_1}{b_1a \cdot b_1a_1}; \qquad \frac{\sin. bc \cdot \sin. bc_1}{\sin. ba \cdot \sin. ba_1} = \frac{\sin. b_1c \cdot \sin. b_1c_1}{\sin. b_1a \cdot \sin. b_1a_1};$$

$$\frac{ca \cdot ca_1}{cb \cdot cb_1} = \frac{c_1a \cdot c_1a_1}{c_1b \cdot c_1b_1}; \qquad \frac{\sin. ca \cdot \sin. ca_1}{\sin. cb \cdot \sin. cb_1} = \frac{\sin. c_1a \cdot \sin. c_1a_1}{\sin. c_1b \cdot \sin. c_1b_1};$$

wo man unter Kegelschnitten nicht nur die wirklichen Curven, sondern auch Systeme von zwei Geraden — zwei Punkten versteht.

---

*) Der Satz links ist zuerst von Herrn *Sturm* im XVII. Bd. der Annales de Mathématiques, pag. 173. analytisch bewiesen worden, und nach ihm hat Herr *Poncelet* in seiner *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques* (Crelle's Journal, VIII. Bd.) beide Sätze als einfache Corollare dieser Analysis nachgewiesen. Uebrigens lassen sie sich auch rein synthetisch, durch Betrachtunb

I.

Wird ein beliebiger Kegelschnitt K von einem andern A in zwei reellen oder imaginären Punkten berührt, so kann man offenbar ihre Berührungssehne als die Vereinigung eines oder, wenn man will, zweier ihrer drei Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten betrachten, welche selber nichts anders als Systeme von zwei Geraden sind, die mit K und A vier Punkte gemein haben. Bezeichnet man also die Durchschnitte einer beliebigen Geraden mit K, A und der Berührungssehne resp. durch k, k_1; a, a_1 und a', so erhält man, kraft des vorhergehenden Satzes links, die folgende Relation:

$$\frac{aa' \cdot aa'}{ak \cdot ak_1} = \frac{a_1a' \cdot a_1a'}{a_1k \cdot a_1k_1}, \text{ oder } \frac{aa'^2}{a_1a'^2} = \frac{ak \cdot ak_1}{a_1k \cdot a_1k_1}.$$

Demnach seien jetzt c und c_1 zwei, den Kegelschnitten A^0 und B^0 gemeinschaftliche Punkte, welche einen dritten K doppelt berühren; es seien k und k_1 die Durchschnitte der Geraden cc_1 mit K, und a' und b' die derselben Geraden mit den resp. Berührungssehnen. Nach dem Vorigen hat man also: Fig. 1.

$$\frac{ca'^2}{c_1a'^2} = \frac{ck \cdot ck_1}{c_1k \cdot c_1k_1} = \frac{cb'^2}{c_1b'^2}, \text{ woraus man die Proportion zieht:}$$

$$ca' : c_1a' = cb' : c_1b'.$$

Dieß heißt: die Punkte a' und b' fallen mit dem Durchschnittspunkte C der beiden Berührungssehnen zusammen, wenn sie, was immer bei einem Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten stattfindet, unmittelbar auf einander folgen; und sie theilen den Abstand cc_1 in verhältnißgleiche Segmente, wenn sie mit den Punkten c und c_1 abwechseln. Folglich bilden die Berührungssehnen mit eben diesen Sekanten, welche sich mit ihnen in einerlei Punkte schneiden, einen harmonischen Büschel.

---

zweier aufeinander gelegter Geraden und Strahlbüschel, nach §§. 10, 11, 16, 37 der „Systematischen Entwickelung der Abhängigkeit geom. Gestalten von einander, von Jakob Steiner. Th. 1. Berlin 1832" ableiten. Der Ausdruck: Involution de six points, rührt, nach Beaugrand's berüchtigtem Briefe, von Désargues, dem Lehrer des Pascal, her.

Betrachtet man andrerseits die Pole der beiden Berührungssehnen, welche wir der Kürze wegen Berührungspole nennen werden, jeden als die Vereinigung eines der drei Paare zugeordneter Durchschnittspunkte der dem A^o und K, B^o und K gemeinschaftlichen Tangenten, so gelangt man durch ähnliche Schlüsse mittels des Satzes rechts zu einem, dem vorigen ganz entsprechenden Resultate, und durch Verbindung beider zu folgendem Doppelsatze, welcher sich im **III. Bd.** der **Correspondance Polytechnique, pag. 338** von Herrn *Chasles* bewiesen findet, nämlich:

1. Wird ein beliebiger Kegelschnitt von zwei andern beliebigen Kegelschnitten doppelt berührt, so

gehen a) die beiden Berührungssehnen und eines der drei Paare zugeordneter gemeinschaftlicher Sekanten der letzteren durch einen und denselben Punkt, und

b) beide Linienpaare bilden mit einander einen Büschel von vier harmonischen Strahlen.

liegen a) die beiden Berührungspole und eines der drei Paare zugeordneter Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten der letzteren in einer und derselben Geraden, und

b) beide Punktenpaare bilden mit einander eine Schaar von vier harmonischen Punkten.

Denkt man sich also die Kegelschnitte A^o und K und die Punkte c und c_1 gegeben, so gilt das Nämliche auch von der Berührungssehne und von den Punkten a' und b'; und folglich wird die Berührungssehne jedes andern Kegelschnittes B^o entweder ebenfalls durch den Punkt a', oder im Fall daß sie der ersteren nicht auf der Sekante cc_1 begegnen sollte, nothwendig durch den Punkt b' gehen müssen, welcher der vierte harmonische zu c und c_1 und dem ihm zugeordneten a' ist. Hieraus folgt ferner:

2. Sämmtliche Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren und

durch zwei gegebene Punkte gehen, vertheilen sich in zwei besondere Gruppen, dergestalt, daß die Berührungssehnen aller derjenigen, die einer beliebigen dieser Gruppen angehören, sich in einem und demselben Punkte kreuzen, welcher der vierte

zwei gegebene Gerade berühren, vertheilen sich in zwei besondere Gruppen, dergestalt, daß die Berührungspole aller derjenigen, die einer beliebigen dieser Gruppen angehören, in einer und derselben Geraden liegen, welche die vierte harmonische

harmonische zu den beiden gegebenen Punkten und zu dem ihm ähnlichen in der anderen Gruppe ist.

zu den beiden gegebenen Geraden und zu der ihr ähnlichen in der anderen Gruppe ist.

Im Vorbeigehen sei es bemerkt, daß die beiden so eben gefundenen Theoreme implicite und als unmittelbare Corollare die Fundamental-Sätze der *Théorie des polaires réciproques* in sich begreifen, von welcher wir in der Folge Gebrauch machen werden.

3. Wollte man sich einen Kegelschnitt und drei Punkte a, b und c geben, um durch die letzteren einen zweiten zu legen, welcher den ersteren doppelt berühre, so würden sich, nach dem zweiten Satze, auf jeder der Geraden ab, bc und ca zwei Punkte befinden, durch welche man die Berührungssehne der gesuchten Curve ziehen könnte, und diese sechs Punkte würden natürlich drei zu drei in vier geraden Linien liegen. Es gibt demnach im Allgemeinen immer vier Berührungssehnen und folglich vier Kegelschnitte, welche den Bedingungen dieser Aufgabe genügen; und ebenso würde es sein, wenn man sich, anstatt dreier Punkte, drei Tangenten des zu findenden Kegelschnittes geben wollte. Uebrigens wird es hinreichen, über die wirkliche Auflösung dieser beiden Probleme den Leser auf das *Traité des propr. proj. des fig.* Seite 233–238 zu verweisen.

II.

Denken wir uns jetzt (Fig. 1) drei beliebige Kegelschnitte A^o, B^o, C^o, welche einen und denselben vierten K doppelt berühren, und nennen wir, in Bezug auf A^o und B^o, B^o und C^o, C^o und A^o, die Durchschnitte der drei Berührungssehnen resp. C, A, B; so wird nach dem Vorigen jede Ecke des Dreiecks ABC zwei zugeordnete gemeinschaftliche Sekanten der entsprechenden zwei Kegelschnitte enthalten und das Centrum eines harmonischen Büschels sein. Bezeichnen wir nämlich mit c, c_1, γ, γ_1; a, a_1, α, α_1 und b, b_1, β, β_1 die resp. Durchschnitte von A^o und B^o, B^o und C^o, C^o und A^o, und insbesondere mit cc_1, aa_1, bb_1 die drei inneren, und mit $\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ die drei äußeren gem. Sekanten, d. h. diejenigen, welche resp. die inneren und die äußeren Winkel des Dreiecks ABC theilen, so haben wir folgende drei harmonische Büschel:

$$CA,\quad Cc,\quad CB,\quad C\gamma;$$
$$AB,\quad Aa,\quad AC,\quad A\alpha;$$
$$BC,\quad Bb,\quad BA,\quad B\beta;$$

woraus vorläufig folgt, daß die Durchschnitte der Geraden Aa und Bb, Aα und Bβ mit der Ecke C in gerader Linie liegen u. s. w.

Betrachten wir nun irgend eine cc_1 dieser sechs gem. Sekanten, welche von aa_1 und $\alpha\alpha_1$ in σ und σ_1, und von bb_1 und $\beta\beta_1$ in σ' und σ_1' geschnitten werde; ferner von der Seite AB in c', und von dem Kegelschnitte C° in c° und c_0. Dieses vorausgesetzt, so kann man sowohl von den Punkten σ und σ_1, als von den Punkten σ' und σ_1' behaupten, daß sie erstens mit den Punkten C und c' eine Schaar von vier harmonischen Punkten, und daß sie zweitens mit c, c_1, c°, c_0 eine Involution bilden; die ersteren, weil die Geraden AB, Aa, AC, Aα die Sekante cc_1 harmonisch schneiden, und die Punkte c, c_1, c°, c_0 den Kegelschnitten B° und C° angehören, welche die Geraden aa_1 und $\alpha\alpha_1$ zu gem. Sekanten haben; und die letzteren, weil auch die Geraden BA, Bb, BC, Bβ die Sekante cc_1 harmonisch schneiden, und die Punkte c, c_1, c°, c_0 auch den Kegelschnitten A° und C° angehören, welche ihrerseits die Geraden bb_1 und $\beta\beta_1$ zu gem. Sekanten haben.

Ohne Widerrede aber ist die Lage zweier Punkte durch die Coexistenz der beiden so eben bezeichneten Relationen vollkommen bestimmt, wenn die Ordnung der Punkte vorgeschrieben ist. Folglich, da sowohl die Punkte σ und σ_1, als σ' und σ_1' mit C, c' und c, c_1, c°, c_0 durch solche zwei Relationen verknüpft sind, und die einen wie die anderen zu den übrigen Punkten der Sekante cc_1 liegen, müssen beide Punktenpaare in ein einziges s und s_1 zusammenfallen, d. h. die Geraden aa_1, bb_1, cc_1 und $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ schneiden sich drei zu drei in diesen zwei Punkten; und natürlich gilt, was von der Sekante cc_1 bewiesen worden, ebenso auch von allen übrigen.

Endlich wäre es leicht, ein ähnliches Räsonnement auf die zugeordneten Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von A° und B°, B° und C°, C° und A° anzuwenden, welche paarweise mit den entsprechenden Berührungspolen in gerader Linie liegen, und so zu jenem Satze zu gelangen, welchen Herr **Poncelet** im Supplemente zu s. Traité, Seite 390 zuerst aufgestellt, und Herr **Plücker** im VI. Bd. des **Journals für Mathematik** analytisch bewiesen hat; ein Satz, der im Grunde nur eine Erweiterung des bekannten **Monge**'schen Satzes über die Aehnlichkeitsachsen dreier Kreise ist, und der mit dem ihm reciproken auf folgende Weise zusammengestellt werden kann:

1. **Wenn drei beliebige Kegelschnitte einen vierten doppelt berühren, so sind diejenigen dreimal zwei einander zugeordneten**

denselben paarweise gemeinschaftlichen Sekanten, welche durch die Ecken des von den Berührungssehnen gebildeten Dreiecks gehen, die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks.

Durchschnitte der denselben paarweise gemeinschaftlichen Tangenten, die auf den Seiten des von den Berührungspolen gebildeten Dreiecks liegen, die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Mit anderen Worten:

2. Wird ein beliebiger Kegelschnitt von drei anderen doppelt berührt, und man variirt einen dieser letzteren fortwährend, ohne ihn von der anfänglichen Bedingung zu entbinden, so

durchläuft der Durchschnitt der **beiden inneren** oder der **beiden äußeren**, dem veränderlichen, einzeln, mit den beiden festen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Sekanten die **innere**, und der Durchschnitt **einer inneren und einer äußeren** die äußere, den beiden festen unter sich gemeinschaftliche Sekante.

dreht sich die Verbindungslinie der **beiden äußeren** oder der **beiden inneren** Durchschnitte der dem veränderlichen, einzeln, mit den beiden festen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Tangenten um den äußeren, und die Verbindungslinie **eines äußeren und eines inneren** um den **inneren** Durchschnitt der den beiden festen unter sich gemeinschaftlichen Tangenten.

Unter den vielen, scheinbar weit auseinander liegenden Sätzen, welche die so eben entwickelten als besondere Fälle in sich vereinigen, sollen hier nur zwei hervorgehoben werden, um später von ihnen Gebrauch zu machen.

Setzt man nämlich im ersten Satze an die Stelle der drei Kegelschnitte A^{o}, B^{o}, C^{o} einerseits Systeme zweier Geraden, andrerseits Systeme zweier Punkte, so ergeben sich die bekannten Sätze des **Brianchon** und des **Pascal**, die also hier ihre eigentliche Bedeutung finden.

Vertauscht man hingegen in dem zweiten den Kegelschnitt **K** und nur einen der drei anderen, z. B. C^{o}, den man sich als veränderlich vorstellt, mit solchen Systemen, so erhält man als Corollare des allgemeinen Satzes die bekannten Eigenschaften der Centra und Achsen der Homologie, nämlich, wenn man, um die Analogie der Sätze besser in Evidenz treten zu lassen, die angenommene Bezeichnung beibehält:

3. Dreht sich ein System C^{o} zweier beliebigen Geraden um den Durchschnitt

Bewegt sich ein System C^{o} zweier beliebigen Punkte in der Richtung zweier, den Kegelschnitten A^o und B^o gemeinschaftlichen Tangenten K, so hat es, im Allgemeinen, mit jedem dieser Kegelschnitte vier Sekanten gemein; die Durchschnitte je zweier dieser Sekanten, welche nicht zu einerlei Kegelschnitt gehören, und entsprechend liegen, durchlaufen zwei, den Kegelschnitten A^o und B^o unter sich gemeinschaftliche Sekanten;

zweier, den Kegelschnitten A^o und B^o gemeinschaftlichen Punkte K, so hat es, im Allgemeinen, mit jedem dieser Kegelschnitte vier Tangenten gemein, welche sich in vier neuen Punkten schneiden; die Verbindungslinien je zweier dieser Punkte, welche nicht zu einerlei Kegelschnitt gehören, und entsprechend liegen, drehen sich um zwei Durchschnittspunkte der den Kegelschnitten A^o und B^o unter sich gemeinschaftlichen Tangenten;

und versteht man unter homologen Punkten oder Tangenten je zwei Punkte oder Tangenten, welche eine Gerade oder ein Punkt des Systemes K einzeln mit A^o und B^o gemein hat; ferner unter homologen Sehnen oder Polen diejenigen, welche von zwei Paar in einerlei Sinne homologen Punkten oder Tangenten herrühren, und endlich unter Centra und Achsen der Homologie die Durchschnitte der äußeren oder inneren Tangenten und die Sekanten, welche A^o und B^o gemein haben, so muß man für den Fall zweier Kegelschnitte, welche sich nur in zwei oder in keinem Punkte schneiden, hinzufügen, daß durch **direkt-homologe** Sehnen oder Pole allzeit **gleichnamige** (ein äußeres oder inneres und eine äußere oder innere), durch **indirekt-homologe** Sehnen oder Pole dagegen allzeit **ungleichnamige** (ein äußeres oder inneres und eine innere oder äußere) Centra und Achsen der Homologie auf einander bezogen werden.

Und umgekehrt:

4) Wenn sich zwei beliebige Sehnen auf einer Achse der Homologie schneiden und wenn zu gleicher Zeit zwei ihrer Punkte in Bezug auf dasjenige Centrum homolog sind, welches ihrer Art und der Benennung jener Achse entspricht, so sind diese Sehnen selber homolog.

Wenn zwei beliebige Pole mit einem Centrum der Homologie in gerader Linie liegen, und wenn zu gleicher Zeit zwei ihrer Tangenten in Bezug auf diejenige Achse homolog sind, welche ihrer Art und der Benennung jenes Centrums entspricht, so sind diese Pole selber homolog.

Denken wir uns auf den Umfängen der Kegelschnitte A^o und B^o resp. vier beliebige Paare in einerlei Sinne homologer Punkte a, a_1, a_2, a_3 und b, b_1, b_2, b_3; ziehen wir die Sehnen aa_1, aa_2, a_2a_3 und bb_1, bb_2, b_2b_3 und bezeichnen die Durchschnitte von aa_1 und a_2a_3, bb_1 und b_2b_3, a_2a_3 und b_2b_3, aa_2 und bb_2 resp. mit a_o, b_o, c_o, c, so hat man zwei Dreiecke $a_ob_oc_o$ und abc, deren Ecken paarweise auf drei, in einerlei Punkte convergirenden geraden Linien liegen. Folglich schneiden sich ihre Seiten paarweise auf einer und derselben Geraden a_2b_2 *), und demnach geht die Gerade a_ob_o durch das entsprechende Centrum der Homologie. Hieraus ergibt sich, nach Anwendung desselben Räsonnements auf vier beliebige Paare homologer Tangenten, noch folgender Satz:

5) Sind zwei beliebige Kegelschnitte gegeben, und man faßt in Bezug auf den einen eine beliebige Anzahl

von Geraden auf, welche durch einerlei Punkt gehen, so gehen die ihnen, in Bezug auf den anderen Kegelschnitt, homologen Geraden ebenfalls durch einerlei Punkt, und diese zwei Punkte liegen mit dem entsprechenden Centrum der Homologie in gerader Linie.

von Punkten auf, welche in einerlei gerader Linie liegen, so liegen die ihnen, in Bezug auf den anderen Kegelschnitt homologen Punkte ebenfalls in einerlei gerader Linie, und diese zwei Geraden schneiden sich auf der entsprechenden Achse der Homologie.

III.

Fügen wir jetzt zu den drei bisher betrachteten Kegelschnitten A^o, B^o und C^o noch einen vierten D^o hinzu, welcher gleich ihnen den Kegelschnitt K doppelt berühre, und fassen das von den vier Berührungssehnen gebildete vollständige Vierseit ins Auge, so enthält jede der sechs Ecken des letzteren einen harmonischen Büschel, welcher von zweien dieser Sehnen und von den beiden, den entsprechenden Curven gemeinschaftlichen zugeordneten Sekanten gebildet wird. Diese zwölf Sekanten schneiden sich drei zu drei in zwölf Punkten. Betrachten wir unter anderen solche dreimal zwei dieser Sekanten, welche durch drei, auf einerlei Seite des vollständigen Vierseits liegende Ecken gehen, und unter diesen wieder drei beliebige, welche zu verschiedenen Paaren gehören, so bilden diese ein Dreieck, und die drei übrigen ein anderes Dreieck: die Ecken beider Dreiecke liegen, wie die unmittelbare

*) Vergl. hierüber §. 21 des Steiner'schen Werkes.

Anschauung zeigt, auf solchen drei der sechs übrigen Sekanten, welche in einerlei Punkte convergiren. Also:

Wenn vier beliebige Kegelschnitte einen beliebigen fünften doppelt berühren, und man betrachtet die drei Paar

zugeordnete Sekanten, welche eine dieser Curven mit den drei übrigen gemein hat und deren Durchschnitte auf der entsprechenden Berührungssehne liegen, so kann man daraus vier Paar Dreiecke bilden, deren Ecken paarweise auf drei, den übrigen Curven unter sich gemeinschaftlichen und in einem Punkte convergirenden Sekanten liegen; und diese vier Paar Dreiecke sind an die vier derartigen Sekantenbüschel vertheilt.

zugeordnete Durchschnittspunkte der, der einen dieser Curven mit den drei übrigen gemeinschaftlichen Tangenten, welche mit dem entsprechenden Berührungspole in gerader Linie liegen, so kann man daraus vier Paar Dreiecke bilden, deren Seiten paarweise durch drei solche Durchschnittspunkte der, den übrigen Curven unter sich gemeinschaftlichen Tangenten gehen, welche in einer geraden Linie liegen; und diese vier Paar Dreiecke sind an die vier derartigen Punktenschaaren vertheilt.

IV.

Nach Entwickelung dieser vorbereitenden Lehrsätze wollen wir nun die, den bisher betrachteten Kegelschnitten A^0 und B^0, B^0 und C^0, C^0 und A^0 gemeinschaftlichen inneren Sekanten resp. C, A, B, und die äußeren C_1, A_1, B_1 nennen; desgleichen die äußeren Durchschnittspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten c, a, b, und die inneren c_1, a_1, b_1. Ferner werden wir von jetzt an jeden der vier Punkte, wo jene sechs gem. Sekanten drei zu drei sich schneiden, ein Radikalcentrum, und jede der vier Geraden, denen jene sechs Durchschnittspunkte drei zu drei angehören, eine Radikal-Achse von A^0, B^0 und C^0 heißen; und zwar werden die Geraden C, A, B ein inneres Radikalcentrum s, und die dreimal drei Geraden C, A_1, B_1; C_1, A, B_1; C_1, A_1, B drei äußere Radikalcentra s_1, s_2, s_3; und ebenso die Punkte c, a, b eine äußere Radikal-Achse S, und die dreimal drei Punkte c, a_1, b_1; c_1, a, b_1; c_1, a_1, b drei innere Radikal-Achsen S_1, S_2, S_3 bilden.

1) Nehmen wir nun auf den Umfängen der drei Kegelschnitte A^0, B^0, C^0, welche einen vierten K doppelt berühren, nach Belieben drei Punkte α, β, γ an, welche nicht in gerader Linie liegen, um durch dieselben einen neuen Kegelschnitt zu legen, welcher K ebenfalls doppelt berühre; so gibt es nach (I, 3) im Allgemeinen vier Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, K_4, welche dieser Bedingung genügen. Es sei also z. B. α_1 ein anderer dem A^0 und K_1 gemeinschaftlicher, und so beschaffener Punkt, daß die Sekante $\alpha\alpha_1$, was nach (I, 1) allzeit möglich ist, nach dem Durchschnitte der entsprechenden Berührungssehnen gerichtet sei; und auf dieselbe Weise seien die Punkte α_2, α_3, α_4 in Bezug auf A^0 und K_2, K_3, K_4; ferner die Punkte β_1, β_2, β_3, β_4 und γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 in Bezug auf B^0 und C^0 einerseits und K_1, K_2, K_3, K_4 andrerseits bestimmt. Dieß vorausgesetzt, so müssen zufolge (III.) die viermal drei Sekanten $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$; $\alpha\alpha_2$, $\beta\beta_2$, $\gamma\gamma_2$; $\alpha\alpha_3$, $\beta\beta_3$, $\gamma\gamma_3$ und $\alpha\alpha_4$, $\beta\beta_4$, $\gamma\gamma_4$ vier Dreiecke bilden, deren Ecken auf den Sekanten der Radikalcentra s, s_1, s_2, s_3 liegen. Aber durchaus unmöglich ist es, daß zwei dieser Dreiecke einem und demselben Radikalcentrum zugleich angehören, weil die Punkte α, β, γ, in welchen ihre Seiten sich paarweise schneiden, nicht in gerader Linie liegen — Also sind diese vier Dreiecke, und folglich die vier Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, K_4, von denen sie herrühren, einzeln an die vier Radikalcentra vertheilt; und *hat man einmal eines dieser Radikalcentra gewählt, so gibt es immer nur einen einzigen Kegelschnitt* K_1, *welcher* K *doppelt berührt und durch drei auf* A^0, B^0, C^0 *beliebig angenommene Punkte* α, β, γ *geht, und für welchen die drei Sekanten* $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, *welche er mit diesen letzteren gemein hat, paarweise sich auf den drei Sekanten dieses Radikalcentrums schneiden.*

2) Um die Ideen zu fixiren, wird man, ohne der Allgemeinheit unserer Betrachtung Eintrag zu thun, für den Augenblick annehmen können, daß die Kegelschnitte A^0, B^0, C^0 paarweise nur zwei oder keinen Punkt, und somit auch nur zwei Sekanten gemein haben, eine reelle und eine ideale, oder zwei ideale (S. das *Traité des propr. proj. des fig., pag.* 194). In diesen Fällen nämlich müssen die *inneren* oder *äußeren* zugeordneten gem. Sekanten C, A, B oder C_1, A_1, B_1 nothwendig auch *innere* oder *äußere* Achsen der Homologie, und die *äußeren* oder *inneren* Durchschnittspunkte gem. Tangenten c, a, b oder c_1, a_1, b_1 auch die *diesen Achsen zugeordneten äußeren* oder *inneren* Centra der Homologie sein.

Dieses vorausgesetzt, sei nun α, wie vorhin, ein auf dem Umfange von A^o beliebig gewählter Punkt; sei β z. B. der indirekt-homologe Punkt von α auf B^o, in Bezug auf das äußere Centrum der Homologie c; sei γ der direkt-homologe Punkt von β auf C^o, in Bezug auf das innere Centrum der Homologie a_1, und es sei durch die so erhaltenen Punkte α, β, γ ein Kegelschnitt K_1 gelegt, welcher den Kegelschnitt K doppelt berühre; so ist diese Curve vollkommen bestimmt, wenn die Bedingung hinzukommt, daß die obigen Sekanten $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ sich paarweise auf den Sekanten C, A, B des Radikalcentrums s schneiden sollen.

Da nun also 1° die Geraden $\alpha\alpha_1$, und $\beta\beta_1$ sich auf der inneren Achse der Homologie C von A^o und B^o schneiden, und zu gleicher Zeit die Punkte α und β, in Bezug auf das äußere Centrum der Homologie c, indirekt-homolog sind, so sind auch die Punkte α_1 und β_1, in Bezug auf dasselbe Centrum, indirekt-homolog (II, 4.).

Da 2° die Achse der Homologie A eine innere ist, und die Punkte β und γ, in Bezug auf das innere Centrum der Homologie a_1, direkt-homolog sind, so sind, aus demselben Grunde, auch die Punkte β_1 und γ_1 in Bezug auf dieses Centrum direkt-homolog.

3° Da das Sechseck $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\alpha$ einem Kegelschnitte K_1 eingeschrieben ist, und zwei Paare seiner Gegenseiten $\alpha\,\beta$ und $\alpha_1\,\beta_1$, $\beta\,\gamma$ und $\beta_1\,\gamma_1$ sich in den Punkten c und a_1 der Radikal-Achse S_1 schneiden, so muß, nach dem Satze des **Pascal**, auch der Durchschnitt x des dritten Paares $\gamma\,\alpha_1$ und $\gamma_1\,\alpha$ auf dieser Radikal-Achse liegen, welche auch das dritte Centrum der Homologie b_1 enthält.

4° Und weil auch noch angenommen ist, daß die Geraden $\gamma\gamma_1$ und $\alpha\alpha_1$ sich auf der inneren Achse der Homologie B begegnen, so würde, wenn man sich eine derselben frei und um ihren Durchschnitt mit der anderen gedreht dächte, der Punkt x eine Linie beschreiben, welche ebenfalls den Punkt b_1 enthielte, woraus im Allgemeinen die Identität der Punkte x und b_1 hervorgeht. Indessen da, näher betrachtet, diese Linie keine Gerade, sondern nach **Journal de l'école Polytechnique, cahier X., pag. 2.** ein Kegelschnitt ist, so thut es Noth, sich davon auf folgende unzweideutige und mehr elementare Weise zu überzeugen.

5° Nehmen wir auf A^0 anstatt α irgend einen andern Punkt α' an und bestimmen, von diesem ausgehend, die Punkte β', γ', α_1', β_1', γ_1' gerade so, wie oben die Punkte β, γ, α_1, β_1, γ_1; dann bilden die Geraden $\alpha'\alpha_1'$, $\beta'\beta_1'$, $\gamma'\gamma_1'$ ein anderes Dreieck, dessen Ecken ebenfalls auf den Sekanten **C, A, B** liegen, und sie schneiden die entsprechenden Seiten $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ des früheren in drei Punkten α_0, β_0, γ_0, welche in gerader Linie liegen. Nun aber liegen nach (II, 5.) die Punkte α_0 und β_0 und ebenso β_0 und γ_0, als Durchschnitte homologer Sehnenpaare, mit den entsprechenden Centris der Homologie c und a_1 in gerader Linie; folglich gehören alle drei der Geraden ca_1 oder S_1 an, *und es gehen demnach alle ähnlichen Geraden*, wie $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, *durch drei feste Punkte* α_0, β_0, γ_0 *der entsprechenden Radikal-Achse*. Und umgekehrt: geht eine beliebige Gerade $\alpha\alpha_1$ von dem Punkte α_0 aus, so geht ihre indirekt-homologe $\beta\beta_1$ ihrerseits durch den Punkt β_0, und die direkt-homologe von $\beta\beta_1$ durch γ_0, und alle drei begegnen sich paarweise auf den entsprechenden Sekanten **C, A, B.** Unter allen Geraden, wie $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha_1'$ u. s. w. befinden sich aber auch die beiden Tangenten, welche von α_0 an A^0 gezogen werden, welches der Fall solcher zwei Punkte α und α_1 ist, die in einen einzigen a^0 oder a_0 zusammenfallen, demzufolge dann auch die Punkte β und β_1 in einen einzigen b^0 oder b_0, und die Punkte γ und γ_1 in einen einzigen c^0 oder c_0 zusammenfallen müssen. Siehe da also zwei Tangentenpaare $\alpha_0 a^0$, $\alpha_0 a_0$ und $\gamma_0 c^0$, $\gamma_0 c_0$, welche von zwei Punkten der *inneren* Achse der Homologie **B** an die entsprechenden Kegelschnitte A^0 und C^0 gehen, und deren Durchschnitte α_0 und γ_0 mit dem *inneren* Centrum der Homologie b_1 in gerader Linie liegen. Diese Tangentenpaare sind also *direkt-homolog*, und da man sie offenbar auch als homologe Sehnen ansehen kann, so ergibt sich nach (II, 5.), daß alle zu A^0 gehörige Sehnen, welche in Bezug auf b_1 den zu C^0 gehörigen und durch den Punkt γ_0 gehenden *direkt-homolog* sind, ihrerseits durch den Punkt α_0 gehen müssen. Also werden auch umgekehrt die Sehnen $\alpha\alpha_1$ und $\gamma\gamma_1$, welche wir anfänglich betrachteten, in Bezug auf b_1 *direkt-homolog* sein müssen, weil sie sich auf der Achse der Homologie **B** schneiden und durch die Punkte α_0 und γ_0 gehen. Hieraus würde endlich folgen, daß entweder die Geraden $\alpha\gamma$ und $\alpha_1\gamma_1$, oder $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma$ sich im Centrum der Homologie b_1 kreuzen; im ersten Falle aber würde man zwei Dreiecke $\alpha\beta\gamma\alpha$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_1$ haben, deren Seiten sich paarweise in drei, in gerader Linie liegenden Punkten c, a_1, b_1 schnitten, ohne daß zu gleicher Zeit die Geraden $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, welche deren Ecken paarweise verbinden, durch einen und denselben Punkt gingen. Also kreuzen sich die Geraden $\alpha\gamma_1$ und $\alpha_1\gamma$ im Punkte b_1.

3) Gesetzt also, man suchte, nachdem man die Punkte α, β, γ der obigen Vorschrift gemäß bestimmt, sofort den direkt-homologen Punkt α_1 von γ, in Bezug auf das innere Centrum der Homologie b_1, sodann den indirekt-homologen Punkt β_1 von α_1, in Bezug auf c, dann wieder den direkt-homologen Punkt γ_1 von β_1, in Bezug auf a_1, und endlich den direkt-homologen von γ_1, in Bezug auf b_1; so würde man bei dieser letzten Operation nothwendig auf den Punkt α zurückfallen, von welchem man ausgegangen ist.

Herr **Poncelet**, welchem wir diese schöne Theorie verdanken, die er direkt für den besonderen Fall drei beliebiger Kreise in s. **Traité** S. **144—154** entwickelt hat, nennt ein solches System nach einander (consécutivement) homologer Punkte oder Geraden, welche eine in sich zurückkehrende Periode (période rentrante) bilden, système de points ou de droites périodiquement homologues. Er redet zwar daselbst nur von indirekt- oder invers-homologen Punkten; indessen zeigt der Ausdruck in der Ueberschrift points périodiquement homologues d'une certaine espèce ziemlich deutlich an, daß er auch Systeme von theils direkt- theils indirekt-homologen Punkten im Sinn gehabt habe, welche allerdings auch schon bei drei Kreisen vorkommen. Man kann zwischen Systemen von sechs und solchen von bloß drei periodisch-homologen Punkten oder Geraden unterscheiden. So z. B. bilden die Punkte α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, oder die Sehnen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\alpha_1\alpha_1'$, $\beta_1\beta_1'$, $\gamma_1\gamma_1'$ Systeme von sechs, dagegen die Punkte a^0, b^0, c^0, sowie auch a_0, b_0, c_0, oder die Sehnen a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, oder auch $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ solche von drei Punkten oder Geraden allein. Endlich versteht es sich kraft des Prinzipes der Dualität, daß diese Erklärungen sich auch auf Tangenten und Pole, welche wiederkehrende Perioden bilden, ausdehnen lassen.

Uebrigens begreift man leicht, daß man zur Bestimmung periodisch-homologer Punkte, statt S_1 und s, sich eben so gut jeder andern Radikal-Achse und jedes andern Radikalcentrums bedienen kann, wofern man nur jedesmal direkt- oder indirekt-homologe Punkte nimmt, je nachdem es sich um eine Achse und ein Centrum der Homologie von einerlei oder von verschiedener Benennung handelt. Somit erweisen sich die drei Kegelschnitte A^0, B^0, C^0 als Oerter von viermal vier verschiedenen Arten von Systemen periodisch-homologer Punkte, und man kann in Ansehung der vier Radikal-Achsen von vier Familien solcher Systeme reden, deren jede in Ansehung der vier Radikalcentra in vier besondere Arten zerfällt. Die Konstruktion dieser Systeme aber ist, was wesentlich zu bemerken, an die, für die Theorie so nöthige Unterscheidung der äußern und innern Centra und Achsen der Homologie nicht gebunden. Denn was für eine Radikal-Achse auch man nach einander mit den vier Radikalcentris combiniren möge, immer wird man bei drei dieser Combinationen nur ein einziges, und bei der vierten drei Paare einer Achse und eines Centrums der Homologie von verschiedener Benennung erhalten. Hieraus ergibt sich folgende Regel:

> Ist irgend eine Radikal-Achse mit ihren drei Centris der Homologie gegeben, so findet man jedesmal ein System periodisch-homologer Punkte, wenn man bei dreimaligem Uebergange von einem Kegelschnitte zum anderen entweder nur **ein-** oder **dreimal** die **indirekte**, und zwischen **einerlei** Kegelschnitten immer **einerlei** Lage homologer Punkte beobachtet.

Ja sogar die Bestimmung der direkten und indirekten Lage der Punkte ließe sich von der oft mißlichen Vergleichung der Krümmungen beider Kegelschnitte unabhängig machen, wenn man unter direkt oder indirekt liegenden Punkten solche zwei Durchschnittspunkte einer beliebigen Geraden mit beiden Kegelschnitten verstehen wollte, zwischen welchen die übrigen Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Kegelschnitten und mit zwei beliebigen zugeordneten gemeinschaftlichen Sekanten sich resp. in gerader oder ungerader Anzahl befinden.

Endlich bedarf es wohl kaum der Bemerkung, daß, nachdem die Bestimmung der Systeme periodisch-homologer Punkte sich als unabhängig von der Beziehung der äußeren oder inneren Centra und Achsen der Homologie auf einander erwiesen und einzig und allein auf eine gewisse Wahl direkt- oder indirekt-homologer Punkte reducirt hat, nun auch die zu Anfang von № 2. gemachte Einschränkung wieder wegfällt, und man, kraft des Gesetzes der Continuität, das erhaltene Resultat auch auf den Fall je zweier Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Punkten ausdehnen kann, wo der Unterschied der inneren und äußeren Achsen, sowie der äußeren und inneren Centra der Homologie illusorisch wird. Dieser Fall findet z. B. in **Fig. 2.** bei den zwei Paar Kegelschnitten A^o und C^o, B^o und C^o statt, wo es keineswegs erlaubt ist, die inneren Durchschnittspunkte Fig. 2.

gem. Tangenten a_1 und b_1 als innere Centra der Homologie, und zu gleicher Zeit die äußeren gem. Sekanten A_1 und B_1 als äußere Achsen der Homologie zu behandeln, indem die Theorie für diesen Fall nur indirekt=homologe Punkte gestatten würde.

Anmerkung. Die oben erwähnten viermal vier verschiedenen Arten von Systemen periodisch=homologer Punkte lassen sich im Grunde auch bei drei beliebigen Kreisen nachweisen, ein Fall, der wegen der unendlich=weit entfernten gemeinschaftlichen Sekante hierher zu rechnen ist. Indessen findet sich hier in jeder der vier Familien nur eine einzige Art von Systemen, deren sechs Punkte allemal einem Kreise angehören. Es sind dieß nämlich diejenigen vier Arten, welche sich auf das innere Radikalcentrum s beziehen. Bei allen übrigen Arten kommen vier der periodisch=homologen Punkte in einer geraden Linie zu liegen, welche mit der Verbindungslinie der beiden übrigen parallel läuft. Hier artet also der Kegelschnitt K_1 in ein System zweier Geraden aus, welche, anstatt parallel zu sein, sich in endlicher Entfernung schneiden würden, wenn die gem. Sekante, wie bei drei Kegelschnitten überhaupt, sich in endlicher Entfernung befände. Aehnliches findet bei drei Kegelschnitten statt, welche zwei Tangenten gemein haben.

4) Denken wir uns ein beliebiges ebenes oder schiefes Sechseck $\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha$, dessen Gegenseiten $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$, $\beta\gamma$ und $\beta_1\gamma_1$, $\gamma\alpha_1$ und $\gamma_1\alpha$ sich resp. in drei Punkten c, a, b schneiden, so gibt es unzählige andere Sechsecke, z. B. $\alpha_2\beta_2\gamma_2\alpha_3\beta_3\gamma_3\alpha_2$, deren Diagonalen $\alpha_2\alpha_3$, $\beta_2\beta_3$, $\gamma_2\gamma_3$ mit denen des ersteren $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ der Richtung nach zusammenfallen, und deren Gegenseiten $\alpha_2\beta_2$ und $\alpha_3\beta_3$, $\beta_2\gamma_2$ und $\beta_3\gamma_3$, $\gamma_2\alpha_3$ und $\gamma_3\alpha_2$ sich ebenfalls in den Punkten c, a, b schneiden. Denn sind, um mit Herrn Steiner zu reden, die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ in Ansehung der entsprechenden Punkte α, α_1, α_2, α_3 und β, β_1, β_2, β_3, und ebenso die Geraden $\beta\beta_1$ und $\gamma\gamma_1$ in Ansehung der entsprechenden Punkte β, β_1, β_2, β_3 und γ, γ_1, γ_2, γ_3 perspektivisch, d. h. kreuzen sich die Geraden $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ in einerlei Punkte c, und ebenso die Geraden $\beta\gamma$, $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ in einerlei Punkte a, so sind ihrerseits die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\gamma\gamma_1$ in Ansehung der entsprechenden Punkte α, α_1, α_2, α_3 und γ, γ_1, γ_2, γ_3 projektivisch, d. h. man hat die Relation:

$$\frac{\alpha\alpha_1}{\alpha_2\alpha_1} : \frac{\alpha\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma_2\gamma_1} : \frac{\gamma\gamma_3}{\gamma_2\gamma_3}.$$ Aber dann ist auch:

$$\frac{\alpha\alpha_1}{\alpha_2\alpha_1} : \frac{\alpha\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{\gamma_1\gamma}{\gamma_3\gamma} : \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3\gamma_2},$$ d. h. die Geraden $\alpha\alpha_1$ und $\gamma\gamma_1$ sind auch

in Ansehung der entsprechenden Punkte α, α_1, α_2, α_3 und γ_1, γ, γ_3, γ_2 projektivisch, weil auch so noch die entsprechenden Punkte auf beiden Geraden übereinstimmend liegen. Hieraus folgt, daß, wenn sich die Geraden $\alpha\gamma_1$, $\alpha_1\gamma$ und $\alpha_3\gamma_2$ in einerlei Punkte b kreuzen, die vierte $\alpha_2\gamma_3$ durch denselben Punkt gehen muß.

Aber gerade dieß ist mit demjenigen Sechseck der Fall, welches von den sechs periodisch-homologen Punkten α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 gebildet wird, wenn man auf dessen Diagonalen $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ die Punkte α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3 γ_3 so annimmt, daß nacheinander die Geraden $\alpha_2\beta_2$, $\beta_2\gamma_2$, $\gamma_2\alpha_3$, $\alpha_3\beta_3$, $\beta_3\gamma_3$ durch die Punkte c, a_1, b_1, c, a_1 gehen. Folglich erhält man, nicht nur, wenn man vom Punkte α oder α_1, sondern auch, wenn man von einem beliebigen Punkte α_2 oder α_3 der Sehne $\alpha\alpha_1$ ausgeht, ein System periodisch-homologer Punkte. Doch ist unter allen diesen Systemen nur ein einziges von drei Punkten, weil die Centra c, a_1, b_1 in gerader Linie liegen, ohne daß gleichzeitig die Geraden $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ in einem und demselben Punkte convergiren.

5) Ziehen wir jetzt die Sehnen $a^o a_o$, $b^o b_o$, $c^o c_o$, welche die oben (2, 5°) erwähnten Punkte a^o, b^o, c^o und a_o, b_o, c_o mit einander verbinden. Diese drei Linien besitzen mehrere ausgezeichnete Eigenschaften:

1° Sie sind, was unmittelbar einleuchtet, die Polaren der drei gleichzeitig erwähnten festen Punkte α_o, β_o, γ_o, in Bezug auf die entsprechenden Kegelschnitte A^o, B^o, C^o, und enthalten folglich die Pole der Radikal-Achse, auf welcher jene Punkte liegen.

2° Hat man zwei Systeme periodisch-homologer Punkte von einerlei Art, und verbindet in jedem Kegelschnitte je zwei Punkte, welche zu verschiedenen Systemen gehören, so erhält man in jedem zwei Sehnenpaare, deren Durchschnittspunkte auf den entsprechenden Sehnen $a^o a_o$, $b^o b_o$, $c^o c_o$ liegen. Denn nach (2, 5°) gehen die beiden anderen Sehnen durch die festen Punkte α_o, β_o, γ_o, die Pole der letzteren.

3° Da die Seiten der Dreiecke $a^o b^o c^o$ und $a_o b_o c_o$ sich paarweise in drei Punkten c, a_1, b_1 schneiden, welche in gerader Linie liegen, so gehen die Geraden $a^o a_o$, $b^o b_o$, $c^o c_o$, welche deren Ecken paarweise verbinden, durch einen und denselben Punkt; und aus diesem Grunde gibt es noch unzählige andere Dreiecke, welche dieselben Eigenschaften besitzen, d. h. jeder Punkt einer beliebigen dieser drei Geraden bestimmt ein System von drei periodisch-homologen Punkten.

4° Weil die Geraden $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ und alle ähnlichen nur ein einziges System von drei periodisch-homologen Punkten enthalten, so ergibt sich ganz streng, daß alle solche Punkte einer gegebenen Art den entsprechenden drei Sehnen a^oa_o, b^ob_o, c^oc_o ausschließlich angehören.

5° Weil endlich diese drei Sehnen homolog sind, so schneiden sie sich paarweise auf den entsprechenden Achsen der Homologie; wir haben aber so eben gesehen, daß sie sich in einerlei Punkte kreuzen; also gehen alle drei nach dem entsprechenden Radikalcentrum.

6) Das letzte Resultat, verbunden mit dem (5, 1°), zeigt uns, daß die Polaren des Radikalcentrums ihrerseits durch die drei festen Punkte α_o, β_o, γ_o gehen, und somit, da sie auch homologe Sehnen sind, den Kegelschnitten A^o, B^o, C^o in sechs periodisch-homologen Punkten begegnen (2, 5°). Doch ergibt sich dieses auch unmittelbar, ohne von dem Vorigen etwas zu entlehnen, indem offenbar die von dem Radikalcentrum ausgehenden sechs Tangenten periodisch-homolog sind, folglich auch deren Berührungspunkte d. i. eben die Punkte, von denen wir reden. Also müssen auch umgekehrt die Polaren des Radikalcentrums durch α^o, β^o, γ^o, und deßhalb die Polaren a^oa_o, b^ob_o, c^oc_o von diesen durch jenes gehen.

Uebrigens ist zu bemerken, daß die letzteren sechs Punkte, gehörig verbunden, in Einem zugleich vier verschiedene Arten periodisch-homologer Punkte darstellen. Daher scheint es gut, das System dieser Punkte vor allen übrigen auszuzeichnen, indem wir es das Radikalsystem periodisch-homologer Punkte in Bezug auf ein gegebenes Radikalcentrum nennen. Und ähnlicher Weise kann man auch von einem Radikalsystem periodisch-homologer Tangenten in Bezug auf eine gegebene Radikal-Achse reden, d. h. derjenigen Tangenten, welche von den Polen dieser Achse ausgehen.

7) Da man die Pole einer bestimmten Radikal-Achse auf alle vier Radikalcentra, und die Polaren eines bestimmten Radikalcentrums auf alle vier Radikal-Achsen beziehen kann, so folgt nach (5, 1_o) und (6), daß jeder der ersteren vier Sehnen, wie a^oa_o, b^ob_o c^oc_o; und daß jede der letzteren vier Punkte, wie α_o, β_o, γ_o, enthält. Jene drei Büschel von vier Sehnen sind zur Hälfte direkt-, zur Hälfte indirekt-homolog. Also bilden die drei in Rede stehenden Pole ein System dreier periodisch-homologen Punkte, welches auf einmal an vier verschiedenen Arten Theil nimmt (II, 5 u. IV, 5, 3°.).

8) Kehren wir endlich zu dem Kegelschnitte K_1 zurück, von dem wir ursprünglich die Bestimmung der Punkte α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 abhängen ließen, so leuchtet ein, daß er,

sobald die Punkte α und α_1, β und β_1, γ und γ_1 resp. in einen einzigen a°, b°, c° oder $a_\circ$, $b_\circ$, $c_\circ$ zusammenfließen, die Kegelschnitte A°, B°, C° in diesen Punkten berührt. Jede Verbindung einer Radikal-Achse und eines Radikalcentrums liefert zwei solche Kegelschnitte; folglich gibt es im Allgemeinen $4 \times 4 \times 2 = 2^5 = 32$ Kegelschnitte, welche drei gegebene Kegelschnitte einfach, und mit diesen zugleich einen vierten gegebenen doppelt berühren.

Einer der Kegelschnitte K_1 ist auch derjenige, welcher die sechs Punkte des Radikalsystems enthält. Wir werden ihn, nach der Analogie der Kreis-Taktionen, den Radikal-Kegelschnitt nennen, eine Benennung, welche übrigens auch demjenigen zukommt, der von dem Radikalsysteme periodisch-homologer Tangenten umhüllt wird, und der keineswegs mit dem ersteren zu verwechseln ist.

9) Es seien K_1 und K_2 zwei Kegelschnitte, welche resp. die periodisch-homologen Punkte α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 und α', β', γ', α_1', β_1', γ_1' zweier Systeme von einerlei Art enthalten: so gehen nach (1.) z. B. die Sekanten $\alpha\alpha_1$ und $\alpha'\alpha_1'$, welche sie mit A° gemein haben, resp. durch die Durchschnittspunkte der zu A° und K_1, A° und K_2 gehörigen Berührungssehnen. Nennt man also k und k_1 die beiden, dem K_1 und K_2 unter sich gemeinschaftlichen und im Durchschnitte ihrer Berührungssehnen convergirenden Sekanten, so kann man kraft (II, 1. und IV, 2, 5°) behaupten, daß nothwendiger Weise entweder k oder k_1 durch den Durchschnitt $\alpha_\circ$ der Sekanten $\alpha\alpha_1$ und $\alpha'\alpha_1'$ gehen muß. Aber aus denselben Gründen kann man auch behaupten, daß entweder k oder k_1 durch den Durchschnitt $\beta_\circ$ der Sekanten $\beta\beta_1$ und $\beta'\beta_1'$, und zum dritten Mal, daß entweder k oder k_1 durch den Durchschnitt $\gamma_\circ$ der Sekanten $\gamma\gamma_1$ und $\gamma'\gamma_1'$ gehen muß. Also geht nothwendig eine von beiden durch zwei dieser Punkte $\alpha_\circ$, $\beta_\circ$, $\gamma_\circ$, und dann natürlich auch durch den dritten, oder, was einerlei ist, sie fällt der Richtung nach mit der Radikal-Achse zusammen, welche diese drei Punkte enthält. Demnach haben alle Kegelschnitte, welchen die periodisch-homologen Punkte der Systeme von einerlei Art angehören, die entsprechende Radikal-Achse zur reellen oder idealen gemeinschaftlichen Sekante, und unter anderen schneiden sich auch die beiden berührenden und der Radikal-Kegelschnitt in zwei reellen oder imaginären Punkten dieser Achse. Hieraus schließen wir ferner nach (I, 2.), daß die Berührungssehnen aller dieser Curven sich in einem und demselben Punkte der Radikal-Achse schneiden, und daß sich um diesen Punkt auch die anderen, der Radikal-Achse zuge-

ordneten Sekanten drehen, welche sie nur paarweise gemein haben. Uebrigens sollte man wegen der Duplicität der berührenden Kegelschnitte zufolge (I, 2.) erwarten, daß die Gesammtheit der Kegelschnitte K_1, K_2 u. s. w. sich in zwei Gruppen sondere; eine nähere Ansicht der Sache zeigt jedoch, daß dieses nicht der Fall sein kann. Denn wenn zwei ihrer Berührungssehnen sich nicht auf der Radikal-Achse schnitten, was in jenem Falle geschehen müßte, so würden die Sekanten k und k_1 dasselbe thun, und folglich könnte keine derselben mit dieser Achse zusammenfallen.

Endlich könnte noch die Frage aufgeworfen werden, welche Bewandtniß es mit den übrigen 6 Durchschnittspunkten des Kegelschnittes K_1 und der A^o, B^o, C_o habe? In der That hat jeder der Kegelschnitte K_1 und K_2 mit A^o außer $\alpha\alpha_1$ und $\alpha'\alpha_1'$ noch eine zweite Sekante gemein, welche nach (II, 1.) ebenfalls durch einen festen Punkt der Radikal-Achse geht. Dieser Punkt ist aber nicht der nämliche als α_o, sondern vielmehr der, zu den Durchschnitten der Berührungssehnen von K_1 und A^o mit der Radikal-Achse und zu α_o vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt. Nach (2, 5o.) können also jene sechs Punkte wenigstens keine periodisch-homologen sein.

Es wären nun noch nach dem Dualitäts-Prinzipe sämmtliche in dieser Nummer angestellten Betrachtungen zu verdoppeln; indessen, da dieses nicht die mindeste Schwierigkeit leidet, so beschränken wir uns hier, bloß die beiderseitigen Resultate neben einander zu stellen.

Allgemeiner Doppelsatz.

Werden drei beliebige Kegelschnitte von einem beliebigen vierten doppelt berührt, und man bestimmt die Centra und Achsen der Homologie je zweier dieser drei Kegelschnitte, so liegen 1. sechs jener Centra drei für drei in vier geraden Linien, welche **Radikal-Achsen**; und sechs jener Achsen gehen drei für drei durch vier Punkte, welche **Radikalcentra** heißen.

2.

Bestimmt man, von einem beliebigen Punkte eines dieser drei Kegelschnitte ausgehend, in Bezug auf die Centra der Homologie einer gegebe-

Bestimmt man, von einer beliebigen Tangente eines dieser drei Kegelschnitte ausgehend, in Bezug auf die Achsen der Homologie eines genen Radikal-Achse, die demselben nach einander homologen Punkte, indem man bei dreimaligem Uebergange von einem Kegelschnitte zum andern entweder nur ein- oder dreimal die indirekte, und zwischen denselben zwei Kegelschnitten immer dieselbe Lage der Punkte beobachtet, so fällt man höchstens nach der fünften Operation auf den Ausgangspunkt zurück, und hat somit im Allgemeinen ein System von sechs periodisch-homologen Punkten.

gebenen Radikalcentrums, die derselben nach einander homologen Tangenten, indem man bei dreimaligem Uebergange von einem Kegelschnitte zum andern entweder nur ein- oder dreimal die indirekte, und zwischen denselben zwei Kegelschnitten immer dieselbe Lage der Tangenten beobachtet, so fällt man höchstens nach der fünften Operation auf die Ausgangs-Tangente zurück, und hat somit im Allgemeinen ein System von sechs periodisch-homologen Tangenten.

3.

Die durch ein solches System für jeden der drei Kegelschnitte erhaltenen Sehnen schneiden sich paarweise auf drei Achsen der Homologie eines und desselben Radikalcentrums, und dieses letztere ändert sich nur mit der gegebenen Radikal-Achse, oder auch mit der Aufeinanderfolge der homologen Punkte.

Die durch ein solches System für jeden der drei Kegelschnitte erhaltenen Tangenten-Durchschnitte oder Pole liegen paarweise mit drei Centris der Homologie einer und derselben Radikal-Achse in gerader Linie, und diese letztere ändert sich nur mit dem gegebenen Radikalcentrum, oder auch mit der Aufeinanderfolge der homologen Tangenten.

4.

Variirt man ein solches System fortwährend in einerlei Sinne, so drehen sich die bezeichneten Sehnen um drei feste Punkte der gegebenen Radikal-Achse, und alle Durchschnittspunkte je zweier Sehnen, welche Punkte verschiedener Systeme verbinden, durchlaufen drei feste Gerade, die Polaren jener festen Punkte, in Bezug auf die entsprechenden Kegelschnitte.

Variirt man ein solches System fortwährend in einerlei Sinne, so durchlaufen die bezeichneten Pole drei feste Gerade, welche durch das gegebene Radikalcentrum gehen, und alle Verbindungslinien je zweier Pole, welche von Tangenten verschiedener Systeme herrühren, drehen sich um drei feste Punkte, die Pole jener festen Geraden, in Bezug auf die entsprechenden Kegelschnitte.

5.

Die drei Polaren eines beliebigen Radikalcentrums, in Bezug auf die drei Kegelschnitte, begegnen jeder der vier Radikal-Achsen in den drei festen Punkten, welche diesem Centrum entsprechen, und den drei Kegelschnitten selbst in sechs Punkten, welche auf vier verschiedene Arten periodisch-homolog sind und das sogenannte Radikalsystem periodisch-homologer Punkte bilden.

Die drei Pole einer beliebigen Radikal-Achse, in Bezug auf die drei Kegelschnitte, haben mit jedem der vier Radikalcentra die drei festen Geraden gemein, welche dieser Achse entsprechen, und mit den drei Kegelschnitten selbst sechs Tangenten, welche auf vier verschiedene Arten periodisch-homolog sind und das sogenannte Radikalsystem periodisch-homologer Tangenten bilden.

6.

Die drei festen Geraden, und zugleich alle ihre Punkte, drei zu drei genommen, sind periodisch-homolog; eine Eigenschaft, welche sie ausschließlich besitzen, und wodurch sie sich insbesondere von den oben (3) erwähnten drei Sehnen unterscheiden, welche ebenfalls periodisch-homolog, deren Punkte es aber nur sechs zu sechs sind, diejenigen ausgenommen, welche sie mit den festen Geraden selbst oder, wenn man will, mit der Radikal-Achse gemein haben.

Die drei festen Punkte, und zugleich alle ihre Strahlen, drei zu drei genommen, sind periodisch-homolog; eine Eigenschaft, welche sie ausschließlich besitzen, und wodurch sie sich insbesondere von den oben (3) erwähnten drei Polen unterscheiden, welche ebenfalls periodisch-homolog, deren Strahlen es aber nur sechs zu sechs sind, diejenigen ausgenommen, welche sie mit den festen Punkten selbst oder, wenn man will, mit dem Radikalcentrum gemein haben.

7.

Die drei festen Geraden convergiren in dem entsprechenden Radikalcentrum, so daß jedes dieser Centra, in Ansehung der vier Radikal-Achsen, vier Büschel solcher drei Geraden trägt, und sie schneiden die Polaren jenes Centrums in den Polen der entsprechenden Radikal-Achse, so daß jeder dieser Pole, in Ansehung der vier Radikalcentra, einen Bü-

Die drei festen Punkte liegen auf der entsprechenden Radikal-Achse, so daß jede dieser Achsen, in Ansehung der vier Radikalcentra, vier Schaaren solcher drei Punkte trägt; und sie haben mit den Polen jener Achse die Polaren des entsprechenden Radikalcentrums gemein, so daß jede dieser Polaren, in Ansehung der vier Radikal-Achsen, eine Schaar von schel von vier solchen Geraden trägt und zu einem Systeme von drei periodisch-homologen Punkten gehört, das an vier verschiedenen Arten Theil nimmt.

vier solchen Punkten trägt und zu einem Systeme von drei periodisch-homologen Geraden gehört, das an vier verschiedenen Arten Theil nimmt.

8.

Jedes System von sechs periodisch-homologen Punkten gehört einem Kegelschnitte an, der denselben, als die drei anderen, doppelt berührt; und jedes System von drei periodisch-homologen Punkten gehört insbesondere einem Kegelschnitte an, welcher überdieß die drei anderen in diesen Punkten berührt.

Jedes System von sechs periodisch-homologen Tangenten umhüllt einen Kegelschnitt, der denselben, als die drei anderen, doppelt berührt; und jedes System von drei periodisch-homologen Tangenten umhüllt insbesondere einen Kegelschnitt, welcher überdieß die drei anderen längs diesen Tangenten berührt.

Die letzteren sind links und rechts dieselben, und es gibt deren im Allgemeinen zwei für jede Verbindung einer Radikal-Achse mit einem Radikalcentrum, was also im Ganzen eine Anzahl von $4 \times 4 \times 2 = 2^5 = 32$ berührenden Kegelschnitten macht.

9.

Variirt man ein System periodisch-homologer Punkte immer in demselben Sinne, so schneidet der Kegelschnitt, dem es angehört, die entsprechende Radikal-Achse fortwährend in den nämlichen zwei reellen oder imaginären Punkten, und seine Berührungssehne dreht sich auch um einen festen Punkt dieser Achse. Also entsprechen jeder Radikal-Achse vier Gruppen von Kegelschnitten, welche sie in vier Punktenpaaren schneiden; und es entsprechen jedem Radikalcentrum vier andere Gruppen solcher Kegelschnitte, welche die vier Radikal-Achsen zu gemeinschaftlichen Sekanten haben; unter den letzteren

Variirt man ein System periodisch-homologer Tangenten immer in demselben Sinne, so berührt der Kegelschnitt, den es umhüllt, fortwährend die nämlichen zwei reellen oder imaginären Strahlen des entsprechenden Radikalcentrums, und sein Berührungspol durchläuft auch einen festen Strahl dieses Centrums. Also entsprechen jedem Radikalcentrum vier Gruppen von Kegelschnitten, die es zum Durchschnitt von vier Paar gemeinschaftlichen Tangenten haben; und es entsprechen jeder Radikal-Achse vier andere Gruppen solcher Kegelschnitte, welche die vier Radikalcentra zu Durchschnitten gemein-aber gibt es einen eigenthümlichen, der an allen vier Gruppen Theil nimmt: dieses ist der Radikal-Kegelschnitt, welcher die sechs Punkte des Radikalsystems enthält.

schaftlicher Tangenten haben; unte den letzteren aber gibt es einen eigenthümlichen, der an allen vier Gruppen Theil nimmt: dieses ist der Radikal-Kegelschnitt, welcher die sechs Tangenten des Radikalsystems berührt.

V.

Das apollonische Problem in der ganzen Allgemeinheit, deren es fähig ist, umfassen heißt, so scheint es, einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher fünf gegebene Kegelschnitte berührt. Indessen diese Aufgabe möchte wohl die Mittel, über welche die géométrie de la règle zu gebieten hat, übersteigen, sowie sie auch die gegenwärtigen Kräfte der algebraischen Analysis übersteigt, welche hier nicht weniger als ein System von funfzehn quadratischen Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufzulösen hätte. Dagegen lassen die so eben entwickelten Eigenschaften, von denen die schon längst bekannten der drei Kreise gewissermaßen eine Art Abdruck sind, hinsichtlich ihrer Symmetrie und Reciprocität so durchaus nichts zu wünschen übrig, daß es scheint, als müsse man es bei der Aufgabe I. bewenden lassen, welche wir in dem Vorworte aufgestellt haben, und von welcher wir jetzt die Möglichkeit, sie aufzulösen, darthun werden.

Vor Allem wird man einsehen, daß, wenn die Aufgabe nicht durchaus illusorisch werden soll, die neun gegebenen Punkte, von denen die Rede ist, entweder alle außerhalb oder alle innerhalb der gezeichnet vorliegenden Curve sich befinden, und die neun gegebenen Tangenten entweder alle oder keine diese Curve durchschneiden müssen.

Es seien also zuerst a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' neun, außerhalb eines vollständig gezeichneten Kegelschnittes K liegende Punkte, welche zur völligen Bestimmung dreier Kegelschnitte A°, B°, C°, die den ersteren doppelt berühren sollen, gegeben sind; so wird man vorderhand zufolge (I, 3.) die, diesen drei Kegelschnitten zugehörigen Berührungssehnen und Berührungspole mittels des Lineals allein construiren können, wodurch man, wenn diese Sehnen reell sind, für jeden derselben noch zwei Punkte erhält, so daß man nun durch Zeichnung mystischer Sechsecke noch soviele andere Punkte finden kann, als man will. Sind die Berührungssehnen und Berührungspole ideal, so muß man, was auch im ersten Falle geschehen kann, die Theorie der Centra und Achsen der Homologie auf dieselben anwenden, um das Nämliche zu erreichen. Da es übrigens im Allgemeinen vier Kegelschnitte gibt, welche durch drei gegebene Punkte gehen und einen gegebenen doppelt berühren (I, 3.), so existiren in unserem Falle drei Gruppen von vier, oder vielmehr $4 \times 4 \times 4$ Gruppen von drei Kegelschnitten A°, B°, C°, welche sämmtlich als gegeben betrachtet werden müssen. —

Nachdem man also eine beliebige von diesen Gruppen ausgewählt, um zunächst die ihr zukommenden 32 berührenden Kegelschnitte zu zeichnen, ziehe man mit dem Lineal von drei beliebigen Punkten a, b, c drei Tangenten an K, und verbinde ihre Berührungspunkte mit einander durch drei Gerade, von denen z. B. die durch a und b entstandene die beiden entsprechenden Berührungssehnen in α und β schneide. Man ziehe die Geraden $a\alpha$ und $b\beta$, und verbinde deren Durchschnittspunkt mit dem der beiden Berührungssehnen selbst durch eine neue Gerade; so ist letztere nothwendig eine innere oder äußere Achse der Homologie von A° und B°, und man wird die ihr zugeordnete finden, indem man den, von den beiden Berührungssehnen gebildeten Winkel in Bezug auf jene harmonisch theilt. Denn $\alpha\beta$ ist die Berührungssehne eines Systems zweier Geraden, welches K doppelt berührt und mit A° den Punkt a, mit B° den Punkt b gemein hat; folglich sind die Geraden $a\alpha$ und $b\beta$, welche nach den Durchschnitten von $\alpha\beta$ mit den entsprechenden Berührungssehnen von A° und B° gerichtet sind, zwei, diesem Systeme einzeln mit A° und B° gemeinschaftliche Sekanten, und schneiden sich zufolge (II, 1.) auf einer, diesen letzteren unter sich gem. Sekante, u. s. w. Man sieht also, wie man zu verfahren hat, um nach und nach sich alle sechs Achsen der Homologie zu verschaffen, welche durch ihre gegenseitigen Durchschnitte die vier Radikalcentra von A°, B°, C° bestimmen; und sind diese bekannt, so reicht ein einziges System von sechs periodisch-homologen Tangenten hin, um sofort die oben erwähnten drei festen Geraden $a^\circ a_\circ$, $b^\circ b_\circ$, $c^\circ c_\circ$ und die Berührungspunkte a°, b°, c° und $a_\circ$, $b_\circ$, $c_\circ$ zweier der gesuchten Curven mit den drei gegebenen zu finden.

Um dieses System zu construiren, wird man zuerst die Tangente in irgend einem a der gegebenen Punkte ziehen, wozu man sich entweder der vier anderen Punkte, oder der Curve K und der dem A° zugehörigen Berührungssehne und Berührungspoles bedienen kann; und dann wird man, nachdem man sich für ein beliebiges Radikalcentrum entschieden, die der ersteren nach einander homologen Tangenten construiren, indem man so wie folgt verfährt:

Es sey π der Durchschnittspunkt jener Tangente mit der Achse der Homologie von A° und B°. Man verbinde denselben mit zwei beliebigen, für B° gegebenen Punkten b und b' durch die Geraden πb und $\pi b'$, welche die zu B° gehörige Berührungssehne resp. in $b_\circ$ und $b'_\circ$ schneiden. Sodann verbinde man den zu B° gehörigen Berührungspol mit b und b' durch zwei neue Gerade, welche die gezeichnet vorliegende Curve K in k und k', den direkt- oder indirekt-homologen Punkten von b und b' schneiden. Man ziehe sofort die Geraden $kb_\circ$ und $k'b'_\circ$, welche K noch einmal in q und q'; ferner die Geraden kk' und qq', kq' und k'q, welche sich paarweise in p und p' schneiden. Man ziehe pp'; diese treffe K in m und n; verbinde diese zwei Punkte mit dem Durchschnitte von $kb_\circ$ und $k'b'_\circ$ durch zwei Gerade, welche der Berührungssehne in zwei neuen Punkten m' und n' begegnen; endlich ziehe man $\pi m'$ und $\pi n'$ und verbinde die vorigen Punkte m und n mit dem Berührungspole durch zwei andere Gerade: so schneiden die letzteren die entsprechenden vorigen $\pi m'$ und $\pi n'$ in den Berührungspunkten der von π an B° gehenden Tangenten; und so weiter.

Dieses Verfahren beruht, wie man sieht, auf den Eigenschaften der Centra und Achsen der Homologie. Sonst gibt es auch noch ein anderes für denselben Zweck; nämlich jenes schöne Verfahren, welches Herr **Steiner** an den unten*) bezeichneten Stellen gezeigt und bewiesen hat. Beide liefern zugleich die Berührungspunkte der sechs gesuchten Tangenten, und setzen somit in den Stand, die Geraden $a^\circ a_\circ$, $b^\circ b_\circ$, $c^\circ c_\circ$ auf zwei verschiedene Arten zu construiren. Auch dienen beide, die Punkte a°, b°, c° und $a_\circ$, $b_\circ$, $c_\circ$ selbst zu finden.

Ist dieses geschehen, so construire man noch die Tangenten in den letztgenannten Punkten, und man hat mehr als nöthig ist, um mittels des Lineals zwei der gesuchten Curven zu zeichnen.

Diese Auflösung erfordert freilich die Ziehung einer sehr großen Menge von Linien; sie würde sich aber um Vieles vereinfachen, wenn die Kegelschnitte A°, B°, C° ebenfalls gezeichnet vorlägen. Daher würden wir dieselbe für diesen Fall allein aufsparen; und in dem unserigen lieber die folgende, viel einfachere und schneller zum Ziele führende anwenden.

---

*) **Geometrische Construktionen**, Anhang: Aufg. 2 u. 3; **Abhängigkeit geom. Gestalten** §. 17, II. und §. 46, III.

Construire die Polaren des gegebenen Radikalcentrums, in Bezug auf A°, B°, C°, und sodann die Durchschnittspunkte derselben mit den entsprechenden Curven. Diese sechs Punkte, welche das Radikalsystem bilden, geben durch ihre Verbindungslinien in Einem zugleich die sechs Centra der Homologie, die vier Radikal-Achsen und die Pole α_o, β_o, γ_o der festen Geraden, welche sich auf das gegebene Radikalcentrum beziehen. Sucht man also diese Geraden selbst und verfährt sonst wie oben, so erhält man fast auf einmal vier Paare der gesuchten Kegelschnitte; und dann werden sich die übrigen mit leichterer Mühe ergeben, indem man zu diesem Behuf nicht nöthig hat, die Durchschnitte der Polaren der anderen Radikalcentra mit den entsprechenden Curven zu suchen.

Wenn endlich zweitens die neun gegebenen Punkte sich innerhalb des gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes befinden, so daß man von ihnen keine Tangenten an letztere ziehen könnte, so muß man zuvörderst die Punkte a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' mit den Tangenten in diesen Punkten vertauschen, was sich immer mit Hülfe der Berührungssehnen und Berührungspole ausführen läßt, welche auch dann noch construirbar sind; und sonach ganz wie vorhin, aber im reciproken Sinne verfahren; sowie man auch umgekehrt, wenn man sich, statt neun Punkte, neun Tangenten gäbe, welche die gezeichnet vorliegende Curve nicht schnitten, zuvörderst sich die Berührungspunkte derselben verschaffen und somit die Aufgabe auf die so eben behandelte zurückführen müßte.

Anwendung
der vorhergehenden Theorie auf Gebilde im Raume.

Kommen wir jetzt zu dem interessantesten Theile dieser Untersuchungen, nämlich zur Betrachtung derjenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welche mit dem Problem des Fermat in demselben Grade, als die vorhin behandelten mit dem des Apollonius, verwandt sind. Diese Eigenschaften bieten sich, sozusagen, von selber dar, wenn wir den Nerv des ganzen vorigen Ideenganges, der in (IV, 1) zu suchen ist, fortwährend im Auge behalten. Hierbei setzen wir, um an Raum zu sparen und den der Geometrie kundigen Leser nicht zu ermüden, die Grundbegriffe und einige leichte Sätze als bekannt voraus. Auch fallen jetzt die Zeichnungen, welche zum Theil schon oben durch zweckmäßige Bezeichnungen ersetzt wurden, ganz hinweg, indem dieselben, wie einer unserer namhaftesten Geometer sehr treffend bemerkt, die Gebilde im Raume und deren verschiedene Verbindungen nicht leicht vorstellig machen könnten.*)

I.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Ordnung eine und dieselbe dritte Fläche dieser Ordnung umhüllen**), so haben sie immer zwei reelle oder ideale ebene Schnitte gemein, deren Ebenen durch dieselbe Gerade gehen, als die Umhüllungsebenen dieser Flächen (Monge und Chasles); und diese vier Ebenen bilden einen harmonischen Büschel.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Klasse eine und dieselbe dritte Fläche dieser Klasse umhüllen**), so haben sie immer zwei reelle oder ideale Berührungskegel gemein, deren Scheitel in derselben Geraden liegen, als die Umhüllungspole dieser Flächen; und diese vier Punkte bilden eine harmonische Schaar.

---

*) „Ueberhaupt," sagt Herr Steiner, „sind stereometrische Betrachtungen, meiner Meinung „nach, nur dann richtig aufgefaßt, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur „durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die „synthetische Betrachtungsweise erforderlich, und vorzugsweise für Denjenigen, der darin „erfinderisch zu Werke gehen will; denn nur auf diesem Wege kann er seinen Gegenstand „selbst gewähren lassen, kann er den ganzen Umfang der Eigenschaften einer Figuren-Verbindung in allen ihren einzelnen Fällen und nach allen ihren Grenzen hin leicht und „richtig durchschauen, und alle diese Fälle zusammen als ein in einander fließendes oder „aus sich selber heraustretendes Ganzes erkennen. Wenn auch im Anfange diese freie „Vorstellung einige Mühe macht, so wird man doch bald eine gewisse Fertigkeit darin „erlangen, und sich dann für die überstandene Anstrengung hinlänglich entschädiget finden. „Wer bemüht wäre, durch andere Mittel diese Anstrengung zu umgehen, der dürfte nicht „wohl thuen, indem er das Vorstellungsvermögen, statt gesund, kräftig und lebensthätig „zu machen, dasselbe vielmehr in dunkler, schwerfälliger Auffassung erhalten würde." Diese Worte gehen ganz besonders auch den Lehrer der Geometrie am Gymnasium an, dem es vor Allem um Erhöhung der geistigen Spannkraft zu thun sein muß.

**) d. h. links: äußerlich oder innerlich längs ebenen Schnitten berühren, und rechts, was in der Sache einerlei ist: sämmtliche Ebenen eines Kegels der 2. Kl. in denselben Punkten als jene Fläche berühren. Wir bedienen uns hier des Ausdruckes umhüllen (envelopper)

Denn eine Transversal-Ebene, die sich um einen beliebigen, den beiden Flächen der 2. O. gem. Punkt dreht, erzeugt mit den drei Flächen drei Kegelschnitte, deren zwei den dritten doppelt berühren. Daher geht die Gerade, welche jenen Punkt mit dem Durchschnitte der beiden Berührungssehnen verbindet, nach einem zweiten, den beiden Flächen gem. Punkte, und erzeugt, durch ihre Bewegung längs der Durchschnittslinie der Umhüllungsebenen, eine der beiden Ebenen, um die es sich handelt. Ferner schneiden alle vier Ebenen jede Transversal-Ebene in vier harmonischen Strahlen.

Und von einem Punkte als Scheitel, der sich auf einer beliebigen festen, den beiden Flächen d. 2. Kl. **A** und **B** gemeinschaftlichen Berührungsebene bewegt, gehen an die drei Flächen **A**, **B**, **K** drei Kegel derselben Klasse A_1, B_1, K_1, wovon die beiden ersten den dritten doppelt berühren. (Nämlich die zwei Ebenen, die durch jenen Punkt und z. B. durch den zu **A** gehörigen Umhüllungspol gehen und die Fläche **K** berühren, berühren auch **A**, und zwar in demselben Punkte; daher berührt jede K_1 und A_1 längs demselben Strahle. Die Durchschnittslinien dieser beiden Ebenen und die der zu B_1 gehörigen, d. h. die beiden Berührungspolaren — gehen also durch die entsprechenden Umhüllungspole. Sie liegen außerdem mit den Durchschnittslinien zweier Paare, dem A_1 und B_1, und folglich der **A** und **B**, gemeinschaftlicher Berührungsebenen in einerlei Ebene, was aus (I, 1 rechts) mittels einer Transversal-Ebene erhellt.) Daher liegt die Gerade, wo die feste Berührnngsebene die von den Berührungspolaren gebildete schneidet, auf einer zweiten, den Flächen **A** und **B** gemeinschaftlichen Berührungsebene, und erzeugt, da sie durch einen festen Punkt auf der Verbindungslinie der Umhüllungspole geht, durch ihre Bewegung sämmtliche Berührungsebenen eines der beiden Kegel, um die es sich handelt; u. s. w.

Z u s ä t z e.

1.

Ist eine beliebige Fläche der zweiten Ordnung und ein beliebiger Ke-

Ist eine beliebige Fläche der zweiten Klasse und ein beliebiger Kegel

statt des unbequemen umschrieben sein (être circonscrit), und nennen demgemäß links Umhüllungsschnitt und Umhüllungsebene den Schnitt und dessen Ebene, längs welchen die Berührung geschieht, und rechts Umhüllungskegel und Umhüllungspol den in der Erklärung gemeinten Kegel und dessen Scheitel; zum Unterschiede dagegen Berührungskegel jeden anderen, welcher eine oder mehrere Flächen ringsum, aber die letzteren in verschiedenen Punkten berührt.

gelschnitt, welcher dieselbe in zwei Punkten berührt, gegeben, so gibt es immer unzählige Flächen dieser Ordnung, welche jene und diesen umhüllen; aber es gibt deren keine drei, welche außerdem noch einen Punkt gemein haben.

dieser Klasse, welcher dieselbe längs zwei Ebenen berührt, gegeben, so gibt es immer unzählige Flächen dieser Klasse, welche jene und diesen umhüllen; aber es gibt deren keine drei, welche außerdem noch eine Berührungsebene gemein haben.

Denn nimmt man auf dem Umfange des Kegelschnitts einen beliebigen Punkt an, so kann man sich durch die Berührungssehne unzählige Ebenen gelegt denken, und sofort unzählige Flächen d. 2. O., welche die gegebene längs diesen Ebenen umhüllen und durch den angenommenen Punkt gehen. Da nun ein Kegelschnitt, der einen gegebenen doppelt berührt, durch die beiden Berührungspunkte und einen beliebigen dritten Punkt vollkommen bestimmt ist, so ist der gegebene allen diesen Flächen gemeinsam; hätten nun drei der letzteren einen Punkt, der nicht auf dieser Curve läge, gemein, und man legte durch ihn und die Berührungssehne eine Ebene, so würde diese die vierte harmonische zu der des Kegelschnitts, als ihr zugeordneten, und zu jedem Paare der Umhüllungsebenen dieser drei Flächen sein, was unmöglich ist.

Und nimmt man eine beliebige Berührungsebene des Kegels an, so kann man jeden Punkt auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Satzes rechts als den Umhüllungspol einer Fläche d. 2. Kl., in Bezug auf die gegebene, betrachten, welche zugleich die beliebig angenommene Ebene berührt. Der Kegel, welcher vom Scheitel des gegebenen an die geg. Fläche geht, wird von allen denjenigen, die von demselben Scheitel an die übrigen Flächen gehen, und zugleich von dem geg. Kegel doppelt berührt. Sie haben aber sämmtlich auch noch die beliebig angenommene Berührungsebene gemein; also fallen alle mit dem gegebenen zusammen. Gehörte nun dreien jener Flächen eine Berührungsebene gemeinschaftlich, und nicht zugleich dem geg. Kegel an, so würde sie die Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Satzes in einem Punkte schneiden, der der vierte harmonische zum Scheitel des geg. Kegels, als ihm zugeordnetem Punkte, und zu jedem Paare der Umhüllungspole dieser drei Flächen wäre, was unmöglich ist.

2.

Ist eine Fläche der zweiten Ordnung, und sind vier Punkte beliebig im Raume gegeben, so gibt es im

Ist eine Fläche der zweiten Klasse, und sind vier Ebenen beliebig im Raume gegeben, so gibt es im All-

Allgemeinen acht Flächen dieser Ordnung, welche jene umhüllen und durch diese vier Punkte gehen.

gemeinen acht Flächen dieser Klasse, welche jene umhüllen und diese vier Ebenen berühren.

Denn in der Ebene von dreien der vier Punkte gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche den Durchschnitt dieser Ebene mit der geg. Fläche doppelt berühren und durch die drei Punkte gehen; und unter allen Flächen d. 2. O., welche die gegebene und einen dieser Kegelschnitte umhüllen, gibt es höchstens zwei, welche zugleich auch durch den vierten geg. Punkt gehen.

Und legt man vom Durchschnittspunkte dreier der vier Ebenen, als Scheitel, einen Kegel d. 2. Kl. an die geg. Fläche, und schneidet ihn und die drei Ebenen durch eine beliebige andere, so gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche den so entstehenden doppelt und die drei Durchschnittslinien einfach berühren. Also gibt es im Allg. auch vier Kegel der 2. Kl., welche die geg. Fläche längs zwei Ebenen, und jede der drei gegebenen Ebenen berühren. Unter allen Flächen d. 2. Kl. aber, welche die gegebene und einen dieser vier Kegel umhüllen, befinden sich höchstens zwei, welche zugleich auch die vierte geg. Ebene berühren.

II.

Drei beliebige Flächen der zweiten Ordnung, welche eine und dieselbe vierte umhüllen, haben paarweise sechs ebene Schnitte gemein, welche ein **vollständiges Vierkant** im Strahlbüschel bilden d. h. drei zu drei sich in vier Geraden schneiden.

Drei beliebige Flächen der zweiten Klasse, welche eine und dieselbe vierte umhüllen, haben paarweise sechs Berührungskegel gemein, deren Scheitel ein **vollständiges Vierseit** in der Ebene bilden, d. h. drei zu drei in vier Geraden liegen.

Denn eine beliebige Transversal-Ebene erzeugt die Fig. des obigen Satzes (II. 1) links; und diejenige, welche (rechts) durch die drei Umhüllungspole geht, erzeugt die Figur desselben Satzes rechts.

Anmerkung. Aehnlich wie oben wird hier einerseits von drei inneren und drei äußeren gemeinschaftlichen ebenen Schnitten, und demzufolge von einer inneren und drei äußeren Radikal-Achsen, andrerseits von drei äußeren und drei inneren Scheiteln gemeinschaftlicher Berührungskegel, und von einer äußeren und drei inneren Radikal-Achsen der erwähnten drei Flächen die Rede sein; und zwar kommen die einen sowohl, als die anderen denselben drei Flächen des zweiten Grades zu, weil eine Fläche der zweiten Ordnung zugleich auch eine der zweiten Klasse ist.

Zusätze.

1.

(Die Sätze des **Brianchon** und des **Pascal** für Gebilde im Raume.)

Drei beliebige Kegel, welche einer und derselben Fläche der zweiten Ordnung umschrieben sind, schneiden sich paarweise in sechs Ebenen, welche drei zu drei durch vier Gerade gehen.

Drei beliebige Kegelschnitte, welche einer und derselben Fläche der zweiten Klasse eingeschrieben sind, haben paarweise sechs Berührungskegel gemein, deren Scheitel drei zu drei in vier Geraden liegen.

2.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Ordnung einen Berührungskegel und folglich zwei reelle oder ideale ebene Schnitte mit einander gemein haben, so schneidet jeder andere Kegel der zweiten Ordnung, der mit dem ersteren einerlei Scheitel und eine reelle oder ideale doppelte Berührung hat, im Allgemeinen jede dieser beiden Flächen längs zwei Ebenen, und diese vier Ebenen begegnen sich paarweise auf denen der, den beiden Flächen gemeinschaftlichen Schnitte;

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Klasse einen Kegelschnitt und folglich zwei reelle oder ideale Berührungskegel mit einander gemein haben, so gehen von jedem anderen Kegelschnitte, der mit dem ersteren in einerlei Ebene liegt und eine reelle oder ideale doppelte Berührung hat, im Allgemeinen an jede dieser beiden Flächen zwei Kegel; und die Scheitel dieser vier Kegel liegen paarweise mit denen der, den beiden Flächen gemeinschaftlichen Berührungskegel in gerader Linie;

und verbindet man mit den Ausdrücken: homologe Punkte, Ebenen, Pole, Centra und Ebenen der Homologie ähnliche Begriffe, wie oben, so muß man für den Fall zweier Flächen des zweiten Grades, die höchstens nur einen reellen Schnitt gemein haben, hinzufügen, daß die einander zugeordneten Centra und Ebenen der Homologie immer **gleich-** oder **ungleichnamig** sind, je nachdem sie durch **direkt-** oder **indirekt-**homologe Ebenen und Pole auf einander bezogen werden.

Und umgekehrt:

3.

Schneiden sich die Ebenen zweier Kegelschnitte, welche zweien Flächen der zweiten Ordnung mit gemeinschaftlichem Berührungskegel eingeschrieben sind, auf einer Ebene der Homologie, und ist ein einziger Punkt des einen einem Punkte des anderen homolog, in Bezug auf dasjenige Centrum, welches jener Ebene der Homologie und der Art der homologen Punkte entspricht, so sind alle anderen Punkte dieser Kegelschnitte ebenfalls homolog.

Liegen die Scheitel zweier Kegel, welche zweien Flächen der zweiten Klasse mit gemeinschaftlichem ebenen Schnitt umschrieben sind, mit einem Centrum der Homologie in gerader Linie, und ist eine einzige Ebene des einen einer des andern homolog, in Bezug auf diejenige Ebene der Homologie, welche jenem Centrum und der Art der homologen Ebenen entspricht, so sind alle anderen Ebenen dieser Kegel ebenfalls homolog.

4.

Alle Ebenen, welche durch einerlei Gerade gehen, sind solchen Ebenen homolog, welche ihrerseits durch die, der ersteren homologe Gerade gehen.

Alle Punkte, welche in einerlei gerader Linie liegen, sind solchen Punkten homolog, welche ihrerseits in der, der ersteren homologen geraden Linie liegen.

III.

Vier beliebige Flächen des zweiten Grades, welche eine und dieselbe fünfte umhüllen, haben paarweise

zwölf reelle oder ideale ebene Schnitte gemein, deren Ebenen drei zu drei durch sechszehn Gerade oder Radikal-Achsen, und sechs zu sechs durch acht Punkte oder Radikalcentra gehen.

zwölf reelle oder ideale Berührungs-Kegel gemein, deren Scheitel drei zu drei in sechszehn Geraden oder Radikal-Achsen, und sechs zu sechs in acht Ebenen oder Radikal-Ebenen liegen.

Denn bezeichnet man sowohl die äußeren und inneren gem. ebenen Schnitte, als die inneren und äußeren Scheitel der gem. Berührungskegel der Flächenpaare **A** u. **B**, **A** u. **C**, **A** u. **D**, **B** u. **C**, **B** u. **D**, **C** u. **D** resp. mit ab u. $\overline{ab}$, ac u. $\overline{ac}$, ad u. $\overline{ad}$, bc u. $\overline{bc}$, bd u. $\overline{bd}$, cd u. $\overline{cd}$, so wird der Satz kraft des vorhergehenden unmittelbar durch folgende tabellarische Uebersicht einleuchtend:

Radikalcentra
vier innerlich = äußere

Radikal- Centra	Radikal- Achsen		V.	VI.	VII.	VIII.		Radikal- Achsen	Radikal- Ebenen
drei	zwölf	IV.	1. ab, ac, $\overline{bc}$	2. ba, bd, $\overline{ad}$	3. cd, ca, $\overline{da}$	4. dc, db, $\overline{cb}$	VIII.	zwölf	drei
äußere . . .		III.	5. ac, ad, $\overline{cd}$	6. bd, bc, $\overline{dc}$	7. ca, cb, $\overline{ab}$	8. db, da, $\overline{ba}$	VII.	. . innere,	
ein	vier	II.	9. ad, ab, $\overline{db}$	10. bc, ba, $\overline{ca}$	11. cb, cd, $\overline{bd}$	12. da, dc, $\overline{ac}$	VI.	vier	eine
innere(s) . .		I.	13. $\overline{bc}$, $\overline{bd}$, $\overline{cd}$	14. $\overline{cd}$, $\overline{ca}$, $\overline{da}$	15. $\overline{da}$, $\overline{db}$, ab	16. $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$	V.	. . äußere.	
			I.	II.	III.	IV.			

vier äußerlich = innere
Radikal = Ebenen.

IV.

Wenn fünf beliebige Flächen des zweiten Grades eine und dieselbe sechste umhüllen, und man betrachtet die acht

ebenen Schnitte, welche irgend eine dieser fünf Flächen mit den vier übrigen gemein hat, so kann man daraus auf achtfache Weise ein Paar einfache Vierecke im Raume bilden, deren Ecken auf den vier Achsen eines, den vier übrigen Flächen zugehörigen Radikalcentrums liegen; und diese acht Paar Vierecke sind an sämmtliche acht Radikalcentra vertheilt.

Scheitel der Berührungskegel, welche irgend eine dieser fünf Flächen mit den vier übrigen gemein hat, so kann man daraus auf achtfache Weise ein Paar einfache Vierflache im Raume bilden, deren Flächen durch die vier Achsen einer, den vier übrigen Flächen zugehörigen Radikal-Ebene gehen; und diese acht Paar Vierflache sind an sämmtliche acht Radikal-Ebenen vertheilt.

V.

Es seien **A**, **B**, **C**, **D** vier beliebige Flächen des zweiten Grades, welche eine und dieselbe fünfte **K** umhüllen, und es seien auf denselben nach Belieben vier resp. Punkte α, β, γ, δ, die nicht in einerlei Ebene liegen, angenommen, um durch dieselben eine Fläche **K**$_1$ desselben Grades zu legen, welche ebenfalls **K** umhülle; so existiren nach (I, 2) im Allgemeinen acht dergleichen Flächen K_1, und nach (IV) bilden die vier ebenen Schnitte, welche irgend eine dieser acht Flächen mit A, B, C, D gemein hat, und welche durch die vier Punkte α, β, γ, δ gehen, ein einfaches Viereck im Raume, dessen Ecken auf den vier Achsen eines der acht Radikalcentra von A, B, C, D liegen. Aber von den so bestimmten acht Vierecken, welche den besonderen acht Flächen K_1 entsprechen, können keine zwei einem und demselben Radikalcentrum angehören, weil die Flächen irgend zweier einfachen Vierecke im Raume, deren Ecken paarweise auf vier, in einem Punkte convergirenden Geraden liegen, sich paarweise auf einer und derselben Ebene schneiden müssen —, während die Flächenpaare der hier betrachteten Vierecke vier Punkte α, β, γ, δ gemein haben, welche nicht in einerlei Ebene liegen. Hat man also ein bestimmtes Radikalcentrum im Auge, so ist die Fläche K_1 auf einzige Weise bestimmt.

Nehmen wir also für den Augenblick an, daß die Flächen A, B, C, D paarweise höchstens nur einen einzigen reellen ebenen Schnitt gemein haben, und wählen nach Belieben eine der acht Radikal-Ebenen und eines der acht Radikalcentra, z. B. diejenige R.-Ebene, welche die Centra der Homologie ab, ac, bd, cd (innere) und $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ (äußere), und dasjenige R.-Centrum, welches die Ebenen der Homologie ab, bc, bd (äußere) und $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{cd}$ (innere) enthält, so können wir, nach diesen Centris und Ebenen der Homologie uns richtend, zu einem auf A beliebig angenommenen Punkte α den indirekt-homologen Punkt β, zu β den direkt-homologen γ, und zu γ den direkt-homologen δ suchen, und durch diese vier Punkte eine Fläche des zweiten Grades K_1 legen, welche K umhüllt und außerdem die Eigenschaft hat, daß das von ihr bestimmte Viereck dem gewählten Radikalcentrum angehöre.

Dieses vorausgesetzt, so sind nach (II, 3) die vier ebenen Schnitte, welche K_1 mit A, B, C, D gemein hat, und die durch die Punkte α, β, γ, δ gehen, nacheinander homolog, d. h. zunächst nur im Uebergange von A zu B, von B zu C und von C zu D; und betrachtet man die vier Kegelschnitte, welche auf diesen vier Flächen durch die Radikal-Ebene erzeugt werden, so sieht man sogleich, weil dieselben einen und denselben fünften, auf K liegenden doppelt berühren, daß sie drei zu drei vier Systeme von sechs periodisch-homologen Punkten enthalten. Dieses versteht sich nämlich unmittelbar von den zu A, B, C und von den zu B, C, D gehörigen, in Folge dessen aber sodann auch von denen, welche zu A, C, D oder zu A, B, D gehören. Hieraus folgt nach demselben Satze, daß jene vier ebenen Schnitte nicht nur in der so eben angedeuteten, sondern in jeder beliebigen Aufeinanderfolge homolog sind, d. h. mit andern Worten, daß die Scheitel der sechs Kegel, welche diese vier Schnitte paarweise umhüllen, mit den sechs Centris der Homologie ab, ac, bd, cd, $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ zusammenfallen.

Geht man also von einem beliebigen Punkte auf einer der Flächen **A**, **B**, **C**, **D**, z. B. auf **A** aus, und bestimmt, indem man fortwährend die Art der Homologie den Benennungen der zusammentreffenden Centra und Ebenen der Homologie anpaßt, in beliebiger Aufeinanderfolge die nacheinander homologen Punkte des ersteren, so wird man im Allgemeinen zwar nicht auf den Ausgangspunkt zurückfallen, aber die unzählig vielen Punkte welche man so auf jeder der vier Flächen erhält, müssen vier Kegelschnitten, und diese selber wieder einer und derselben Fläche d. 2. G. angehören, welche **K** umhüllt.

Wir erhalten somit für jeden beliebigen Punkt α der Fläche **A** ein System von vier periodisch-homologen Ebenen oder ebenen Schnitten. Jede der acht Radikal-Ebenen gewährt eine besondere Familie, und jede dieser Familien zerfällt in Ansehung der verschiedenen Radikalcentra in acht besondere Arten solcher Systeme. Um eines derselben zu construiren, braucht man nur 4×3 nacheinander homologe Punkte zu suchen, und kann sich hierzu entweder aller sechs Centra der Homologie oder vier allein, wovon keine drei in einer Geraden liegen, bedienen, d. h. entweder in der Ordnung **ABCDACBDCABD** u. dergl. oder **ABCD ABCDABCD** fortschreitend. Uebrigens läßt sich, ähnlich wie oben, auch hier das Gesetz, wonach die Konstruktion dieser Systeme von der inneren und äußeren Lage der Centra und Ebenen der Homologie abhängt, mit einem einfacheren und bequemeren vertauschen, wodurch zugleich die vorhin gemachte Einschränkung auf Flächen mit nur einem oder keinem reellen ebenen Schnitte wieder aufgehoben wird. Denn welche Radikal-Ebene auch man nacheinander mit den acht Radikalcentris verbinden möge, immer wird man ein Centrum mit einer ungleichnamigen Ebene der Homologie in vier dieser Verbindungen dreimal zwischen drei Flächen, in drei anderen zweimal zwischen vier Flächen, und in der achten durchweg zusammentreffen sehen, nämlich für den Fall, wenn man alle sechs Centra und Ebenen der Homologie berücksichtigt; wogegen für den einfacheren Fall das Nämliche in sechs Verbindungen zweimal zwischen beliebigen Flächen, in einer durchweg, und in der achten keinmal stattfinden würde. Hieraus kann man sich folgende Regel bilden:

Ist eine beliebige Radikal=Ebene mit ihren Centris der Homologie gegeben, so findet man immer ein System von vier periodisch=homologen Ebenen, wenn man die indirekte Lage der Punkte

1° für den Fall der Aufeinanderfolge **ABCDACBDCABD** entweder dreimal zwischen drei Flächen, oder zweimal zwischen vier Flächen, oder durchweg; und

2° für den Fall der Aufeinanderfolge **ABCDABCDABCD** entweder keinmal, oder zweimal zwischen beliebigen Flächen, oder durchweg,

und zwischen einerlei Flächen immer einerlei Lage der Punkte beobachtet.

Setzen wir jetzt an die Stelle von **K** die Fläche K_1 und an die Stelle von **A**, **B**, **C**, **D** die betrachteten vier ebenen Schnitte, welche man offenbar als Flächen des 2. Gr. ansehn kann, deren eine Dimension unendlich klein ist, und die die Fläche K_1 umhüllen; so sind die Centra der Homologie noch dieselben als zuvor, und somit ist man berechtigt, gerade so, wie oben, zu schließen, daß jeder Punkt, der in der Ebene eines dieser vier Schnitte beliebig angenommen wird, und die unzählig vielen Punkte, welche demselben in Bezug auf diese Centra nach einander homolog sind, auf den vier Ebenen vier neue Kegelschnitte bilden, welche einer neuen, die K_1 umhüllenden Fläche d. 2. Gr. angehören und folglich die vier ersteren doppelt berühren.

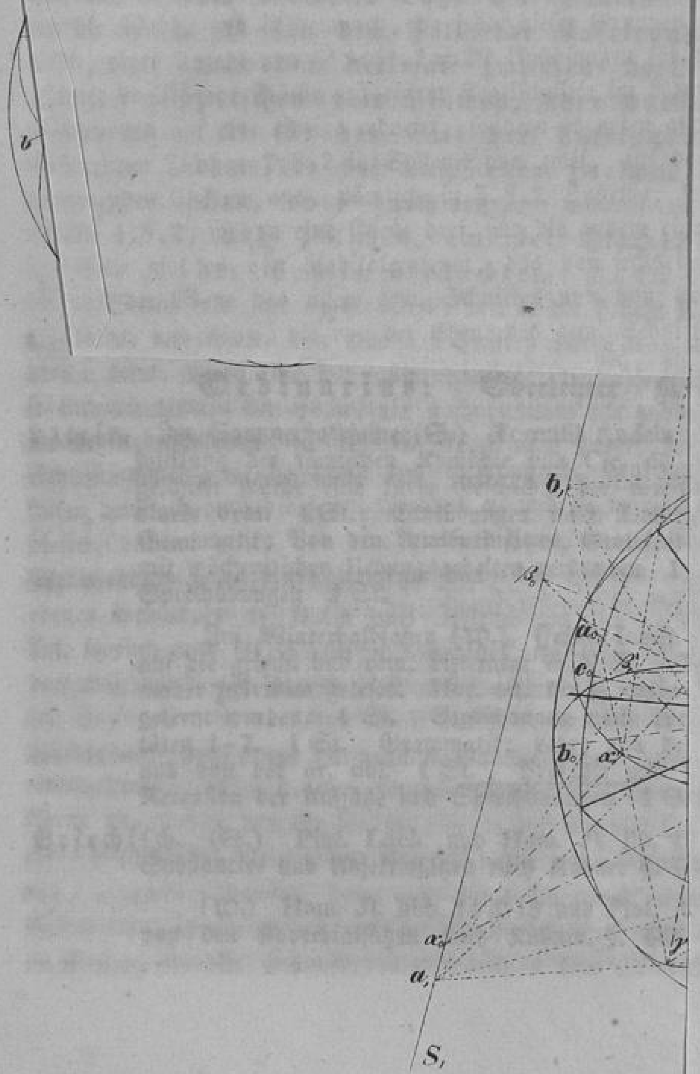
Betrachten wir ferner zwei Systeme von vier periodisch=homologen Ebenen einerlei Art, so sind nach (II, 4) die vier Geraden, in denen sich diese Ebenen paarweise schneiden, homolog und liegen folglich paarweise in Ebenen, welche durch die entsprechenden Centra der Homologie gehen. Aber diese Geraden sind auch die gegenseitigen Durchschnitte der Flächenpaare von zwei Vierecken im Raume, deren Ecken paarweise auf vier, in einem Punkte convergirenden Geraden liegen; also gehören alle vier einer und derselben Ebene an, welche mit der Radikal=Ebene zusammenfällt. Hieraus folgt, daß die Ebenen eines solchen Systems, indem man es variirt, die Radikal=Ebene in vier festen Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0 schneiden. Legt man also z. B. durch α_0 zwei Ebenen, welche **A** in a^0 und a_0 berühren, so stellen diese Punkte und die entsprechenden b^0 und b_0, c^0 und c_0, d^0 und d_0 eben so viele Kegelschnitte mit unendlich=kleinen Dimensionen vor, welche zu zwei be=

sonderen Flächen K_1 gehören d. h. sie bilden zwei Systeme von vier periodisch-homologen Punkten und sind die Berührungspunkte zweier, die Fläche **K** umhüllenden und die **A**, **B**, **C**, **D** berührenden Flächen des zweiten Grades.

Ziehen wir jetzt die Sehnen a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0, so sind dieselben periodisch-homolog und liegen also paarweise in sechs Ebenen. Folglich gehen sowohl diese Ebenen, als die vier Sehnen durch einen und denselben Punkt. Aber als homologe Linien schneiden sich die letzteren paarweise auf den entsprechenden Ebenen der Homologie; folglich ist das Radikalcentrum ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Denkt man sich nun die Geraden a^0a_0 und b^0b_0 in Ansehung der entsprechenden Punkte a^0, a_0, a_1, a_2 ... und b^0, b_0, b_1, b_2 ... und sofort die Geraden b^0b_0 und c^0c_0, c^0c_0 und d^0d_0 in Ansehung der entspr. Punkte b^0, b_0, b_1, b_2 ... und c^0, c_0, c_1, c_2 ...; c^0, c_0, c_1, c_2 ... und d^0, d_0, d_1, d_2 ... perspektivisch, so sind alle diese Geraden paarweise projektivisch, und zwar perspektivisch; d. h. jeder Punkt einer beliebigen von ihnen begründet ein System von vier periodisch-homologen Punkten a_1, b_1, c_1, d_1 u. s. w. Und auch umgekehrt kann man behaupten, daß alle Punkte von dieser letzteren Eigenschaft den vier Sehnen a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0 angehören. Denn wären vier Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 periodisch-homolog, ohne jenen vier Sehnen anzugehören, so könnte man sie mit a^0, b^0, c^0, d^0 verbinden und auf die Geraden a^0a_1, b^0b_1, c^0c_1, d^0d_1 dieselben Schlüsse, als vorhin anwenden. Also müßten sie durch das Radikalcentrum gehn und somit der Richtung nach mit a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0 zusammenfallen.

Endlich unterliegt es keiner Schwierigkeit, daß diese vier Sehnen die Polaren der entsprechenden festen Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0, in Bezug auf **A**, **B**, **C**, **D** sind; daß folglich die Polar-Ebenen aller Punkte der einen durch die anderen gehen müssen; daß insbesondere die Polar-Ebenen des Radikalcentrums durch die entsprechenden Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0 gehen; daß jene Sehnen die Pole der Radikal-Ebene enthalten u. s. w., und ähnlich, wie oben, wird man beweisen können, daß alle Flächen K_1 von einerlei Art die entsprechende Radikal-Ebene zur gemeinschaftlichen Schnittsebene haben u. s. w. u. s. w.

Der Mangel an Raum gestattet uns nicht, und es wird wohl auch kaum nöthig sein, den bündigen Wortlaut der von Neuem entwickelten Eigenschaften, an welche sich die reciproken über periodisch-homologe Berührungskegel oder deren Scheitel anschließen, hier noch folgen zu lassen. Auch müssen wir die Auflösung der im Vorworte aufgestellten Aufgabe **II**, welche nach dem über die erste Gesagten keine besondere Schwierigkeit mehr darbietet, dem Scharfsinne des Lesers überlassen. Nur Eines wollen wir noch rechtfertigen: Durch vier gegebene Punkte, sowie an vier gegebene Ebenen, lassen sich im Allgemeinen acht Flächen des 2. Gr. legen, welche die gezeichnet vorliegende Fläche umhüllen. Die Aufgabe **II** läßt uns also zwischen 8.8.8.8 Gruppen von vier gegebenen Flächen d. 2. Gr. die Wahl, und ist demnach, da jeder dieser Gruppen 8.8.2 berührende Flächen angehören, einer Anzahl von $8^4 \times 8^2.2 = 2^{19}$ Auflösungen fähig. Vertauscht man aber die gezeichnet vorliegende Fläche mit einem Kegelschnitte im Raume, so werden nicht nur jene 8^4 Gruppen auf eine einzige reducirt, sondern es arten auch von den ihr zugehörigen $8^2.2$ berührenden Flächen 7.8.2 in Systeme von zwei, auf der Ebene des Kegelschnittes sich begegnenden Ebenen aus, nämlich in 3.8.2 Systeme, wovon jede Ebene zwei Flächen, und in 4.8.2, wovon eine Ebene drei, und die andere eine Fläche berührt. Denn in diesem Falle gibt es ein Radikalcentrum, das von sechs besondern Ebenen, drei andere, die von der Ebene des allen gem. Schnittes und von zwei besonderen, zu vier Flächen gehörigen, und vier, die von der Ebene des gem. Schnittes und von drei besonderen, zu drei Flächen gehörigen Ebenen gebildet werden. Aber die Polar-Ebenen eines, auf der Ebene des gem. Schnittes gelegenen Radikalcentrums, in Bezug auf zwei Flächen **A** und **B**, deren besondere gem. Schnittsebene es enthält, fallen der Richtung nach in eine einzige zusammen, welche durch das entsprechende Centrum der Homologie geht; und es fallen demnach auch die festen Geraden α_0 und β_0 in eine einzige zusammen, welche durch dieses Centrum geht, und eine durch dieselbe gelegte Ebene berührt **A** und **B** zugleich. Wenn endlich jenes Radikalcentrum drei, den Flächen **A**, **B**, **C** paarweise gem. Schnittsebenen enthält, so fallen seine drei Polar-Ebenen in Bezug auf diese Flächen in eine einzige Ebene, und die drei festen Geraden α_0, β_0, γ_0 mit der Radikal-Achse zusammen, so daß man durch letztere eine Ebene legen kann, welche **A**, **B** und **C** zugleich berührt.


b
b,
β₀
a₀
c₀
β'
b₀
α'
α₀
a,
γ
S,

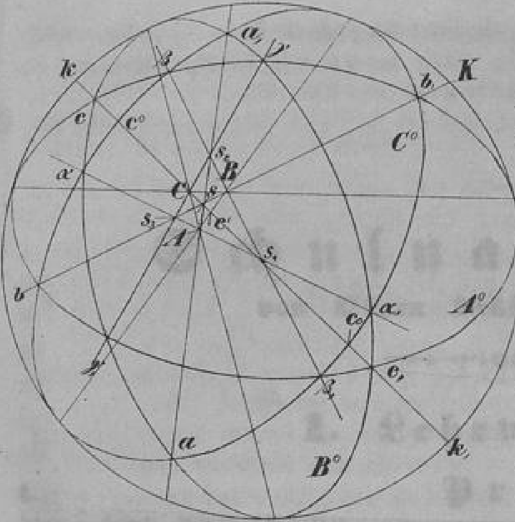


Fig. 1.

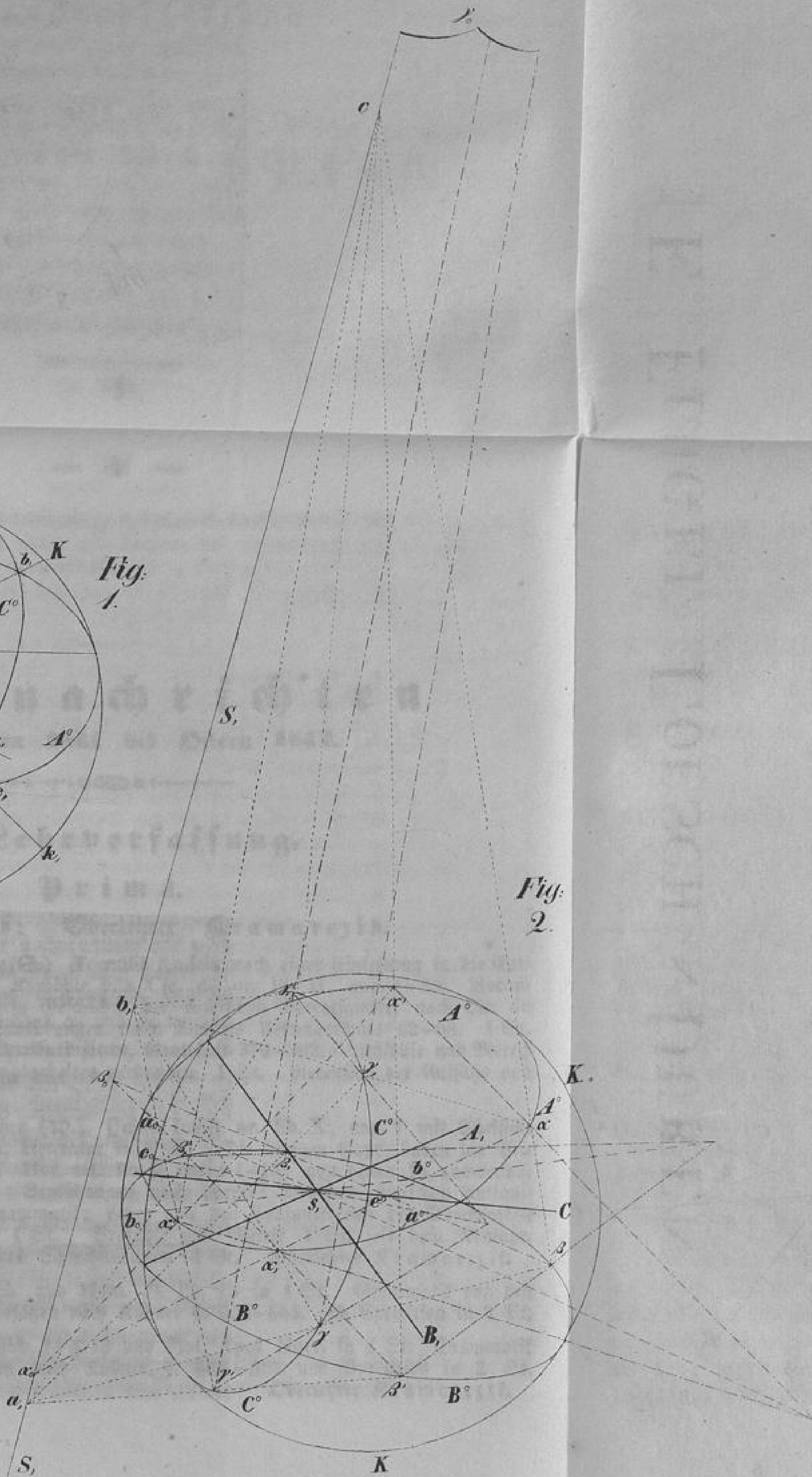


Fig. 2.