Non scholae, sed vitae.

Es fällt in unseren Tagen keinem Schulmanne mehr ein, das Schulwissen als Selbstzweck zu betrachten, eine seichte Büchergelehrsamkeit oder einen inhaltsleeren Gedächtnißkram als Endziel der Schulbildung zu erklären und den geistigen Standpunkt des die Schule verlassenden Jünglings nach solchem Maßstabe zu bemessen. — Darüber sind jetzt die Realschulmänner wenigstens einig, daß die Hauptaufgabe der Schule darin besteht, das Herz des ihr anvertrauten jungen Menschen sorgsam zu bilden, seinen Verstand kräftig zu entwickeln, ihn für die hohen Ideen, welche die Menschheit seit Jahrtausenden bewegen, zu begeistern und ihm zugleich das Verständniß für die materiellen Interessen unserer Zeit zu eröffnen, damit er nach dem Abgange von der Schule befähigt sei, als ein achtbares und nützliches Mitglied in die menschliche Gesellschaft einzutreten.

Das große Publikum stimmt im Allgemeinen dieser Ansicht freudig zu, aber leider wird von mancher Seite gerade der letztere Punkt zu sehr hervorgehoben und die Wichtigkeit der allgemeinen formellen Bildung dabei nicht richtig gewürdigt, so daß das Nützlichkeitsprincip bei den Anforderungen an die Schule mehr und mehr in den Vordergrund gestellt wird. — „Liefert uns brauchbare Comptoiristen!" — heißt es hier; „Erziehet uns tüchtige Techniker!" — so lautet es dort. Es wird so der Schule zugemuthet, für bestimmte Lebensberufe die Schüler heranzubilden, nur diejenigen Fächer zu lehren oder wenigstens vorzugsweise zu berücksichtigen, von welchen eine unmittelbare Anwendung beim Eintritte in das praktische Leben zu machen ist. Ohne zu bedenken, daß nur das Comptoir den Comptoiristen, das Polytechnikum den Techniker zu bilden im Stande ist, wird häufig schon die Wahl der Anstalt, in welche der Vater seinen Sohn einführt, von derartigen Gesichtspunkten abhängig gemacht.

Solche Nützlichkeitsrücksichten sind nur zu mißbilligen. — Ist es denn von vornherein so gewiß, daß der jetzt sechs- oder siebenjährige Knabe überhaupt einmal Kaufmann, Techniker, Landwirth rc. werden wird und will, daß er im Verlaufe der Schulzeit die zu dem prädestinirten Berufe nöthigen Fähigkeiten zeigt, die Entwicklung seines Charakters mit den Anforderungen dieses Berufes harmonirt? — Ist überhaupt die Berücksichtigung des künftigen Berufes der für die Erziehung maßgebende Gesichtspunkt? — Ist der künftige Kaufmann, Architekt, Maschinenbauer rc. die Hauptsache, oder der künftige Mann und Bürger?

Wenn ich mich so gegen die Ansicht, nach welcher die Schule nur eine Vorschule für den künftigen Beruf sein soll, ausspreche, so bin ich doch weit entfernt, dieselbe in ihren Bestrebungen auf das Gebiet des rein Theoretischen und Abstracten zu verweisen. — Wo es nur immer angeht, soll die Schule, ohne ihr Hauptziel aus den Augen zu verlieren, auf die Ansprüche des praktischen Lebens Bedacht nehmen und stets eingedenk sein, daß ihre Arbeit für das ganze Leben gelten soll.

In mancher Beziehung wird diesen Forderungen nicht genug entsprochen. Nicht mit Unrecht sagt man z. B. von den mathematischen Fächern, daß sie häufig zu abstract behandelt werden, daß die Beispiele und Aufgaben besonders in der Algebra oft zu sehr außer aller Beziehung mit den im Leben vorkommenden Problemen und den an die Naturerscheinungen und deren Gesetze sich anschließenden Berechnungen stehen. — Einen solchen Vorwurf muß die Schule zu vermeiden suchen, und sie kann das, wenn sie wo möglich die Beispiele dem praktischen Leben entnimmt, wenn sie diejenigen Theile der Arithmetik und Algebra, welche Anwendung in den verschiedenen Berufsarten finden, vorzugsweise durch gut gewählte Aufgaben zum Verständniß bringt. Wenn auch nicht bestritten werden kann, daß die meisten der in den algebraischen Aufgabensammlungen enthaltenen Beispiele zur Einübung der mathematischen Grund- und Lehrsätze, sowie zur Schärfung des Verstandes in hohem Grade geeignet sind, so ist es doch ebenso unbestreitbar, daß ein großer Theil derselben durch andere ersetzt werden könnte, welche das Interesse des Schülers mehr erweckten und ihm zeigten, daß neben der Uebung der Denkkraft auch noch Anderes durch die Mathematik zu erreichen und daß ihre praktische Wichtigkeit nicht zu unterschätzen ist. — So wäre es z. B. gewiß angemessen, bei den algebraischen Gleichungen die im Geschäftsleben vorkommenden Rechnungsarten durchzunehmen und auf algebraische Art zu lösen, wenn die Berechnung derselben auch längst zuvor nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik gelehrt wurde. Es würde der Schüler durch eine systematische algebraische Behandlung der Procent-, Mischungs-, Gesellschaftsrechnung 2c., sicher an Einsicht in diese wichtigen Rechnungsarten gewinnen und so einen praktischen Nutzen davontragen, ohne daß dadurch der Hauptzweck des algebraischen Unterrichtes irgendwie beeinträchtigt würde.

Diese Grundsätze leiteten mich stets bei dem mathematischen Unterrichte, und ich kann sagen, daß durch deren Befolgung manche Vorurtheile bei Eltern und Schülern beseitigt und in der Schule meistens gute Resultate erzielt wurden; denn ist einmal das Interesse für eine Wissenschaft bei einem Schüler erweckt, so hat der Lehrer leichtes Spiel. — Diese thatsächliche Erfahrung über den Werth der Belebung des mathematischen Unterrichtes durch praktische Beispiele gab mir auch, als ich aufgefordert wurde eine Abhandlung für das Schulprogramm zu liefern, den Gedanken, einen Theil der Algebra, dessen Anwendung für unsere jetzigen socialen Verhältnisse von besonderer Wichtigkeit geworden ist, ausführlicher und systematischer, als dieses gewöhnlich in den algebraischen Handbüchern geschieht, zu behandeln.

Das Versicherungswesen in seiner vielseitigen Gestaltung hat eine solche Ausdehnung gewonnen, daß alle Schichten der Gesellschaft demselben ihre Aufmerksamkeit zuwenden, und es für jeden Beamten und Geschäftsmann geradezu unerläßlich ist, sich mit den wesentlichsten Einrichtungen dieser wichtigen Anstalten bekannt zu machen. Um diese aber zu verstehen und eine Einsicht in die Berechnungen zu erhalten, ist eine Kenntniß der Zinseszins- und Rentenrechnung, sowie der Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus nothwendig; und so kann die Schule, welche mit dem praktischen Leben in einer gewissen Verbindung bleiben will, sich der Aufgabe nicht entziehen, die erwähnten Rechnungsarten in den mathematischen Unterricht einzuflechten. Sie wird um so mehr sich dazu bereit finden, da gerade in den hieher gehörigen Rechnungen die besten Beispiele für die Anwendung der

Progressionen, der Combinationslehre, des binomischen Lehrsatzes, sowie für Gleichungen niederer und höherer Grade gegeben sind.

Da es mir besonders daran lag, neben einer systematischen Eintheilung dieses Unterrichtszweiges zugleich darauf aufmerksam zu machen, welche Gebiete der Algebra durch denselben mit praktischen Aufgaben erläutert werden können, wie sich z. B. die Binomialreihe zur Lösung der Aufgaben der Zinseszinsrechnung ohne Anwendung der Logarithmentafeln verwenden läßt rc., so mußte ich schon des zugemessenen Raumes wegen auf die Bearbeitung des ganzen Gebietes verzichten und mich mit der Darstellung der Zinseszinsrechnung, der Berechnung der Terminzahlungen und der Zeitrenten, als der für die Behandlung im Schulunterrichte am meisten geeigneten Abschnitte begnügen.

Ich nahm um so weniger Anstand, eine derartige Arbeit unserem Schulprogramme einzuverleiben, da einestheils die neuere Pädagogik auf die methodische Bearbeitung kleinerer Gebiete der Unterrichtsfächer großes Gewicht legt, anderntheils auch durch solche Darstellungen das Publikum eine genauere Einsicht in die Art und Weise erhält, in welcher die Unterrichtsgegenstände in der Schule behandelt werden. Vielleicht ist auch diese Arbeit dem einen oder andern unserer abgehenden Schüler von Nutzen, da sie ihm Gelegenheit gibt, sich das in der Schule Gelernte wieder in's Gedächtniß zu rufen oder nöthigenfalls bei Vorkommnissen im Geschäftsleben sich Rath zu schaffen.

I.

Zinseszinsrechnung.

§ 1.

Erklärung.

Werden die Zinsen für ein ausgeliehenes Kapital nach bestimmten Zeitabschnitten nicht in Empfang genommen, sondern stets zum Kapitale geschlagen und somit in der folgenden Zinsperiode mitverzinst, so heißen sie zusammengesetzte Zinsen oder Zinseszinsen.

Die Berechnung von Zinseszinsen ist bei der Bestimmung des Discontos oder zusammengesetzten Interusuriums, bei Jahres- und Leibrenten, bei Lebensversicherungen, bei Staats- und Lotterie-Anlehen, bei den Rechnungen der Leihbanken, der Credit- und Versorgungsanstalten u. dgl. nothwendig. — Außerdem kann diese Rechnungsart überall da Anwendung finden, wo es sich um die Bestimmung des Zuwachses von Dingen handelt, die in ähnlicher Weise wie ein Kapital, zu dem die Zinsen nach bestimmten Terminen geschlagen werden, sich vermehren oder vergrößern. — Dahin sind die Berechnungen über die Zunahme der Bevölkerungen, über den Zuwachs der Wälder, sowie verschiedene andere in das Gebiet der Statistik und Nationalökonomie gehörige Rechnungen zu zählen.

§ 2.

Grundaufgabe der Zinseszinsrechnung.

Die Grundaufgabe der Zinseszinsrechnung besteht darin, zu bestimmen, wie hoch ein auf Zinseszinsen stehendes Kapital in einer bestimmten Zeit anwächst.

Des Kapital c sei zu z% auf n Jahre ausgeliehen, und die Zinsen werden je nach Verfluß eines Jahres zum Kapitale geschlagen, so trägt das Kapital 100 (Gulden, Thaler, 2c.) in einem Jahre den Zins z, also das Kapital 1 den Zins $\frac{z}{100}$; folglich wächst die Kapitaleinheit (ein Gulden, ein Thaler. 2c.) nach einem Jahre, wenn die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden, auf $1 + \frac{z}{100}$, und das Kapital c nach einem Jahre auf $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)$ an.

Da nun stets in einem Jahre die Kapitaleinheit sich durch die Zinsen auf $1 + \frac{z}{100}$ erhöht, so wird die am Ende des ersten Jahres erhaltene Summe $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)$

am Ende des zweiten Jahres $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)\left(1 + \frac{z}{100}\right) = c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^2$,

am Ende des dritten Jahres $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^2\left(1 + \frac{z}{100}\right) = c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^3$,

und am Ende des nten Jahres $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n$ ergeben.

Bezeichnet man den Werth des Kapitals c nach n Jahren mit C, so erhält man als Fundamentalgleichung für die Zinseszinsrechnung

$$\text{I.}\quad C = c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n.$$

Der Werth $\left(1 + \frac{z}{100}\right)$, auf welchen die Kapitaleinheit in einem Jahre anwächst, wird gewöhnlich durch ein einfaches Zeichen vorgestellt. Wird also etwa p statt $\left(1 + \frac{z}{100}\right)$ in der vorstehenden Gleichung gesetzt, so erhält man

$$\text{II.}\quad C = c \,.\, p^n.$$

Beispiel.

Wie hoch wachsen 14765 fl. an, wenn dieselben 10 Jahre lang zu 4% auf Zinseszinsen stehen? — Nach Gleichung II ist

$$C = 14765 \,.\, 1{,}04^{10},$$

$$\begin{aligned}
\text{oder } \log C &= \log 14765 + 10 \,.\, \log 1{,}04 \\
\log 14765 &= 4{,}1692335 \\
10 \log \ 1{,}04 &= 0{,}1703330 \\
\hline
\log C &= 4{,}3395665 \\
C &= 21855{,}79 \text{ fl.}
\end{aligned}$$

Anmerkung. Die Berechnungen der hieher gehörigen Aufgaben werden durch die Anwendung von Tabellen, in welchen die Werthe angegeben sind, auf welche die Kapitaleinheit bei 1, 1½, 2, 2½, 3 . . . . . Procent in 1, 2, 3, 4 . . . . . 100 Jahren anwächst, sehr erleichtert. Die in der Tabelle für p^n angegebene Größe braucht man alsdann nur mit der Zahl, welche das Anfangskapital c bezeichnet, zu multipliciren, um das Endkapital C zu erhalten.

§ 3.

Zinseszinsrechnung mit Hülfe der Binomialreihe.

Um die Zinseszinsrechnung ohne Anwendung von Logarithmen und Tabellen auf eine einfache Weise auszuführen, geht man von Gleichung I des vorigen Paragraphen aus und entwickelt die Potenz $\left(1+\frac{z}{100}\right)^n$ nach der Binomialformel. Man erhält

$$C = c\left[1 + n\cdot\frac{z}{100} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{z}{100}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{z}{100}\right)^3 + \ldots\ldots + n\cdot\left(\frac{z}{100}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{100}\right)^n\right].$$

Setzt man in diese allgemeine Gleichung die Werthe aus dem Beispiele in § 2 ein, so ist

$$C = 14765\left[1 + 10.0{,}04 + \frac{10.9}{1.2}.0{,}04^2 + \frac{10.9.8}{1.2.3}.0{,}04^3 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.0{,}04^4 + \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.0{,}04^5 + \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}.0{,}04^6 + \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}.0{,}04^7 + \frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}.0{,}04^8 + \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.0{,}04^9 + \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}.0{,}04^{10}\right].$$

Die Ausrechnung kann sehr vereinfacht werden, da bei der Berechnung eines der in der Klammer stehenden Summanden stets der vorhergehende benützt werden kann, und in der Regel nur ein Theil dieser Summanden auszurechnen ist, weil bei größeren Zeitangaben nur die ersten Glieder in der Reihe bemerkenswerthe Größen darstellen, die übrigen aber wegen ihres geringen Werthes vernachlässigt werden dürfen.

Bei der Berechnung des angeführten Beispieles erhält man für die Summanden der Reihe nach folgende Werthe:

$1 \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$

$10.0{,}04 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}4$

$\frac{10.9}{1.2}.0{,}04^2 = 10.0{,}04 \times \frac{9}{2}.0{,}04 = \frac{0{,}4.9.0{,}04}{2} \ldots\ldots = 0{,}072$

$\frac{10.9.8}{1.2.3}.0{,}04^3 = \frac{10.9}{1.2}.0{,}04^2 \times \frac{8}{3}.0{,}04 = \frac{0{,}072.8.0{,}04}{3} \ldots = 0{,}00768$

$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.0{,}04^4 = \frac{10.9.8}{1.2.3}.0{,}04^3 \times \frac{7}{4}.0{,}04 = \frac{0{,}00768.7.0{,}04}{4} = 0{,}0005376$

$\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.0{,}04^5 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.0{,}04^4 \times \frac{6}{5}.0{,}04 = \frac{0{,}0005376.6.0{,}04}{5} = 0{,}0000258048$

$\frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}.0{,}04^6 = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}.0{,}04^5 \times \frac{5}{6}.0{,}04 = \frac{0{,}0000258048.5.0{,}04}{6} = 0{,}00000086016.$

Werden nur die Werthe der 5 ersten Summanden addirt, so erhält man

$$C = 14765\ [1 + 0{,}4 + 0{,}072 + 0{,}00768 + 0{,}0005376]$$
$$= 14765\ .\ 1{,}4802176 = 21855{,}4128\ \ldots \text{fl.},$$

also eine Summe, welche nur in den Decimalen von der mit Anwendung von siebenstelligen Logarithmen erhaltenen Summe 21855,79 fl. abweicht.

Wird der 6te Summand noch hinzugenommen, so ist

$$C = 14765\ .\ 1{,}4802434048 = 21855,\ 79387\ \ldots \text{fl.}$$

Dieser Werth ist schon etwas genauer als der, welcher mit siebenstelligen Logarithmen erhalten wird.

Bei der Addition der sieben ersten Summanden erhält man

$$C = 14765\ .\ 1{,}48024426496 = 21855{,}80657\ \ldots \text{fl.},$$

welcher Werth bis zur dritten Decimalstelle mit dem durch zehnstellige Logarithmen erhaltenen ($C = 21855{,}8068$ . . . fl.) übereinstimmt.

Für die Praxis würde bei dieser Methode offenbar die Summirung der 5 ersten in der Klammer enthaltenen Größen genügen, wodurch die Rechnung ziemlich einfach und leicht ausführbar wird. Bei einiger Uebung ist es überhaupt nicht mehr nöthig, die Binomialreihe zu entwickeln, da sich leicht eine praktische Regel für die Rechnung aufstellen läßt.

Eine andere Berechnung ergibt sich, wenn man die bei der Entwicklung der Potenz $\left(1+\frac{z}{100}\right)^n$ erhaltene Reihe anders anordnet. Es ist nämlich

$$1 + n\,.\,\frac{z}{100} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{z}{100}\right)^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(\frac{z}{100}\right)^3 + \ldots\ldots \left(\frac{z}{100}\right)^n$$
$$= 1 + \frac{n\,.\,z}{100}\left[1 + \frac{n-1}{2}\,.\,\frac{z}{100}\left[1 + \frac{n-2}{3}\,.\,\frac{z}{100}\ [1 + \ldots\ldots]\right]\right].$$

Stehen die Kapitalien auf längere Zeit, so braucht man auch bei dieser Anordnung nur einen Theil der Glieder zu berechnen, um hinreichend genaue Resultate zu erhalten.

So gibt bei dem obigen Beispiele schon folgende Reihe ein sehr genaues Resultat:

$$C = 14765\left[1 + 10\,.\,0{,}04\left[1 + \frac{9}{2}\,.\,0{,}04\left[1 + \frac{8}{3}\,.\,0{,}04\left[1 + \frac{7}{4}\,.\,0{,}04\left[1 + \frac{6}{5}\,.\,0{,}04\,[1 + \ldots]\right]\right]\right]\right]\right].$$

Es ist $\quad 1 + \frac{6}{5}\,.\,0{,}04\ \ldots\ldots\ldots = 1{,}048$

$1 + \frac{7}{4}\,.\,0{,}04\,.\,1{,}048\ \ldots\ldots = 1{,}07336$

$1 + \frac{8}{3}\,.\,0{,}04\,.\,1{,}07336\ \ldots\ldots = 1{,}1144917$

$1 + \frac{9}{2}\,.\,0{,}04\,.\,1{,}1144917\ \ldots\ldots = 1{,}200608506$

$1 + 10\,.\,0{,}04\,.\,1{,}2006085\ \ldots\ldots = 1{,}4802434.$

Somit erhält man

$$C = 14765\ .\ 1{,}4802434 = 21855{,}7938\ \ldots \text{fl.},$$

welcher Werth genauer ist als der, welcher bei der Anwendung von siebenstelligen Logarithmen erhalten wird.

Ueberhaupt wird eine dieser Methoden stets Berücksichtigung verdienen, wenn die Kapitalwerthe über die Hunderttausende hinausgehen, weil alsdann die Rechnung mit fünf- bis siebenstelligen Logarithmen für die letzten Stellen des Werthes keine genauen Resultate mehr darbietet.

§ 4.

Berechnung des Schlußwerthes bei anderen als jährlichen Zinsterminen.

Im Vorigen wurde angenommen, daß die Zinsen stets nach Ablauf eines Jahres zum Kapitale geschlagen werden. Etwas anders gestaltet sich die Rechnung, wenn die Zinsen halb- oder vierteljährlich oder nach irgend einem andern Termine berechnet werden sollen. In diesem Falle hat man für p die Größe, auf welche die Kapitaleinheit in dem angegebenen Zinstermine anwächst, und für n die Anzahl der Zinstermine einzusetzen.

Um also die Summe C zu berechnen, zu welcher das Kapital c bei z% in n Jahren anwächst, wenn die Zinsen je nach einem halben Jahre zum Kapitale geschlagen werden, hat man in der Gleichung

$$C = c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n$$

$\frac{z}{2.100}$ statt $\frac{z}{100}$ und 2n statt n zu setzen, da in einem halben Jahre das Kapital 100 nur den Zins $\frac{z}{2}$, also die Kapitaleinheit den Zins $\frac{z}{2.100}$ bringt und somit auf $1 + \frac{z}{2.100}$ anwächst, und bei halbjährlichen Zinsen die doppelte Anzahl von Terminen oder Zeiteinheiten vorhanden ist. Man erhält also die Gleichung

$$\text{I.}\quad C = c\left(1 + \frac{z}{2.100}\right)^{2n},$$

ebenso bei den vierteljährlichen Zinsen

$$\text{II.}\quad C = c\left(1 + \frac{z}{4.100}\right)^{4n},$$

und allgemein bei $\frac{1}{m}$jährlichen Zinsen

$$\text{III.}\quad C = c\left(1 + \frac{z}{m.100}\right)^{m.n}.$$

Beispiel.

Wie hoch wächst ein Kapital von 25000 fl. bei 5% in 12 Jahren an, a) wenn jährlich, b) wenn halbjährlich, c) wenn vierteljährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden?

a) Nach § 2. Gl. II ist

$$\begin{aligned} C &= 25000 \,.\, 1{,}05^{12} \\ \text{oder } \log C &= \log 25000 + 12 \,.\log 1{,}05 \\ \log 25000 &= 4{,}3979400 \\ 12.\log\ 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\ \hline \log C &= 4{,}6522116 \\ C &= 44896{,}4\ \ldots \text{ fl.} \end{aligned}$$

b) Nach Gleichung I dieses Paragraphen ist

$$C = 25000 . \left(1 + \frac{5}{2.100}\right)^{24} = 25000 . 1{,}025^{24}$$

$$\text{oder } \log C = \log 25000 + 24 . \log 1{,}025$$

$$\log 25000 = 4{,}3979400$$

$$24 . \log 1{,}025 = 0{,}2573736$$

$$\log C = 4{,}6553136$$

$$C = 45218{,}2 \ldots \text{ fl.}$$

c) Nach Gleichung II erhält man

$$C = 25000 \left(1 + \frac{5}{4.100}\right)^{48} = 25000 . 1{,}0125^{48}$$

$$\text{oder } \log C = \log 25000 + 48 . \log 1{,}0125$$

$$\log 25000 = 4{,}3979400$$

$$48 . \log 1{,}0125 = 0{,}2589600$$

$$\log C = 4{,}6569000$$

$$C = 45383{,}7 \text{ fl.}$$

Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, daß die Zunahme des Kapitales um so größer ist, je kürzer die Zinstermine angenommen sind.

§ 5.

Berechnung des Schlußwerthes, wenn die Zeitangabe eine Bruchzahl darstellt.

Stellt die Angabe der Zeit, auf welche ein Kapital ausgeliehen ist, eine Zahl dar, in welcher der die Dauer eines Zinstermins bezeichnende Werth nicht ohne Rest enthalten ist, so reichen die in § 2 und § 4 gegebenen Gleichungen zur Berechnung der Summe, auf welche das Kapital in der gegebenen Zeit anwächst, nicht aus. Denn nimmt man an, die Zeit sei durch die Größe $\left(n + \frac{1}{m}\right)$ bestimmt, so muß sich, wenn den angeführten Gleichungen entsprechend

$$C = c . p^{n+\frac{1}{m}} = c \left(1 + \frac{z}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$$

angenommen wird, ein etwas zu geringer Werth ergeben.

Nach n Jahren ist nämlich das Kapital auf $c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^{n}$ angewachsen, und es würde sich nach dieser Gleichung die Kapitaleinheit in $\frac{1}{m}$ Jahre auf $\left(1 + \frac{z}{100}\right)^{\frac{1}{m}}$ vermehren, da $\left(1 + \frac{z}{100}\right)^{n} . \left(1 + \frac{z}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(1 + \frac{z}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$ ist. Da aber in Wirklichkeit die Kapitaleinheit in $\frac{1}{m}$ Jahre auf $\left(1 + \frac{z}{m . 100}\right)$ anwächst, so müßte

$$\left(1 + \frac{z}{100}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{z}{m . 100}$$

und $1+\frac{z}{100}=\left(1+\frac{z}{m\,.\,100}\right)^m$

$$= 1 + m\,.\,\frac{z}{m\,.\,100}+\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{z}{m\,.\,100}\right)^2+\ldots.\left(\frac{z}{m\,.\,100}\right)^m$$

$$= 1+\frac{z}{100}+\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{z}{m\,.\,100}\right)^2+\ldots.\ \text{sein.}$$

Hieraus ergibt sich nun, daß $\left(1+\frac{z}{100}\right)^{\frac{1}{m}}<\left(1+\frac{z}{m\,.\,100}\right)$, und es muß deshalb bei Befolgung der oben angegebenen Gleichung für C ein zu niedriger Werth resultiren.

In einem solchen Falle hat man also bei jährlichen Zinsen zuerst die Summe zu berechnen, auf welche das Kapital nach n Jahren anwächst, und zählt dann zu dieser Summe die in $\frac{1}{m}$ Jahren aus derselben sich ergebenden einfachen Zinsen.

Man erhält somit zuerst aus dem Kapital c bei z % nach n Jahren die Größe $c\left(1+\frac{z}{100}\right)^n$.

Diese Summe gibt aber in $\frac{1}{m}$ Jahren die einfachen Zinsen $\frac{c\left(1+\frac{z}{100}\right)^n.\,z}{m\,.\,100}$. Demnach ist der Schlußwerth, auf welchen das Kapital c nach $\left(n+\frac{1}{m}\right)$ Jahren anwächst

$$C = c\left(1+\frac{z}{100}\right)^n+\frac{c\left(1+\frac{z}{100}\right)^n.\,z}{m\,.\,100}$$

$$= c\left(1+\frac{z}{100}\right)^n.\left(1+\frac{z}{m\,.\,100}\right).$$

Bei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ . . . $\frac{1}{m}$-jährlichen Zinsperioden hat man ganz entsprechend zu verfahren.

Beispiele.

1. Wie hoch wachsen 28450 fl. an, wenn sie $9^3/_4$ Jahre lang zu $4^1/_2$ % auf Zinseszinsen stehen, und jährliche Zinstermine angenommen werden?

Nach der vorstehenden Gleichung erhält man

$$C = 28450\left(1+\frac{4^1/_2}{100}\right)^9.\left(1+\frac{4^1/_2\,.\,3}{100\,.\,4}\right)$$

$$= 28450\,.\,1{,}045^9\,.\,1{,}03375$$

oder $\log C = \log 28450 + 9\,.\log 1{,}045 + \log 1{,}03375$.

$$\begin{aligned}\log 28450 &= 4{,}4540823\\ 9\,.\log 1{,}045 &= 0{,}1720467\\ \log 1{,}03375 &= 0{,}0144155\\ \hline \log C &= 4{,}6405445\\ C &= 43706{,}34\ldots\ \text{fl.}\end{aligned}$$

2. Jemand hat 4580 fl. in eine Bank einbezahlt, und zwar mit der Bestimmung, daß $3^1/_2\%$ bei halbjährlichen Zinsen berechnet würden. Welche Summe kann er nach 7 Jahren 10 Monaten erheben, wenn stets die Zinsen zum Kapitale geschlagen wurden?

Bei dieser Aufgabe wächst die Kapitaleinheit in einem halben Jahre auf $\left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right)$ an, und da zunächst 15 halbjährliche Zinsperioden in Rechnung zu bringen sind, so ist die nach dieser Zeit sich ergebende Summe $= 4580 \left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right)^{15}$ fl. Diese Summe steht noch 4 Monate und gibt in dieser Zeit noch $4580 \left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right)^{15} \cdot \frac{4 \cdot 3^1/_2}{12 \cdot 100}$ fl. Zinsen.

$$\text{Somit ist } C = 4580 \left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right)^{15} + 4580 \left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right) \cdot \frac{4 \cdot 3^1/_2}{12 \cdot 100}$$

$$= 4580 \left(1 + \frac{3^1/_2}{2 \cdot 100}\right)^{15} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 3^1/_2}{12 \cdot 100}\right)$$

$$= 4580 \cdot 1{,}0175^{15} \cdot \frac{607}{600},$$

oder $\log C = \log 4580 + 15 \log 1{,}0175 + \log 607 - \log 600$

$$\begin{aligned} \log 4580 &= 3{,}6608655 \\ 15 \cdot \log 1{,}0175 &= 0{,}1130160 \\ \log 607 &= 2{,}7831887 \\ & \overline{6{,}5570702} \\ \log 600 &= 2{,}7781513 \\ \hline \log C &= 3{,}7789189 \\ C &= 6010{,}61 \ldots \text{ fl.} \end{aligned}$$

§ 6.

Berechnung des ausgeliehenen Kapitals.

Ist die Summe C, auf welche ein Kapital in n Jahren bei $z\%$ angewachsen ist, bekannt, und werden jährliche Zinsen berechnet, so kann aus den in § 2 aufgestellten Gleichungen

$$C = c \left(1 + \frac{z}{100}\right)^n$$

$$\text{und } C = c \cdot p^n$$

der Werth für das ausgeliehene Kapital c bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} & c = \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n}, \\ \text{oder } & c = \frac{C}{p^n}. \end{aligned} \right.$$

Ebenso ergibt sich aus Gleichung III in § 4 der Werth des Anfangskapitales c, wenn andere als jährliche Zinstermine angenommen sind. Man erhält

$$\text{II.}\quad c = \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{m\,.\,100}\right)^{m\,.\,n}}$$

Sollte sich ein Rest ergeben, wenn die Zeitangabe durch die Zahl, welche die Länge der Zinsperiode ausdrückt, dividirt wird, so findet man zur Bestimmung des ausgeliehenen Kapitals aus der in § 5 aufgestellten Gleichung

$$\text{III.}\quad c = \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^{n} . \left(1 + \frac{z}{m\,.\,100}\right)}\quad .$$

Beispiele.

1. Wie groß war das Kapital, welches nach 9 Jahren bei 5 % auf 24567 fl. angewachsen ist, wenn jährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen wurden?

Nach Gleichung I ist

$$c = \frac{24567}{1{,}05^{9}}$$

oder $\log c = \log 24567 - 9\,.\,\log 1{,}05.$

$$\begin{array}{ll} \log 24567 & = 4{,}3903521 \\ 9\,.\log 1{,}05 & = 0{,}1907037 \\ \hline \log c & = 4{,}1996484 \\ c & = 15836{,}1\ldots \text{fl.} \end{array}$$

2. Ein Schuldner ist verpflichtet, seine Schuld mit 4% in vierteljährlichen Raten zu verzinsen, ist aber $6^1/_2$ Jahre seinen Verpflichtungen nicht nachgekommen. Dadurch ist bei Berechnung von Zinseszinsen die Schuld auf 9845 fl. angewachsen. Wie hoch belief sich dieselbe anfänglich?

Nach Gleichung II ist

$$c = \frac{9845}{\left(1 + \frac{4}{4\,.\,100}\right)^{26}} = \frac{9845}{1{,}01^{26}}.$$

oder $\log c = \log 9845 - 26\,.\log 1{,}01$

$$\begin{array}{ll} \log 9845 & = 3{,}9932157 \\ 26\ \log 1{,}01 & = 0{,}1123564 \\ \hline \log c & = 3{,}8808593 \\ c & = 7600{,}8\ \text{fl.} \end{array}$$

3. Welches Kapital ist durch Zinseszinsen bei 5% und jährlicher Zinsberechnung in $24^3/_4$ Jahren auf 49475 fl. angewachsen?

Aus Gleichung III ergibt sich

$$c = \frac{49475}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{24} . \left(1 + \frac{5\,.\,3}{4\,.\,100}\right)} = \frac{49475\,.\,80}{1{,}05^{24}\,.\,83}.$$

oder $\log c = \log 49475 + \log 80 - (24 \log 1{,}05 + \log 83)$

$$\begin{aligned}\log 49475 &= 4{,}6943858\\ \log 80 &= 1{,}9030900\\ \hline &\ 6{,}5974758\\ 24 \,.\, \log 1{,}05 &= 0{,}5085432\\ \log 83 &= 1{,}9190781\\ \hline &\ 2{,}4276213\\ \log c &= 4{,}1698545\\ c &= 14786{,}13 \ldots \text{ fl.}\end{aligned}$$

§ 7.

Anwendung der Binomialreihe zur Berechnung des anfänglichen Kapitalwerthes.

Die in § 3 dargestellte Methode läßt sich auch für die Berechnung des anfänglichen Kapitales c aus dem Endwerthe C, der Zeit n und dem Procentsatze z anwenden.

Aus der Gleichung

$$C = c\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n \text{ ergibt sich}$$

$$c = \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n}.$$

Wird nun die Potenz $\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n$ nach der Binomialformel entwickelt, und, wie im § 3 gezeigt wurde, ein Theil der Glieder berechnet und addirt, und schließlich mit der erhaltenen Summe in C dividirt, so stellt der Quotient das gesuchte ursprüngliche Kapital dar.

So ist zur Berechnung von Beispiel 1 in § 6

$$c = \frac{24567}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^9} = \frac{24567}{1 + 9 \,.\, 0{,}05 + \frac{9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} \,.\, 0{,}05^2 + \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 0{,}05^3 + \ldots\ldots + 0{,}05^9}.$$

$$\begin{aligned}&1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&= 1\\ &9 \,.\, 0{,}05 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&= 0{,}45\\ &\frac{9 \,.\, 8}{1 \,.\, 2} \,.\, 0{,}05^2 = \frac{8}{2} \,.\, 0{,}05 \,.\, 0{,}45 \ldots\ldots &&= 0{,}09\\ &\frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 0{,}05^3 = \frac{7}{3} \,.\, 0{,}05 \,.\, 0{,}09 \ldots\ldots &&= 0{,}0105\\ &\frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 0{,}05^4 = \frac{6}{4} \,.\, 0{,}05 \,.\, 0{,}0105 \ldots\ldots &&= 0{,}0007875\\ \hline & &&\ 1{,}5512875.\end{aligned}$$

Diese Summe der 5 ersten Glieder der Binomialreihe ist schon zu einem genauen Resultate genügend, denn es ist

$$c = \frac{24567}{1{,}5512875} = 15836 \text{ fl.}$$

§ 8.

Berechnung der Zeit.

Ist das ausgeliehene Kapital c, der Procentsatz z, sowie die Summe C, auf welche das Kapital in einer Zeit n angewachsen ist, bekannt, so läßt sich bei jährlichen Zinsen diese Zeit n aus der Gleichung II in § 2 bestimmen.

Es ist
$$p^n = \frac{C}{c}$$
$$n \cdot \log p = \log C - \log c$$
$$\text{I.} \qquad n = \frac{\log C - \log c}{\log p}.$$

Sind jedoch nicht jährliche, sondern $\frac{1}{m}$-jährliche Zinsperioden angenommen, so ergibt sich der Werth von n aus der in § 4 gegebenen Gleichung III. Man erhält
$$\left(1 + \frac{z}{m \cdot 100}\right)^{m \cdot n} = \frac{C}{c}$$
$$m \cdot n \cdot \log\left(1 + \frac{z}{m \cdot 100}\right) = \log C - \log c$$
$$\text{II.} \qquad n = \frac{\log C - \log c}{m \cdot \log\left(1 + \frac{z}{m \cdot 100}\right)}$$

Für den Fall, daß die Zinsperiode in der Zeitangabe nicht ohne Rest enthalten ist, wird die Berechnung der Zeit nach einer der beiden vorstehenden Gleichungen aus den in § 5 angegebenen Gründen nur einen annähernden Werth ergeben. Angenommen es sei auf diese Art für die Zeit die Größe $\left(n_1 + \frac{1}{x}\right)$ gefunden worden, so berechnet man, um ein genaues Resultat zu erhalten, wie hoch das gegebene Kapital in n_1 Zinsperioden anwächst, und ermittelt dann durch einfache Zinsrechnung, wie lange der so erhaltene Werth noch zu stehen hat, um auf den gegebenen Schlußwerth C sich zu erhöhen. Wird bei dieser Rechnung die Zeit $\frac{1}{m}$ gefunden, so ist $\frac{1}{m}$ statt $\frac{1}{x}$ zu n_1 zu addiren, um die richtige Zeit n zu erhalten.

Beispiele.

1. Wie lange ist ein Kapital von 15670 fl. ausgeliehen, wenn dasselbe bei $3\frac{1}{2}$% jährlichen Zinsen und Berechnung von Zinseszinsen auf 19262 fl. 24 kr. anwächst?

Nach Gleichung I ist
$$n = \frac{\log 19262{,}4 - \log 15670}{\log 1{,}035}$$
$$\begin{aligned} \log 19262{,}4 &= 4{,}2847104 \\ \log 15670 &= 4{,}1950690 \\ \hline & 0{,}0896414 \end{aligned}$$

$$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$$

$$n = \frac{0{,}0896414}{0{,}0149403} = 5{,}9999\ldots \text{ Jahre,}$$

wofür 6 Jahre anzunehmen sind.

2. Ein Kapital von 8577 fl. ist bei 4% auf 13795 fl. 36 kr. angewachsen.

In welcher Zeit kam diese Erhöhung zu Stande, wenn halbjährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen wurden?

Nach Gleichung II ist

$$n = \frac{\log 13795{,}6 - \log 8577}{2 \cdot \log 1{,}02}$$

$$\begin{aligned} \log 13795{,}6 &= 4{,}1397406 \\ \log 8577 &= 3{,}9333354 \\ &\ 0{,}2064052 \\ 2 \cdot \log 1{,}02 &= 0{,}0172004 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}2064052}{0{,}0172004} = 12 \text{ Jahre.}$$

3. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei 5% und Zinseszinsen, wenn jährliche, halbjährliche und vierteljährliche Zinsen in Rechnung gebracht werden?

Wird von der Kapitaleinheit ausgegangen, so ergibt sich aus Gleichung I bei jährlicher Zinsberechnung

$$n = \frac{\log 2 - \log 1}{\log 1{,}05} = \frac{\log 2}{\log 1{,}05}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}206\ldots \text{ Jahre.}$$

Da in diesem Resultate ein beachtenswerther Bruch erscheint, so ist bei dieser Aufgabe in der angedeuteten Weise zu verfahren. Man hat also zunächst zu berechnen, wie hoch die Kapitaleinheit in 14 Jahren anwächst, und dann durch einfache Zinsrechnung zu bestimmen, in welcher Zeit der so erhaltene Werth auf das Kapital 2 sich erhöht.

Es ist nun

$$\begin{aligned} C &= 1{,}05^{14} \\ \log C &= 14 \cdot \log 1{,}05 \\ 14 \cdot \log 1{,}05 &= 0{,}2966502 \\ C &= 1{,}97993\ldots \end{aligned}$$

Somit fehlt noch zu der Summe 2 die Größe 0,02007. Die Zeit x, in welcher ein Kapital 1,97993 bei 5% die Zinsen 0,02007 bringt, ist $= \frac{0{,}02007 \cdot 100}{1{,}97993 \cdot 5} = 0{,}2027\ldots$ Jahre.

Folglich braucht das gegebene Kapital 1 einen Zeitraum von 14 + 0,2027 oder 14,2027 . . . Jahren, um sich zu verdoppeln.

Bei halbjährlichen Zinsen erhält man nach Gleichung II

$$n = \frac{\log 2}{2 \, . \log 1{,}025}$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$2 \, . \log 1{,}025 = 0{,}0214478$$

$$n = \frac{0{,}3010300}{0{,}0214478} = 14{,}0354 \ldots \text{ Jahre.}$$

Wird bei dieser Aufgabe wie bei der vorigen verfahren, so ergibt sich in dem Resultate nur ein sehr geringer Unterschied, weil der Bruch 0,0354 . . . an und für sich nur einen kleinen Jahrestheil vorstellt.

Man erhält

$$C = 1{,}025^{28} = 1{,}9965$$

$$x = \frac{0{,}0035 \, . 100}{1{,}9965 \, . \, 5} = 0{,}0350 \ldots$$

Es ist also die Zeit, in welcher bei halbjährlichen Zinsen und 5% ein Kapital sich verdoppelt = 14,035 Jahren.

Bei vierteljährlichen Zinsen ist

$$n = \frac{\log 2}{4 \, . \log 1{,}0125}$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$4 \, . \log 1{,}0125 = 0{,}0215800$$

$$n = \frac{0{,}3010300}{0{,}0215800} = 13{,}9494 \ldots$$

Hier ergibt sich ferner

$$C = \left(1 + \frac{5}{4 \, . 100}\right)^{13^3/_4} = 1{,}0125^{\frac{55}{4}}$$

$$\frac{55}{4} \, . \log 1{,}0125 = 0{,}2967250$$

$$C = 1{,}98027 \ldots$$

$$x = \frac{0{,}01973 \, . 100}{1{,}98027 \, . \, 5} = 0{,}1992 \ldots$$

Somit ist die Zeit, in welcher bei vierteljährlichen Zinsterminen ein Kapital sich verdoppelt, $= 13^3/_4 + 0{,}1992 \ldots = 13{,}9492 \ldots$ Jahren.

§ 9.

Berechnung des Procentsatzes.

Sollen die Procente z berechnet werden, bei welchen ein Kapital c in n Jahren auf eine Summe C sich erhöht, so ergibt sich, wenn jährlich die Zinsen zum Kapitale gezählt werden, zunächst aus der Gleichung

$$C = c \, . \, p^n$$

ein Werth für p. Es ist

$$\text{I.} \quad \log p = \frac{\log C - \log c}{n}.$$

Da nun $p = 1 + \frac{z}{100}$ angenommen wurde, so ist

$$z = 100\ (p - 1).$$

Für die Berechnung der Procente bei $\frac{1}{m}$jährlichen Zinsen setzt man am besten in der Gleichung

$$C = c\left(1 + \frac{z}{m\,.\,100}\right)^{m\,.\,n}$$

für $1 + \frac{z}{m\,.\,100}$ d. h. für die Größe, auf welche die Kapitaleinheit in einer Zinsperiode anwächst, die Größe p_1. Es ist alsdann

$$C = c\,.\,p_1^{m.n},$$

$$\text{also II.}\quad \log p_1 = \frac{\log C - \log c}{m\,.\,n}.$$

Aus dem Werthe von p_1 ergibt sich dann die Größe z.

Beispiele.

1. Aus einem Kapitale von 6500 fl. erhielt man nach 8 Jahren 8895 fl. 42 kr. dadurch, daß jährlich die Zinsen zum Kapitale geschlagen wurden. Zu wie viel Procent war das Kapital angelegt?

Nach Gleichung I ist

$$\log p = \frac{\log 8895{,}7 - \log 6500}{8}.$$

$$\begin{aligned} \log 8895{,}7 &= 3{,}9491801 \\ \log 6500 &= 3{,}8129134 \\ \hline &\ 0{,}1362667 \end{aligned}$$

$$\log p = \frac{0{,}1362667}{8} = 0{,}0170333\ \ldots$$

$$p = 1{,}04.$$

Somit ist $z = 100\ (1{,}04 - 1) = 4\%$.

2. Wie viel Procente waren berechnet, wenn bei Zinseszinsen und vierteljährlichen Terminen 14500 fl. in 6 Jahren auf 19536 fl. 33 kr. angewachsen sind?

Werden die Zahlenwerthe in Gleichung II eingesetzt, so ist

$$\log p_1 = \frac{\log 19536{,}55 - \log 14500}{4\,.\,6}$$

$$\begin{aligned} \log 19536{,}55 &= 4{,}2908478 \\ \log 14500 &= 4{,}1613680 \\ \hline &\ 0{,}1294798 \end{aligned}$$

$$\log p_1 = \frac{0{,}1294798}{24} = 0{,}0053949\ \ldots$$

$$p_1 = 1{,}0125.$$

Folglich $z = m\,.\,100\ (p_1 - 1) = 400\ .\ 0{,}0125 = 5\%$.

§. 10.

Berechnung der Kapitalwerthe bei verändertem Zahlungstermine.

Soll ein Schuldner eine Summe an einem bestimmten Termine bezahlen, verständigt sich aber mit dem Gläubiger über einen andern Zahlungstermin, so muß auch die zu bezahlende Summe mit dem Termine sich ändern. Am meisten kommt es vor, daß man eine nach einer gewissen Zeit fällige Summe in der Gegenwart zu zahlen wünscht, seltener hingegen sind die Fälle, in welchen der Zahlungstermin auf irgend einen andern Zeitpunkt vor oder nach dem ursprünglich bestimmten Termine verlegt wird. Sind mehrere Kapitalien zu verschiedenen Zeiten zu bezahlen, so können auch diese auf die Gegenwart oder auf einen beliebigen andern Termin berechnet werden; häufig aber wird bei solchen Zahlungen ein mittlerer Zahlungstermin angenommen, d. h. ein Termin, an welchem auf einmal die Gesammtsumme der einzelnen Kapitalien entrichtet werden kann.

Man hat also bei der Berechnung der veränderten Zahlungstermine drei Rechnungen zu unterscheiden:

1. Die Reduction eines Kapitals auf die Gegenwart oder die Discontorechnung.
2. Die Berechnung des Kapitalwerthes für irgend einen andern Zahlungstermin.
3. Die Berechnung des mittleren Zahlungstermines.

§ 11.

Die Discontorechnung.

Will ein Schuldner eine Summe, welche erst nach Verlauf einer bestimmten Zeit bezahlt werden soll, mit der Einwilligung des Gläubigers jetzt schon entrichten, oder, wie man sich auch ausdrückt, die Zahlung auf die Gegenwart reduciren, so ist er zu einem Abzuge berechtigt, da das jetzt bezahlte Kapital durch die Zinsen, die es in der fraglichen Zeit bringt, sich vergrößert, und dadurch dem Gläubiger ein Nutzen erwächst. Ein solcher Abzug wird Disconto oder Interusurium genannt.

Daß der Disconto gleich dem Betrage der Zinsen sein muß, welche zu der bezahlten Summe geschlagen den Schuldbetrag ergeben, ist leicht ersichtlich; anders aber verhält es sich mit der Frage, ob einfache oder zusammengesetzte Zinsen dabei in Rechnung gebracht werden müssen. Wird auch im Geschäftsleben besonders beim Discontiren von geringeren Summen und bei kürzeren Fristen gewöhnlich die einfache Zinsberechnung oder das einfache Discontiren angewandt (Hoffmann'sches Interusurium), so ist doch dieses Verfahren streng genommen unrichtig, und es erwächst bei demselben dem Schuldner ein Nachtheil, der bei größeren Summen und längeren Fristen sich bedeutend steigert. Deshalb muß bei der Reduction von Kapitalzahlungen auf die Gegenwart oder auch auf irgend einen andern Zeitpunkt die Zinseszinsrechnung zur Bestimmung des Discontos, welcher in diesem Falle wohl auch der zusammengesetzte oder Leibnitz'sche Disconto heißt, angewandt werden.*)

*) Leibnitz hat in einer Abhandlung „Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice", welche im Jahre 1683 in den Acta eruditorum erschien, eine Formel für die Berechnung des zusammengesetzten Interusuriums aufgestellt, während G. A. Hoffmann in seiner im Jahre 1731 erschienenen Schrift: „Klugheit, Haus zu halten", eine Regel anführt, welcher die Rechnung mit einfachen Zinsen zu Grunde liegt.

Daß die Berechnung von Zinseszinsen allein ein richtiges Resultat gibt, wird aus folgender Beweisführung sich ergeben.

Bezeichnet C das in n Jahren bei $z\%$ zu zahlende Kapital, c den jetzigen Baarwerth desselben, d den abzuziehenden Disconto, so erhält man nach der einfachen Zinsrechnung

$$c = \frac{C}{1 + \frac{z \cdot n}{100}},$$

wodurch also der Werth des auf die Gegenwart reducirten Kapitals bei einfachen Zinsen ausgedrückt ist. Für den einfachen Disconto ergibt sich

$$d = \frac{C \cdot z \cdot n}{100 + n \cdot z}.$$

Soll diese Formel für die Berechnung des Discontos richtig sein, so muß der Werth $\frac{C \cdot z \cdot n}{100 + n \cdot z}$ dem Werthe der sämmtlichen auf die Gegenwart reducirten Jahreszinsen gleichkommen.

Ein Kapital C gibt nun in einem Jahre die Zinsen $\frac{C \cdot z}{100}$, da aber das Kapital 100 in 1 Jahr auf $(100 + z)$ anwächst, so ist umgekehrt von einem Kapitale, welches in einem Jahre den Werth $(100 + z)$ erreicht, der jetzige Baarwerth $= 100$.

Somit hat man zur Bestimmung des Baarwerthes der im ersten Jahre von dem Kapitale C fälligen Zinsen die Proportion

$$(100 + z) : 100 = \frac{C \cdot z}{100} : x_1,$$

folglich

$$x_1 = \frac{C \cdot z}{100 + z}.$$

Entsprechend erhält man für den jetzigen Baarwerth der Zinsen des zweiten Jahres aus der Proportion

$$(100 + 2 \cdot z) : 100 = \frac{C \cdot z}{100} : x_2$$

$$x_2 = \frac{C \cdot z}{100 + 2 \cdot z},$$

ebenso für den jetzigen Werth der Zinsen des dritten Jahres

$$x_3 = \frac{C \cdot z}{100 + 3 \cdot z},$$

und allgemein für den jetzigen Werth der Zinsen des nten Jahres

$$x_n = \frac{C \cdot z}{100 + n \cdot z}.$$

Soll nun der Disconto richtig sein, so muß sich die Gleichung ergeben:

$$\frac{C \cdot z \cdot n}{100 + n \cdot z} = \frac{C \cdot z}{100 + z} + \frac{C \cdot z}{100 + 2 \cdot z} + \frac{C \cdot z}{100 + 3 \cdot z} + \cdots + \frac{C \cdot z}{100 + n \cdot z},$$

oder

$$\frac{n}{100 + n \cdot z} = \frac{1}{100 + z} + \frac{1}{100 + 2 \cdot z} + \frac{1}{100 + 3 \cdot z} + \cdots + \frac{1}{100 + n \cdot z}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen n Glieder. Wären dieselben sämmtlich gleich dem letzten Gliede, so ergäbe sich für ihre Summe nmal der Werth des letzten Gliedes, also $\frac{n}{100 + n \, . \, z}$, und die aufgestellte Gleichung wäre in diesem Falle richtig. Nun ist aber

$$\frac{1}{100 + z} > \frac{1}{100 + 2 \, . \, z} > \frac{1}{100 + 3 \, . \, z} \cdots > \frac{1}{100 + n \, . \, z},$$

folglich ist der Werth der rechten Seite überhaupt größer als $\frac{n}{100 + n \, . \, z}$, und demnach der Disconto selbst unrichtig.

Bei Anwendung von Zinseszinsen erhält man, da die Reducirung eines Kapitales C auf die Gegenwart nichts anderes ist als das Berechnen eines Kapitales c, welches in n Jahren auf C anwächst, nach § 6

$$c = \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} \text{ oder } = \frac{C}{p^n};$$

$$\text{also} \quad d = C - c = C - \frac{C}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n} = C\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^n}\right),$$

$$\text{oder} \quad = C - \frac{C}{p^n} = \frac{C \, . \, p^n - C}{p^n} = \frac{C}{p^n}\,(p^n - 1).$$

Ist diese Formel für die Berechnung des zusammengesetzten Discontos richtig, so muß sich nachweisen lassen, daß die Summe der Jetztwerthe aller Jahreszinsen gleich diesem für d aufgestellten Werthe ist.

Von dem Kapitale C betragen wieder bei $z^0/_0$ die Zinsen eines Jahres $\frac{C \, . \, z}{100}$. Wie oben erhält man für den baaren Werth dieser Summe aus der Proportion

$$100 + z : 100 = \frac{C \, . \, z}{100} : x_1$$

$$x_1 = \frac{C \, . \, z}{100 + z} = \frac{C \, . \, z}{100\left(1 + \frac{z}{100}\right)}$$

oder wenn man $1 + \frac{z}{100} = p$ und also $\frac{z}{100} = p - 1$ setzt,

$$x_1 = \frac{C\,(p-1)}{p}.$$

Die Zinsen des zweiten Jahres betragen wieder $\frac{C \, . \, z}{100}$, auf die Gegenwart reducirt ist aber ihr Baarwerth nach § 6

$$x_2 = \frac{\frac{C \, . \, z}{100}}{\left(1 + \frac{z}{100}\right)^2} = \frac{C \, . \, z}{100\left(1 + \frac{z}{100}\right)^2} = \frac{C\,(p-1)}{p^2}.$$

In entsprechender Weise sind die Baarwerthe der Zinsen des dritten, vierten, . . . nten Jahres

$$x_3 = \frac{C\ (p-1)}{p^3}$$

$$x_4 = \frac{C\ (p-1)}{p^4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{C\ (p-1)}{p^n}$$

Soll nun die aufgestellte Formel für den zusammengesetzten Disconto richtig sein, so muß der Werth derselben der Summe der für x_1, x_2, x_3 . . . . x_n gefundenen Werthe gleichkommen. Es muß also die Gleichung bestehen

$$\frac{C}{p^n}\ (p^n - 1) = \frac{C\ (p-1)}{p} + \frac{C\ (p-1)}{p^2} + \frac{C\ (p-1)}{p^3} + \ldots . \frac{C\ (p-1)}{p^n}$$

oder
$$\frac{p^n - 1}{p^n} = \frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} + \frac{p-1}{p^3} + \ldots . \frac{p-1}{p^n},$$

$$= \frac{p-1}{p}\left[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots . \frac{1}{p^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n - 1}{\frac{1}{p} - 1} = \frac{p^n - 1}{p^n}.$$

Da sich somit die aufgestellte Gleichung als richtig erweist, so ist auch die Anwendung der Zinseszinsen bei der Berechnung des Discontos gerechtfertigt.

Der Unterschied im Werthe des einfachen und zusammengesetzten Discontos wird aus folgendem Beispiele ersichtlich.

Jemand hat nach 6 Jahren ein Kapital von 10000 fl. zu bezahlen. Wie viel Disconto darf er abziehen, wenn er jetzt schon seine Schuld entrichten will und 4% gerechnet werden?

Bei einfachem Disconto ist $d = \frac{C\,.\,z\,.\,n}{100 + n\,.\,z}$,

also bei dem angegebenen Beispiele $d = \frac{10000\,.\,4\,.\,6}{100 + 6\,.\,4} = \frac{240000}{124} = 1935{,}48$ fl.

Bei zusammengesetztem Disconto ist $d = C - \frac{C}{p^n}$,

also $d = 10000 - \frac{10000}{1{,}04^6}$

$$\log 10000 = 4{,}0000000$$
$$6 \log 1{,}04 = 0{,}1021998$$
$$\log \frac{10000}{1{,}04^6} = 3{,}8978002$$
$$\frac{10000}{1{,}04^6} = 7903{,}15$$

folglich $d = 10000 - 7903{,}15 = 2096{,}85$ fl.

§ 12.

Berechnung des Kapitalwerthes für einen veränderten Zahlungstermin.

Ist eine Summe an einem bestimmten Termine fällig, soll jedoch nach Uebereinkunft die Zahlung derselben an einem andern Zeitpunkte stattfinden, so ist die Summe zuerst auf die Gegenwart zu reduciren, alsdann aber zu berechnen, zu welcher Größe der gefundene Werth bis zu dem neuen Termine anwächst. Ist der neue Zahlungstermin früher angesetzt, als der ursprüngliche, so wird die zu bezahlende Summe kleiner sein, hingegen größer, wenn der Zahlungstermin weiter hinausgerückt wird.

Soll also ein Kapital C in n Jahren bezahlt werden, so ist, wenn $p = 1 + \frac{z}{100}$ gesetzt wird, sein gegenwärtiger Werth

$$c = \frac{C}{p^n}.$$

Bis zu einem andern Termine n_1 wird aber dieser Werth c auf $c \,.\, p^{n_1}$ anwachsen, also ist der Werth des Kapitales C am Termine n_1

$$C_1 = \frac{C \,.\, p^{n_1}}{p^n} = C \,.\, p^{n_1 - n},$$

$$\text{oder } = \frac{C}{p^{n - n_1}},$$

je nachdem $n_1 >$ oder $< n$ ist.

Beispiele.

1. Was ist der Werth eines in 8 Jahren fälligen Kapitales von 6800 fl., wenn dasselbe in 5, und was ist der Werth, wenn dasselbe erst in 10 Jahren bezahlt wird, und dabei $4\frac{1}{2}$ % und jährliche Zinsen in Rechnung kommen?

Der gegenwärtige Werth des Kapitales ist

$$c = \frac{6800}{1{,}045^8}$$

Dieser Werth erhöht sich in 5 Jahren auf

$$C_1 = \frac{6800 \,.\, 1{,}045^5}{1{,}045^8} = \frac{6800}{1{,}045^3},$$

und in 10 Jahren auf

$$C_2 = \frac{6800 \,.\, 1{,}045^{10}}{1{,}045^8} = 6800 \,.\, 1{,}045^2.$$

$$\begin{aligned}
\log 6800 &= 3{,}8325089 \\
3 \log 1{,}045 &= 0{,}0573489 \\
\hline
\log C_1 &= 3{,}7751600 \\
C_1 &= 5958{,}816 \ldots \text{fl.} \\
\log 6800 &= 3{,}8325089 \\
2 \log 1{,}045 &= 0{,}0382326 \\
\hline
\log C_2 &= 3{,}8707415 \\
C_2 &= 7425{,}77 \text{ fl.}
\end{aligned}$$

2. Jemand hat in 12 Jahren eine Summe von 495 fl. 30 kr. zu bezahlen, kommt aber mit dem Gläubiger überein, die Zahlung schon am Ende des sechsten Jahres zu leisten. Welchen Werth wird die Schuld an diesem Termine haben, wenn 5% und a. jährliche, b. halbjährliche Zinsperioden bei der Berechnung angenommen werden?

a. Bei jährlichen Zinsperioden ist der gegenwärtige Werth der Summe

$$c = \frac{495{,}5}{1{,}05^{12}}$$

Diese Summe gibt in 6 Jahren

$$C = \frac{495{,}5 \,.\, 1{,}05^{6}}{1{,}05^{12}} = \frac{495{,}5}{1{,}05^{6}}\,.$$

$$\begin{aligned} \log 495{,}5 &= 2{,}6950437 \\ 6 \log 1{,}05 &= 0{,}1271358 \\ \hline \log C &= 2{,}5679079 \\ C &= 369{,}75 \text{ fl.} \end{aligned}$$

b. Der gegenwärtige Werth der Summe bei halbjährlichen Zinsperioden ist

$$c = \frac{495{,}5}{1{,}025^{24}}\,.$$

Daraus wird in 6 Jahren

$$C = \frac{495{,}5 \,.\, 1{,}025^{12}}{1{,}025^{24}} = \frac{495{,}5}{1{,}025^{12}}\,.$$

$$\begin{aligned} \log 495{,}5 &= 2{,}6950437 \\ 12 \,.\, \log 1{,}025 &= 0{,}1286868 \\ \hline \log C &= 2{,}5663569 \\ C &= 368{,}431 \ldots \text{ fl.} \end{aligned}$$

§ 13.

Berechnung des mittleren Zahlungstermins.

Wenn ein Schuldner mehrere Summen in verschiedenen Zeiten bezahlen muß, jedoch die Gesammtsumme auf einmal entrichten will, so nennt man den Zeitpunkt, an welchem diese Gesammtzahlung geschehen kann, ohne daß dem Schuldner oder Gläubiger ein Nutzen oder Schaden erwächst, den mittleren Zahlungstermin.

Um den mittleren Zahlungstermin zu finden, wird der Werth der einzelnen Summen auf die Gegenwart reducirt, und alsdann die Zeit berechnet, in welcher die Summe dieser reducirten Werthe auf die Gesammtsumme der einzelnen Terminzahlungen bei Annahme eines bestimmten Procentsatzes anwächst. Auch hier werden sich Unterschiede für die Zeit des mittleren Zahlungstermins ergeben, je nachdem jährliche oder halbjährliche oder vierteljährliche Zinsperioden angenommen werden.

Es ist jedoch hier nur die Formel für jährliche Zinsen entwickelt, da aus dem Vorhergehenden sich leicht die Umgestaltung derselben für andere Zinsperioden ergibt.

Es seien die verschiedenen Kapitalien und Termine beziehungsweise C_1 und n_1, C_2 und n_2, C_3 und n_3 u. s. w., so sind die Baarwerthe c_1, c_2, c_3 . . . . derselben

$$c_1 = \frac{C_1}{p^{n_1}}$$

$$c_2 = \frac{C_2}{p^{n_2}}$$

$$c_3 = \frac{C_3}{p^{n_3}} \quad \text{u. s. w.,}$$

also der Gesammtwerth in der Gegenwart $\frac{C_1}{p^{n_1}} + \frac{C_2}{p^{n_2}} + \frac{C_3}{p^{n_3}} + \ldots.$

Die Summe der in den einzelnen Terminen zu bezahlenden Kapitalien ist $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$; folglich ist nunmehr die Frage, in welcher Zeit n wächst die Summe

$$\frac{C_1}{p^{n_1}} + \frac{C_2}{p^{n_2}} + \frac{C_3}{p^{n_3}} + \ldots. \text{ auf } C_1 + C_2 + C_3 + \ldots.$$

an. Nach der Gleichung in § 8 $\quad n = \frac{\log C - \log c}{\log p}$ ergibt sich

$$n = \frac{\log\left[C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\right] - \log\left[\frac{C_1}{p^{n_1}} + \frac{C_2}{p^{n_2}} + \frac{C_3}{p^{n_3}} + \ldots\right]}{\log p}.$$

Beispiel.

Jemand hat nach 2 Jahren 2000 fl., nach 3 Jahren 5000 fl., nach 5 Jahren 4200 fl. zu bezahlen, wünscht aber, diese Summe von 11200 fl. auf einmal abzutragen. Wann kann dieses geschehen, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

Die einzelnen Summen auf die Gegenwart reducirt geben

$$c_1 = \frac{2000}{1{,}04^2}$$

$$c_2 = \frac{5000}{1{,}04^3}$$

$$c_3 = \frac{4200}{1{,}04^5}$$

$$\begin{array}{rl} \log 2000 & = 3{,}3010300 \\ \underline{2 \log 1{,}04} & \underline{= 0{,}0340666} \\ \log c_1 & = 3{,}2669634 \\ c_1 & = 1849{,}11 \ldots \text{fl.} \\ \log 5000 & = 3{,}6989700 \\ \underline{3 \log 1{,}04} & \underline{= 0{,}0510999} \\ \log c_2 & = 3{,}6478701 \\ c_2 & = 4444{,}98 \ldots \text{fl.} \\ \log 4200 & = 3{,}6232493 \\ \underline{5 \log 1{,}04} & \underline{= 0{,}0851665} \\ \log c_3 & = 3{,}5380828 \\ c_3 & = 3452{,}095 \ldots \text{fl.} \end{array}$$

Der gegenwärtige Werth der 3 Summen $C_1 + C_2 + C_3$ ist also

$$= 1849,21 + 4444,98 + 3452,09 = 9746,28\ \ldots\ \text{fl.}$$

In welcher Zeit wächst nun diese Summe auf 11200 fl. an?

Es ist zunächst

$$n = \frac{\log 11200 - \log 9746,18}{\log 1,04}$$

$$\log 11200 = 4,0492180$$
$$\log 9764,18 = 3,9888344$$
$$0,0603836$$
$$\log 1,04 = 0,0170333$$
$$n = \frac{0,0603836}{0,0170333} = 3,545\ \ldots\ \text{Jahre.}$$

Da im Resultat ein Bruch erscheint, so hat man, um ein ganz genaues Resultat zu erhalten, nach § 8 zu verfahren.

Man berechnet, auf welche Summe 9746,18 fl. in 3 Jahren durch Zinseszinsen anwachsen, und sucht nach einfacher Zinsrechnung die Zeit, in welcher die in 3 Jahren erhaltene Summe sich durch einfache Zinsen auf 11200 fl. erhöht.

Es ist
$$C = 9746,18\ .\ 1,04^3$$
$$\log 9746,18 = 3,9888344$$
$$3\ \log 1,04 = 0,0510999$$
$$\log C = 4,0399343$$
$$\log C = 10963\ ,\ 123\ \ldots\ \text{fl.}$$

Die Zeit, in welcher diese Summe durch einfache Zinsen auf 11200 fl. sich erhöht, ist

$$t = \frac{100\ .\ 236,877}{10963,123\ .\ 4} = 0,5401\ \ldots\ \text{Jahre,}$$

folglich ist der Zeitpunkt für den mittleren Zahlungstermin in 3,54 Jahren oder 3 Jahren 6 Monaten 14 Tagen.

§ 14.

Summen, welche nach verschiedenen Zeiten gleichwerthig werden.

Der Werth eines Kapitales c erhöht sich bei dem Zinsfuße p in n Jahren auf $c\ .\ p^n$, der Werth eines andern Kapitales c_1, wächst in n_1 Jahren bei einem Zinsfuße p_1 auf $c_1\ .\ p_1^{n_1}$ an. Es kann nun der Fall eintreten, daß die beiden Endwerthe gleich werden, daß also $c\ .\ p^n = c_1\ .\ p_1^{n_1}$ ist.

Je nachdem in dieser Gleichung c oder p oder n (c_1, p_1, n_1) als unbekannt angenommen ist, ergeben sich folgende drei Aufgaben.

1. Wie groß muß ein Kapital c sein, wenn es beim Zinsfuße p nach n Jahren ebensoviel werth sein soll, als ein Kapital c_1 beim Zinsfuße p_1 nach n_1 Jahren?

Aus der Gleichung $c\ .\ p^n = c_1\ .\ p_1^{n_1}$ ergibt sich $c = \dfrac{c_1\ .\ p_1^{n_1}}{p^n}$

oder $\log c = \log c_1 + n_1 \log p_1 - n\ .\ \log p$.

Beispiel.

Welches Kapital wächst in 10 Jahren bei 5% ebenso hoch an, als 6420 fl. in 12 Jahren bei 4%?

$$c = \frac{6420 \,.\, 1{,}04^{12}}{1{,}05^{10}}$$

$$\begin{aligned} \log 6420 &= 3{,}8075350 \\ 12 \log 1{,}04 &= 0{,}2043996 \\ &\ 4{,}0119346 \\ 10 \log 1{,}05 &= 0{,}2118930 \\ \log c &= 3{,}8000416 \\ c &= 6310{,}18 \ldots \text{fl.} \end{aligned}$$

2. Zu welchen Procenten muß ein Kapital c ausstehen, wenn es in n Jahren zu demselben Werth erwachsen soll, welchen ein Kapital c_1 in n_1 Jahren beim Zinsfuße p_1 erhält.

Aus $c \,.\, p^n = c_1 \,.\, p_1^{\,n_1}$ erhält man

$$p = \sqrt[n]{\frac{c_1 \,.\, p_1^{\,n_1}}{c}}$$

oder $\log p = \frac{1}{n} (\log c_1 + n_1 \log p_1 - \log c)$

Da $p = 1 + \frac{z}{100}$ ist, so ergibt sich für die Procente $z = 100 \, (p - 1)$.

Beispiel.

1250 fl. 30 kr. erwachsen in 20 Jahren zur selben Summe, wie 1200 fl. in 24 Jahren bei $3^1/_2$%. Zu wie viel Procenten war die erstere Summe ausgeliehen?

Nach $p = \sqrt[n]{\frac{c_1 \,.\, p_1^{\,n_1}}{c}}$ erhält man

$$p = \sqrt[20]{\frac{1200 \,.\, 1{,}035^{24}}{1250{,}5}}$$

oder $\log p = \frac{1}{20} [\log 1200 + 24 \log 1{,}035 - \log 1250{,}5]$

$$\begin{aligned} \log 1200 &= 3{,}0791812 \\ 24 \log 1{,}035 &= 0{,}3585672 \\ &\ 3{,}4377484 \\ \log 1250{,}5 &= 3{,}0970837 \\ &\ 0{,}3406647 \\ \log p &= \frac{0{,}3406647}{20} = 0{,}0170332 \\ p &= 1{,}04 \\ z &= 100 \, (p - 1) = 4\,\%. \end{aligned}$$

3. In welcher Zeit n wächst ein Kapital c beim Zinsfuße p zu demselben Werthe an, welchen ein Kapital c_1 beim Zinsfuße p_1 in n_1 Jahren erreicht?

Die Gleichung $c \, . \, p^n = c_1 \, . \, p_1^{\,n_1}$ gibt

$$p^n = \frac{c_1 \, . \, p_1^{\,n_1}}{c}$$

$$n \log p = \log c_1 + n_1 \log p_1 - \log c$$

$$n = \frac{\log C + n_1 \log p_1 - \log c}{\log p} \, .$$

Beispiel.

In welcher Zeit erreicht ein Kapital von 9775 fl. denselben Werth bei 3%, welchen ein Kapital von 12900 fl. bei 4% in 8 Jahren erreicht?

Nach der vorstehenden Gleichung ist

$$n = \frac{\log 12900 + 8 \log 1{,}04 - \log 9775}{\log 1{,}03}$$

$$\begin{aligned} \log 12900 &= 4{,}1105897 \\ 8 \log 1{,}04 &= \underline{0{,}1362664} \\ & 4{,}2468561 \\ \log 9775 &= \underline{3{,}9901168} \\ & 0{,}2567393 \\ \log 1{,}03 &= 0{,}0128372 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}2567393}{0{,}0128372} = 19{,}999 \ldots \text{ oder 20 Jahre.}$$

§ 15.

Anwendung der Zinseszinsrechnung in der Statistik.

Die Zunahme oder Abnahme der Bevölkerung eines Landes ist von dem Verhältnisse, in welchem die Sterblichkeit zu der Fruchtbarkeit steht, abhängig.

Kommt auf n Einwohner eines Landes jährlich je eine Geburt, und auf m Einwohner je ein Todesfall, so ist die Fruchtbarkeit durch $\frac{1}{n}$, die Sterblichkeit durch $\frac{1}{m}$ ausgedrückt. Sind diese Verhältnisse einander gleich, ist also $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$, so ist die Bevölkerung im Beharrungszustande.

Das Verhältniß der Sterblichkeit zur Fruchtbarkeit erscheint als ein sehr schwankendes, und es ist bis jetzt nicht gelungen, ein Gesetz in dieser Beziehung aufzufinden. Die Veränderung des Klimas, das Auftreten von Seuchen, der Wechsel von friedlichen und kriegerischen Zeiten, die Veränderungen in den socialen und politischen Verhältnissen, Einwanderungen und Auswanderungen und dergl. sind für die Zunahme und Abnahme der Bevölkerungen Faktoren, welche schwer in Rechnung zu bringen sind.

Nur unter der speciellen Annahme, daß in einer gewissen Periode das Verhältniß der Sterblichkeit zur Fruchtbarkeit constant bleibt, läßt sich über die Zunahme oder Abnahme einer Bevölkerung eine Rechnung aufstellen, und zwar gilt alsdann hierbei dieselbe Schlußfolgerung, welche bei Entwickelung der Grundformel der Zinseszinsrechnung befolgt wurde.

Bezeichnet also c die anfängliche Bevölkerung, C die Kopfzahl, auf welche dieselbe in n Jahren bei einer jährlichen Zunahme von z% angewachsen ist, so erhält man wieder die Gleichung

$$C = c \cdot \left(1 + \frac{z}{100}\right)^n,$$

oder wenn die Größe $\left(1 + \frac{z}{100}\right)$, welche die für die Einheit sich ergebende Zunahme in einem Jahre ausdrückt, wieder mit p bezeichnet wird,

$$\text{I.} \quad C = c \cdot p^n.$$

Ist die am Ende einer Periode sich ergebende Bevölkerung C bekannt, und wird die Größe der anfänglichen Bevölkerung gesucht, so ist

$$\text{II.} \quad c = \frac{C}{p^n}.$$

Will man die Zeit erfahren, in welcher eine Bevölkerung c auf C anwächst, so hat man

$$\text{III.} \quad n = \frac{\log C - \log c}{\log p}.$$

Die jährliche Zunahme z für je 100 Einwohner ergibt sich aus der Gleichung

$$\text{IV.} \quad \log p = \frac{\log C - \log c}{n}.$$

Ist nämlich p gefunden, so erhält man, da $p = 1 + \frac{z}{100}$ ist, $z = 100\,(p - 1)$.

Beispiele.

1. In einem Lande sind gegenwärtig 549650 Einwohner. Aus den Todes- und Geburtsregistern ergibt sich, daß im Durchschnitt jährlich von 40 Einwohnern Einer stirbt, und auf 25 Einwohner eine Geburt kommt. Wie groß wird die Einwohnerzahl nach 20 Jahren sein, wenn ein constantes Verhältniß zwischen der Sterblichkeit und Fruchtbarkeit angenommen werden kann?

Da von 40 Einwohnern jährlich Einer stirbt, so ist die Sterblichkeit $= \frac{1}{40}$, und es kommen auf 100 Einwohner $\frac{100}{40} = 2{,}5$ Todesfälle. Kommt jährlich eine Geburt auf 25 Einwohner, so ist die Fruchtbarkeit $= \frac{1}{25}$, und auf 100 Einwohner kommen $\frac{100}{25} = 4$ Geburten. Somit ist für 100 Einwohner die jährliche Zunahme $= 4 - 2{,}5 = 1{,}5$, oder die Bevölkerung vermehrt sich um 1,5%.

Somit ergibt sich $C = 549650 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^{20} = 549650 \cdot 1{,}015^{20}$.

$$\begin{aligned} \log 549650 &= 5{,}7400862 \\ 20 \log 1{,}015 &= 0{,}1293200 \\ \hline \log C &= 5{,}8694062 \\ C &= 740297 \text{ Einwohner.} \end{aligned}$$

2. Eine Provinz hat gegenwärtig 85648 Einwohner. Aus den statistischen Notizen ergibt sich für die letzten 12 Jahre eine jährliche Zunahme der Bevölkerung um 2,5%. Wie groß war die Bevölkerung vor 12 Jahren?

Nach Gleichung II ist

$$c = \frac{85648}{1{,}025^{12}}$$

$$\begin{aligned} \log 85648 &= 4{,}9327172 \\ 12 \log 1{,}025 &= 0{,}1286868 \\ \hline \log c &= 4{,}8040304 \\ c &= 63684 \text{ Einwohner.} \end{aligned}$$

3. In wie viel Jahren wird in einem Lande, welches 24000000 Einwohner zählt, die Einwohnerzahl auf 30000000 anwachsen, wenn die jährliche Zunahme 2% beträgt?

Aus Gleichung III ergibt sich

$$n = \frac{\log 30000000 - \log 24000000}{\log 1{,}02}.$$

$$\begin{aligned} \log 30000000 &= 7{,}4771213 \\ \log 24000000 &= 7{,}3802112 \\ \hline & 0{,}0969101 \\ \log 1{,}02 &= 0{,}0086002 \\ \hline n &= \frac{0{,}0969101}{0{,}0086002} = 11{,}26 \ldots \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

Da sich hier für die Zeit eine gebrochene Zahl ergibt, so müßte strenggenommen nach § 8 verfahren werden; allein bei derartigen Aufgaben kommt es nicht auf einzelne Tage an, und man darf sich mit einem annähernden Resultate begnügen.

4. Nach der Zählung von 1855 hatte Preußen 17202831, nach der von 1864 aber 19304843 Einwohner. Um wie viel Procent hat jährlich die Einwohnerzahl zugenommen, wenn ein constantes Verhältniß angenommen wird?

Aus Gleichung IV erhält man

$$\log p = \frac{\log 19304843 - \log 17202831}{9}$$

$$\begin{aligned} \log 19304843 &= 7{,}2856663 \\ \log 17202831 &= 7{,}2355999 \\ \hline & 0{,}0500664 \\ \log p &= \frac{0{,}0500664}{9} = 0{,}00556293 \ldots \\ p &= 1{,}01289 \ldots \\ z &= 100\,(1{,}01289 - 1) = 1{,}289, \text{ also fast } 1{,}3\,\%. \end{aligned}$$

§ 16.

Berechnung des Holzzuwachses in Waldungen.

In jedem Jahre bildet sich bei unseren Waldbäumen im Stamme zwischen Rinde und Holz eine neue Lage von Zellen, welche sich nach und nach in zwei Theile, jungen Bast und Splint oder junges Holz sondern. Auf diese Weise entstehen die sogenannten Jahresringe, aus denen wir einestheils das Alter des Baumes, anderntheils die Art des Wachsthums abnehmen können. Die Jahresringe erscheinen bald dünner, bald dicker, je nach dem Alter des Baumes und den klimatischen und sonstigen äußeren Einflüssen. Sieht man von den äußeren Einflüssen ab, so ergibt sich im Allgemeinen, daß die Jahresringe im jugendlichen Alter des Baumes dünn sind, allmälig erstarken und ungefähr mit 40—50 Jahren ihre größte Stärke erreichen, aber mit dem höheren Alter des Baumes wieder abnehmen. Daraus ergibt sich schon, daß beim einzelnen Baume in seinen verschiedenen Wachsthumsperioden die Holzzunahme eine variable Größe ist, die eben deshalb bei der Berechnung des Zuwachses in Waldbeständen nicht angewendet werden kann.

Bei ganzen Waldbeständen ist aber nicht allein der Zuwachs an den Bäumen, sondern auch der Abgang einzelner Individuen zu berücksichtigen; denn mit dem Wachsen des Bestandes wird ein Theil der vorhandenen Stämme unterdrückt und verdrängt, so daß dieselben mehr oder weniger einer ferneren Entwicklung unfähig werden und über kurz oder lang dem Tode verfallen. Man hat deshalb bei dem Zuwachse der Wälder in ähnlicher Weise, wie bei der Zunahme der Bevölkerungen die Fruchtbarkeit und die Sterblichkeit zu unterscheiden. Stehen nun das Maß der Fruchtbarkeit und das der Sterblichkeit, oder des Zuwachses und des Abganges während einer Periode in einem constanten Verhältnisse, so läßt sich auf diesem Gebiete wie auf dem der Bevölkerungsstatistik die Zinseszinsrechnung zur Berechnung des Holzzuwachses und zur Beantwortung anderer damit in Verbindung stehender Fragen verwenden, und zwar wird bei solchen forstlichen Berechnungen eine größere Sicherheit des Resultates, als bei Bevölkerungsberechnungen, sich herausstellen, weil nicht so viele störende Factoren möglich sind. —

Für die hieher gehörigen Rechnungen gelten die Gleichungen des vorigen Paragraphen, und bedeutet c den in Klaftern ausgedrückten anfänglichen, C hingegen den nach einer bestimmten Zeit n bei einem jährlichen procentischen Zuwachse p erhaltenen Bestand, wobei wieder p statt $1 + \frac{z}{100}$ gesetzt ist. —

Beispiele.

1. Der Bestand eines Waldes wird auf 35600 Klafter geschätzt. Erfahrungsgemäß beträgt der jährliche Zuwachs 2%. Wie groß wird der Bestand in 20 Jahren sein?

$$C = c \cdot p^n,$$

also $$C = 35600 \cdot 1{,}02^{20}$$

$$\log 35600 = 4{,}5514500$$
$$20 \log 1{,}02 = 0{,}1720040$$
$$\log C = 4{,}7234540$$
$$C = 52899{,}8 \text{ Klafter.}$$

2. Der Bestand eines Waldes, in welchem seit 12 Jahren kein Holz mehr gefällt wurde, beträgt jetzt 27890 Klafter. Wie groß war der Bestand vor 12 Jahren, wenn ein jährlicher Zuwachs von $2\frac{1}{2}\%$ gerechnet werden kann? —

$$c = \frac{C}{p^n},$$

$$\text{alſo} \quad c = \frac{27890}{1{,}025^{12}}$$

$$\log 27890 = 4{,}4454485$$
$$12 \log 1{,}025 = 0{,}1286868$$
$$\log c = 4{,}3167617$$
$$c = 20737{,}7 \ldots \text{ Klafter.}$$

3. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes wird auf 42560 Klafter geschätzt. Man will denselben aber erst dann niederschlagen, wenn der Bestand auf 60000 Klafter angewachsen ist. Wie lange muß noch mit dem Fällen gewartet werden, wenn nach den bisherigen Erfahrungen der jährliche Zuwachs $2\frac{3}{4}\%$ beträgt? —

$$n = \frac{\log C - \log c}{\log p},$$

$$\text{alſo} \quad n = \frac{\log 60000 - \log 42560}{\log 1{,}0275}$$

$$\log 60000 = 4{,}7781513$$
$$\log 42560 = 4{,}6290016$$
$$0{,}1491497$$
$$\log 1{,}0275 = 0{,}0117818$$
$$n = \frac{0{,}1491497}{0{,}0117818} = 12{,}66 \text{ Jahre.}$$

4. Ein Wald, welcher vor 30 Jahren auf 45000 Klafter geschätzt wurde, liefert jetzt 64978 Klafter. Wie viel Procent beträgt im Durchschnitt der jährliche Zuwachs in dieser Periode?

$$\log p = \frac{\log C - \log c}{n},$$

$$\text{alſo} \quad \log p = \frac{\log 64978 - \log 45000}{30}.$$

$$\log 64978 = 4{,}8127663$$
$$\log 45000 = 4{,}6532125$$
$$0{,}1595538$$
$$\log p = \frac{0{,}1595538}{30} = 0{,}00531846$$
$$p = 1{,}0123 \ldots$$
$$z = 100\,(p - 1) = 1{,}23 \ldots \%, \text{ alſo faſt } 1\tfrac{1}{4}\%.$$

II.

Berechnung von Terminzahlungen, welche nach einem bestimmten Gesetze erfolgen.

§ 17.

Werth einer Reihe gleich großer Jahreseinlagen.

Legt Jemand jedes Jahr eine bestimmte Summe s in eine Kasse und läßt stets die erwachsenden Zinsen zum Kapitale schlagen, so ergibt sich im Laufe von n Jahren eine Summe S, deren Berechnung den Ausgangspunkt für die Lösung der hierher gehörigen Aufgaben bildet.

Wird am Ende des ersten Jahres die Summe s eingelegt, so wächst diese, wenn wiederum die Größe, auf welche sich die Kapitaleinheit in einem Jahre bei dem gegebenen Procentsatz erhöht, mit p bezeichnet wird, im zweiten Jahre auf sp an, welche Summe am Schlusse des zweiten Jahres um s vermehrt wird, also ist an diesem Zeitpunkte der Werth der Einlage $= (sp + s)$. Diese Summe erhöht sich durch die Zinsen und die neue Einzahlung im dritten Jahre auf $(sp + s)\, p + s = sp^2 + sp + s$. Daraus wird am Ende des vierten Jahres $(sp^2 + sp + s)\, p + s = sp^3 + sp^2 + sp + s$, und allgemein am Ende des nten Jahres $sp^{n-1} + sp^{n-2} + sp^{n-3} + \ldots . sp + s$.

Diese Reihe stellt eine geometrische Progression von n Gliedern dar, deren Anfangsglied $= s$ und deren Exponent $= p$ zu setzen ist, somit ist die Summe der Reihe oder der Endwerth der ganzen Einlage

$$\text{I.}\quad S = \frac{s\,(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich, wenn s oder p oder n als Unbekannte genommen werden, drei weitere Gleichungen.

Für s als Unbekannte erhält man

$$\text{II.}\quad s = \frac{S\,(p - 1)}{p^n - 1}.$$

Durch diese Gleichung wird die jährliche Einlage bestimmt, welche bei einem Zinsfuße p in n Jahren auf S erwächst.

Ist n unbekannt, so ergibt sich aus Gleichung I

$$p^n = \frac{S\,(p - 1) + s}{s}$$

$$n \,.\, \log p = \log\,[S\,(p - 1) + s] - \log s$$

$$\text{III.}\qquad n = \frac{\log\,[S\,(p - 1) + s] - \log s}{\log p}$$

Diese Gleichung gibt die Zeit an, in welcher bei einer jährlichen Einlage s und einem Zinsfuße p die Summe S entsteht.

Ist p unbekannt, so erhält man aus Gleichung I

$$sp^n - Sp + S - s = 0$$

$$\text{oder IV.} \quad p^n - \frac{Sp}{s} + \frac{S - s}{s} = 0.$$

Wird in Gleichung I

$$\frac{p^n - 1}{p - 1} = p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots\ldots p + 1$$

gesetzt, so entsteht eine Gleichung vom (n—1)ten Grad, nämlich

$$\text{V.} \quad p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots\ldots p + s - \frac{S}{s} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich der Zinsfuß bestimmen, bei welchem aus einer Jahreseinlage s in n Jahren die Summe S entsteht.

Beispiel.

Jemand legt am Ende eines jeden Jahres 150 fl. in eine Sparkasse. Wie viel hat er nach 24 Jahren erspart, wenn die Kasse $3^1/_2$ % Zinsen gibt, und die Zinsen stets zu der Summe geschlagen werden?

Aus Gleichung I ergibt sich

$$S = \frac{150\ (1{,}035^{24} - 1)}{1{,}035 - 1} = \frac{150000\ (1{,}035^{24} - 1)}{35}$$

$$24 \,.\, \log 1{,}035 = 0{,}3585672$$

$$1{,}035^{24} = 2{,}28332\ldots$$

$$\text{also} \quad S = \frac{150000 \,.\, 1{,}28332}{35}$$

$$\log 150000 = 5{,}1760913$$

$$\log 1{,}28332 = 0{,}1083349$$

$$5{,}2844262$$

$$\log 35 = 1{,}5440680$$

$$\log S = 3{,}7403582$$

$$S = 5499{,}94\ldots \text{ fl.}$$

2. A schuldet dem B 4928 fl. nach 6 Jahren zahlbar, möchte aber die Schuld in der Art abtragen, daß er am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe entrichtet. Wie groß muß diese Summe sein, wenn 4% und Zinseszinsen gerechnet werden?

Nach Gleichung II ist

$$s = \frac{4928 \,.\, 0{,}04}{1{,}04^6 - 1}$$

$$6 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1021998$$

$$1{,}04^6 = 1{,}26532$$

$$\text{also} \quad s = \frac{4928 \,.\, 0{,}04}{0{,}26532}$$

$$\begin{aligned} \log 4928 &= 3{,}6926707 \\ \log 0{,}04 &= \underline{0{,}6020600 - 2} \\ & 2{,}2947307 \\ \underline{\log 0{,}26532} &= \underline{0{,}4237700 - 1} \\ \log s &= 2{,}8709607 \\ s &= 742{,}952 \text{ fl.} \end{aligned}$$

3. Wenn am Ende eines jeden Jahres 300 fl. in eine Sparkasse, welche 3% Zinsen gibt, eingelegt werden, nach wie viel Jahren ist dadurch eine Summe von 4257 fl. erwachsen?

Werden in Gleichung III die in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerthe eingesetzt, so ist

$$n = \frac{\log [0{,}03 \, . \, 4257 + 300] - \log 300}{\log 1{,}03}$$

$$= \frac{\log 427{,}71 - \log 300}{\log 1{,}03}$$

$$\begin{aligned} \log 427{,}71 &= 2{,}6311494 \\ \log 300 &= \underline{2{,}4771213} \\ & 0{,}1540281 \\ \log 1{,}03 &= 0{,}0128372 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}1540281}{0{,}0128372} = 11{,}998 \ . \ . \ . \text{ Jahren.}$$

Nach 12 Jahren würde somit die verlangte Summe erhalten werden. —

4. Wie viel Procente sind in Rechnung zu bringen, wenn 3 je nach Jahresfrist erfolgende Einzahlungen von 400 fl. einer nach 3 Jahren zu zahlenden Summe von 1261 fl. gleich geachtet werden sollen?

Werden die hier gegebenen Werthe in Gleichung V gesetzt, so ist

$$p^2 + p + 1 - \frac{1261}{400} = 0$$

$$p^2 + p = \frac{861}{400}$$

$$p^2 + p + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{861}{400} + \frac{1}{4} = \frac{961}{400}$$

$$p + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{961}{400}} = \frac{31}{20}$$

$$p = \frac{21}{20} = 1{,}05$$

Somit wurden 5 % berechnet.

Eine solche Gleichung vom zweiten Grad kommt aber bei der Berechnung der Procente nur dann zum Vorschein, wenn $n = 3$ ist, weil $\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$ gesetzt werden kann. Bei 4 Jahren ergibt sich in derselben Weise $\frac{p^4 - 1}{p - 1} = p^3 + p^2 + p + 1$; es entsteht also eine Gleichung vom dritten Grad u. s. f. —

Folgende Beispiele mögen zeigen, wie bei Gleichungen höherer Grade verfahren werden kann, ohne Methoden, welche die Kenntniß der höheren Mathematik voraussetzen, in Anwendung zu bringen.

5. Jemand hat nach 4 Jahren 62500 fl. zu bezahlen, trägt aber die Schuld in 4 Jahreszahlungen zu je 14939 fl. ab. Wie viel Procent wurden hierbei berechnet?

Hier ist $p^3 + p^2 + p + 1 - \frac{62500}{14939} = 0$

$$p^3 + p^2 + p - 3{,}1836 = 0$$

Da der Werth von p jedenfalls zwischen 1 und 2 liegt, so kann man $p = 1 + x$ setzen, wo x einen ächten Bruch vorstellt; es ist alsdann

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^2 + (1 + x) - 3{,}1836 = 0$$

oder $x^3 + 4x^2 + 6x - 0{,}1836 = 0$

Wird von den höheren Potenzen der Größe x abgesehen, da dieselben jedenfalls sehr geringwerthig sind, so ist

$$6x = 0{,}1836$$
$$x = 0{,}0306$$

Daraus ergibt sich, daß der Werth von p sehr nahe an $1 + x = 1{,}03 \ldots\ldots$ kommt. Wird zur Probe dieser Werth für p eingesetzt, so kommt

$$1{,}03^3 + 1{,}03^2 + 1{,}03 - 3{,}1836 = 0$$

oder $3{,}183627 - 3{,}1836 = 0.$

Da diese Werthe bis zur vierten Decimalstelle übereinstimmen, so kann in der That $p = 1{,}03$ gesetzt werden, und es sind somit 3% Zinsen gerechnet worden.

6. Eine Bank, in welche am Ende eines jeden Jahres 1000 fl. eingelegt wurden, zahlte dafür nach 20 Jahren 33066 fl. Wie viel Procente wurden gerechnet?

Man erhält die Gleichung

$$p^{19} + p^{18} + p^{17} + \ldots\ldots p + 1 - \frac{33066}{1000} = 0$$

oder $p^{19} + p^{18} + p^{17} + \ldots\ldots p - 32{,}066 = 0.$

Da der Werth von p stets zwischen 1 und 2 liegt, so setzt man wieder $p = 1 + x$, und man erhält

$$(1 + x)^{19} + (1 + x)^{18} + (1 + x)^{17} + \ldots\ldots (1 + x) - 32{,}066 = 0.$$

Da von allen höheren Potenzen von x zunächst abgesehen werden kann, so bleibt

$$19 . 1 + x\,(19 + 18 + 17 + \ldots\ldots + 1) - 32{,}066 = 0$$
$$190\,x = 13{,}066$$
$$x = 0{,}068$$

Dieser Werth ist jedenfalls zu groß, weil in der Berechnung die höheren Potenzen von x vernachlässigt wurden, also kann vorerst $x = 0{,}06$ gesetzt werden, um zu sehen, ob der sich dadurch ergebende Werth für $p = 1{,}06$ der Gleichung entspricht. Man erhält aus der nach IV gebildeten Gleichung

$$33066 = \frac{1000\,(p^{20} - 1)}{p - 1}$$

$$33066 = \frac{1000\,(1{,}06^{20} - 1)}{0{,}06}$$

oder $2{,}98396 = 1{,}06^{20}$

Nun ist $20 \log 1{,}06 = 0{,}5061180$,

also $1{,}06^{20} = 3{,}2071\ldots$

folglich ist der für x angenommene Werth von 0,06 zu groß. Setzt man deshalb $x = 0{,}05$, so muß, wenn dieser Werth richtig ist, auch die folgende Gleichung richtig sein:

$$33066 = \frac{1000\,(1{,}05^{20} - 1)}{0{,}05}$$

$$\text{oder } 2{,}6533 = 1{,}05^{20}$$

$$\text{Nun ist } 20 \,.\, \log 1{,}05 = 0{,}4237860$$

$$1{,}05^{20} = 2{,}6533$$

welcher Werth vollständig mit dem der linken Seite übereinstimmt; folglich ist $p = 1{,}05$, und die Zinsen wurden zu 5% berechnet.

§ 18.

Berechnung des Werthes einer Reihe von Einzahlungen, welche in andern als Jahresterminen erfolgen.

Werden Einzahlungen nicht jährlich, sondern in andern Terminen, etwa alle 2, 3, 4 .... m Jahre geleistet, und soll die Summe berechnet werden, auf welche die Einlagen in n Jahren anwachsen, so ist zunächst zu unterscheiden, ob die Größe n durch m theilbar ist oder nicht.

Es sei m ein Faktor von n, also etwa $n = m \,.\, q$, so wird die erste, nach m Jahren einbezahlte Einlage s auch m Jahre auf Zinseszinsen stehen, also bei einem Zinsfuße p in dieser Zeit auf $s \,.\, p^m$ anwachsen und außerdem nach Verfluß dieser Zeit durch eine zweite Einlage s vermehrt werden. Es ist also der Werth der Einlagen nach 2m Jahren $= s \,.\, p^m + s$. Diese Summe steht wieder m Jahre auf Zinseszinsen und erhöht sich dadurch mit der erneuten Einlage nach 3m Jahren auf $(sp^m + s)\, p^m + s = s \,.\, p^{2m} + s \,.\, p^m + s$. Daraus wird in ähnlicher Weise nach 4m Jahren

$$s \,.\, p^{3m} + s \,.\, p^{2m} + s \,.\, p^m + s$$

und nach q . m Jahren

$$s \,.\, p^{(q-1)m} + s \,.\, p^{(q-2)m} + \ldots\ldots s \,.\, p^m + s.$$

Es ist somit

$$S = s \,.\, p^{(q-1)m} + s \,.\, p^{(q-2)m} + \ldots\ldots s \,.\, p^m + s.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine geometrische Progression von q Gliedern, in welcher s als Anfangsglied und p^m als Exponent genommen werden kann; es ist also ihre Summe

$$= \frac{s\,(p^{m \cdot q} - 1)}{p^m - 1}, \text{ folglich}$$

$$\text{I. } S = \frac{s\,(p^{m \cdot q} - 1)}{p^m - 1} = \frac{s\,(p^n - 1)}{p^m - 1},$$

da der Voraussetzung nach $n = m \,.\, q$ ist.

Aus dieser Gleichung ergeben sich für s, p, n und m folgende Werthe

$$\text{II. } s = \frac{S\,(p^m - 1)}{p^n - 1}.$$

$$\text{III. } p^n = \frac{S\,(p^m - 1)}{s} + 1 = \frac{S\,(p^m - 1) + s}{s}$$

$$n \,.\, \log p = \log\,[S\,(p^m - 1) + s] - \log s$$

$$n = \frac{\log\,[S\,(p^m - 1) + s] - \log s}{\log p}.$$

$$\text{IV. } p^m = \frac{s\,(p^n - 1) + S}{S}$$

$$m = \frac{\log\,[s\,(p^n - 1) + S] - \log S}{\log p}.$$

$$\text{V. } s \,.\, p^n - S \,.\, p^m + S - s = 0$$

$$p^n - \frac{S}{s} \,.\, p^m + \frac{S - s}{s} = 0.$$

Ist n durch m nicht theilbar, also etwa $n = q \,.\, m + x$, so berechne man zuerst den Werth S_1 der Einlagen für q Termine, und sehe alsdann, auf welche Größe die so erhaltene Summe

$$S_1 = \frac{s\,(p^{mq} - 1)}{p^m - 1}$$

noch in den restirenden x Jahren anwächst. Es ist somit in diesem Falle

$$\text{VI. } S = \frac{s\,(p^{mq} - 1)}{p^m - 1} \,.\, p^x.$$

Beispiele.

1. Jemand legt alle 4 Jahre 500 fl. auf Zinseszinsen an. Welche Summe erwächst daraus in 24 Jahren, wenn $3^1/_4\,\%$ in Rechnung gebracht werden?

Nach I ist
$$S = \frac{500\,(1{,}0325^{24} - 1)}{1{,}0325^4 - 1}$$

$$24 \log 1{,}0325 = 0{,}3333624$$
$$1{,}0325^{24} - 1 = 1{,}15458$$
$$4 \log 1{,}0325 = 0{,}0555604$$
$$1{,}0325^4 - 1 = 0{,}136476 \,...$$

also
$$S = \frac{500 \,.\, 1{,}15458}{0{,}136476}$$

$$\begin{aligned} \log 500 &= 2{,}6989700 \\ \log 1{,}15458 &= \underline{0{,}0624240} \\ &\ 2{,}7613940 \\ \log 0{,}136476 &= \underline{0{,}1350562 - 1} \\ \log S &= 3{,}6263378 \\ S &= 4229{,}97 \,...\, \text{fl.} \end{aligned}$$

2. Von einer Schuld werden alle 3 Jahre 2500 fl. getilgt. Wie hoch beläuft sich die abgetragene Summe nach 11 Jahren, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

Nach VI ist
$$S = \frac{2500\,(1{,}04^9 - 1)}{1{,}04^3 - 1} \,.\, 1{,}04^2.$$

$$9 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1532997$$
$$1{,}04^9 - 1 = 0{,}42331$$
$$3 \log 1{,}04 = 0{,}0510999$$
$$1{,}04^3 - 1 = 0{,}12486 \ldots$$

also $$S = \frac{2500 \,.\, 0{,}42331 \,.\, 1{,}04^2}{0{,}12486}.$$

$$\begin{aligned}
\log 2500 &= 3{,}3979400 \\
\log 0{,}42331 &= 0{,}6266585 - 1 \\
2 \log 1{,}04 &= \underline{0{,}0340666} \\
& 3{,}0586651 \\
\log 0{,}12486 &= 0{,}0964233 - 1 \\
\hline
\log S &= 3{,}9622418 \\
S &= 9167{,}3 \text{ fl.}
\end{aligned}$$

§ 19.

Berechnung von Terminzahlungen, welche nach einer Progression zu- oder abnehmen.

Die Terminzahlungen können auch nach einem bestimmten Gesetze sich verändern, und sind alsdann besonders die Fälle zu bemerken, in welchen die Zahlungen nach einer arithmetischen oder nach einer geometrischen Progression zu- oder abnehmen.

Es werde am Ende des ersten Jahres eine Summe s einbezahlt, nebst den Zinsen dieser Summe aber am Ende des zweiten Jahres die Summe $s + d$, am Ende des dritten Jahres $s + 2d$, am Ende des vierten Jahres $s + 3d$, und allgemein am Ende des nten Jahres $s + (n - 1)\, d$ hinzugefügt, so ergibt sich, wenn der Zinsfuß p angenommen wird, folgende Aufstellung der Werthe am Schlusse der einzelnen Jahre:

1tes Jahr: $s.$

2tes Jahr: $sp + (s + d).$

3tes Jahr: $(sp + (s + d))\, p + (s + 2d) = sp^2 + sp + s + dp + 2d.$

4tes Jahr: $(sp^2 + sp + s + dp + 2d)\, p + (s + 3d).$
$= sp^3 + sp^2 + sp + s + dp^2 + 2dp + 3d.$

5tes Jahr: $(sp^3 + sp^2 + sp + s + dp^2 + 2dp + 3d)\, p + (s + 4d)$
$= sp^4 + sp^3 + sp^2 + sp + s + dp^3 + 2dp^2 + 3dp + 4d.$

ntes Jahr: $sp^{n-1} + sp^{n-2} + sp^{n-3} + \ldots sp + s + dp^{n-2} + 2dp^{n-3} + 3dp^{n-4}$
$+ \ldots (n - 2)\, dp + (n - 1)\, d.$

Diese Größe stellt die Summe der 2 Reihen

$$sp^{n-1} + sp^{n-2} + sp^{n-3} + \ldots sp + s$$

und $$dp^{n-2} + 2dp^{n-3} + 3dp^{n-4} + \ldots (n - 2)\, dp + (n - 1)\, d$$

dar. Die erste Reihe ist eine gewöhnliche geometrische Progression von n Gliedern mit dem Anfangsgliede s und dem Exponenten p, folglich ist ihre Summe $= \dfrac{s\,(p^n - 1)}{p - 1}$.

Die zweite Reihe läßt sich in folgende (n — 1) Reihen trennen:

$$\begin{array}{l}
dp^{n-2} + dp^{n-3} + dp^{n-4} + dp^{n-5} + \dots\dots\dots + dp + d \\
\qquad dp^{n-3} + dp^{n-4} + dp^{n-5} + \dots\dots\dots + dp + d \\
\qquad\qquad dp^{n-4} + dp^{n-5} + \dots\dots\dots + dp + d \\
\qquad\qquad\qquad dp^{n-5} + \dots\dots\dots + dp + d \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dp + d \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad d.
\end{array}$$

Werden die Summen dieser Reihen addirt, so erhält man

$$\frac{d\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} + \frac{d\,(p^{n-2} - 1)}{p - 1} + \frac{d\,(p^{n-3} - 1)}{p - 1} + \dots\dots \frac{d\,(p^2 - 1)}{p - 1} + \frac{d\,(p - 1)}{p - 1}$$

da $\frac{d\,(p-1)}{p-1}$ statt d gesetzt werden kann,

oder $$\frac{1}{p - 1}\left[dp^{n-1} - d + dp^{n-2} - d + dp^{n-3} - d + \dots\dots + dp - d\right]$$

$$= \frac{1}{p - 1}\left[dp^{n-1} + dp^{n-2} + dp^{n-3} + \dots\dots + dp - (n - 1)\,d\right]$$

$$= \frac{dp}{p - 1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} - \frac{(n - 1)\,d}{p - 1}.$$

Wird hiezu die obige Summe der ersten Reihe gezählt, so ist

$$\text{I.}\quad S = \frac{s\,(p^n - 1)}{p - 1} + \frac{dp}{p - 1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} - \frac{(n - 1)\,d}{p - 1}$$

$$= \frac{1}{p - 1}\left[s\,(p^n - 1) + \frac{dp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} - (n - 1)\,d\right]$$

$$= \frac{1}{p - 1}\left[sp^n - s + \frac{dp^n}{p - 1} - \frac{dp}{p - 1} - (n - 1)\,d\right]$$

$$= \frac{1}{p - 1}\left[p^n\left(s + \frac{d}{p - 1}\right) - \left(\frac{dp}{p - 1} + s + (n - 1)\,d\right)\right].$$

Erfolgen die Terminzahlungen nach der arithmetischen Progression s, 2s, 3s, 4s, ... (n — 1) s, ns, so ist d = s. Wird dieser Werth für d in die vorstehende Gleichung eingesetzt, so ist

$$\text{II.}\quad S = \frac{s}{p - 1}\left[p^n - 1 + \frac{p\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} - (n - 1)\right]$$

$$= \frac{s}{p - 1}\left[p^n + \frac{p^n - p}{p - 1} - n\right] = \frac{s}{p - 1}\left[\frac{p^n\,(p - 1) + p^n - p}{p - 1} - n\right]$$

$$= \frac{s}{p - 1}\left[\frac{p^{n+1} - p}{p - 1} - n\right] = \frac{s}{p - 1}\left[\frac{p\,(p^n - 1)}{p - 1} - n\right].$$

Verändern sich die Einzahlungen nach einer geometrischen Progression in der Art, daß am Ende des ersten Jahres s eingelegt wird, am Ende des zweiten, dritten, vierten, . . . nten Jahres aber beziehungsweise die Summen se, se², se³ . . . se^{n-1} außer den Zinsen zum Kapitale geschlagen werden, so sind die Kapitalwerthe am Schlusse der einzelnen Jahre folgende:

1tes Jahr: s.
2tes Jahr: $sp + se$.
3tes Jahr: $(sp + se)\, p + se^2 = sp^2 + sep + se^2$.
4tes Jahr: $(sp^2 + sep + se^2)\, p + se^3 = sp^3 + sep^2 + se^2p + se^3$.
5tes Jahr: $(sp^3 + sep^2 + se^2p + se^3)\, p + se^4 = sp^4 + sep^3 + se^2p^2 + se^3p + se^4$.
$\vdots$
ntes Jahr: $sp^{n-1} + sep^{n-2} + se^2p^{n-3} + se^3p^{n-4} + \ldots se^{n-2}p + se^{n-1}$.

Dieser Werth stellt eine geometrische Progression von n Gliedern dar, in welcher se^{n-1} als Anfangsglied und $\frac{p}{e}$ als Exponent genommen werden kann. Es ist also

$$\text{III.}\quad S = \frac{se^{n-1}\left(\left(\frac{p}{e}\right)^n - 1\right)}{\frac{p}{e} - 1} = \frac{s\,(p^n - e^n)}{p - e} \text{ oder } = \frac{s\,(e^n - p^n)}{e - p}.$$

Nehmen die Terminzahlungen nach einer arithmetischen oder geometrischen Progression ab, so ist im ersten Falle die Differenz d eine negative Größe, im zweiten Falle der Exponent e ein ächter Bruch.

Die unter I gegebenen Gleichungen erhalten, wenn also $-d$ statt d gesetzt wird, folgende Formen:

$$\text{IV.}\quad S = \frac{s\,(p^n - 1)}{p - 1} - \frac{dp}{p - 1} \cdot \frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + \frac{(n-1)\,d}{p - 1}$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[s\,(p^n - 1 - \frac{dp\,.\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} + (n-1)\,d\right]$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[sp^n - s - \frac{dp^n}{p-1} + \frac{dp}{p-1} + (n-1)\,d\right]$$

$$= \frac{1}{p-1}\left[p^n\left(s - \frac{d}{p-1}\right) + \left(\frac{dp}{p-1} - s + (n-1)\,d\right]\right..$$

Gleichung III wird in dem angegebenen Falle besser geschrieben:

$$\text{V.}\quad S = \frac{s\,(p^n - e^n)}{p - e}.$$

Beispiele.

1. Ein Diener erspart in einem Jahre 30 fl. und legt diese Summe in eine Sparkasse. Mit jedem Jahre erhält er 5 fl. mehr an Lohn und fügt außer den 30 fl. und den Zinsen stets auch diesen Mehrbetrag jährlich seinen Ersparnissen zu. Wie hoch belaufen sich dieselben nach 12 Jahren, wenn die Sparkasse $3^1/_2\,\%$ Zinsen gibt?

Nach Gleichung I ist

$$S = \frac{1}{0{,}035}\left[1{,}035^{12}\left(30 + \frac{5}{0{,}035}\right) - \left(\frac{5\,.\,1{,}035}{0{,}035} + 30 + 55\right)\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}035}\left[\frac{1{,}035^{12}\,.\,1210}{7} - \frac{1630}{7}\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}245}\left[1{,}035^{12}\,.\,1210 - 1630\right]$$

$$12 \log 1{,}035 = 0{,}1792836$$
$$\log 1210 = 3{,}0827854$$
$$3{,}2620690$$
$$1{,}035^{12} \, . \, 1210 = 1828{,}39\,,$$

also
$$S = \frac{198{,}39}{0{,}245}$$
$$\log 198{,}39 = 2{,}2975198$$
$$\log 0{,}245 = 0{,}3891661 - 1$$
$$\log S = 2{,}9083537$$
$$S = 809{,}75 \; . \; . \; \text{fl.}$$

2. Es werden in eine Kasse jetzt 10 fl. eingelegt, nach einem Jahre 20 fl., nach 2 Jahren 30 fl. u. s. f. Wie hoch belauft sich die Summe dieser Einlagen am Anfange des zwanzigsten Jahres, wenn die Zinsen zum Kapitale geschlagen und 4% gerechnet werden?

Werden die Zahlenwerthe aus dieser Aufgabe in Gleichung II eingesetzt, so ist
$$S = \frac{10}{0{,}04}\left[\frac{1{,}04\;(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04} - 20\right]$$
$$= 250\;[26 \, . \, 1{,}04^{20} - 26 - 20]$$
$$= 250 \, . \, 26 \, . \, 1{,}04^{20} - 11500$$
$$\log 250 = 2{,}3979400$$
$$\log 26 = 1{,}4149733$$
$$20 \log 1{,}04 = 0{,}3406660$$
$$4{,}1535793$$
$$250 \, . \, 26 \, . \, 1{,}04^{20} = 14242{,}27$$
$$S = 14242{,}27 - 11500 = 2742{,}27 \text{ fl.}$$

3. Jemand legt am Anfange des Jahres 15 fl. in eine Sparkasse und fügt am Anfange des nächsten Jahres das Doppelte, am Anfange des dritten Jahres das Vierfache der Einlage des ersten Jahres u. s. f. hinzu. Wie hoch belauft sich die Summe der Einlagen am Anfange des sechsten Jahres, wenn die Zinsen jährlich zu den Einlagen geschlagen und 3% gerechnet werden?

Aus Gleichung III ergibt sich
$$S = \frac{15\;(2^6 - 1{,}03^6)}{2 - 1{,}03} = \frac{15\;(64 - 1{,}03^6)}{0{,}97}$$
$$6 \log 1{,}03 = 0{,}0770232$$
$$1{,}03^6 = 1{,}19405\,,$$

also
$$S = \frac{15 \, . \, 62{,}80595}{0{,}97}$$
$$\log 15 = 1{,}1760913$$
$$\log 62{,}80595 = 1{,}7980007$$
$$2{,}9740922$$
$$\log 0{,}97 = 0{,}9867717 - 1$$
$$\log S = 2{,}9873205$$
$$S = 971{,}226 \; . \; . \; . \; \text{fl.}$$

§ 20.

Vermehrung eines Kapitals durch Zinseszinsen und Terminzahlungen.

Steht ein Kapital c auf Zinseszinsen und wird außer den Zinsen jährlich oder in andern Terminen eine bestimmte Summe s zum Kapitale geschlagen und das so vermehrte Kapital weiter verzinst, so ist zu berechnen

1. wie hoch das Grundkapital c in der gegebenen Zeit n bei einem Zinsfuße p anwächst, und

2. zu welcher Summe sich die Terminzahlungen in derselben Zeit und bei demselben Zinsfuße erheben.

Man erhält dadurch eine Verbindung der einfachen Zinseszinsrechnung mit der Berechnung der in den beiden vorigen Paragraphen angeführten Terminzahlungen.

Da nun der Werth, auf welchen ein Kapital c in n Jahren beim Zinsfuße p anwächst, $= c\,.\,p^n$ ist, und eine am Schlusse eines jeden Jahres erfolgende Einzahlung s in n Jahren bei demselben Zinsfuße zu der Summe $\frac{s\,(p^n-1)}{p-1}$ wird, so ist demnach der Gesammtwerth C, auf welchen das Kapital in der angedeuteten Weise anwächst,

$$\text{I. } C = c\,.\,p^n + \frac{s\,(p^n-1)}{p-1}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich, wenn c, p, s oder n als Unbekannte genommen werden, 4 weitere Gleichungen:

$$\text{II. } c = \frac{C - \frac{s\,(p^n-1)}{p-1}}{p^n} = \frac{C}{p^n} - \frac{s\,(p^n-1)}{p^n\,(p-1)}.$$

$$\text{III. } cp^n + \frac{s\,(p^n-1)}{p-1} - C = 0$$

$$\text{oder } p^n + \frac{s}{c}\,[p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots\ldots + p + 1] - \frac{C}{c} = 0$$

$$\text{IV. } s = \frac{(C - cp^n)\,(p-1)}{p^n-1}.$$

$$\text{V. } p^n = \frac{C\,(p-1) + s}{c\,(p-1) + s},$$

$$\text{also } n = \frac{\log\,[C\,(p-1) + s] - \log\,[c\,(p-1) + s]}{\log\,p}$$

Durch Gleichung II wird das Grundkapital c bestimmt, welches beim Zinsfuße p in n Jahren auf C anwächst, wenn jährlich außer den Zinsen noch eine Summe s zum Kapitale geschlagen wird.

Gleichung III dient zur Berechnung des Zinsfußes, zu dem ein Kapital c ausgeliehen ist, wenn dasselbe in n Jahren bei jährlicher Zulage einer Summe s und Berechnung von Zinseszinsen auf C anwächst.

Aus Gleichung IV erhält man die Summe, um welche ein Kapital c außer den Zinsen am Ende eines jeden Jahres vermehrt wurde, um in n Jahren beim Zinsfuße p sich auf C zu erhöhen.

Gleichung V gibt die Zeit n an, in welcher ein Kapital c bei einem Zinsfuße p auf C anwächst, wenn außer den Zinsen jährlich eine Summe s zum Kapitale gefügt wird.

Wenn nicht jährlich, sondern immer nach m Jahren die Einzahlungen der Summe s erfolgen, so ergibt sich nach § 18: VI. $C = c \cdot p^n + \frac{s\,(p^n - 1)}{p^m - 1}$, woraus sich wieder folgende 5 Gleichungen ergeben, je nachdem c, s, n, m oder p als unbekannte Größen zu bestimmen sind.

$$\text{VII. } c = \frac{C - \dfrac{s\,(p^n - 1)}{p^m - 1}}{p^n} = \frac{C}{p^n} - \frac{s\,(p^n - 1)}{p^n\,(p^m - 1)}.$$

$$\text{VIII. } s = \frac{(C - c \cdot p^n)\,(p^m - 1)}{p^n - 1}.$$

$$\text{IX. } n = \frac{\log\,[C\,(p^m - 1) + s] - \log\,[c\,(p^m - 1) + s]}{\log p}$$

$$\text{X. } m = \frac{\log\,[C - s - (c - s)\,p^n] - \log\,[C - cp^n]}{\log p}$$

$$\text{XI. } p^{n+m} - \frac{c - s}{c}\,p^n - \frac{C}{c}\,p^m + \frac{C - s}{c} = 0.$$

Beispiele.

1. Zu einem Kapitale von 16850 fl., welches zu 5% angelegt ist, werden außer den Zinsen am Schlusse eines jeden Jahres noch 250 fl. hinzugefügt. Auf welche Summe wird dadurch das Kapital in 15 Jahren anwachsen?

Nach Gleichung I ist

$$\begin{aligned} C &= 16850 \cdot 1{,}05^{15} + \frac{250\,(1{,}05^{15} - 1)}{0{,}05} \\ &= 16850 \cdot 1{,}05^{15} + 5000 \cdot 1{,}05^{15} - 5000 \\ &= 21850 \cdot 1{,}05^{15} - 5000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 21850 &= 4{,}3394514 \\ 15 \log 1{,}05 &= \underline{0{,}3178395} \\ & \ 4{,}6572909 \\ 21850 \cdot 1{,}05^{15} &= 45424{,}6 \\ C &= 45424{,}6 - 5000 = 40424{,}6 \text{ fl.} \end{aligned}$$

2. Ein Kapital, welches 8 Jahre lang zu 3% auf Zinseszinsen stand, und zu welchem am Ende eines jeden Jahres noch 600 fl. gelegt wurden, ist auf 24985 fl. angewachsen. Wie groß war das anfängliche Kapital?

Aus Gleichung II. ergibt sich

$$\begin{aligned} c &= \frac{24985}{1{,}03^8} - \frac{600\,(1{,}03^8 - 1)}{1{,}03^8 \cdot 0{,}03} \\ &= \frac{24985}{1{,}03^8} - \frac{20000 \cdot 1{,}03^8}{1{,}03^8} + \frac{20000}{1{,}03^8} \\ &= \frac{44985}{1{,}03^8} - 20000 \end{aligned}$$

$$\log 44985 = 4{,}6530677$$
$$8 \log 1{,}03 = \underline{0{,}1026976}$$
$$4{,}5503701$$
$$\frac{44985}{1{,}03^8} = 35511{,}6$$
$$c = 35511{,}6 - 20000 = 15511{,}6 \text{ fl.}$$

3. Ein Kapital von 3740 fl., zu welchem außer den Zinsen am Schlusse eines jeden Jahres noch 450 fl. gelegt wurden, ist bei vierprocentigen Zinsen in einer gewissen Zeit auf 9265 fl. angewachsen. Wie lange stand das Kapital aus?

Nach Gleichung V ist

$$n = \frac{\log[9265 \,.\, 0{,}04 + 450] - \log[3740 \,.\, 0{,}04 + 450]}{\log 1{,}04}$$
$$n = \frac{\log 820{,}6 - \log 599{,}6}{\log 1{,}04}.$$
$$\log 820{,}6 = 2{,}9141315$$
$$\log 599{,}6 = \underline{2{,}7778616}$$
$$0{,}1362699$$
$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$n = \frac{0{,}1362699}{0{,}0170333} = 8{,}0002\ldots$$

Das Kapital stand somit 8 Jahre. —

4. Jemand legte in eine Sparkasse 12000 fl. und außer den jährlichen Zinsen fügte er noch eine gewisse Summe am Schlusse eines jeden Jahres zum Kapitale. Dadurch erhöhte sich sein Kapital in 8 Jahren und bei einer Berechnung von $3^1/_2\,\%$ Zinsen auf 22137 fl. 51 kr. Wie groß war die jährlich zugelegte Summe?

Nach Gleichung IV. erhält man

$$s = \frac{(22137{,}85 - 12000 \,.\, 1{,}035^8) \,.\, 0{,}035}{1{,}035^8 - 1}$$
$$\log 12000 = 4{,}0791812$$
$$8 \log 1{,}035 = \underline{0{,}1195224}$$
$$4{,}1987036$$
$$12000 \,.\, 1{,}035^8 = 15801{,}69\ldots$$
$$1{,}035^8 - 1 = 0{,}316808$$
$$\text{also } s = \frac{6336{,}16 \,.\, 0{,}035}{0{,}316808}$$
$$\log 6336{,}16 = 3{,}8018261$$
$$\log 0{,}035 = \underline{0{,}5440680 - 2}$$
$$2{,}3458941$$
$$\log 0{,}316808 = \underline{0{,}5007961 - 1}$$
$$\log s = 2{,}8450980$$
$$s = 700 \text{ fl.}$$

5. Ein Vater hatte für seinen zehnjährigen Sohn in eine Kasse die Summe von 3500 fl. eingelegt und außer den Zinsen noch jedes Jahr 270 fl. zugefügt. Mit 22 Jahren bezog der Sohn aus der Kasse 8060 fl. Wie viel Procent wurden von der Kasse berechnet? —

Nach Gleichung III. ist $3500 \cdot p^{12} + \frac{270\,(p^{12}-1)}{p-1} - 8060 = 0$,

$$\text{oder } p^{12} + \frac{270}{3500}\,(p^{11} + p^{10} + p^{9} + \ldots\ldots p + 1) - \frac{8060}{3500} = 0$$

Setzt man, da der Werth von p zwischen 1 und 2 liegt, $p = 1 + x$, so ist

$$(1+x)^{12} + \frac{270}{3500}\Big((1+x)^{11} + (1+x)^{10} + (1+x)^{9} + \ldots\ldots (1+x) + 1)\Big) - \frac{8060}{3500} = 0$$

Werden bei der Entwicklung der Potenzen des Binoms $(1 + x)$ die höheren Potenzen von x vernachlässigt, so ist

$$1 + 12\,x + \frac{27}{350}\Big(1 + 11\,x + 1 + 10\,x + 1 + 9\,x + \ldots\ldots 1 + x + 1\Big) - \frac{806}{350} = 0$$

$$350 + 4200\,x + 27\,(12 + 66\,x) - 806 = 0$$

$$5982\,x = 132$$

$$x = 0{,}022$$

Dieser Werth von x ist etwas zu groß, weil bei der Rechnung die höheren Potenzen von x vernachlässigt wurden. Setzt man deshalb $x = 1{,}02$, so muß, wenn dieser Werth richtig ist, die Gleichung bestehen

$$3500 \cdot 1{,}02^{12} + \frac{270\,(1{,}02^{12} - 1)}{0{,}02} - 8060 = 0$$

oder $17000 \cdot 1{,}02^{12} = 21560.$

Nun ist $\log 17000 = 4{,}2304489$

$12 \log 1{,}02 = \underline{0{,}1032024}$

$4{,}3336513,$

also $17000 \cdot 1{,}02^{12} = 21560{,}1\ldots$

Da dieser Werth für $17000 \cdot 1{,}02^{12}$ mit dem obigen Werthe der rechten Seite der Gleichung fast vollständig übereinstimmt, so ist also $p = 1{,}02$ anzunehmen, und das Kapital wurde zu 2% verzinst.

§ 21.

Berechnung des Kapitalwerthes bei Zinseszinsen und in bestimmten Terminen erfolgenden Abzügen.

Statt zu einem auf Zinseszinsen stehenden Kapitale jährlich oder in sonstigen Terminen noch eine bestimmte Summe zuzufügen, kann auch in ähnlicher Weise eine solche Summe in bestimmten Terminen weggenommen werden. Die Entwicklung der allgemeinen Formel, nach welcher die Rechnung auszuführen ist, entspricht ganz der Herleitung der Gleichung I in § 20, nur daß die Summe der sich ergebenden geometrischen Progression nicht zu addiren, sondern zu subtrahiren ist. Wird nämlich jährlich eine Summe s von dem um die Zinsen vermehrten Kapitale c weggenommen, so ergeben sich folgende Werthe am Schlusse der einzelnen Jahre.

Am Schlusse des 1ten Jahres: $cp - s$.

„ „ „ 2ten „ $(cp - s)\, p - s = cp^2 - sp - s$

„ „ „ 3ten „ $(cp^2 - sp - s)\, p - s$

$$= cp^3 - sp^2 - sp - s$$

„ „ „ nten „ $cp^n - sp^{n-1} - sp^{n-2} - sp^{n-3} - \dots$

$$\dots\dots - sp^2 - sp - s.$$

Es ist somit $C = cp^n - (sp^{n-1} + sp^{n-2} + sp^{n-3} + \dots\dots sp^2 + sp + s)$

$$= cp^n - \frac{s\,(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich für c, s, p und n als unbekannte Größen 4 weitere Gleichungen ableiten.

Die hieher gehörigen Aufgaben bilden den Uebergang zu der Rentenrechnung, welche geradezu aus obiger Gleichung hergeleitet werden kann, indem s als Rente betrachtet und der Werth $\frac{s\,(p^n - 1)}{p - 1}$, welchen die sämmtlichen Bezüge darstellen, dem Werthe cp^n, auf welchen das Kapital c in n Jahren anwächst, gleichgeachtet wird.

Beispiele.

1. Jemand hat sein Vermögen von 36540 fl. auf Zinseszinsen zu 4% stehen und bezieht am Ende eines jeden Jahres zu seinem Unterhalte 1200 fl. Wie groß wird sein Vermögen in 15 Jahren sein?

Werden die Zahlenwerthe in die obige Gleichung eingesetzt, so ist

$$C = 36540 \,.\, 1{,}04^{15} - \frac{1200\,(1{,}04^{15} - 1)}{0{,}04}$$

$$= 6540 \,.\, 1{,}04^{15} + 30000$$

$$\begin{aligned} \log 6540 &= 3{,}8155777 \\ 15 \log 1{,}04 &= \underline{0{,}2554995} \\ & 4{,}0710772 \\ 6540 \,.\, 1{,}04^{15} &= 11778{,}154 \dots \\ C &= 11778{,}154 \dots + 30000 = 41778{,}154 \dots \text{fl.} \end{aligned}$$

2. Ein Schuldner soll jetzt baar 4900 fl. bezahlen, ist aber nicht im Stande, die Zahlung zu leisten. Nach Uebereinkunft mit dem Gläubiger bezahlt er jährlich 1100 fl. Wie groß ist die Schuld nach 4 Jahren, wenn 5% in Rechnung gebracht werden?

$$C = 4900 \,.\, 1{,}05^4 - \frac{1100\,(1{,}05^4 - 1)}{0{,}05}$$

$$= 22000 - 17100 \,.\, 1{,}05^4.$$

$$\begin{aligned} \log 17100 &= 4{,}2329961 \\ 4 \log 1{,}05 &= \underline{0{,}0847572} \\ & 4{,}3177533 \\ 17100 \,.\, 1{,}05^4 &= 20785{,}158 \\ C &= 22000 - 20785{,}158 = 1215 \text{ fl. beinahe.} \end{aligned}$$

3. Jemand gibt einer Bank sein Vermögen von 54900 fl., bezieht aber jedes Jahr eine Summe von 3600 fl. In welcher Zeit wird er sein Vermögen verbraucht haben, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

Da hier C = 0 ist, so hat man

$$0 = 54900 \cdot 1{,}04^n - \frac{3600\,(1{,}04^n - 1)}{0{,}04}$$

$$n = \frac{\log 900 - \log 351}{\log 1{,}04}$$

$$\begin{aligned} \log 900 &= 2{,}9542425 \\ \log 351 &= \underline{2{,}5453071} \\ & 0{,}4089354 \\ \log 1{,}04 &= 0{,}0170333 \end{aligned}$$

$$n = \frac{0{,}4089354}{0{,}0170333} = 24{,}0079\ldots$$

Nach 24 Jahren ist somit das Vermögen verbraucht. Nennt man in diesem Beispiele die Summe, welche jährlich bezogen wird, eine Jahresrente und das Vermögen den Baarwerth derselben, so hat man mit dieser Aufgabe das Gebiet der Rentenrechnung betreten.

III.

Rentenrechnung.

§ 22.

Erklärung.

In dem letzten Beispiele des vorigen Paragraphen legte Jemand sein Vermögen in eine Bank und bezog dafür so lange jährlich eine gewisse Summe, bis sein einbezahltes Vermögen auf Null reducirt war. Eine solche Summe, welche gegen ein eingelegtes Kapital oder Ueberlassung eines anderen Besitzthums jährlich oder in andern Terminen bezogen wird, heißt eine Rente, während das eingelegte Kapital oder Besitzthum, für welches auf eine gewisse Zeit die Rente gegeben wird, der Einsatz oder die Mise genannt wird.

Wird die Rente während einer bestimmten Anzahl von Jahren bezogen, so heißt sie eine Zeitrente, wenn aber der Rentner, d. h. derjenige, welcher die Rente bezieht, bis zu seinem Lebensende die Rente zu beanspruchen hat, so heißt diese eine Leibrente oder Lebensrente. Je nachdem die Rente jährlich, halbjährlich, vierteljährlich 2c. bezogen wird, unterscheidet man Jahresrenten, Halbjahrrenten 2c.

Wird eine Rente am Anfange eines Termines bezahlt, so heißt sie vorschüssig, hingegen nachschüssig, wenn die Ausbezahlung am Ende des Termines erfolgt.

Die Summe, auf welche sich alle einzelnen Rentenbezüge bei Berechnung von Zinseszinsen belaufen, heißt der Endwerth der Rente; der gegenwärtige Werth dieser Summe aber wird der baare Werth der Rente genannt, welcher somit der Mise entspricht.

Eine Zeitrente ist nach dem Tode des Rentners den Erben desselben bis zum Verfallstermine auszubezahlen, eine Leibrente aber ist mit dem Tode des Rentners erloschen.

Zunächst kommt hier die Berechnung der Zeitrenten in Betracht, weil bei der Berechnung der Leibrenten die wahrscheinliche Lebensdauer des Rentners zu berücksichtigen ist, welche durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt wird.

§ 23.

Berechnung nachschüssiger Jahresrenten.

Wird am Ende eines jeden Jahres, n Jahre lang, eine Rente r bezogen, so ist bei Berechnung der Zinseszinsen der Werth der Bezüge am Ende der einzelnen Jahre in folgender Weise aufzustellen:

Am Ende des 1ten Jahres: r.

„ „ „ 2ten „ $rp + r.$

„ „ „ 3ten „ $(rp + r)\,p + r = rp^2 + rp + r.$

„ „ „ 4ten „ $(rp^2 + rp + r)\,p + r = rp^3 + rp^2 + rp + r.$

⋮

„ „ „ nten „ $rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots\ldots + rp + r.$

Somit ist der Endwerth R der Bezüge (vergleiche § 17)

$$R = rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots\ldots + rp + r$$
$$= \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1},$$

Wird dieser Endwerth auf die Gegenwart reducirt, d. h. wird berechnet, was diese in n Jahren durch die einzelnen Renten sich ergebende Summe jetzt baar werth ist, so erhält man für diesen Baarwerth nach § 6. I

$$\text{I.}\quad c = \frac{R}{p^n} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für die Berechnung der Rente

$$\text{II.}\quad r = \frac{cp^n\,(p - 1)}{p^n - 1}.$$

Soll bestimmt werden, wie viele Jahre hindurch die Rente r, welche einem Baarwerthe c entspricht, bezahlt werden kann, so erhält man aus I

$$cp^n\,(p - 1) = rp^n - r$$
$$[r - c\,(p - 1)]\;p^n = r$$
$$p^n = \frac{r}{r - c\,(p - 1)}$$

$$\text{III.}\quad \text{also}\quad n = \frac{\log r - \log\,[r - c\,(p - 1)]}{\log p}$$

Für die Berechnung des Zinsfußes, bei welchem eine Rente r, die einen baaren Werth c hat, n Jahre lang bezahlt werden kann, ergibt sich aus Gleichung I

$$cp^n = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1}$$

$$\text{IV.}\quad \text{oder}\quad cp^n - r\,(p^{n-1} + p^{n-2} + p^{n-3} + \ldots\ldots + p^2 + p + 1) = 0.$$

Beispiele.

1. Welchen baaren Werth hat eine Rente von 450 fl., welche 14 Jahre lang am Schlusse eines jeden Jahres zu beziehen ist, wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

Nach I ist
$$c = \frac{450\,(1,05^{14} - 1)}{1,05^{14}\,.\,0,05} = \frac{9000\,(1,05^{14} - 1)}{1,05^{14}}$$
$$= 9000 - \frac{9000}{1,05^{14}}$$
$$\log 9000 = 3,9542425$$
$$14 \log 1,05 = \underline{0,2966502}$$
$$3,6575923$$
$$\frac{9000}{1,05^{14}} = 4545,61\ldots$$
$$c = 9000 - 4545,61\ldots = 4454,39\ldots \text{ fl.}$$

2. Jemand zahlt ein Kapital von 24650 fl. in eine Bank, um auf 12 Jahre eine am Ende jeden Jahres fällige Rente zu erhalten. Wie groß wird diese sein, wenn 4% Zinsen in Rechnung kommen?

Nach II ist
$$r = \frac{24650\,.\,1,04^{12}\,.\,0,04}{1,04^{12} - 1}$$
$$12 \log 1,04 = 0,2043996$$
$$1,04^{12} - 1 = 0,60103\ldots$$
$$\text{also}\quad r = \frac{24650\,.\,1,04^{12}\,.\,0,04}{0,60103}$$
$$\log 24650 = 4,3918169$$
$$12 \log 1,04 = 0,2043996$$
$$\log 0,04 = \underline{0,6020600 - 2}$$
$$3,1982765$$
$$\log 0,60103 = \underline{0,7788962 - 1}$$
$$\log r = 3,4193803$$
$$r = 2626,5\ldots \text{ fl.}$$

3. Wie lange kann eine am Ende eines jeden Jahres zahlbare Rente von 250 fl. bezogen werden, wenn derselben ein baarer Werth von 3554 fl. entspricht und $3\frac{1}{2}$% Zinsen gerechnet werden?

Nach III. erhält man
$$n = \frac{\log 250 - \log\,[250 - 3554\,.\,0,035]}{\log 1,035}$$
$$= \frac{\log 250 - \log 125,61}{\log 1,035}$$
$$\log 250 = 2,3979400$$
$$\log 125,61 = \underline{2,0990242}$$
$$0,2989158$$
$$\log 1,035 = 0,0149403$$
$$n = \frac{0,2989158}{0,0149403} = 20,007\ldots$$

Die Rente kann somit 20 Jahre lang bezogen werden.

4. Wie viel Procente werden bei einer nachschüssigen Rente von 400 fl. berechnet, welche 6 Jahre lang bezogen wird und einem baaren Werthe von 2097 fl. entspricht?

Nach Gleichung IV. ist $2097\ p^6 = \frac{400\ (p^6 - 1)}{p - 1}$,

oder $2097\ p^6 - 400\ [p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1] = 0$

Setzt man $p = 1 + x$, so ist

$$2097\ (1 + x)^6 - 400\ [(1 + x)^5 + (1 + x)^4 + \ldots\ldots + (1 + x) + 1] = 0$$

Vernachlässigt man bei der Entwicklung der Potenzen des Binoms $(1 + x)$ die höheren Potenzen von x, so ist

$$2097\ (1 + 6\ x) - 400\ [6 + 15\ x] = 0$$
$$6582\ x = 303$$
$$x = 0{,}046\ \ldots$$

Dieser Werth von x ist wegen der Vernachlässigung der höheren Potenzen von x zu groß. Setzt man deshalb $x = 0{,}04$ oder $p = 1{,}04$, so muß, wenn dieser Werth richtig ist, die Gleichung bestehen

$$2097\ .\ 1{,}04^6 = \frac{400\ (1{,}04^6 - 1)}{0{,}04}$$

$$\text{oder } 10000 = 7903\ .\ 1{,}04^6$$

$$\begin{aligned} \log 7903 &= 3{,}8977920 \\ 6 \log 1{,}04 &= \underline{0{,}1021998} \\ &\ 3{,}9999918 \end{aligned}$$

$$\text{also } 7903\ .\ 1{,}04^6 = 9999{,}81\ \ldots\ -$$

Da diese Größe von dem Werthe 10000 noch nicht um $\frac{2}{10}$ differirt, so kann also $p = 1{,}04$ angenommen werden. Die Zinsen wurden somit zu 4% berechnet. —

§ 24.

Berechnung vorschüssiger Jahresrenten.

Wird die Rente am Anfange eines jeden Jahres ausbezahlt, so sind die Werthe der Rentenzahlungen:

Am Anfange des 1ten Jahres:	r.
„ „ „ 2ten „	$rp + r$.
„ „ „ 3ten „	$(rp + r)\ p + r = rp^2 + rp + r$.
„ „ „ 4ten „	$(rp^2 + rp + r)\ p + r = rp^3 + rp^2 + rp + r$.
⋮	⋮
„ „ „ nten „	$rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots\ldots rp + r$.
Am Schlusse des nten „	$(rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots\ldots + rp + r)\ p$.
oder:	$rp^n + rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots\ldots + rp^2 + rp$.

Somit ist der Endwerth $R = rp\ (1 + p + p^2 + \ldots\ldots p^{n-2} + p^{n-1})$

$$= \frac{rp\ (p^n - 1)}{p - 1}.$$

Der baare Werth einer in n Jahren sich ergebenden Summe R ist aber

$$c = \frac{R}{p^n},$$

also der baare Werth der vorschüssigen Rente

$$\text{I.} \quad c = \frac{rp\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^{n-1}\,(p - 1)}.$$

Diesen Werth erhält man auch durch Bestimmung des Endwerthes der Rentenzahlungen am Anfange des nten Jahres und Reduction dieses Werthes auf die Gegenwart. Es ist alsdann der Endwerth

$$= rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots rp + r = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Dieser Werth hat sich aber, da er für den Anfang des nten Jahres gilt, in (n—1) Jahren gesammelt, somit ist sein Baarwerth

$$c = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^{n-1}(p - 1)}.$$

Daraus ergeben sich für r, n und p die Gleichungen

$$\text{II.} \quad r = \frac{cp^{n-1}\,(p - 1)}{p^n - 1}.$$

$$\text{III.} \begin{cases} p^n = \dfrac{rp}{rp - c\,(p - 1)} \\ n = \dfrac{\log r + \log p - \log\,[rp - c\,(p - 1)]}{\log p} \end{cases}$$

$$\text{IV.} \begin{cases} cp^{n-1} = \dfrac{r\,(p^n - 1)}{p - 1} \\ cp^{n-1} - r\,(p^{n-1} + p^{n-2} + \ldots\ldots p + 1) = 0 \end{cases}$$

Beispiel.

Jemand hat eine vorschüssige Jahresrente im Betrag von 450 fl. 14 Jahre lang zu beziehen. Welchen baaren Werth repräsentirt dieselbe, wenn 5% Zinsen in Rechnung gebracht werden?

Es ist
$$c = \frac{450\,(1{,}05^{14} - 1)}{1{,}05^{13}\,.\,0{,}05} = \frac{9000\,(1{,}05^{14} - 1)}{1{,}05^{13}}.$$

$$14 \log 1{,}05 = 0{,}2966502$$
$$1{,}05^{14} - 1 = 0{,}97993\ldots$$
$$\text{also} \quad c = \frac{9000\,.\,0{,}97993}{1{,}05^{13}}$$

$$\begin{aligned} \log 9000 &= 3{,}9542425 \\ \log 0{,}97993 &= 0{,}9911951 - 1 \\ &\overline{\ 3{,}9454376} \\ 13 \log 1{,}05 &= 0{,}2754609 \\ \log c &= \overline{3{,}6699767} \\ c &= 4677{,}1 \text{ fl.} \end{aligned}$$

§ 25.

Berechnung von Zeitrenten, welche nicht jährlich, sondern in andern Terminen zur Zahlung kommen.

Es soll eine Rente r sich auf n Jahre erstrecken, jedoch nicht jährlich, sondern je am Ende von m Jahren ausbezahlt werden, so ist der Endwerth R sämmtlicher Rentenzahlungen nach n Jahren, wenn m einen in n enthaltenen Faktor und eine ganze Zahl vorstellt, nach § 18

$$R = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^m - 1}.$$

Wird dieser Werth auf die Gegenwart reducirt, so erhält man

$$\text{I.}\quad c = \frac{R}{p^n} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p^m - 1)},$$

wodurch also der baare Werth der Rente ausgedrückt wird. Aus dieser Gleichung erhält man für die Rente selbst, wenn deren Baarwerth, der Zinsfuß und die Zeiten n und m gegeben sind,

$$\text{II.}\quad r = \frac{cp^n\,(p^m - 1)}{p^n - 1}.$$

Für n und m erhält man

$$\text{III.}\quad n = \frac{\log r - \log\,[r - c\,(p^m - 1)]}{\log p}.$$

$$\text{IV.}\quad m = \frac{\log\,[r\,(p^n - 1) + c\,p^n] - [\log c + n \log p]}{\log p}$$

Der Zinsfuß p ergibt sich aus einer Gleichung vom $(n + m)$ten Grad, es ist nämlich

$$\text{V.}\quad p^{n+m} - \frac{c + r}{c} \,.\, p^n + \frac{r}{c} = 0\,.$$

Beispiele.

1. Welchen Baarwerth hat eine Rente von 640 fl., welche 24 Jahre lang jedesmal am Ende des vierten Jahres zur Zahlung kommt, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

Nach I ist $\quad c = \dfrac{640\,(1{,}04^{24} - 1)}{1{,}04^{24}\,(1{,}04^4 - 1)}.$

$$24 \log 1{,}04 = 0{,}4087992$$
$$1{,}04^{24} - 1 = 1{,}5633$$
$$4 \log 1{,}04 = 0{,}0681332$$
$$1{,}04^4 - 1 = 0{,}169858$$

also $\quad c = \dfrac{640\,.\,1{,}5633}{1{,}04^{24}\,.\,0{,}169858}$

$$\log 640 = 2{,}8061800$$
$$\log 1{,}5633 = 0{,}1940423$$
$$\overline{\phantom{\log 1{,}5633 =}\; 3{,}0002223}$$

$$24 \log 1{,}04 = 0{,}4087992$$
$$\log 0{,}169858 = 0{,}2300860 - 1$$
$$0{,}6388852 - 1$$
$$3{,}0002223$$
$$0{,}6388852 - 1$$
$$\log c = 3{,}3613371$$
$$c = 2297{,}93 \ldots \text{fl.}$$

2. Jemand legt in eine Kasse 8600 fl., um dafür 16 Jahre lang je am Ende von 2 Jahren eine Rente zu beziehen. Wie groß wird diese sein, wenn 5% Zinsen berechnet werden?

Nach Gleichung II ist

$$r = \frac{8600 \,.\, 1{,}05^{16}\,(1{,}05^2 - 1)}{1{,}05^{16} - 1}.$$

$$2 \log 1{,}05 = 0{,}0423786$$
$$1{,}05^2 - 1 = 0{,}1025$$
$$16 \log 1{,}05 = 0{,}3390288$$
$$1{,}05^{16} - 1 = 1{,}18287$$

$$\text{also} \quad r = \frac{8600 \,.\, 1{,}05^{16} \,.\, 0{,}1025}{1{,}18287}.$$

$$\log 8600 = 3{,}9344985$$
$$16 \log 1{,}05 = 0{,}3390288$$
$$\log 0{,}1025 = 0{,}0107239 - 1$$
$$3{,}2842512$$
$$\log 1{,}18287 = 0{,}0729113$$
$$\log r = 3{,}2113399$$
$$r = 1626{,}82 \ldots \text{fl.}$$

3. Jemand will eine vierteljährliche Rente von 100 fl., welche er 10 Jahre lang zu genießen hat, verkaufen. Wie viel kann ihm dafür baar gegeben werden, wenn $3\frac{1}{2}$% gerechnet werden?

Bei dieser Aufgabe stellt der Termin der Rentenzahlung keine ganze Zahl dar, und es darf deshalb nicht nach den aufgestellten Gleichungen gerechnet werden, welche nur unter der Voraussetzung, daß m eine ganze Zahl ist, Gültigkeit haben. Da es sich hier um vierteljährliche Renten handelt, so müssen bei 10 Jahren und 40 Rentenzahlungen auch 40 Zinsperioden angenommen werden, und es ist, weil in einem Vierteljahre die Kapitaleinheit bei $3\frac{1}{2}$% auf 1,00875 sich erhöht, der Endwerth der 40 Rentenbezüge

$$R = \frac{100\,(1{,}00875^{40} - 1)}{1{,}00875 - 1}.$$

Dieser Werth gibt, weil wiederum die vierteljährlichen Zinsperioden zu beachten sind, auf die Gegenwart reducirt

$$c = \frac{R}{1{,}00875^{40}} = \frac{100\,(1{,}00875^{40} - 1)}{1{,}00875^{40} \,.\, 0{,}00875}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergibt sich auch durch eine andere Herleitung, welche für die Aufstellung der Grundgleichung der Rentenrechnung überhaupt angewandt werden kann.

Die erste Rente wird nach einem Vierteljahre erhoben, also ist bei Berechnung von $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen der Baarwerth derselben $c_1 = \frac{100}{1,00875}$; der Baarwerth der zweiten Rente, welche nach zwei Vierteljahren, die hier als Zinsperioden anzusehen sind, erhoben wird, ist $c_2 = \frac{100}{1,00875^2}$, desgleichen die Werthe der dritten, vierten .... nten Rente beziehungsweise $c_3 = \frac{100}{1,00875^3}$, $c_4 = \frac{100}{1,00875^4}$, ... $c_n = \frac{100}{1,00875^n}$. In der Aufgabe handelt es sich um 40 Rentenzahlungen, also ist der Baarwerth sämmtlicher Renten

$$c = \frac{100}{1,00875} + \frac{100}{1,00875^2} + \frac{100}{1,00875^3} + \ldots\ldots \frac{100}{1,00875^{40}}.$$

$$= \frac{\frac{100}{1,00875}\left(\left(\frac{1}{1,00875}\right)^{40} - 1\right)}{\frac{1}{1,00875} - 1} = \frac{\frac{100\,(1,00875^{40} - 1)}{1,00875\,.\,1,00875^{40}}}{\frac{1,00875 - 1}{1,00875}}$$

$$= \frac{100\,(1,00875^{40} - 1)}{1,00875^{40}\,.\,0,00875}.$$

$$40 \log 1,00875 = 0,1513420$$
$$1,00875^{40} - 1 = 0,416909$$
$$\text{also } c = \frac{100\,.\,0,416909}{1,00875^{40}\,.\,0,00875}$$

$$\log 41,6909 = 1,6200412$$
$$40 \log 1,00875 = 0,1513420$$
$$\log 0,00875 = \underline{0,9420081 - 3}$$
$$0,0933501 - 2$$
$$\log c = 3,5266911$$
$$c = 3362,72 \ldots \text{fl.}$$

§ 26.

Renten, welche erst nach einer Reihe von Jahren flüssig werden. (Aufgeschobene Renten.)

Eine Rente r werde nach Verfluß von q Jahren zum erstenmale, im Ganzen aber n Jahre nach einander bezahlt, so ist bei einem Zinsfuße p der Endwerth dieser n Jahresrenten

$$R = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1}.$$

Diese Summe auf die Gegenwart reducirt gibt aber, da das 9. Jahr zugleich das erste unter den n Jahren der Rentendauer ist, und somit von jetzt an bis zur letzten Rentenzahlung $n + q - 1$ Jahre verstreichen, den Baarwerth

$$\text{I.} \quad c = \frac{R}{p^{n+q-1}} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^{n+q-1}\,(p - 1)}.$$

Würde eine n Jahre gültige Rente nicht jährlich, sondern stets nach m Jahren bezogen werden, aber die erste Zahlung von jetzt an erst in q Jahren erfolgen, so wäre, vorausgesetzt daß m ein Faktor von n und eine ganze Zahl ist, der Endwerth dieser m jährigen Renten

$$R = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^m - 1}.$$

Um diesen Endwerth auf die Gegenwart zu reduciren oder dessen Baarwerth aufzufinden, hat man zu berücksichtigen, daß von den q Jahren, welche bis zur ersten Rentenzahlung verstreichen, die letzten m Jahre zugleich die ersten m Jahre des Rentenbezuges bilden, und somit die Zeit von jetzt an bis zur letzten Rentenzahlung $= n + q - m$ Jahren ist. Es ist somit

$$\text{II.} \quad c = \frac{R}{q^{n+q-m}} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^{n+q-m}\,(p^m - 1)}.$$

Aus den beiden Gleichungen können wieder Werthe für r, p, n, q und m entwickelt werden, um Rente, Zeit oder Zinsfuß zu berechnen.

Beispiele.

1. Ein Vater will seinem Sohne eine Jahresrente von 600 fl. auf 6 Jahre sichern, welche dieser aber erst nach 9 Jahren zum erstenmale beziehen soll. Welche Summe wird der Vater zu diesem Behufe in eine Kasse einzuzahlen haben, welche 4% Zinsen rechnet? —

Nach I. ist

$$c = \frac{600\,(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04^{14}\,.\,0{,}04} = \frac{15000\,(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04^{14}}.$$

$$6 \log 1{,}04 = 0{,}1021998$$

$$1{,}04^6 - 1 = 0{,}265318$$

$$\text{also} \quad c = \frac{15000\,.\,0{,}265318}{1{,}04^{14}}$$

$$\log 15000 = 4{,}1760913$$

$$\log 0{,}265318 = \underline{0{,}4237667 - 1}$$

$$3{,}5998580$$

$$14 \log 1{,}04 = 0{,}2384662$$

$$\log c = 3{,}3613918$$

$$c = 2298{,}22\,..\ \text{fl.}$$

2. Welchen baaren Werth hat eine auf 20 Jahre gültige Rente von 1200 fl., welche nach 12 Jahren zum erstenmale und dann alle 2 Jahre bezogen werden soll, wenn 3% Zinsen in Rechnung kommen?

Nach II. ist

$$c = \frac{1200\,(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03^{30}\,(1{,}03^2 - 1)}.$$

$$20 \log 1{,}03 = 0{,}2567440$$

$$1{,}03^{20} - 1 = 0{,}80611$$

$$2 \log 1{,}03 = 0{,}0256744$$

$$1{,}03^2 - 1 = 0{,}0609$$

$$\text{also} \quad c = \frac{1200\,.\,0{,}80611}{1{,}03^{30}\,.\,0{,}0609}.$$

3. Jemand zahlt in eine Kasse 10000 fl. ein, um nach Verlauf von 15 Jahren eine 24 Jahre gültige Rente zu beziehen. Wie hoch wird sich diese belaufen, wenn $4\frac{1}{2}\%$ in Rechnung gebracht werden?

Aus Gleichung I ergibt sich

$$10000 = \frac{r\,(1{,}045^{24} - 1)}{1{,}045^{38} \,.\, 0{,}045},$$

$$\text{also} \quad r = \frac{10000 \,.\, 1{,}045^{38} \,.\, 0{,}045}{1{,}045^{24} - 1},$$

$$24 \log 1{,}045 = 0{,}4587912$$

$$1{,}045^{24} - 1 = 1{,}876015$$

$$\text{Somit} \quad r = \frac{450 \,.\, 1{,}045^{38}}{1{,}876015}$$

$$\log 450 = 2{,}6532125$$

$$38 \log 1{,}045 = \underline{0{,}7264194}$$

$$3{,}3796319$$

$$\log 1{,}876015 = \underline{0{,}2732363}$$

$$\log r = 3{,}1063956$$

$$r = 1277{,}6 \,\ldots\, \text{fl.}$$

4. Um sich eine nach 10 Jahren zum ersten Male fällige Jahresrente von 1200 fl. zu sichern, zahlt Jemand 9155 fl. ein. Wie lange kann er diese Rente beziehen, wenn 3% Zinsen berechnet werden?

Nach I ist
$$9155 = \frac{1200\,(1{,}03^{n} - 1)}{1{,}03^{n+9} \,.\, 0{,}03}$$

Daraus erhält man $9155 \,.\, 1{,}03^{n} \,.\, 1{,}03^{9} \,.\, 0{,}03 = 1200 \,.\, 1{,}03^{n} - 1200.$

$$1{,}03^{n}\,(1200 - 274{,}65 \,.\, 1{,}03^{9}) = 1200$$

$$1{,}03^{n} = \frac{1200}{1200 - 274{,}65 \,.\, 1{,}03^{9}}$$

$$n = \frac{\log 1200 - \log\,[1200 - 274{,}65 \,.\, 1{,}03^{9}]}{\log 1{,}03}$$

$$\log 274{,}65 = 2{,}4387796$$

$$9 \log 1{,}03 = \underline{0{,}1155348}$$

$$2{,}5543144$$

$$274{,}65 \,.\, 1{,}03^{9} = 358{,}356$$

$$\text{also} \quad n = \frac{\log 1200 - \log 841{,}644}{\log 1{,}03}$$

$$\log 1200 = 3{,}0791812$$

$$\log 841{,}644 = \underline{2{,}9251284}$$

$$0{,}1540528$$

$$\log 1{,}03 = 0{,}0128372$$

$$n = \frac{0{,}1540528}{0{,}0128372} = 12{,}0004 \,\ldots$$

Somit kann die Rente 12 Jahre lang bezogen werden.

5. Um nach 7 Jahren zum ersten Male eine auf 8 Jahre gültige Jahresrente von 100 fl. zu beziehen, wurden 532 fl. eingelegt. Wie viel Procent werden dabei in Rechnung gebracht?

Nach Gleichung I ist

$$532 = \frac{100\,(p^8 - 1)}{p^{14} \,.\, (p - 1)} = \frac{100\,(p^7 + p^6 + p^5 + \ldots . + p + 1)}{p^{14}}$$

$$532 \,.\, p^{14} - 100\,(p^7 + p^6 + p^5 + \ldots . + p + 1) = 0 \,.$$

Setzt man p, welches zwischen 1 und 2 liegt, $= 1 + x$, so ist

$$532\,(1 + x)^{14} - 100\,[(1 + x)^7 + (1 + x)^6 + \ldots .. (1 + x) + 1] = 0 \,.$$

Sieht man bei der Entwickelung der Potenzen des Binoms $(1 + x)$ von den höheren Potenzen über x^2 ab, so ergibt sich

$$532\,(1 + 14\,x + 91\,x^2) - 100\,(8 + 28\,x + 56\,x^2) = 0$$

$$10703\,x^2 + 1162\,x = 67\,,$$

woraus man $x = \frac{445{,}96}{10703} = 0{,}041\ldots$ erhält.

Dieser Werth von x ist wegen der Vernachlässigung der höheren Potenzen etwas zu groß; nimmt man deshalb $x = 0{,}04$, also $p = 1{,}04$ an, so muß, wenn dieser Werth der Aufgabe entspricht, die Gleichung bestehen

$$532 = \frac{100\,(1{,}04^8 - 1)}{1{,}04^{14} \,.\, 0{,}04} = \frac{2500\,(1{,}04^8 - 1)}{1{,}04^{14}}$$

$$\begin{aligned}
8 \log 1{,}04 &= 0{,}1362664 \\
1{,}04^8 - 1 &= 0{,}3685608 \\
\log 2500 &= 3{,}3979400 \\
\log 0{,}3685608 &= \underline{0{,}5665091} - 1 \\
&\ 2{,}9644491 \\
14 \log 1{,}04 &= \underline{0{,}2384662} \\
&\ 2{,}7259829
\end{aligned}$$

$$\frac{2500\,(1{,}04^8 - 1)}{1{,}04^{14}} = 532{,}08\ldots$$

Da die Werthe der beiden Seiten fast vollständig übereinstimmen, so ist $p = 1{,}04$ und der Procentsatz $= 4$ anzunehmen.

§ 27.

Berechnung von Renten, welche in einer arithmetischen Progression zu- oder abnehmen.

Stellen die Rentenbezüge die arithmetische Progression

$$r\,,\ r + d\,,\ r + 2d\,,\ r + 3d\,,\ \ldots ..\ r + (n - 1)\,d$$

dar, so ist nach § 19 der Endwerth dieser Bezüge

$$R = (rp^{n-1} + rp^{n-2} + \ldots rp + r) + (dp^{n-2} + 2dp^{n-3} + 3dp^{n-4} + \ldots ..$$
$$\ldots . + (n - 2)\,dp + (n - 1)\,d)$$

$$= \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1} + \frac{dp\,(p^{n-1} - 1)}{(p - 1)^2} - \frac{(n - 1)\,d}{p - 1}\,.$$

$$= \frac{1}{p - 1}\left[r\,(p^n - 1) + \frac{dp\,(p^{n-1} - 1)}{p - 1} - (n - 1)\,d\right]$$

Der Baarwerth dieser in n Jahren in den Händen des Rentners sich ansammelnden Summe ist aber

$$c = \frac{R}{p^n},$$

$$\text{I. also } c = \frac{1}{p^n (p-1)} \left[r(p^n - 1) + \frac{dp(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)d \right]$$

Ist bei gegebenem Baarwerthe c die Rente r zu bestimmen, so erhält man aus dieser Gleichung

$$\text{II. } r = \frac{cp^n(p-1) - \frac{dp(p^{n-1}-1)}{p-1} + (n-1)d}{p^n - 1}$$

Wird $d = r$, so daß also die Rentenbezüge nach der arithmetischen Progression

$$r, 2r, 3r, 4r, \ldots\ldots (n-1)r, nr$$

erfolgen, so wird

$$R = \frac{r}{p-1} \left[\frac{p(p^n-1)}{p-1} - n \right],$$

und hieraus

$$\text{III. } c = \frac{R}{p^n} = \frac{r}{p^n(p-1)} \left[\frac{p(p^n-1)}{p-1} - n \right]$$

$$\text{IV. } r = \frac{cp^n(p-1)}{\frac{p(p^n-1)}{p-1} - n} = \frac{cp^n(p-1)^2}{p(p^n-1) - n(p-1)}.$$

Nimmt die Rente in einer arithmetischen Progression ab, so ist die Differenz eine negative Größe und somit in den Gleichungen I und II $-d$ statt d zu setzen. Man erhält in diesem Falle die Gleichungen

$$\text{V. } c = \frac{1}{p^n(p-1)} \left[r(p^n-1) - \frac{dp(p^{n-1}-1)}{p-1} + (n-1)d \right]$$

$$\text{VI. } r = \frac{cp^n(p-1) + \frac{dp(p^{n-1}-1)}{p-1} - (n-1)d}{p^n - 1}.$$

Beispiele.

1. Ein Wohlthäter sorgt 12 Jahre lang für die Erziehung eines Kindes und gibt zu diesem Zwecke am Ende des ersten Jahres 100 fl., jedoch nach Verlauf eines jeden Jahres 25 fl. mehr als im vorhergehenden Jahre. Welcher Baarwerth entspricht diesen Schenkungen, die als Renten betrachtet werden können, wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

Nach I. ist $c = \frac{1}{1{,}05^{12} . 0{,}05} [100(1{,}05^{12} - 1) + \frac{25 . 1{,}05(1{,}05^{11} - 1)}{0{,}05} - 11 . 25]$

$$\begin{aligned}
12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\
1{,}05^{12} &= 1{,}795856 \\
100(1{,}05^{12} - 1) &= 79{,}5856 \\
11 \log 1{,}05 &= 0{,}2330823 \\
1{,}05^{11} &= 1{,}71034 \\
\frac{25 . 1{,}05(1{,}05^{11} - 1)}{0{,}05} &= 525 . 0{,}71034 = 372{,}9285
\end{aligned}$$

$$\text{also}\quad c = \frac{1}{1{,}05^{12}\,.\,0{,}05}\,[79{,}5856 + 372{,}9285 - 275]$$

$$= \frac{177{,}5141}{1{,}05^{12}\,.\,0{,}05}$$

$$\begin{aligned}
\log 177{,}5141 &= 2{,}2492328 \\
12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\
\log 0{,}05 &= \underline{0{,}6989700 - 2} \\
&\ 0{,}9532416 - 2 \\
\log c &= 3{,}2959912 \\
c &= 1976{,}93 \text{ fl.}
\end{aligned}$$

2. Welche nach der arithmetischen Progression r, 2r, 3r .... zunehmende Rente kann 6 Jahre lang gegen eine Baareinlage von 4500 fl. bewilligt werden, wenn 3% in Rechnung kommen?

Nach Gleichung IV. ist

$$r = \frac{4500\,.\,1{,}03^{6}\,.\,0{,}03^{2}}{1{,}03\,(1{,}03^{6} - 1) - 6\,.\,0{,}03}$$

$$\begin{aligned}
6 \log 1{,}03 &= 0{,}0770232 \\
1{,}03^{6} &= 1{,}19405 \\
1{,}03\,(1{,}03^{6} - 1) - 6\,.\,0{,}03 &= 1{,}03\,.\,0{,}19405 - 0{,}18 = 0{,}0198715
\end{aligned}$$

$$\text{also}\quad r = \frac{4500\,.\,1{,}03^{6}\,.\,0{,}03^{2}}{0{,}0198715}$$

$$\begin{aligned}
\log 4500 &= 3{,}6532125 \\
6 \log 1{,}03 &= 0{,}0770232 \\
2 \log 0{,}03 &= \underline{0{,}9542426 - 4} \\
&\ 0{,}6844783 \\
\underline{\log 0{,}0198715} &= \underline{0{,}2982306 - 2} \\
\log r &= 2{,}3862477 \\
r &= 243{,}359 \ldots \text{ fl.}
\end{aligned}$$

§ 28.

Berechnung von Renten, welche in einer geometrischen Progression zu- oder abnehmen.

Sollen die Renten in der Art zunehmen, daß sie eine geometrische Progression von der Form

$$r,\ re,\ re^{2},\ re^{3},\ \ldots\ldots\ re^{n-1}$$

darstellen, so ist der Endwerth derselben nach § 19, III

$$R = \frac{r\,(e^{n} - p^{n})}{e - p}.$$

Daraus ergibt sich der Baarwerth

$$\text{I.}\quad c = \frac{r\,(e^{n} - p^{n})}{p^{n}\,(e - p)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\text{II.}\quad r = \frac{cp^{n}\,(e - p)}{e^{n} - p^{n}},$$

durch welche Gleichung der Werth der ersten Rente bestimmt ist. Nehmen die Renten in einer geometrischen Progression ab, so ist e ein Bruch, und man wird alsdann den beiden Gleichungen besser folgende Formen geben:

$$\text{III.}\quad c = \frac{r\,(p^n - e^n)}{p^n\,(p - e)},$$

$$\text{IV.}\quad r = \frac{cp^n\,(p - e)}{p^n - e^n}.$$

Beispiele.

1. Jemand hat 10 Jahre lang eine in einer geometrischen Progression steigende Rente zu beziehen, in der Art, daß er am Ende des ersten Jahres 75 fl., am Ende des zweiten Jahres 2 . 75 fl., und so am Ende jedes nächsten Jahres zweimal so viel erhält, als im vorhergehenden Jahre. Welcher Baarwerth entspricht dieser Rente, wenn $2\frac{1}{2}\%$ gerechnet werden?

Nach I. ist
$$c = \frac{75\,(2^{10} - 1{,}025^{10})}{1{,}025^{10}\,(2 - 1{,}025)} = \frac{2^{10} - 1{,}025^{10}}{1{,}025^{10}\,.\,0{,}013}$$

$$\begin{aligned}
10 \log 2 &= 3{,}0103000 \\
2^{10} &= 1024 \\
10 \log 1{,}025 &= 0{,}1072390 \\
1{,}025^{10} &= 1{,}28008 \\
2^{10} - 1{,}025^{10} &= 1022{,}71992 \\
\text{also}\ c &= \frac{1022{,}71992}{1{,}025^{10}\,.\,0{,}013} \\
\log 1022{,}71992 &= 3{,}0097567 \\
10 \log 1{,}025 &= 0{,}1072390 \\
\log 0{,}013 &= \underline{0{,}1139434 - 2} \\
& \ 0{,}2211824 - 2 \\
\log c &= 4{,}7885743 \\
c &= 61457{,}4\ldots\ \text{fl.}
\end{aligned}$$

2. Zur Urbarmachung eines Landstriches bringt eine Gesellschaft 93863 fl. zusammen und bestimmt, daß diese Summe in 6 Jahren in der Art zur Verwendung komme, daß am Ende des ersten Jahres ein gewisser Betrag verausgabt werde, am Ende des zweiten Jahres $^7/_8$ desselben, und so in jedem nächsten Jahre $^7/_8$ von dem Betrage des vorhergehenden Jahres. Wie groß ist bei einer Berechnung von 4% der Betrag des ersten Jahres? —

Da bei dieser Aufgabe die in den einzelnen Jahren zu verbrauchenden Summen eine geometrische Progression darstellen, deren Exponent $= \frac{7}{8}$ ist, so erhält man nach Gleichung IV.

$$r = \frac{93863\,.\,1{,}04^6\left(1{,}04 - \frac{7}{8}\right)}{1{,}04^6 - \left(\frac{7}{8}\right)^6} = \frac{93863\,.\,1{,}04^6\,.\,0{,}165}{1{,}04^6 - 0{,}875^6}$$

$$\begin{aligned}
6 \log 1{,}04 &= 0{,}1021996 \\
1{,}04^6 &= 1{,}2653177
\end{aligned}$$

$$6 \log 0{,}875 = 0{,}6520486 - 1$$
$$0{,}875^6 = 0{,}4487956$$
$$1{,}04^6 - 0{,}875^6 = 0{,}8165221$$
$$\text{alſo } r = \frac{93863 \,.\, 1{,}04^6 \,.\, 0{,}165}{0{,}8165221}$$
$$\log 93863 = 4{,}9724944$$
$$6 \log 1{,}04 = 0{,}1021996$$
$$\log 0{,}165 = 0{,}2174839 - 1$$
$$4{,}2921779$$
$$\log 0{,}8165221 = 0{,}9119679 - 1$$
$$\log r = 4{,}3802100$$
$$r = 23999{,}94 \text{ fl., wofür } 24000 \text{ fl. anzunehmen ſind.} —$$

§ 29.

Berechnung des mittleren Zahlungstermins einer Rente.

Iſt Jemand durch irgend eine Miſe im Beſitze einer für eine Reihe von Jahren gültigen Rente, wünſcht aber die Summe aller Renten auf einmal zu beziehen, ſo nennt man die Zeit, nach welcher dieſes geſchehen kann, ohne daß Rentner oder Rentengeber einen Vortheil oder Nachtheil haben, den mittleren Zahlungstermin der Rente.

Es habe Jemand die Rente r je am Ende eines Jahres n mal zu beziehen, ſo iſt bei dem Zinsfuße p der Baarwerth dieſer Rente

$$c = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)},$$

die Summe aller Rentenbezüge aber $= nr$, und es fragt ſich nun, in welcher Zeit iſt nr aus einer Summe erwachſen, welche dem Baarwerth der Rente entſpricht. Bezeichnet man die geſuchte Zeit mit n, ſo iſt offenbar der Baarwerth der Summe nr, welche in n_1 Jahren zu bezahlen iſt, $= \frac{nr}{p^{n_1}}$. Dieſer Werth ſoll dem obigen Baarwerthe der Rente gleich ſein; es entſteht alſo die Gleichung

$$\frac{nr}{p^{n_1}} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)}$$

$$p^{n_1} = \frac{np^n\,(p - 1)}{p^n - 1}$$

$$n_1 = \frac{\log n + n \log p + \log (p - 1) - \log (p^n - 1)}{\log p}.$$

Beiſpiel.

Eine Rente von 500 fl. iſt 24 Jahre lang am Schluſſe eines jeden Jahres zu beziehen. Der Beſitzer der Rente wünſcht aber den ganzen Rentenbetrag von 12000 fl. auf einmal zu erhalten. Nach welcher Zeit kann ihm bei einer Berechnung von 4% Zinſen dieſe Summe gegeben werden?

Nach obiger Gleichung ist $n_1 = \dfrac{\log 24 + 24 \log 1{,}04 + \log 0{,}04 - \log (1{,}04^{24} - 1)}{\log 1{,}04}$.

$$\begin{aligned} \log 24 &= 1{,}3802112 \\ 24 \log 1{,}04 &= 0{,}4087992 \\ \log 0{,}04 &= \underline{0{,}6020600 - 2} \\ & 0{,}3910704 \\ \log (1{,}04^{24} - 1) = \log 1{,}5663 &= \underline{0{,}1948749} \\ & 0{,}1961955 \\ \log 1{,}04 &= 0{,}0170333 \\ n_1 &= \frac{0{,}1961955}{0{,}0170333} = 11{,}518 \ldots \text{Jahre.} \end{aligned}$$

Wird bei dieser Aufgabe, da für die Zeit n_1 ein Bruch erscheint, nach § 8 verfahren, so erhält man für den mittleren Zahlungstermin der Rente 11,513 Jahre = 11 Jahre 6 Monate 5 Tage.

§ 30.

Verwandlung einer Rente in eine andere.

Soll eine Rente in eine andere verwandelt werden, bei welcher die Bezugszeit oder der Zinsfuß oder Beides verändert ist, so muß doch stets der Baarwerth der beiden Renten gleich bleiben. Wird deshalb für beide Renten der Baarwerth aufgestellt, und aus diesen Größen eine Gleichung gebildet, so läßt sich aus dieser der Werth der gesuchten Rente bestimmen. Es sind, wie schon angedeutet, drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem bei der gesuchten Rente die Dauer oder der Zinsfuß oder Dauer und Zinsfuß angenommen sind.

A.

Es soll eine n jährige Rente, welche auf den Zinsfuß p berechnet ist, in eine $n_1$jährige Rente r_1 bei Beibehaltung des Zinsfußes umgewandelt werden.

Der Baarwerth der gegebenen Rente ist $c = \dfrac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)}$,

Der Baarwerth der gesuchten Rente $c = \dfrac{r_1\,(p^{n_1} - 1)}{p^{n_1}\,(p - 1)}$.

Diese beiden Werthe müssen einander gleich sein, folglich ist

$$\frac{r_1\,(p^{n_1} - 1)}{p^{n_1}\,(p - 1)} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p - 1)},$$

$$\text{also I.} \quad r_1 = \frac{r \,.\, p^{n_1}\,(p^n - 1)}{p^n\,(p^{n_1} - 1)}.$$

Sollte der Werth r_1 der veränderten Rente gegeben sein, hingegen die Zeit n_1, auf welche dieselbe gegeben werden kann, um einer njährigen Rente r beim gleichen Zinsfuße gleichzukommen, gesucht werden, so ergibt sich aus vorstehender Gleichung I.

$$p^{n_1} = \frac{r_1\,p^n\,(p^{n_1} - 1)}{r\,(p^n - 1)}$$

$$\text{also II.} \quad n_1 = \frac{\log r_1 + n \log p + \log (p^{n_1} - 1) - [\log r + \log (p^n - 1)]}{\log p}.$$

B.

Eine n jährige Rente r, welche nach dem Zinsfuße p berechnet ist, soll in eine Rente von gleicher Dauer, bei welcher aber ein Zinsfuß p_1 angenommen ist, umgewandelt werden.

Der Baarwerth der gegebenen Rente ist

$$c = \frac{r(p^n - 1)}{p^n (p - 1)},$$

der Baarwerth der gesuchten Rente

$$c = \frac{r_1 (p_1{}^n - 1)}{p_1{}^n (p_1 - 1)}.$$

Diese beiden Baarwerthe sind einander gleich, also ist

$$\frac{r_1 (p_1{}^n - 1)}{p_1{}^n (p_1 - 1)} = \frac{r(p^n - 1)}{p^n (p - 1)},$$

$$\text{also III. } r_1 = \frac{r p_1{}^n (p^n - 1)(p_1 - 1)}{p^n (p_1{}^n - 1)(p - 1)}$$

Ist die Rente r_1 gegeben, und soll der Zinsfuß p_1 gesucht werden, bei welchem diese Rente einer anderen r von gleicher Dauer gleichkommt, so erhält man aus Gleichung III

$$\text{IV. } p_1{}^{n+1} - \frac{r(p^n - 1) + r_1 p^n (p - 1)}{r(p^n - 1)} \cdot p_1{}^n + \frac{r_1 p^n (p - 1)}{r(p^n - 1)} = 0.$$

C.

Eine n jährige Rente r, bei deren Berechnung der Zinsfuß p zu Grunde gelegt wurde, soll in eine n_1 jährige Rente r_1 umgewandelt werden, welche nach dem Zinsfuße p_1 berechnet ist.

Die Baarwerthe der beiden Renten sind

$$c = \frac{r(p^n - 1)}{p^n (p - 1)} \text{ und } c = \frac{r_1 (p_1{}^{n_1} - 1)}{p_1{}^{n_1} (p_1 - 1)}.$$

Aus diesen Werthen ergibt sich die Gleichung

$$\frac{r_1 (p_1{}^{n_1} - 1)}{p_1{}^{n_1} (p_1 - 1)} = \frac{r(p^n - 1)}{p^n (p - 1)}$$

$$\text{also V. } r_1 = \frac{r p_1{}^{n_1} (p^n - 1)(p_1 - 1)}{p^n (p_1{}^{n_1} - 1)(p - 1)}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich, wenn die veränderte Rente r_1 gegeben, hingegen entweder die Dauer n_1 derselben, oder der Zinsfuß p_1, nach welchem sie berechnet werden soll, unbekannt ist, Gleichungen für die Größen n_1 und p_1 entwickeln. Man erhält

$$p_1{}^{n_1} = \frac{r_1 p^n (p - 1)}{r_1 p^n (p - 1) - r(p^n - 1)(p_1 - 1)}$$

$$\text{also VI. } n_1 = \frac{\log r_1 + n \log p + \log (p - 1) - \log [r_1 p^n (p - 1) - r(p^n - 1)(p_1 - 1)]}{\log p_1}.$$

$$\text{und VII. } p_1{}^{n_1 + 1} - \frac{r(p^n - 1) + r_1 p^n (p - 1)}{r(p^n - 1)} \cdot p_1{}^{n_1} + \frac{r_1 p^n (p - 1)}{r(p^n - 1)} = 0.$$

Beispiele.

1. Jemand will eine 20jährige Rente von 2000 fl. in eine 16jährige verwandeln. Wie groß ist der Betrag der letzteren, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

Nach Gleichung I ist

$$r_1 = \frac{2000 \,.\, 1{,}04^{16}\,(1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04^{20}\,(1{,}04^{16} - 1)} = \frac{2000\,(1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04^{4}\,(1{,}04^{16} - 1)}$$

$$\begin{aligned} 20 \log 1{,}04 &= 0{,}3406660 \\ 1{,}04^{20} - 1 &= 1{,}19112 \\ 16 \log 1{,}04 &= 0{,}2725328 \\ 1{,}04^{16} - 1 &= 0{,}87298 \end{aligned}$$

$$\text{also } r_1 = \frac{2000 \,.\, 1{,}19112}{1{,}04^{4} \,.\, 0{,}87298}$$

$$\begin{aligned} \log 2000 &= 3{,}3010300 \\ \log 1{,}19112 &= \underline{0{,}0759555} \\ & 3{,}3769855 \\ 4 \log 1{,}04 &= 0{,}0681332 \\ \log 0{,}87298 &= \underline{0{,}9410043 - 1} \\ & 0{,}0091375 \\ \log r_1 &= 3{,}3678480 \\ r_1 &= 2332{,}64 \ldots \text{fl.} \end{aligned}$$

2. Eine zwölfjährige Rente von 1500 fl., bei welcher 4% Zinsen berechnet wurden, soll in eine Rente von gleicher Dauer, bei welcher aber 5% Zinsen in Rechnung kommen, verwandelt werden. Wie groß ist der Betrag dieser Rente?

Nach Gleichung III erhält man

$$r_1 = \frac{1500 \,.\, 1{,}05^{12}\,(1{,}04^{12} - 1)\,(1{,}05 - 1)}{1{,}04^{12}\,(1{,}05^{12} - 1)\,(1{,}04 - 1)}$$

$$= \frac{1875 \,.\, 1{,}05^{12}\,(1{,}04^{12} - 1)}{1{,}04^{12}\,(1{,}05^{12} - 1)}$$

$$\begin{aligned} 12 \log 1{,}04 &= 0{,}2043996 \\ 1{,}04^{12} &= 0{,}60103 \\ 12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\ 1{,}05^{12} - 1 &= 0{,}795856 \end{aligned}$$

$$\text{also } r_1 = \frac{1875 \,.\, 1{,}05^{12} \,.\, 0{,}60103}{1{,}04^{12} \,.\, 0{,}795856}$$

$$\begin{aligned} \log 1875 &= 3{,}2730013 \\ 12 \log 1{,}05 &= 0{,}2542716 \\ \log 0{,}60103 &= \underline{0{,}7788962 - 1} \\ & 3{,}3061691 \\ 12 \log 1{,}04 &= 0{,}2043996 \\ \log 0{,}795856 &= \underline{0{,}9008345 - 1} \\ & 0{,}1052341 \\ \log r_1 &= 3{,}2009350 \\ r_1 &= 1588{,}3 \ldots \text{fl.} \end{aligned}$$

3. Jemand besitzt eine 24jährige Rente von 800 fl., bei welcher $4\frac{1}{2}\%$ Zinsen berechnet wurden, und wünscht dieselbe in eine 20jährige Rente, bei welcher 5% in Rechnung gebracht werden, zu verwandeln. Wie hoch wird sich dieselbe belaufen?

Werden in Gleichung V die Zahlenwerthe dieses Beispieles eingesetzt, so ist

$$r_1 = \frac{800 \,.\, 1{,}05^{20}\,(1{,}045^{24} - 1) \,.\, 0{,}05}{1{,}045^{24}\,(1{,}05^{20} - 1) \,.\, 0{,}045}$$

$$\begin{aligned} 24 \log 1{,}045 &= 0{,}4587912 \\ 1{,}045^{24} - 1 &= 1{,}876015 \\ 20 \log 1{,}05 &= 0{,}4237860 \\ 1{,}05^{20} - 1 &= 1{,}6533 \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad r_1 = \frac{40 \,.\, 1{,}05^{20} \,.\, 1{,}876015}{1{,}045^{24} \,.\, 1{,}6533 \,.\, 0{,}045}.$$

$$\begin{aligned} \log 40 &= 1{,}6020600 \\ 20 \log 1{,}05 &= 0{,}4237860 \\ \log 1{,}876015 &= \underline{0{,}2732363} \\ & \ 2{,}2990823 \\ 24 \log 1{,}045 &= 0{,}4587912 \\ \log 1{,}6533 &= 0{,}2183517 \\ \log 0{,}045 &= \underline{0{,}6532125 - 2} \\ & \ 0{,}3303554 - 1 \\ \log r_1 &= 2{,}9687269 \\ r_1 &= 930{,}522\ \ldots\ \text{fl.} \end{aligned}$$

§ 31.

Renten, welche durch Terminzahlungen erworben werden.

Bei Pensionsanstalten und dergleichen kommt es vor, daß nicht durch einmalige Zahlung einer Mise, sondern durch eine Reihe von Einzahlungen, welche in bestimmten Terminen erfolgen, eine Rente erworben wird.

Angenommen es zahle Jemand m Jahre lang am Schlusse eines jeden Jahres eine Summe s, um sich eine am Ende des $(m + 1)$ten Jahres zum ersten Male fällige Jahresrente auf n Jahre zu erwerben, so ist offenbar die Leistung des Einzahlenden dieselbe, wie wenn er am Schlusse des $m$ten oder am Anfange des $(m + 1)$ten Jahres den Endwerth seiner Einzahlungen auf einmal entrichtet hätte. Die zur Berechnung der hieher gehörigen Aufgaben nöthige Gleichung wird sich somit ergeben, wenn dem Endwerthe der Einzahlungen am Anfange des $(m + 1)$ten Jahres der Baarwerth der Rentenbezüge für denselben Zeitpunkt gleichgesetzt wird.

Die m maligen Einzahlungen erreichen am Ende des $m$ten Jahres den Werth

$$S = \frac{s\,(p^m - 1)}{p - 1};$$

die auf n Jahre gültige Rente r hat aber am Anfange der Rentenperiode, also am Anfange des $(m + 1)$ten Jahres, bei gleichem Zinsfuße den Baarwerth

$$c = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)},$$

$$\text{folglich ist}\quad \frac{s\,(p^m - 1)}{p-1} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)}.$$

Dieselbe Gleichung wird erhalten, wenn die Endwerthe der Einzahlungen und der Rentenbezüge für die Zeit der Zahlung der letzten Rente aufgestellt und einander gleichgesetzt werden. Der Endwerth der Einzahlungen ist am Beginn der Rentenperiode $= \frac{s\,(p^m - 1)}{p-1}$, also am Ende dieser n Jahre dauernden Periode $= \frac{s\,(p^m - 1)}{p-1} \cdot p^n$. Der Endwerth der Renten aber ist $= \frac{r\,(p^n - 1)}{p-1}$, also $\frac{s\,(p^m - 1)}{p-1} \cdot p^n = \frac{r\,(p^n - 1)}{p-1}$ oder $\frac{s\,(p^m - 1)}{p-1} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)}$.

Aus dieser Gleichung ergeben sich für r, s, n, m und p folgende Werthe:

$$\text{I.}\quad r = \frac{s\,(p^m - 1)\,p^n}{p^n - 1}$$

$$\text{II.}\quad s = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p^m - 1)}$$

$$\text{III.}\quad p^n = \frac{r}{r - s\,(p^m - 1)}$$

$$n = \frac{\log r - \log\,[r - s\,(p^m - 1)]}{\log p}$$

$$\text{IV.}\quad p^m = \frac{(s + r)\,p^n - r}{sp^n}$$

$$m = \frac{\log\,[(s + r)\,p^n - r] - [\log s + n \log p]}{\log p}$$

$$\text{V.}\quad p^{n+m} - \frac{s + r}{s} \cdot p^n + \frac{r}{s} = 0.$$

Liegt zwischen dem Schlusse der Einzahlungen und dem ersten Rentenbezug eine Zeit von q Jahren, so verstreicht bei nachschüssigen Renten von dem Anfange der Einzahlungsperiode bis zum Beginne der Rentenperiode eine Zeit von $(m + q - 1)$ Jahren, und es ist somit zu berechnen, wie groß der Endwerth der Einzahlungen an diesem letzteren Zeitpunkte ist, und dieser Werth alsdann dem für dieselbe Zeit berechneten Baarwerthe der Rente gleichzusetzen.

Die Summe, welche mmal je am Schlusse eines Jahres einbezahlt wird, hat zur Zeit der letzten Einzahlung den Werth $\frac{s\,(p^m - 1)}{p-1}$. Dieser Werth erhöht sich aber bis zum Beginn der Rentenperiode, also in $(q-1)$ Jahren, auf $\frac{s\,(p^m - 1)}{p-1} \cdot p^{q-1}$; die njährige Jahresrente hat an demselben Zeitpunkte den Baarwerth $\frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)}$, folglich ist

$$\frac{s\,(p^m - 1) \cdot p^{q-1}}{p-1} = \frac{r\,(p^n - 1)}{p^n\,(p-1)} \quad \text{oder}\quad s\,(p^m - 1)\,p^{n+q-1} = r\,(p^n - 1).$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{VI. } r = \frac{s\,(p^m - 1)\,p^{n+q-1}}{p^n - 1}$$

$$\text{VII. } s = \frac{r\,(p^n - 1)}{(p^m - 1)\,p^{n+q-1}}$$

$$\text{VIII. } p^n = \frac{r}{r - s\,(p^m - 1)\,p^{q-1}}$$

$$n = \frac{\log r - \log\,[r - s\,(p^m - 1)\,p^{q-1}]}{\log p}$$

$$\text{IX. } p^m = \frac{sp^{n+q-1} + r\,(p^n - 1)}{sp^{n+q-1}}$$

$$m = \frac{\log\,[sp^{n+q-1} + r\,(p^n - 1)] - [\log s + (n + q - 1)\log p]}{\log p}$$

$$\text{X. } p^q = \frac{r\,(p^n - 1)}{s\,(p^m - 1)\,p^{n-1}}$$

$$q = \frac{\log r + \log\,(p^n - 1) - [\log s + \log\,(p^m - 1) + (n - 1)\log p]}{\log p}$$

$$\text{XI. } p^{m+n+q-1} - p^{n+q-1} - \frac{r}{s}\,p^n + \frac{r}{s} = 0.$$

Vielfach werden die Zinsen von den Banken bei Einnahmen anders berechnet als bei Ausgaben, indem sie für vereinnahmte Gelder einen geringeren Procentsatz als für verausgabte annehmen. In diesem Falle sind die Endwerthe der beiderseitigen Leistungen am Schlusse der Rentenperiode für die Aufstellung der Gleichung maßgebend. —

Bezeichnet man demnach den Zinsfuß, nach welchem der Endwerth der Einzahlungen berechnet wird, mit p und den Zinsfuß, welcher bei der Berechnung der Rente in Anwendung kommt, mit p_1, so ist der Endwerth der Einzahlungen am Schlusse der Rentenperiode $= \frac{s\,(p^m - 1)\,p^{n+q-1}}{p - 1}$ und der Endwerth der Rente an demselben Zeitpunkte $= \frac{r\,(p_1{}^n - 1)}{p_1 - 1}$, und es ist somit

$$\frac{s\,(p^m - 1)\,p^{n+q-1}}{p - 1} = \frac{r\,(p_1{}^n - 1)}{p_1 - 1}, \text{ folglich}$$

$$\text{XII. } r = \frac{s\,(p^m - 1)\,p^{n+q-1} \cdot (p_1 - 1)}{(p_1{}^n - 1)\,(p - 1)}$$

$$\text{XIII. } s = \frac{r\,(p_1{}^n - 1)\,(p - 1)}{(p^m - 1)\,p^{n+q-1} \cdot (p_1 - 1)}.$$

Folgt die Rentenperiode sogleich auf die letzte Einzahlung, so daß schon nach einem Jahre die erste Rente bezahlt wird, so ist $(q-1) = 0$, und man erhält aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\text{XIV. } r = \frac{s\,(p^m - 1)\,p^n\,(p_1 - 1)}{(p_1{}^n - 1)\,(p - 1)}$$

$$\text{XV. } s = \frac{r\,(p_1{}^n - 1)\,(p - 1)}{(p^m - 1)\,p^n\,(p_1 - 1)}.$$

Beispiele.

1. Jemand zahlt in eine Bank 25 Jahre lang am Schlusse eines jeden Jahres 50 fl., um vom Ende des 26sten Jahres an eine 12jährige Rente zu beziehen. Wie groß wird dieselbe sein, wenn 4% Zinsen für vereinnahmte wie für verausgabte Gelder von der Bank gerechnet werden?

Nach Gleichung I ist

$$r = \frac{50\,(1{,}04^{25} - 1)\,.\,1{,}04^{12}}{1{,}04^{12} - 1}$$

$$25 \log 1{,}04 = 0{,}4258325$$

$$1{,}04^{25} - 1 = 1{,}66583$$

$$12 \log 1{,}04 = 0{,}2043996$$

$$1{,}04^{12} - 1 = 0{,}60103$$

$$\text{also} \quad r = \frac{50\,.\,1{,}66583\,.\,1{,}04^{12}}{0{,}60103}$$

$$\log 50 = 1{,}6989700$$

$$12 \log 1{,}04 = 0{,}2043996$$

$$\log 1{,}66583 = 0{,}2216307$$

$$2{,}1250003$$

$$\log 0{,}60103 = 0{,}7788962 - 1$$

$$\log r = 2{,}3461041$$

$$r = 221{,}87\ldots \text{fl.}$$

2. Welche Summe hat man 20 Jahre lang am Anfange eines jeden Jahres in eine Kasse einzulegen, um vom Anfange des 21sten Jahres an eine vorschüssige Rente von 500 fl. 10 Jahre lang zu beziehen, wenn durchgehends 3% Zinsen gerechnet werden?

Der Werth der Einzahlungen ist am Anfange des 20sten Jahres

$$= \frac{s\,(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03 - 1}.$$

Da aber bis zur letzten Rentenzahlung 10 Jahre verstreichen, so wächst diese Summe bis dahin auf $\frac{s\,(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03 - 1}\,.\,1{,}03^{10}$ an.

Die Rente hat zur Zeit der letzten Rentenzahlung den Werth

$\frac{500\,(1{,}03^{10} - 1)}{1{,}03 - 1}$, folglich ist

$$\frac{s\,(1{,}03^{20} - 1)\,.\,1{,}03^{10}}{1{,}03 - 1} = \frac{500\,(1{,}03^{10} - 1)}{1{,}03 - 1}$$

$$s = \frac{500\,(1{,}03^{10} - 1)}{(1{,}03^{20} - 1)\,1{,}03^{10}}.$$

$$10 \log 1{,}03 = 0{,}1283720$$

$$1{,}03^{10} - 1 = 0{,}343915$$

$$20 \log 1{,}03 = 0{,}2567440$$

$$1{,}03^{20} - 1 = 0{,}80611$$

$$\text{also} \quad s = \frac{500\,.\,0{,}343915}{0{,}80611\,.\,1{,}03^{10}}$$

$$\log 500 = 2{,}6989700$$
$$\log 0{,}343915 = 0{,}5364511 - 1$$
$$2{,}2354211$$
$$\log 0{,}80611 = 0{,}9063943 - 1$$
$$10 \log 1{,}03 = 0{,}1283720$$
$$0{,}0347663$$
$$\log s = 2{,}2006548$$
$$s = 158{,}728 \ldots \text{fl.}$$

3. Es werden 12 Jahre lang je am Schlusse eines Jahres 250 fl. in eine Bank eingelegt, um vom Schlusse des 20sten Jahres an eine 10jährige Rente zu beziehen. Wie hoch ist diese, wenn durchweg $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen in Rechnung kommen?

Da hier $m = 12$, $q = 8$, $n = 10$ ist, so erhält man nach Gleichung VI

$$r = \frac{250\,(1{,}035^{12} - 1)\,.\,1{,}035^{10+7}}{1{,}035^{10} - 1}$$
$$12 \log 1{,}035 = 0{,}1792836$$
$$1{,}035^{12} - 1 = 0{,}5110665$$
$$10 \log 1{,}035 = 0{,}149403$$
$$1{,}035^{10} - 1 = 0{,}410597$$
$$\text{also} \quad r = \frac{250\,.\,0{,}5110665\,.\,1{,}035^{17}}{0{,}410597}$$
$$\log 250 = 2{,}3979400$$
$$\log 0{,}5110665 = 0{,}7084774 - 1$$
$$17 \log 1{,}035 = 0{,}2539851$$
$$2{,}3604025$$
$$\log 0{,}410597 = 0{,}6134157 - 1$$
$$\log r = 2{,}7469868$$
$$r = 558{,}45 \ldots \text{fl.}$$

4. Wie hoch wird sich die Rente belaufen, wenn in der vorigen Aufgabe bei Beibehaltung der übrigen Bedingungen die Bank für vereinnahmte Gelder 3%, für verausgabte aber $3\frac{1}{2}\%$ Zinsen rechnet?

Wird in Gleichung XII $p_1 = 1{,}035$ und $p = 1{,}03$ gesetzt, so ist

$$r = \frac{250\,(1{,}03^{12} - 1)\,.\,1{,}03^{17}\,.\,0{,}035}{(1{,}035^{10} - 1)\,.\,0{,}03},$$
$$12 \log 1{,}03 = 0{,}1540464$$
$$1{,}03^{12} - 1 = 0{,}42576$$
$$10 \log 1{,}035 = 0{,}1494030$$
$$1{,}035^{10} - 1 = 0{,}410597$$
$$\text{also} \quad r = \frac{250\,.\,0{,}42576\,.\,1{,}03^{17}\,.\,0{,}035}{0{,}410597\,.\,0{,}03}.$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 250 = & 2,3979400 \\
\log 0,42576 = & 0,6291649 - 1 \\
17 \log 1,03 = & 0,2182324 \\
\log 0,035 = & \underline{0,5440680 - 2} \\
 & 0,7894053 \\
\log 0,410597 = & 0,6134157 - 1 \\
\log 0,03 = & \underline{0,4771213 - 2} \\
 & 0,0905370 - 2 \\
 & 0,7894053 \\
 & \underline{0,0905370 - 2} \\
\log r = & 2,6988683 \\
r = & 499,88\ldots \text{fl.}
\end{array}
$$

5. Welche Summe ist 16 Jahre lang am Anfange eines jeden Jahres in eine Kasse einzulegen, um vom Anfange des 17ten Jahres an eine Jahresrente von 870 fl. auf 24 Jahre zu erhalten, wenn von der Kasse für vereinnahmte Gelder 3%, für verausgabte aber 4% in Rechnung gebracht werden?

Nach Gleichung XV ist, wenn $p_1 = 1,04$, $p = 1,03$, $n = 24$, $m = 16$, $r = 870$ gesetzt wird

$$s = \frac{870\,(1,04^{24} - 1)\,.\,0,03}{(1,03^{16} - 1)\,.\,1,03^{24}\,.\,0,04} = \frac{652,5\,.\,(1,04^{24} - 1)}{(1,03^{16} - 1)\,.\,1,03^{24}}.$$

$$
\begin{array}{rl}
24 \log 1,04 = & 0,4087992 \\
1,04^{24} - 1 = & 1,5633 \\
16 \log 1,03 = & 0,2053952 \\
1,03^{16} - 1 = & 0,604704 \\
\text{also } s = & \dfrac{652,5\,.\,1,5633}{0,604704\,.\,1,03^{24}}. \\
\log 652,5 = & 2,8145805 \\
\log 1,5633 = & \underline{0,1940423} \\
 & 3,0086228 \\
\log 0,604704 = & 0,7815429 - 1 \\
24 \log 1,03 = & \underline{0,3080928} \\
 & 0,0896357 \\
 & 3,0086228 \\
 & \underline{0,0896357} \\
\log s = & 2,9189871 \\
s = & 829,82\ldots \text{fl.}
\end{array}
$$