# Polarcurven und Polcurven

entsprechender Kegelschnitte.

§. 1. Seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten eines Punktes bezogen auf ein Fundamentaldreieck, dessen Seiten unten AB, rechts BC, links CA die Gleichungen haben $\zeta=0$ $\xi=0$ und $\eta=0$, und $\alpha, \beta, \gamma$ die Coordinaten eines festen Punktes P, so ist bekanntlich $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$ die Gleichung einer Geraden $G=0$. Dieselbe Gleichung ist zugleich die Bedingung, daß die Geraden $\xi x+\eta y+\zeta z=0$ durch den Punkt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gehen; dieselben bilden ein Strahlenbüschel um den Punkt P. Der Punkt P und die Gerade G entsprechen sich also in der Weise, daß zu den Punkten der Geraden G ein Strahlenbüschel um den Punkt P gehört; so gehört zu einer jeden Geraden ein entsprechender Punkt und zu einem jeden Punkte eine entsprechende Gerade. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bedeuten bekanntlich die Verhältnisse der Abstände eines Punktes von den Seiten BC, CA, AB des Fundamentaldreiecks, und, legt man ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe h zu Grunde, so ist, wenn $\lambda\xi$, $\lambda\eta$, $\lambda\zeta$ die wirklichen Abstände bedeuten, $\lambda(\xi+\eta+\zeta)=-h$. Nun sind die Coordinaten des Durchschnittspunktes D der Höhen $\alpha=1$ $\beta=1$ $\gamma=1$, demnach ist die Gleichung der diesem Punkte entsprechenden Geraden $\xi+\eta+\zeta=0$, dieselbe muß also in unendlicher Entfernung liegen; folglich entsprechen die Punkte im Unendlichen einem Strahlenbüschel um D und zwar entsprechen den Punkten eines Strahles durch D die zu demselben gezogenen Senkrechten; dem Strahlenbüschel um A, B und C entsprechen die Punkte der Geraden BC, CA und AB; den Mittelpunkten der Seiten AB, BC und CA entsprechen ihre Parallelen durch C, A und B, den Höhen des Dreiecks entsprechen die unendlich entfernten Punkte der Seiten, auf welche die Höhen gefällt werden. Außerdem geht aus der Definition des Entsprechens von Punkt und Geraden unmittelbar hervor, daß der Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte der Durchschnittspunkt der den Punkten entsprechenden Geraden entspricht, daß, wenn mehrere Punkte in gerader Linie liegen, die entsprechenden Geraden sich in einem Punkte schneiden und zwar in dem Punkte, der jener Geraden entspricht. Um durch geometrische Construction den entsprechenden Punkt P einer Geraden G zu finden, kann man folgendermaßen verfahren. Seien a, b, c die Durchschnittspunkte von G mit BC, CA, AB, so fälle man von a die Lothe $a\beta$ und $a\gamma$ auf AC und AB, trägt $a\beta$ auf $a\gamma$ und $a\gamma$ auf $a\beta$, von $\gamma$ und $\beta$ aus, positiv und negativ ab (die positive Seite von AB z. B. ist die, auf welcher das Fundamentaldreieck nicht liegt), so erhält man die Punkte $a_1$ $a_2$ $a'$ $a''$, zieht man nun durch die beiden ersten Punkte die Parallelen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zu AB, durch die beiden letzten die Parallelen $\alpha'$ und $\alpha''$ zu AC, so schneiden sich $\alpha_1$ $\alpha''$ und $\alpha_2$ $\alpha'$ in den Punkten $A_1$ und $A_2$, welche mit A auf einer geraden Linie liegen; verschafft man sich durch dieselbe Construction von b und c ausgehend die Punkte $B_1$ und $B_2$, welche mit B und $C_1$ und $C_2$, welche mit C auf einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die drei Geraden $AA_1A_2$, $BB_1B_2$, $CC_1C_2$

in einem Punkte P, welcher der der Geraden G entsprechende Punkt ist. Ist umgekehrt der Punkt P gegeben, so fälle man, um die entsprechende Gerade G zu finden, von P die Lothe Pa, Pb, Pc auf BC, CA, AB, trage Pb auf Pc und Pc auf Pb von c und b aus positiv und negativ ab, dadurch erhält man die Punkte $c_1\,c_2$ $b_1\,b_2$, zieht man nun durch die beiden ersten die Parallelen $\gamma_1$ und $\gamma_2$ zu AB, und durch die beiden anderen die Parallelen $\beta_1$ und $\beta_2$ zu AC, so schneiden sich $\gamma_1\,\beta_2$ und $\gamma_2\,\beta_1$ in Punkten $A_1$ und $A_2$, welche mit A auf gerader Linie liegen, durch dieselbe Construction findet man von den Lothen Pc, Pa und Pa, Pb ausgehend die Punkte $B_1$ $B_2$, welche mit B und $C_1$ $C_2$, welche mit C auf gerader Linie liegen; zieht man nun die Geraden $AA_1\,A_2$, $BB_1\,B_2$, $CC_1\,C_2$ so erhält man auf BC, CA und AB drei Schnittpunkte A'B'C', welche in einer Geraden G liegen, und es ist alsdann G diejenige Gerade, die nach der gegebenen Erklärung dem Punkte P entspricht.

Es sollen nun noch einige Formeln angeführt werden, die im Folgenden Verwendung finden.

Der Winkel $\varphi$ zwischen zwei Geraden $G=0$ und $G'=0$ ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\,\frac{\alpha(\beta'-\gamma')+\beta(\gamma'-\alpha')+\gamma(\alpha'-\beta')}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')+(\beta-\gamma)(\beta'-\gamma')+(\gamma-\alpha)(\gamma'-\alpha')}.$$

Wenn eine Gerade G durch den Schnittpunkt der Geraden G' und G'' gehen soll, so muß

$$\alpha=\lambda\alpha'+\mu\alpha'' \quad \beta=\lambda\beta'+\mu\beta'' \quad \gamma=\lambda\gamma'+\mu\gamma''$$

sein, soll G den Winkel zwischen G' und G'' halbiren, so muß

$$\lambda^{-2}=(\alpha'-\beta')^2+(\beta'-\gamma')^2+(\gamma'-\alpha')^2$$
$$\mu^{-2}=(\alpha''-\beta'')^2+(\beta''-\gamma'')^2+(\gamma''-\alpha'')^2$$

sein. Die Geraden G und G' sind parallel, wenn ihr Durchschnittspunkt auf der Geraden $\xi+\eta+\zeta=0$ liegt, die Bedingung ist also

$$\alpha-\alpha'=\beta-\beta'=\gamma-\gamma'$$

die Bedingung, daß die Geraden senkrecht stehen, ist

$$(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')+(\beta-\gamma)(\beta'-\gamma')+(\gamma-\alpha)(\gamma'-\alpha')=0.$$

Zwei Strahlen von A und B aus, welche die Gleichungen haben $\eta=\lambda\zeta$, $\xi=\varkappa\zeta$ schließen einen Winkel ein, der durch die Formel bestimmt ist:

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\,\frac{1+\varkappa+\lambda}{3\varkappa\lambda-(1-\lambda)(1-\varkappa)}.$$

Ist also $1+\varkappa+\lambda=0$, so sind die Strahlen parallel.

Zwei Strahlen von A aus, welche die Gleichungen haben $\eta=\varkappa\zeta$, $\eta=\varkappa'\zeta$ schließen einen Winkel ein, der bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\,\frac{\varkappa-\varkappa'}{1+\varkappa\varkappa'+(1+\varkappa)(1+\varkappa')}.$$

Die Entfernung zweier Punkte $P=(\xi,\eta,\zeta)$ $P'=(\xi',\eta',\zeta')$ ist

$$s={}^2/_3\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}$$

wenn $a=\lambda\xi-\lambda'\xi'$; $b=\lambda\eta-\lambda'\eta'$; $c=\lambda\zeta-\lambda'\zeta'$,

wo $\lambda$ und $\lambda'$ die Zahlen bedeuten, mit denen man $(\xi+\eta+\zeta)$ und $(\xi'+\eta'+\zeta')$ zu multipliciren hat, um $-h$ zu erhalten. Für die Entfernung e eines Punktes $P=(\xi,\eta,\zeta)$ von einer Geraden $G=(\alpha,\beta,\gamma)$ findet man

$$e=\frac{\lambda(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}}.$$

Genügen also $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

so erhält man die Entfernung des Punktes P von G dadurch, daß man seine Abstände von den Seiten des Fundamentaldreiecks in den Ausdruck G einsetzt. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ positiv, so wird G positiv, wenn P nicht mit ABC auf derselben Seite liegt, man kann denjenigen Theil der Ebene, welcher ABC nicht enthält deshalb als den positiven ansehen, den anderen als den negativen; ist einer der Coefficienten negativ so schneidet $G=0$ das Fundamentaldreieck, es ist alsdann derjenige Theil der Ebene der positive, auf welchem nur ein Punkt des Fundamentaldreiecks liegt.

Um von einem Fundamentaldreieck ABC, auf ein anderes $A'B'C'$ zu transformiren, mögen dessen Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ die Gleichungen haben

$$\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta = 0 \quad \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta = 0$$
$$\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta = 0$$

deren Coefficienten der obigen Bedingung genügen. Sind alsdann $(\xi', \eta', \zeta')$ die Coordinaten irgend eines Punktes $P = (\xi, \eta, \zeta)$ in Bezug auf $A'B'C'$, so ist

$$\lambda'\xi' = \lambda(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta); \; \lambda'\eta' = \lambda(\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta)$$
$$\lambda'\zeta' = \lambda(\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta)$$

folglich ist

$$\lambda\xi = \lambda'(a_1 \xi' + b_1 \eta' + c_1 \zeta'); \; \lambda\eta = \lambda'(a_2 \xi' + b_2 \eta' + c_2 \zeta')$$
$$\lambda\zeta = \lambda'(a_3 \xi' + b_3 \eta' + c_3 \zeta')$$

wo $\quad a_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 \quad b_1 = \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 \quad c_1 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3$ ꝛc.

Damit das Dreieck $A'B'C'$ auch ein gleichseitiges ist, muß

$$\frac{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) + (\beta_1 - \gamma_1)(\beta_2 - \gamma_2) + (\gamma_1 - \alpha_1)(\gamma_2 - \alpha_2)}{\alpha_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\alpha_2 - (\beta_1\alpha_2 + \gamma_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_2)} = \pm 1$$

sein; dieselbe Bedingungsgleichung findet ebenso zwischen $B'C'$ und $A'B'$, $C'A'$ und $A'B'$ statt.

§. 2. Genügen nun $\xi, \eta, \zeta$ der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta = 0$$

so liegt der Punkt $P = (\xi, \eta, \zeta)$ auf einem Kegelschnitt $K=0$; hat ein unendlich naher Punkt $P'$ auf K die Coordinaten $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$, so entspricht der Verbindungslinie von $PP'$, also der Tangente an K ein Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$, wo

$$\alpha = A\xi + F\eta + E\zeta$$
$$\beta = F\xi + B\eta + D\zeta$$
$$\gamma = E\xi + D\eta + C\zeta$$

ist; hieraus folgt

$$\varDelta . \xi = p\alpha + n\beta + m\gamma$$
$$\varDelta . \eta = n\alpha + q\beta + l\gamma$$
$$\varDelta . \zeta = m\alpha + l\beta + r\gamma$$

wo $p = BC - D^2 \quad q = CA - E^2 \quad r = AB - F^2$

$l = EF - AD \quad m = FD - BE \quad n = DE - CF$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}$$

Bei der Auflösung der Gleichungen nach $\xi, \eta, \zeta$ ist vorauszusetzen, daß diese Determinante nicht $= 0$ ist; dies ist auch stets der Fall, wenn nicht der Kegelschnitt in gerade Linien zerfällt; man erhält nämlich für den Krümmungsradius die allgemeine Formel

$$\varrho = \frac{4h}{3(\xi + \eta + \zeta)^3} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_3 \\ 1 & F_2 & F_1 \\ 1 & F_3 & F_2 \end{vmatrix}^{3/2}}{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}}$$

wenn $F=0$ die Gleichung der Curve, $F_1$, $F_2$, $F_3$ die ersten und $F_{11}$ bis $F_{33}$ die zweiten Differential-

Coefficienten von F nach $\xi, \eta, \zeta$ sind; die Determinante des Nenners ist nun für die allgemeine Gleichung zweiten Grades $= \Delta$; wäre also $\Delta = 0$, so wäre der Krümmungsradius eines jeden Punktes von K unendlich, also K bestände aus zwei Geraden; daher läßt sich in allen Fällen, wenn K eine Ellipse, Parabel und Hyperbel ist, aus $\alpha\ \beta\ \gamma$ auch $\xi\ \eta\ \zeta$ finden. Eliminirt man nun aus $K = 0$ und den drei Gleichungen für $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Coordinaten $\xi\ \eta\ \zeta$, so findet man

$$p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta = 0.$$

Wenn sich also die Tangente um den Kegelschnitt K bewegt, so beschreibt ihr entsprechender Punkt einen Kegelschnitt H; umgekehrt entspricht der Tangente an H ein Punkt auf K und zwar der Berührungspunkt derjenigen Tangente an K, welche dem Berührungspunkt der angenommenen Tangente an H entspricht. Eine Gerade $G = 0$ kann also angesehen werden entweder als eine Tangente an K, wenn $\xi\ \eta\ \zeta$ variabel sind und $H(\alpha\beta\gamma) = 0$ oder als eine Tangente an H wenn $\alpha\beta\gamma$ variabel und $K(\xi\eta\zeta) = 0$ ist, mit anderen Worten, die Gleichung K in Liniencoordinaten ist in Punktcoordinaten die Gleichung H und umgekehrt; zwei Curven, welche in dieser Weise zu einander gehören, sollen im Folgenden als entsprechende bezeichnet werden.

Im Allgemeinen sind H und K nicht von derselben Gattung, es soll daher zunächst erörtert werden, von welcher Gattung die entsprechenden Kegelschnitte sind. Betrachtet man K als den Ort der Durchschnittspunkte zweier Strahlenbüschel um A und B nämlich $\eta = \lambda\zeta$ und $\xi = \varkappa\zeta$ so ist

$$B\lambda = -F\varkappa - D + \sqrt{(F^2 - AB)\varkappa^2 + 2(DF - EB)\varkappa + D^2 - CB}.$$

Ist $\lambda + \varkappa + 1 = 0$ so werden die Strahlen parallel, K hat demnach keinen, einen oder zwei unendlich entfernte Punkte, je nachdem die Gleichung

$$\varkappa^2(A + B - 2F) + 2\varkappa(B - D + E - F) + B + C - 2D = 0$$

keinen, einen oder zwei reelle Werthe für $\varkappa$ liefert, daher ist K eine Ellipse, Parabel, Hyperbel; je nachdem

$$(B - D + E - F)^2 - (A + B - 2F)(B + C - 2D) \lesseqgtr 0$$

ist, oder, was dasselbe ist, je nachdem $p + q + r + 2(l + m + n) \gtreqless 0$ ist. Man findet die Asymptoten einer Curve auch durch folgende Ueberlegung. Sei $F = 0$ die Gleichung einer Curve, $f = 0$ die der entsprechenden, so muß, wenn $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ Asymptote an F ist, $f(\alpha\beta\gamma) = 0$ sein, weil ferner der Berührungspunkt $\xi\eta\zeta$ im Unendlichen liegt, so muß $\xi + \eta + \zeta = 0$ sein, nun ist $\xi = \frac{df}{d\alpha} = f_1 \quad \eta = f_2$ $\zeta = f_3$, daher findet man die Asymptoten an $F = 0$ aus $f = 0$ und $f_1 + f_2 + f_3 = 0$; um also die Asymptoten an K zu finden, hat man die Wurzeln der Gleichungen

$$p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta = 0$$

und

$$(p + n + m)\alpha + (n + q + l)\beta + (m + l + r)\gamma = 0$$

zu bestimmen; zunächst erhält man unmittelbar die Coordinaten des Mittelpunktes $x y z$ von K

$$x = p + n + m; \quad y = n + q + l; \quad z = m + l + r.$$

Seien $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$, $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2$ die Wurzeln, so ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_2 &= a & \alpha_1 \beta_2 &= f + \sqrt{f^2 - ab} \\ \beta_1 \beta_2 &= b & \beta_1 \gamma_2 &= d + \sqrt{d^2 - bc} \\ \gamma_1 \gamma_2 &= c & \gamma_1 \alpha_2 &= e + \sqrt{e^2 - ca} \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} a &= qz^2 + ry^2 - 2lyz & d &= -pyz + x(-lx + my + nz) \\ b &= rx^2 + pz^2 - 2mzx & e &= -qzx + y(lx - my + nz) \\ c &= py^2 + qx^2 - 2nxy & f &= -rxy + z(lx + my - nz) \end{aligned}$$

nun findet man

$$\frac{\sqrt{d^2 - bc}}{x} = \frac{\sqrt{e^2 - ca}}{y} = \frac{\sqrt{f^2 - ab}}{z} = \Delta\sqrt{-(p + q + r + 2(l + m + n))}$$

daher erhält man dieselbe Bedingung wie oben; die Asymptoten sind reell oder imaginär, je nachdem

$$p+q+r+2(l+m+n)\lesseqgtr 0$$

oder je nachdem $x+y+z \lesseqgtr 0$ ist, ist K eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Um die Hauptaxen zu finden, wendet man die Formeln für die Halbirungslinien des Winkels zweier Geraden (§. 1) an. Sind aber die Wurzeln imaginär, also

$$\alpha_1=\alpha'+\alpha''i \quad \beta_1=\beta'+\beta''i \quad \gamma_1=\gamma'+\gamma''i$$
$$\alpha_2=\alpha'-\alpha''i \quad \beta_2=\beta'-\beta''i \quad \gamma_2=\gamma'-\gamma''i$$

so findet man

$$\lambda^{-2}=(\alpha'-\beta')^2+(\beta'-\gamma')^2+(\gamma'-\alpha')^2-(\alpha''-\beta'')^2-(\beta''-\gamma'')^2-(\gamma''-\alpha'')^2$$
$$+2i\big((\alpha'-\beta')(\alpha''-\beta'')+(\beta'-\gamma')(\beta''-\gamma'')+(\gamma'-\alpha')(\gamma''-\alpha'')\big)$$

woraus
$$\lambda = L+Mi \text{ und } \mu = L-Mi$$

Sind nun $u\,v\,w$ und $u_1\,v_1\,w_1$ die Coefficienten der Gleichungen der Hauptaxen, so ist

$$u=\alpha' L-\alpha'' M \quad v=\beta' L-\beta'' M \quad w=\gamma' L-\gamma'' M$$
$$u_1=\alpha'' L+\alpha' M \quad v_1=\beta'' L+\beta' M \quad w_1=\gamma'' L+\gamma' M$$

Die Gattung von H hängt nun ebenso von den Coefficienten pqrlmn ab, wie die des Kegelschnitts K von ABCDEF abhängig ist, nun ist

$$qr-l^2=A\,.\,\varDelta,\ rp-m^2=B\,.\,\varDelta,\ pq-n^2=C\,.\,\varDelta$$
$$mn-pl=D\,.\,\varDelta,\ nl-qm=E\,.\,\varDelta,\ lm-nr=F\,.\,\varDelta$$

die Gattung von H hängt also ab von der Funktion

$$\varDelta(A+B+C+2(D+E+F))$$

Ist dieselbe $\lesseqgtr 0$, so ist H eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse; wählt man die Vorzeichen in K so, daß $\varDelta>0$, so hängt die Gattung des Kegelschnitts H nur ab von $A+B+C+2(D+E+F)$, ebenso wie die von K abhängig ist von $p+q+r+2(l+m+n)$; beide Funktionen gehen aus H und K hervor, wenn man die Coordinaten des Mittelpunktes D des Fundamentaldreiecks ABC in H und K einsetzt. Unter der Voraussetzung $\varDelta>0$ machen nun innere Punkte die Funktion H und K positiv, äußere negativ. Man kann also das Resultat auch so aussprechen: schließen H und K den Punkt D ein, so müssen beide Ellipsen sein, schließt nur ein Kegelschnitt denselben ein, so ist der einschließende eine Hyperbel, der andere eine Ellipse, schließt weder K noch H den Punkt D ein, so sind beide Hyperbeln, und geht ein Kegelschnitt durch D, so ist der andere eine Parabel, gehen beide durch D, so sind beide Parabeln; dasselbe Resultat folgt auch unmittelbar aus dem Satze, daß den Punkten im Unendlichen Strahlen durch D entsprechen. —

§. 3. Für besonders gewählte Fundamentaldreiecke vereinfacht sich nun die Gleichung von K. Geht z. B. der Kegelschnitt durch einen Punkt desselben A, B oder C, so muß der Factor von $\xi^2$, $\eta^2$ oder $\zeta^2$ verschwinden, berührt derselbe eine Seite also AB, BC oder BA, so muß $F=\sqrt{AB}$, $D=\sqrt{BC}$ oder $E=\sqrt{CA}$ sein, wählt man also ein solches Fundamentaldreieck, daß K durch A und B geht und CA und CB berührt so nimmt K die einfachste Form an und kann geschrieben werden

$$\zeta^2-4p\xi\eta=0;$$

wo p irgend eine positive oder negative Zahl bedeutet; der Kegelschnitt ist nach §. 2 eine Hyperbel, Parabel, Ellipse, je nachdem $1-\frac{1}{p}\gtreqless 0$ ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für die Werthe von | $p=-\infty\ldots.0$ | ist K eine | Hyperbel, |
| „ | $p=\ \ 0\ldots.1$ | „ | Ellipse, |
| „ | $p=\ \ 1$ | „ | Parabel, |
| „ | $p=\ \ 1\ldots.\infty$ | „ | Hyperbel, |

Es sei zuerst K eine Ellipse, so sind die Coordinaten des Mittelpunktes $\xi=1$ $\eta=1$ $\zeta=-2p$; die Gleichungen der Hauptaxen sind $\xi-\eta=0$ und $p\xi+p\eta+\zeta=0$. Die Coordinaten der Scheitelpunkte sind $\xi=1$ $\eta=1$ $\zeta=2\sqrt{p}$ und $\xi=1+\sqrt{1-p}$ $\eta=1-\sqrt{1-p}$ $\zeta=-2p$; die Länge der Hauptaxen ist $h\frac{\sqrt{p}}{1-p}$ und $h\frac{1}{\sqrt{3(1-p)}}$, die Excentricität ist $\frac{h}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4p-1}}{1-p}$; für $p=1/4$ ist also die Ellipse ein Kreis, dessen Gleichung ist $\zeta^2=\xi\eta$; die Punkte desselben erfüllen also die Bedingung, daß das Quadrat ihrer Entfernung von AB gleich dem Rechteck der Entfernungen von CB und CA ist. Ist $p<1/4$ so ist die Excentricität $=\frac{h}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1-4p}}{1-p}$.

Ist zweitens $1<p<\infty$, also K eine Hyperbel, so ist $\xi-\eta=0$ die Gleichung der Hauptaxe, $p\xi+p\eta+\zeta=0$ die Gleichung der Nebenaxe, die Coordinaten des Mittelpunktes sind $\xi=1$ $\eta=1$ $\zeta=-2p$; die der Scheitelpunkte $\xi=1$ $\eta=1$ $\zeta=2\sqrt{p}$. Die Länge der Axe ist $h\,.\,\frac{\sqrt{p}}{1-p}$, der Asymptotenwinkel $\operatorname{tg}\delta=\frac{2\sqrt{3p(p-1)}}{2p+1}$, die Gleichungen der Asymptoten sind

$$\xi(p\pm\sqrt{p\,.\,p-1})+\eta(p\mp\sqrt{p\,.\,p-1})+\zeta=0.$$

Ist dagegen K eine Hyperbel und p negativ, so wird die Hauptaxe des vorigen Falles zur Nebenaxe und umgekehrt, die Coordinaten der Scheitelpunkte sind alsdann $\xi=1+\sqrt{1-p}$, $\eta=1-\sqrt{1-p}$, $\zeta=-2p$; die Länge der Axe ist $\frac{h}{\sqrt{3(1-p)}}$, in diesem Falle liegt der Mittelpunkt der Hyperbel stets innerhalb des $\triangle$ABC, wennn drittens $p=1$, also K eine Parabel ist, so sind die Coordinaten des Scheitelpunktes $\xi=1$ $\eta=1$ $\zeta=2$, derselbe ist also der Mittelpunkt der Höhe, der Brennpunkt fällt mit dem Mittelpunkte des Dreiecks ABC zusammen, der Parameter ist $^2/_3$ h.

Der entsprechende Kegelschnitt H hat die Gleichung $p\zeta^2=\xi\eta$,

also entspricht einer Hyperbel eine andere Hyperbel, wenn $-\infty<p<0$
" " eine Hyperbel sich selbst, wenn $p=-1/2$
" " einer Ellipse eine Hyperbel, wenn $0<p<1/4$
" " einem Kreise eine Parabel, wenn $p=1/4$
" " einer Ellipse eine andere Ellipse, wenn $1/4<p<1$
" " eine Ellipse sich selbst, wenn $p=1/2$
" " einer Parabel ein Kreis, wenn $p=1$
" " einer Hyperbel eine Ellipse, wenn $1<p<\infty$

Demnach kann ein Kegelschnitt K sich selbst entsprechen, das heißt, der entsprechende Punkt einer Tangente an K liegt auf K selbst, und umgekehrt die Gerade, welche irgend einem Punkte von K entspricht, ist eine bestimmte Tangente an K; ist z. B. $P=(\xi,\eta,\zeta)$ ein Punkt des Kegelschnitts $\zeta^2=2\xi\eta$ so ist die entsprechende Gerade $\xi x+\eta y+\zeta z=0$, dieselbe berührt den Kegelschnitt im Punkte $P'=(\eta,\xi,-\zeta)$, die Verbindungslinie PP′ halbirt AB, man findet demnach in diesem Falle den Berührungspunkt der entsprechenden Tangente eines Punktes, indem man durch P und den Mittelpunkt von AB eine Gerade zieht; daraus folgt zugleich, daß die Schnittpunkte der Tangenten in P und P′ in einer zu AB durch C gezogenen Parallelen liegen; es ist dies der bekannte Satz, daß, wenn man durch irgend einen Punkt Strahlen zieht, und in den Schnittpunkten derselben mit einem Kegelschnitt an diesen Tangenten legt, so müssen die Schnittpunkte der zu denselben Strahlen gehörigen Tangentenpaare in einer Geraden liegen, der angenommene Punkt ist der Pol, die erhaltene geradlinige Punktreihe die zugehörige Polare. Nun ist im Vorhergehenden gezeigt worden, daß zu einem Kegelschnitt K im Allgemeinen ein Kegelschnitt H gehört, der nicht mit ihm zusammenfällt, nicht einmal gleicher Gattung zu sein braucht; verbindet man nun den Punkt $P=(\xi,\eta,\zeta)$ von K mit dem zugehörigen $P'=(\alpha,\beta,\gamma)$ von H, so wird die Verbindungslinie nicht durch einen festen Punkt gehen, sondern eine Curve einhüllen, die, weil sie in dem erwähnten speciellen Fall zu einem Punkte, dem Pol wird, die **Polcurve** genannt werden soll, zugleich beschreibt der Durchschnittspunkt zweier zusammengehörigen Tangenten an K und H eine Curve, welche aus demselben Grunde im Folgenden als **Polarcurve** bezeichnet werden soll. Die Beschaffenheit dieser beiden Curven, der Polarcurve und der Polcurve, ist der Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Vorher mag noch erwähnt werden, wie man die Gleichung des Kegelschnitts auf seine einfachste Form bringen kann. Zunächst bestimmt man nach §. 2 die Coefficienten der Hauptaxen, es sei $u\xi+v\eta+w\zeta=0$ eine Hauptaxe, so erhält man die Seiten CA und CB aus den Gleichungen

$$\alpha(u+w-2v)+\beta(v+u-2w)+\gamma(w+v-2u)=0$$
$$\alpha(u+v-2w)+\beta(v+w-2u)+\gamma(w+u-2v)=0$$
$$p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2l\beta\gamma+2m\gamma\alpha+2n\alpha\beta=0$$

aus der ersten und dritten folgen die Coefficienten der einen Seite, aus der zweiten und dritten, die der anderen; die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist alsdann die dritte Seite AB des zu suchenden Fundamentaldreiecks; und mit Hülfe der Transformationsformeln §. 1 ist es dann möglich, die allgemeine Gleichung 2. Grades auf ihre einfachste Form zurückzuführen. Die Transformation ist nur dann unmöglich, wenn K eine Hyperbel ist, deren Asymptotenwinkel $>120^0$ ist.

§. 4. Um nun die Gleichung der Polarcurve zu finden, hat man zuerst die Gleichung einer beliebigen Tangente an K zu bestimmen, dieselbe sei

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$$

die Gleichung der Tangente an H im entsprechenden Punkte ist

$$(p\alpha+n\beta+m\gamma)\xi+(n\alpha+q\beta+l\gamma)\eta+(m\alpha+l\beta+r\gamma)\zeta=0$$

aus beiden folgt

$$\alpha=\eta(m\xi+l\eta+r\zeta)-\zeta(n\xi+q\eta+l\zeta)$$
$$\beta=\zeta(p\xi+n\eta+m\zeta)-\xi(m\xi+l\eta+r\zeta)$$
$$\gamma=\xi(n\xi+q\eta+l\zeta)-\eta(p\xi+n\eta+m\zeta)$$

setzt man diese Werthe in $H=0$ ein, so erhält man die Gleichung der Polarcurve $\Phi=0$; dieselbe wird:

$$\begin{gathered}\xi^4(qm^2+rn^2-2lmn)+\eta^4(rn^2+pl^2-2lmn)+\zeta^4(pl^2+qm^2-2lmn)\\ +\xi^2\eta^2[p(2l^2-m^2)+q(2m^2-l^2)+r((p-q)^2-2n^2)]+\eta^2\zeta^2[p((q-r)^2-2l^2)+q(2m^2-n^2)\\ +r(2n^2-m^2)]+\zeta^2\xi^2[p(2l^2-n^2)+q((p-r)^2-2m^2)+r(2n^2-l^2)]+\\ 2\xi^3\eta(plm+nr(q-p)-l^2n)+2\xi^3\zeta(pln+mq(r-p)-l^2m)+\\ 2\eta^3\zeta(qmn+lp(r-q)-m^2l)+2\eta^3\xi(qml+nr(p-q)-m^2n)+\\ 2\zeta^3\xi(rnl+mq(p-r)-n^2m)+2\zeta^3\eta(rnm+lp(q-r)-n^2l)+\\ 2\xi^2\eta\zeta[nm(p-2(q+r))+l(qr-p^2-l^2+2m^2+2n^2)]+\\ 2\xi\eta^2\zeta[ln(q-2(r+p))+m(rp-q^2+2l^2-m^2+2n^2)]+\\ 2\xi\eta\zeta^2[ml(r-2(p+q))+n(pq-r^2+2l^2+2m^2-n^2)]=0.\end{gathered}$$

Die Polarcurve ist also eine Curve 4. Grades; daraus folgt, daß die Polcurve eine Curve 4. Classe sein muß; eine jede Gerade schneidet nämlich die Polarcurve im Allgemeinen in vier Punkten, diesen entsprechen vier durch einen Punkt gehende Geraden, welche die 8 Berührungspunkte der zu jenen vier Punkten gehörigen Tangentenpaare verbinden, diese vier Geraden sind also (nach §. 3) Tangenten an die Polcurve; mithin ist dieselbe von der 4. Classe; wie ja überhaupt der Grad einer Curve die Klassenzahl der entsprechenden angiebt. Die Gleichung der Polcurve läßt sich nun entweder dadurch bestimmen, daß man $\xi,\eta,\zeta$ aus den Gleichungen $\Phi=0$, $\alpha=\frac{d\Phi}{d\xi}$, $\beta=\frac{d\Phi}{d\eta}$, $\gamma=\frac{d\Phi}{d\zeta}$ eliminirt, wodurch man eine Gleichung $\Psi(\alpha\beta\gamma)=0$ erhält, die eben die gesuchte ist, oder man kann folgenden Weg einschlagen. Die Gleichung der Verbindungslinie L zweier zusammengehörigen Punkte ist:

$$x(\beta\zeta-\gamma\eta)+y(\gamma\xi-\alpha\zeta)+z(\alpha\eta-\beta\xi)=0$$

wo $\xi, \eta, \zeta$ die in §. 2 angegebenen linearen Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma$ sind, und $x, y, z$ die laufenden Coordinaten bedeuten. Eliminirt man zwischen L und H die ersten Differentiale von $\alpha, \beta, \gamma$ so erhält man eine neue Gleichung, welche in $x, y, z$ vom 1. in $\alpha, \beta, \gamma$ vom 2. Grade ist; die erhaltene Gleichung werde bezeichnet mit $G=0$, so hat man aus den drei Gleichungen 2. Grades in $\alpha, \beta, \gamma$, diese zu eliminiren; dazu kann man den Satz benutzen, wenn $\alpha, \beta, \gamma$ den Gleichungen $H=0$, $L=0$ und $G=0$ genügen, daß sie dann auch die ersten Differentiale der Jacobi'schen Determinante (J) gleich Null machen. Man hat also zuerst, wenn die Differentialcoefficienten wieder durch Indices angedeutet werden, zu bilden

$$J = \begin{vmatrix} H_1 & L_1 & G_1 \\ H_2 & L_2 & G_2 \\ H_3 & L_3 & G_3 \end{vmatrix} = 0$$

und danach die sechs Gleichungen

$$\begin{aligned}
J_1 &= x_1\,\alpha^2 + x_2\,\beta^2 + x_3\,\gamma^2 + 2x_4\,\beta\gamma + 2x_5\,\gamma\alpha + 2x_6\,\alpha\beta = 0 \\
J_2 &= y_1\,\alpha^2 + y_2\,\beta^2 + y_3\,\gamma^2 + 2y_4\,\beta\gamma + 2y_5\,\gamma\alpha + 2y_6\,\alpha\beta = 0 \\
J_3 &= z_1\,\alpha^2 + z_2\,\beta^2 + z_3\,\gamma^2 + 2z_4\,\beta\gamma + 2z_5\,\gamma\alpha + 2z_6\,\alpha\beta = 0 \\
G &= u_1\,\alpha^2 + u_2\,\beta^2 + u_3\,\gamma^2 + 2u_4\,\beta\gamma + 2u_5\,\gamma\alpha + 2u_6\,\alpha\beta = 0 \\
L &= v_1\,\alpha^2 + v_2\,\beta^2 + v_3\,\gamma^2 + 2v_4\,\beta\gamma + 2v_5\,\gamma\alpha + 2v_6\,\alpha\beta = 0 \\
H &= p\,\alpha^2 + q\,\beta^2 + r\,\gamma^2 + 2l\,\beta\gamma + 2m\,\gamma\alpha + 2n\,\alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

Nun enthalten $H_1\,H_2\,H_3$ die Coordinaten $xyz$ der Polcurve überhaupt nicht, $L_1 \ldots G_3$ enthalten sie im ersten Grade, also $J_1$, $J_2$, $J_3$ enthalten sie im zweiten Grade, somit sind also $x_1 \ldots z_6$ Funktionen 2. Grades und $u_1 \ldots v_6$ Funktionen 1. Grades von $xyz$. Aus den vorstehenden Gleichungen lassen sich nun die sechs Größen $\alpha^2 \ldots \alpha\beta$ linear eliminiren, und man erhält die Gleichung der Polcurve in Determinantenform:

$$\Psi = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ p & q & r & l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

Die Polcurve ist also im Allgemeinen eine Curve 8. Grades, und somit die Polarcurve eine solche 8. Classe.

Die allgemeine Gleichung der Polcurve in Punktcoordinaten auszuführen, würde eine zu weitläuftige Rechnung erfordern. Einfache Gleichungen für $\Phi$ und $\Psi$ erhält man, wenn man den Kegelschnitt K auf ein solches Fundamentaldreieck bezieht, daß K eine einfache Gleichung erhält. Es soll daher im Folgenden zunächst K auf das im §. 3 erwähnte Dreieck bezogen und gezeigt werden, welche Gestalt die beiden Curven $\Phi$ und $\Psi$ in diesem Falle annehmen.

Zunächst erhält man nach dem Obigen als Gleichung der Polarcurve

$$\Phi = \zeta^2(\xi + 2p\eta)(\eta + 2p\xi) + p(\xi^2 - \eta^2)^2 = 0$$

Um zweitens die Gleichung der Polcurve zu finden, hat man zunächst die Gleichung der Verbindungslinie L

$$\xi(\alpha + 2p\beta)\gamma - \eta(\beta + 2p\alpha)\gamma - \zeta(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

wo $\xi\,\eta\,\zeta$ die laufenden Coordinaten von $L=0$ sind, dann ist

$$\begin{aligned}
dH &= \beta d\alpha + \alpha d\beta - 2p\gamma\, d\gamma = 0 \\
dL &= (2\alpha\zeta - \gamma x)\, d\alpha - (2\beta\zeta - \gamma y)\, d\beta - (\alpha x - \beta y)\, d\gamma = 0
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$x = \xi - 2p\eta \quad y = \eta - 2p\xi$$

gesetzt ist. Daraus folgt, je nachdem man $d\alpha$, $d\beta$, oder $d\gamma = 0$ setzt

$$\begin{aligned}
G &= x\alpha^2 - y\alpha\beta + 4p\zeta\beta\gamma - 2py\gamma^2 = 0 \\
G' &= x\alpha\beta - y\beta^2 - 4p\zeta\alpha\gamma + 2px\gamma^2 = 0 \\
G'' &= 2\alpha^2\zeta - \alpha\gamma x + 2\beta^2\zeta - \beta\gamma y = 0.
\end{aligned}$$

Aus einer dieser drei Gleichungen mit $H=0$ und $L=0$ zusammengenommen muß $\alpha\beta\gamma$ eliminirt werden. Nimmt man die erste, so wird

$$0=\Psi=\begin{vmatrix} 6x^2 & 4z & 24p\zeta y & 0 & 0 & 2pz_1 \\ 2z & 0 & 0 & 24p\zeta^2 & 24p\zeta y & 6py^2 \\ 12p\zeta y & 0 & 4pz_1 & 12p\zeta y & 12py^2 & -24p^2\zeta x \\ x & y & 0 & 0 & 4p\zeta & 2py \\ \zeta & 0 & -x & -\zeta & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

wo zur Abkürzung $z=4p\zeta^2+xy$; $z_1=8p\zeta^2-xy$ gesetzt ist. Eliminirt man dagegen $\alpha\beta\gamma$ aus $G''=0$, $L=0$ und $H=0$, so wird

$$0=\Psi=\begin{vmatrix} x\zeta & 2y\zeta & 0 & \tfrac{2}{8}z_1 & -x\zeta & 2y\zeta \\ y\zeta & -2x\zeta & \tfrac{2}{8}z_1 & 0 & -y\zeta & -2x\zeta \\ 0 & \tfrac{2}{8}z_1 & 4py\zeta & -4px\zeta & 0 & -2yx \\ \zeta & 0 & -x & -y & -\zeta & 0 \\ 2\zeta & 0 & -x & y & 2\zeta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Elimination aus $G'=0$, $L=0$, $H=0$ erhält man aus der ersten durch bloßes Vertauschen von y und x.

Führt man nun die Determinante aus, so läßt sich zunächst durch $\zeta^2$ dividiren, so daß also die Polcurve bei der Annahme des in diesem Fall zu Grunde gelegten Fundamentaldreiecks in eine Curve 6. Grades und die Doppellinie $\zeta^2=0$ zerfällt. Man erhält

$$0=\Psi=2^8p^3\zeta^6+2^6 3p^2\zeta^4xy+3p\zeta^2(9x^4-2x^2y^2+9y^4)+4x^3y^3$$

Führt man nun wieder $\xi$ und $\eta$ statt x und y ein, so kann man durch einige Umformungen die Gleichung in die Form bringen

$$\Psi=[(\xi-\eta)(1+2p)]^{2/3}-[(\xi+\eta)(1-2p)]^{2/3}+\sqrt[3]{16p}\,\zeta^{2/3}=0.$$

Nachdem so die Gleichungen $\Phi$ und $\Psi$ möglichst vereinfacht sind, läßt sich noch nachträglich leicht ausführen, daß wenn eine Gerade $G=0$ Tangente an $\Phi=0$ sein soll, $\alpha\beta\gamma$ der Gleichung $\Psi=0$ genügen muß und umgekehrt. Eliminirt man nämlich $\xi\eta\zeta$ aus $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=0$

$$\alpha=\frac{d\Phi}{d\xi}\quad \beta=\frac{d\Phi}{d\eta}\quad \gamma=\frac{d\Phi}{d\zeta}$$

so erhält man $\Psi(\alpha\beta\gamma)=0$ und eliminirt man die Coordinaten $\alpha\beta\gamma$ aus $G=0$

$$\xi=\frac{d\Psi}{d\alpha}\quad \eta=\frac{d\Psi}{d\beta}\quad \zeta=\frac{d\Psi}{d\gamma}$$

so findet man $\Phi(\xi\eta\zeta)=0$.

§. 5. Es ist nun zu untersuchen, welche Form die Polarcurve hat für die verschiedenen Kegelschnitte, die zu den Werthen von $p=-\infty \ldots\ldots +\infty$ gehören. Es sei zuerst p positiv, so kann man die Curve schneiden durch Parallelen G zur Linie AB, dazu setzt man $\zeta=a(\xi+\eta)$, so erhält man für die Schnittpunkte

$$2p(2a^2+1)\xi=[a(1+2p)\sqrt{a^2(1-2p)^2-4p}+2p-a^2(1+4p^2)]\cdot\eta$$

zugleich ist mit $(\xi+\eta)^2$ dividirt. Eine jede Parallele hat also zwei unendlich ferne Punkte mit der Polarcurve gemein und schneidet sie außerdem in noch zwei Punkten, welche sich aus der vorstehenden Formel ergeben. Dieselben sind reell für $a>\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}$, und diejenigen Parallelen, für welche $-\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}<a<\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}$, schneiden die Curve nicht in endlich entfernten Punkten; demnach befindet sich die Polarcurve ganz außerhalb des Theils der Ebene, welcher zwischen den beiden Geraden $G_1=\zeta+\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}(\xi+\eta)=0$ und

$G_2 = \zeta - \frac{2\sqrt{p}}{1-2p}(\xi+\eta) = 0$ liegt. $G_1$ und $G_2$ sind zwei Tangenten an $\Phi=0$, da für ihre Coefficienten $\Psi=0$ ist, und zwar berühren sie im Unendlichen, alle 4 Schnittpunkte von $G_1$ und $\Phi$, und $G_2$ und $\Phi$ liegen im Unendlichen, $G_1$ und $G_2$ sind also zwei parallele Asymptoten, setzt man den Werth von $\zeta$ aus ihrer Gleichung in $\Phi=0$ ein, so erhält man $(\xi+\eta)^4=0$. Ist nun p sehr wenig von Null verschieden, so werden $G_1$ und $G_2$ wenig von AB entfernt sein, und zwar wird, wenn $\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}$ von 0 bis 1 geht, $G_1$ von AB aus nach unten auf der positiven Seite von AB bis ins Unendliche sich bewegen — für diesen Fall ist $p=1-\sqrt{3/4}$ —, während $G_2$ ebenfalls von AB ausgehend bis zum Mittelpunkt der Höhe des Dreiecks sich nach oben bewegt. Ist also $1-\sqrt{3/4}<p<1+\sqrt{3/4}$ so giebt es unterhalb der Linie AB keine reellen Punkte der Polarcurve (Fig. 3), sondern alle Zweige derselben liegen (auf der negativen Seite) über AB. Ist dagegen $0<p<1-\sqrt{3/4}$, so besteht die Curve aus zwei getrennten Theilen, einem auf der positiven Seite von AB, und einem auf der negativen, dasselbe findet statt für $1+\sqrt{3/4}<p<\infty$; in diesen beiden Fällen sind die beiden entsprechenden Kegelschnitte Ellipsen und Hyperbeln (Fig. 1). In jenem Falle können $K=0$ und $H=0$ alle drei Arten von Kegelschnitten darstellen. Betrachtet man nun die weitere Bewegung der Asymptoten $G_1$ und $G_2$, so wird, wenn $\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}>1$ ist, $G_1$ aus dem Unendlichen auf der negativen Seite von AB kommend der Linie $\xi+\eta=0$ sich nähern, während $G_2$ den Mittelpunkt der Höhe des Fundamentaldreiecks überschreitend derselben Linie sich nähert. Die Polarcurve, welche jetzt zwischen den beiden Linien $G_1$ und $G_2$ liegt, wird dadurch immer schmaler, und schließlich, für $p=1/2$ also $\frac{2\sqrt{p}}{1-2p}=\infty$, werden $G_1=0$ und $G_2=0$ in $\xi+\eta=0$ zusammenfallen, und die Polarcurve wird somit zu einer Geraden, der durch C zu AB gezogenen Parallele. Es ist dies der in §. 3 erwähnte Fall, wo einer Ellipse wieder dieselbe Ellipse entspricht, und es zeigt sich hier ebenfalls, daß die geradlinige Polare ein ganz specieller Fall einer krummen Linie, einer Polarcurve, ist, ebenso wie der Pol ein specieller Fall einer Curve ist, die unter gewissen Bedingungen zu einem Punkte werden kann. (Fig. 2.)

Wenn nun $p<1/2$ so vertauschen $G_1$ und $G_2$ ihre Lage, ebenso wie auch der Kegelschnitt K in H und H in K übergeht. Die Entfernung der beiden Asymptoten $G_1$ und $G_2$ ist $e=h\frac{4\sqrt{p}(1-2p)}{1-8p+4p^2}$; zu einem Werthe von e gehören also im Allgemeinen vier Werthe von p; diese geben wieder vier Paare entsprechender Kegelschnitte H und K, seien $p_1, p_2, p_3$ und $p_4$ die vier Werthe nach der Größe geordnet, und die zugehörigen Kegelschnitte ebenfalls mit denselben Indices bezeichnet, so ist das erste Paar $(K_1\,H_1)$; dann ist $K_1$ eine Ellipse, deren große Axe mit AB parallel ist, $H_1$ eine Hyperbel, ferner sind $K_1$ und $H_4$, $H_1$ und $K_4$, $H_2$ und $K_3$, $K_2$ und $H_3$ dieselben Curven, so daß eigentlich nur zwei verschiedene Paare von Kegelschnitten zu den vier Werthen von p gehören nämlich $(K_1\,H_1)=(H_4\,K_4)$ und $(K_2\,H_2)=(H_3\,K_3)$. Bei dem ersten Paar liegt die Polarcurve $(\Phi_1)$ ganz außerhalb der Linien $G_1$ und $G_2$, bei dem zweiten Kegelschnittpaar liegt sie $(\Phi_2)$ zwischen den Asymptoten $G'$ und $G''$. Während $K_1$ und $H_1$ bestimmt sind ihrer Gattung nach, können $K_2$ und $H_3$ Kegelschnitte verschiedener Gattung sein. So erhält man z. B. für $e=\frac{4}{3}h$ die vier Werthe $p_1=0{,}0505$ $p_2=0{,}25$ $p_3=1$ $p_4=4{,}9495$. Hier ist $K_1$ eine Ellipse, $K_2$ ein Kreis, $K_3$ eine Parabel (Fig. 4), $K_4$ eine Hyperbel, während $H_1$ eine Hyperbel, $H_2$ eine Parabel, $H_3$ ein Kreis und $H_4$ eine Ellipse ist. —

Die beiden Theile der Polarcurve auf der positiven und negativen Seite von AB sind nun genauer zu untersuchen. Schneidet man die Polarcurve durch Strahlen, welche mit $\xi-\eta=0$ parallel sind, für welche also $\alpha+\beta=2\gamma$, so findet man, daß die Gerade $\alpha\xi+\beta\gamma+\gamma\zeta=0$ den oberen Theil von $\Phi$ stets in zwei reellen Punkten schneidet, der untere aber — wenn ein solcher existirt, also wenn nicht

$1-\sqrt{3/4}<p<1+\sqrt{3/4}$ — wird nur von denjenigen Parallelen in zwei reellen Punkten geschnitten, welche von $\xi-\eta=0$ weiter entfernt sind als

$$e=\frac{h}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2(1+2p)}{[(2-4p)^{2/3}-(4\sqrt{p})^{2/3}]^{3/2}}=\frac{h}{\sqrt{3}.C}$$

Die beiden Geraden $\zeta=\eta(c-1)-\xi(c+1)$ und $\zeta=\xi(c-1)-\eta(c+1)$ berühren die beiden Zweige, aus welchen der untere Theil von $\Phi$ besteht; zwischen ihnen giebt es keine reellen Punkte desselben. Der kleinste Werth von e ist offenbar $\frac{h}{\sqrt{3}}$ für $p=0$, wird $p=1-\sqrt{3/4}$, so wird der Nenner von e Null also $e=\infty$, die beiden Zweige entfernen sich also nach links und rechts in das Unendliche, wenn p von 0 bis $1-\sqrt{3/4}$ geht, zugleich entfernen sie sich auch wegen der oben beschriebenen Bewegung der Asymptote $G_1$ nach unten ins Unendliche. Sie werden danach imaginär und treten erst dann wieder auf, wenn p den Werth $1+\sqrt{3/4}$ übersteigt.

Während die beiden unteren Zweige von $\Phi$ durch den Abstand 2e getrennt sind, durchschneiden sich die beiden oberen im Punkte C; dieser ist ein Doppelpunkt von $\Phi=0$. Durchschneidet man nämlich die Polarcurve mit einem Strahlenbüschel um den Punkt C, setzt also $\xi=\varkappa\eta$, so läßt sich $\Phi=0$ durch $\xi^2$ dividiren, demnach hat jeder durch C gehende Strahl zwei Punkte in C mit der Curve gemein, außerdem wird noch

$$\zeta=\frac{\varkappa^2-1}{\sqrt{-2(\varkappa+2p)(\varkappa+\frac{1}{2p})}}\eta=\lambda\eta$$

um reelle Schnittpunkte zu erhalten, muß $\varkappa$ zwischen $-2p$ und $-\frac{1}{2p}$ genommen werden; in dem Winkel ACB liegt also niemals ein reeller Punkt von $\Phi=0$; die beiden äußersten Strahlen, $t_1$ und $t_2$, sind $\xi+2p\eta=0$ und $\eta+2p\xi=0$, diese berühren die Polarcurve in je drei mit C zusammenfallenden Punkten; es sind Wendetangenten, da für ihren Berührungspunkt

$$\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13}\\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{23}\\ \Phi_{13} & \Phi_{23} & \Phi_{23}\end{vmatrix}=0$$

es wird nämlich für C sowohl $\Phi_{13}$ als $\Phi_{23}$ und $\Phi_{33}=0$. Der Winkel $\delta$ zwischen $t_1$ und $t_2$ ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\delta=\sqrt{3}\,\frac{1-4p^2}{1-8p+4p^2}$$

Geht p von 0 bis $1-\sqrt{3/4}$, so geht $\delta$ von 60° bis 90°; die beiden Wendetangenten schließen also für den Fall, daß die unteren Zweige von $\Phi=0$ ins Unendliche gehen, einen rechten Winkel ein, für $p=1/4$, wo also K ein Kreis, H eine Parabel ist, wird $\delta=120°$, für $p=1/2$ wird $\delta=180°$, die beiden Wendetangenten fallen also mit den beiden Tangenten $G_1$ und $G_2$ zusammen, die geradlinige Polare ist also eine aus vier Geraden bestehende Linie, von denen zwei sich in C schneiden, zwei einander parallel sind, ehe sie zusammenfallen; wenn p nun weiter wächst von $1/2$ durch die Werthe 1, $1+\sqrt{3/4}$ bis $\infty$ so geht $\delta$ wieder von 180° durch 120°,90° bis 60°, und zu den Werthen 0 bis 60° gehören negative Werthe von p. Ist $\varkappa+\lambda+1=0$, so werden die Strahlen $\xi=\varkappa\eta$, $\zeta=\lambda\eta$ parallel, dann ist also der Strahl

$$\xi=\frac{\sqrt{1-8p+4p^2}\pm(1+2p)}{\sqrt{1-8p+4p^2}-(1+2p)}\eta$$

den Asymptoten parallel, die Gleichungen derselben findet man aus $\Psi=0$ $\frac{d\Psi}{d\alpha}+\frac{d\Psi}{d\beta}+\frac{d\Psi}{d\gamma}=0$ in der Form

$$((1-2p)^2\pm A)\xi+((1-2p)^2\mp A)\eta+4p\zeta=0;\ \text{wo}$$
$$(1+2p)A=(1-8p+4p^2)^{3/2}$$

Den Winkel $\vartheta$ zwischen den Asymptoten $L_1$ und $L_2$ erhält man aus

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{3}\,\frac{(1+2p)\sqrt{1-8p+4p^2}}{1-14p+4p^2}$$

Der Durchschnittspunkt der Asymptoten $L_1$ und $L_2$ liegt auf $\xi=\eta$ und hat die Coordinaten $\xi=2p$ $\eta=2p$ $\zeta=-(1-2p)^2$; also für $p=1\pm\sqrt{3/4}$ liegt derselbe im Unendlichen; er bewegt sich also von C aus bis in's Unendliche, wenn p von 0 bis $1-\sqrt{3/4}$ geht; und bleibt auch dann reell, wenn $L_1$ und $L_2$ imaginär werden. Liegt derselbe auf der positiven Seite von AB, so sind die Asymptoten imaginär, liegt er auf der negativen Seite, so muß er von AB weiter entfernt sein als h, dann sind die Asymptoten reell; in diesem Fall besteht $\Phi$ aus vier Theilen. Es fragt sich, in welcher Weise dieselben von dem Schnittpunkt der zusammengehörigen Tangenten an K und H durchlaufen werden. Nun theilen die Linien $\xi=\eta$ und $\zeta=0$ den Kegelschnitt $K=0$ in vier Theile, sei O der Schnittpunkt von K und $\xi=\eta$ innerhalb des Dreiecks ABC, U der außerhalb, so besteht $K=0$ aus den vier Theilen $K_1$ von A bis O, $K_2$ von O bis B, $K_3$ von B bis U und $K_4$ von U bis A. Durchläuft nun ein Punkt P zuerst das Stück $K_1$ so durchläuft der zugehörige Punkt P′ den Kegelschnitt H, indem er von B ausgeht, auf der positiven Seite von AB bis in's Unendliche, kommt auf der negativen Seite von AB vom entgegengesetzten Ende der Asymptote wieder her und geht bis zu dem außerhalb des Dreiecks ABC liegenden Schnittpunkt von $H=0$ und $\xi=\eta$, U′, dieser Theil von H sei $H_1$; wenn nun P den Theil $K_2$ durchläuft, so geht P′ von U′ wieder durch das Unendliche bis A, dieser zweite Theil, $H_2$, von H liegt zu $H_1$ symmetrisch, der dritte Theil von H, $H_3$, liegt zwischen A und dem Schnittpunkte O′, von H und $\xi=\eta$ innerhalb des Dreiecks A B C, der vierte $H_4$ zwischen O′ und B. Während P und P′ die entsprechenden Kegelschnitte K und H auf diese Weise durchlaufen, bewegt sich der Durchschnittspunkt Q der Tangenten an K und H in P und P′ folgendermaßen auf $\Phi=0$. Er geht von C aus zunächst auf dem Theile $\Phi_1$, welcher von der Wendetangente $t_1$ in C und der Geraden $G_2$ im Unendlichen berührt wird, dann durchläuft er, während P von O bis B geht, den Theil $\Phi_2$ von $\Phi$, welcher ebenfalls von $G_2$ berührt wird, aber von der anderen Wendetangente $t_2$; er kommt dabei von dem entgegengesetzten Ende von $G_2$ wieder her und geht bis C. Durchläuft nun P den Theil $K_3$, so geht Q von C aus zunächst in der Richtung von $t_2$ und nähert sich immer mehr der Asymptote $L_2$, die er im Unendlichen auf der negativen Seite von AB erreicht, der so beschriebene Theil von $\Phi$ sei $\Phi_3$, er kommt dann von dem entgegengesetzten Ende von $L_2$ wieder zurück und bewegt sich auf $\Phi'_3$, dem Theil von $\Phi$, welcher auf der positiven Seite von AB liegt, auf diesem nähert er sich der Geraden $G_1$, welche er im Unendlichen erreicht; $\Phi_3'$ liegt demnach zwischen den Asymptoten $G_1$ und $L_2$. Endlich gehören noch zu $\Phi_3$ und $\Phi_3'$ die beiden symmetrisch liegenden Theile $\Phi_4$ und $\Phi_4'$. Der erstere wird in C von $t_1$ berührt und im Unendlichen von $L_1$, der andere liegt zwischen den Asymptoten $G_1$ und $L_1$. Indem also die Punkte P und P′ die Kegelschnitte K und H durchlaufen, durchläuft Q die Theile $\Phi_1$ $\Phi_2$ $\Phi_3$ $\Phi_3'$ $\Phi_4'$ $\Phi_4$ der Reihe nach; von einem Theil zum anderen gelangt er jedesmal durch das Unendliche, ausgenommen, wenn er von $\Phi_2$ und $\Phi_4$ nach $\Phi_3$ und $\Phi_1$ geht.

Um die Polarcurve zu zeichnen berechnet man sich zuerst die Linie $t_1$ $t_2$, $L_1$ $L_2$, $G_1$ und $G_2$ und dann noch beliebig viele Punkte nach $\xi=\varkappa$ $\eta=1$ $\zeta=\lambda$, wo

$$\lambda = \frac{\varkappa^2-1}{\sqrt{-2(\varkappa+2p)(\varkappa+\frac{1}{2p})}}$$

§. 6. Zweitens ist die Gestalt der Polcurve, und zwar zunächst für positive Werthe von p zu untersuchen.

Schneidet man dieselbe durch Parallelen zu AB, setzt also $\zeta=a(\xi+\eta)$, so wird $\xi=\frac{1+b}{1-b}\eta$, wo

$$(1+2p)\,b=[(1-2p)^{2/3}-(4a\sqrt{p})^{2/3}]^{3/2}.$$

Die Schnittpunkte werden also imaginär, wenn $a > \frac{1-2p}{4\sqrt{p}}$. Ist $p=0$, so kann b für keinen reellen Werth von a imaginär werden, die Polcurve erstreckt sich also auf beiden Seiten von C aus in das Unendliche, sie zerfällt alsdann in die Geraden $\xi^3=0$ und $\eta^3=0$. Ist $1 < \frac{1-2p}{4\sqrt{p}}$, so giebt die Linie $\zeta = -(\xi+\eta)$ reelle Schnittpunkte, die Polcurve hat also Punkte im Unendlichen; man erhält die von C aus nach diesen Punkten hingehenden Strahlen, wenn man $a=-1$ setzt, es wird alsdann $(1+2p)b = q^{3/4}$, wo q eine leicht verständliche Abkürzung ist. Um die Asymptoten selbst zu erhalten, hat man aus $\Phi=0$ und $\frac{d\Phi}{d\xi}+\frac{d\Phi}{d\eta}+\frac{d\Phi}{d\zeta}=0$ $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zu berechnen, die Gleichungen

$$0=\zeta^2(\xi+2p\eta)(\eta+2p\xi)+p(\xi^2-\eta^2)^2 \text{ und}$$

$$0=\zeta^2(\xi+\eta)(1+2p)^2+4p(\xi+\eta)(\xi-\eta)^2+2\zeta(\xi+2p\eta)(\eta+2p\xi)$$

ergeben

$$\xi=(1-2p)^{2/3}\sqrt{q}\pm(1+2p)$$
$$\eta=(1-2p)^{2/3}\sqrt{q}\mp(1+2p)$$
$$\zeta=2(2p)^{1/3}\sqrt{q}.$$

Die Gleichungen der Asymptoten $A_1$ und $A_2$ werden alsdann $\xi x+\eta y+\zeta z=0$, wenn xyz die laufenden Coordinaten sind. Die Asymptoten werden imaginär, wenn q negativ wird, für $q=0$ ist $p=2{,}5\pm\sqrt{6}$; für $p=2{,}5-\sqrt{6}=0{,}0505..$ geht die Gerade $G_2$ durch den Mittelpunkt D des Fundamentaldreiecks, weil ihre Gleichung nach §. 5 wird $2\zeta=\xi+\eta$. Die sämmtlichen Tangenten an $\Phi$ sind, wenn $G_2$ über D liegt, von diesem Punkte ausgeschlossen, daraus folgt, daß $\Psi$ nur dann unendlich entfernte Punkte hat, wenn $G_2$ zwischen D und AB liegt, wie auch die Gleichung angiebt.

Wenn $p \gtrless 2{,}5\pm\sqrt{6}$, so muß $a<1$ um reelle Schnittpunkte zu erhalten, die Polcurve liegt in diesem Falle also nur unterhalb des Punktes C, und zwar zwischen den beiden Parallelen

$$\zeta=\pm\frac{1-2p}{4\sqrt{p}}(\xi+\eta).$$

Für $p=1/2$ fallen beide in $\zeta=0$ zusammen, die Polcurve wird alsdann zu dem Mittelpunkte von AB, geht p über $1/2$ hinaus, so vertauschen sich die beiden Parallelen; ebenso wie im §. 5 $G_1$ und $G_2$. —

Schneidet man ferner die Polcurve durch ein Strahlenbüschel um C, setzt also $\zeta=\lambda\eta$; $\xi=\varkappa\eta$, so wird

$$4\sqrt{p}\,\lambda=[(\varkappa+1)^{2/3}(1-2p)^{2/3}-(\varkappa-1)^{2/3}(1+2p)^{2/3}]^{3/2}.$$

Daraus folgt, daß $\varkappa$ nie negativ sein kann, wenn p positiv und $\lambda$ reell ist, so daß also die Polcurve stets zwischen den Schenkeln des Winkels ACB liegen muß; die äußersten Strahlen, welche die Polcurve schneiden, sind $\xi=\frac{1}{2p}\eta$ und $\xi=2p\eta$; den Schnittpunkten dieser beiden Strahlen mit $\Psi$ entsprechen die in C berührenden Wendetangenten von $\Phi$, dieselben müssen also Spitzen sein. Dem Punkte C, als Durchschnittspunkt zweier Wendetangenten entspricht eine gemeinschaftliche Tangente zweier Spitzen der Polcurve. Für die Berührungspunkte der Tangenten $G_1$ und $G_2$ an die Polarcurve wird auch die Hesse'sche Determinante der Funktion $\Phi$ Null, demnach ist auch der Strahl $\xi+\eta$ eine gemeinschaftliche Tangente zweier Spitzen. Bezeichnet man die Spitze $\xi=\eta$ $\zeta=\frac{1-2p}{2\sqrt{p}}\xi$ mit $s_1$, $\xi=\eta$ $\zeta=\frac{1-2p}{-2\sqrt{p}}\xi$ mit $s_2$, ferner die beiden Spitzen auf $\zeta=0$ und zwar die näher an A gelegene mit $s'$ die andere mit $s''$, so liegt die Polcurve, wenn $p \lesseqgtr 2{,}5\mp\sqrt{6}$ ist, ganz außerhalb des Vierecks $s_1 s' s_2 s''$, im anderen Falle, wo $2{,}5-\sqrt{6}<p<2{,}5+\sqrt{6}$, liegt sie ganz in demselben; man findet für die Länge der Diagonalen des Vierecks, oder, was dasselbe ist, für die Entfernung der Spitzen $s_1 s_2=\frac{8\sqrt{p}(1-2p)h}{1-20p+4p^2}$ und

$s's'' = \frac{2h}{\sqrt{3}} \frac{1-2p}{1+2p}$. Für $p = \frac{1}{2}$ werden die Diagonalen Null, das Viereck und mit ihm die Polcurve wird zu einem Punkte, dem Pol der durch C zu AB gezogenen Parallele.

Schneidet man noch die Polcurve durch Parallelen zu $\xi - \eta = 0$ also durch Gerade, deren Gleichungen von der Form sind

$$\xi - \eta = c(\xi + \eta + \zeta)$$

so sind für

$$(1+2p)\,c = \sqrt{1 - 20p + 4p^2}$$

die Geraden $\xi - \eta = \pm c(\xi + \eta + \zeta)$ Tangenten $T_1$ und $T_2$ an $\Psi$. Die Polcurve nähert sich also von den Spitzen $s'$ und $s''$ aus der Mittellinie des Dreiecks $\xi = \eta$ bis zu einer Entfernung $\frac{hc}{\sqrt{3}}$ und erweitert sich alsdann wieder und nähert sich bis in's Unendliche den oben angegebenen Asymptoten, dies gilt jedoch nur dann, wenn p zwischen $2{,}5 \pm \sqrt{6}$ liegt.

Wenn die Punkte PP' und Q die Kegelschnitte K und H und die Polarcurve $\Phi$ in der Weise durchlaufen, wie im §. 5 gezeigt ist, so bewegt sich der Punkt Q' auf $\Psi$ folgendermaßen. Er geht von $s'$ aus, wird dann zum Berührungspunkt von $T_1$ und nähert sich dann der Asymptote $A_1$, auf deren entgegengesetzten Ende er aus dem Unendlichen wieder herkommt bis zur Spitze $s_2$, die Punkte dieses Theiles $\Psi_1$ der Polcurve entsprechen denen auf $\Phi_1$; der dazu symmetrische Theil $\Psi_2$, liegt zwischen den Spitzen $s_2$ und $s''$, indem der Punkt Q' denselben durchläuft, geht er von $s_2$ aus, auch durch das Unendliche und zwar in der Richtung der Asymptote $A_2$ erreicht dann die Tangente $T_2$ und kommt bis zur Spitze $s''$. Ist p eine Zahl zwischen $2{,}5 \pm \sqrt{6}$ so findet nach dem Obigen keine Bewegung durch das Unendliche statt zwischen $s'$ und $s_2$, $s_2$ und $s''$. Die beiden letzten Theile $\Psi_3$ und $\Psi_4$, welche Q' noch zu durchlaufen hat, liegen zwischen $s''$ und $s_1$ und zwischen $s_1$ und $s'$.

Um die Polcurve zu zeichnen, berechne man sich nach den angegebenen Formeln zuerst die Spitzen, ferner die Tangenten $T_1$ und $T_2$ und die Asymptoten $A_1$ und $A_2$, und dann noch beliebig viele Punkte, in denen das Strahlenbüschel um C die Curve $\Psi = 0$ schneidet.

§. 7. Eine ganz andere Gestalt erhält nun sowohl die Polarcurve als auch die Polcurve, wenn p negativ ist (Fig. 5). Die beiden sich in diesem Falle entsprechenden Kegelschnitte sind zwei Hyperbeln, deren Hauptaxen der Linie AB parallel sind und die Gleichungen haben $\zeta = p(\xi + \eta)$ und $\zeta = \frac{1}{4p}(\xi + \eta)$, wenn statt $-p$ gesetzt wird p. Die beiden Axen liegen demnach stets zwischen C und AB. Die Gleichung der Polarcurve wird jetzt

$$\zeta^2(\xi - 2p\eta)(\eta - 2p\xi) - p(\xi^2 - \eta^2)^2 = 0.$$

Schneidet man dieselbe durch ein Strahlensystem das zu AB parallel ist, also die Gleichung hat $\zeta = a(\xi + \eta)$ so wird für die Schnittpunkte

$$2p(2a^2 + 1)\,\xi = \left[(1 + 4p^2)\,a^2 - 2p + a(1 - 2p)\sqrt{a^2(1+2p)^2 + 4p}\,\right]\eta$$

a kann also jeden Werth zwischen $\pm\infty$ annehmen, die Schnittpunkte sind stets reell, dieselben fallen, außer in den Doppelpunkten niemals zusammen, da $a^2(1+2p)^2 + 4p$ für keinen Werth von a verschwindet, sodaß keine der Linie AB parallelen Tangenten existiren. Schneidet man dagegen die Polarcurve durch ein Strahlenbüschel um den Mittelpunkt von AB, also durch Gerade, deren Gleichung ist $\zeta = a(\xi - \eta)$, so findet man

$$2p(2a^2 + 1)\,\xi = \left[(1 + 4p^2)\,a^2 - 2p + a(1 + 2p)\sqrt{a^2(1-2p)^2 - 4p}\,\right]\eta$$

für $a = \pm \frac{2\sqrt{p}}{1-2p}$ fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, die beiden Strahlen $S_1$ und $S_2$ berühren die Polarcurve, und zwar läßt sich von ihnen ebenso wie von den Tangenten $t_1$ u. $t_2$ (§. 5) zeigen, daß es Wendetangenten sind, der Mittelpunkt M von AB ist also ein Doppelpunkt und zwar für beide sich in ihm durchschneidenden Theile von $\Phi$ ein Wendepunkt; der Winkel $\delta$ zwischen $S_1$ und $S_2$ wird bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{4\sqrt{3p}\,(1-2p)}{1-16p+4p^2}.$$

Schneidet man ferner die Polarcurve durch ein Strahlenbüschel um C, setzt also $\xi = \varkappa\eta$, so wird

$$\sqrt{(\varkappa-2p)(1-2p\varkappa)}\,\zeta = \sqrt{p}\,(\varkappa^2-1)\,\eta$$

daraus folgt, ebenso wie in §. 5, daß die Strahlen $\xi = 2p\eta$ und $\eta = 2p\xi$ Wendetangenten sind, so daß also C, ebenso wie M, sowohl ein Doppelpunkt als ein Wendepunkt oer Polarcurve ist; den Winkel $\delta'$ erhält man aus

$$\operatorname{tg}\delta' = \sqrt{3}\,\frac{1-4p^2}{1+8p+4p^2}.$$

Da die Winkel $\delta$ und $\delta'$ für $p = {}^1/_2$ gleich Null werden, so besteht die vierfache Gerade, in welche die Polarcurve für diesen Fall übergeht, aus je zwei sich in C und in M schneidenden zusammenfallenden Wendetangenten.

Die Asymptoten der Polarcurve werden jetzt:

$$((1+2p)^2 \pm A)\,\xi + ((1+2p)^2 \mp A)\,\eta - 4p\zeta = 0 \text{ wo}$$
$$(1-2p)\,A = (1+8p+4p^2)^{3/2}$$

demnach hat die Polarcurve zwei stets reelle Asymptoten. Dieselben schneiden sich im Punkte $\xi = \eta$, $\zeta = \dfrac{(1-2p)^2}{2p}\xi$; der Schnittpunkt liegt also stets innerhalb des Fundamentaldreiecks, auf der Linie CM; seine Entfernung von AB ist $= -h.\dfrac{(1-2p)^2}{1+4p^2}$. Daher schneiden sich die Asymptoten zuerst, wenn $p = 0$ ist im Punkte C, dann rückt der Schnittpunkt herunter bis M, wo er sich für $p = {}^1/_2$ befindet, geht dann wieder auf die Linie MC herauf, und fällt für $p = \infty$ mit C wieder zusammen. Der Winkel $\delta''$ zwischen den Asymptoten ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\delta'' = \sqrt{3}\,\frac{(1-2p)\sqrt{1+8p+4p^2}}{1+14p+4p^2}$$

Diesen Asymptoten nähert die Polarcurve oberhalb C und unterhalb M bis in's Unendliche, in dem Dreieck ABC giebt es nun noch zwei zu AB senkrechte Tangenten T und $T_1$, deren Gleichungen sind

$$\xi - \eta = c\,(\xi + \eta + \zeta)$$

wo

$$c = (1-2p)\left((1+2p)^{2/3} + (2\sqrt{p})^{2/3}\right)^{-3/2}$$

dieselben berühren die Curve $\Phi = 0$ da, wo sie zwischen M und C am breitesten ist, ihre Entfernung ist $= \dfrac{2hc}{\sqrt{3}}$; betrachtet man also die Polarcurve von C ausgehend, so wird sie bis zu dem Berührungspunkt der Tangenten T und $T_1$ breiter werden das Maximum der Breite ist $\dfrac{2hc}{\sqrt{3}}$, dann wird sie schmaler bis zum Punkt M, wo die Breite wieder gleich Null ist. Durch die Wendetangenten, Asymptoten und die Tangenten T $T_1$ wird die Gestalt der Polarcurve für negative Werthe von p im Allgemeinen angegeben, durch irgend eins der angegebenen Strahlenbüschel kann man noch außerdem beliebig viele Punkte derselben berechnen.

Ebenso wie die Polarcurve für negative Werthe von p eine ganz andere Lage und Gestalt hat, befindet sich auch die Polcurve für diesen Fall in einem ganz anderen Theil der Ebene und ihre Gestalt ist der im §. 6 besprochenen durchaus unähnlich. Die Gleichung derselben wird

$$(\xi-\eta)^{2/3}(1-2p)^{2/3} - (\xi+\eta)^{2/3}(1+2p)^{2/3} - (4\sqrt{p\zeta})^{2/3} = 0.$$

Für $\xi = \varkappa\eta$ erhält man jetzt, wenn $\varkappa$ positiv ist, keine reellen Schnittpunkte, es liegt also kein reeller Punkt von $\Psi = 0$ innerhalb der Schenkel des Winkels ACB. Schneidet man dagegen die Curve durch Parallelen zu AB so wird $\xi = \dfrac{1-2p+((1+2p)^{2/3}+(4\sqrt{pa})^{2/3})^{3/2}}{1-2p-((1+2p)^{2/3}+(4\sqrt{pa})^{2/3})^{3/2}}\,\eta = \dfrac{1\pm b}{1\mp b}\,\eta.$

Es giebt also stets zwei reelle Schnittpunkte, die Entfernung derselben ist

$$e = \frac{2hb}{\sqrt{3(1+a)}}$$

Für $a = -1$ ist $e = \infty$. Nähert sich nun die Parallele der Linie $\xi + \eta = 0$, so wird $a$ größer, also $e$ kleiner und für $a = \infty$ ist $e_1 = \frac{8h\sqrt{p}}{\sqrt{3}(1-2p)}$, das ist die Entfernung der Schnittpunkte der Linie $\xi + \eta = 0$ mit $\Psi = 0$. Während nun die Parallele von $\xi + \eta = 0$ bis $\zeta = 0$ geht, nimmt $a$ von $+\infty$ bis 0 ab, dabei wird $e > e_1$ und erreicht ein Maximum $e_2$ für $a = \frac{16p}{(1+2p)^2}$, dafür ist

$$e_2 = \frac{2h\sqrt{1+20p+4p^2}}{\sqrt{3}(1-2p)};$$

danach nimmt $e$ wieder ab, bis es für $a = 0$ ist $e_3 = \frac{2h(1+2p)}{\sqrt{3}(1-2p)}$. Ist die Parallele unterhalb AB, hat also $a$ negative Werthe, so nimmt $e$ wieder zu, bis für $a = -1$ wieder $e = \infty$ wird. Die Linien $\xi + \eta = 0$ und $\zeta = 0$ schneiden nun die Polarcurve in den Punkten $4\sqrt{p}\,\zeta = (1-2p)(\xi - \eta)$ und $(1-2p)(\xi - \eta) \pm (1+2p)(\xi + \eta) = 0$ oder $\xi + 2p\eta = 0$ und $\eta + 2p\xi = 0$; die Schnittpunkte sind wieder Spitzen der Polarcurve, weil ihre entsprechenden Tangenten an $\Phi$ Wendetangenten sind. Die beiden Spitzen auf $\xi + \eta = 0$ rechts $s'$, links $s''$ fallen für $p = 0$ mit C zusammen, die beiden auf $\zeta = 0$ rechts $s_1$, links $s_2$ mit A und B. Es ist also zuerst $e_1 < e_3$; für $p = 1{,}5 - \sqrt{2}$ wird $e_1 = e_3$, wächst $p$ weiter, so wird $e_1 > e_3$ bis für $p = 1{,}5 + \sqrt{2}$ wieder $e_1 - e_3$ wird. Dazwischen liegt der Werth $p = \frac{1}{2}$, für diesen wird $e_1$ $e_2$ und $e_3$ unendlich, die ganze Polcurve geht also für diesen Werth von $p$ in das Unendliche, was schon daraus unmittelbar hervorgeht, daß die Polarcurve in diesem Falle die Nebenaxe der Hyperbel ist.

Die oberen Spitzen gehen also von C aus nach beiden Seiten in das Unendliche auf der Linie $\xi + \eta = 0$, und kehren wieder zurück, wenn $p$ von 0 bis $\infty$ geht, die unteren bewegen sich ebenso auf $\zeta = 0$, indem sie von A und B ausgehen, jene sind zuerst einander näher als diese, dann haben sie gleiche Entfernung und schließlich sind die oberen weiter von einander entfernt als die unteren, wenn $p$ von 0 bis $\frac{1}{2}$ geht; geht $p$ von $\frac{1}{2}$ bis $\infty$, so wiederholt sich dasselbe in umgekehrter Reihenfolge. Für ein Strahlenbüschel um den Punkt M, $\zeta = a(\xi - \eta)$ ist

$$(\xi + \eta)(1+2p) = (\xi - \eta)\left((1-2p)^{2/3} - (4\sqrt{p}\,a)^{2/3}\right)^{3/2}$$

um reelle Schnittpunkte zu erhalten muß $a < \frac{1-2p}{4\sqrt{p}}$, die beiden äußersten Strahlen $\zeta = \frac{1-2p}{4\sqrt{p}}(\xi - \eta)$ schneiden die Polcurve in den oberen Spitzen. Ein anderes Strahlenbüschel um den Punkt C, $\xi = \varkappa\eta$ schneidet die Polcurve in Punkten, für welche

$$4\sqrt{p}\,\zeta = \left((\varkappa - 1)^{2/3}(1-2p)^{2/3} - (\varkappa + 1)^{2/3}(1+2p)^{2/3}\right)^{3/2}\eta$$

Für die äußersten Strahlen ist $\varkappa = -2p$ und $\varkappa = -\frac{1}{2p}$; dieselben schneiden also die Polcurve in den beiden unteren Spitzen. Die Polcurve hat stets zwei reelle Asymptoten deren Gleichungen sind nach §. 6

$$\left(p'(1+2p)^{2/3} \pm (1-2p)\right)\xi + \left(p'(1+2p)^{2/3} \mp (1-2p)\right)\eta - 2p'(2p)^{1/3}\zeta = 0$$

wo

$$p' = \sqrt{(1+2p)^{2/3} + 2(2p)^{1/3}}.$$

Der Durchschnittspunkt liegt auf $\xi = \eta$ und hat von M die Entfernung $e$

$$e = \frac{-(1+2p)^{2/3}h}{(1+2p)^{2/3} + 2(2p)^{1/3}}.$$

Dieselbe ist $= -h$ für $p = 0$ und $p = \infty$, sie ist ein Minimum für $p = \frac{1}{2}$ wo $e = \frac{-h}{1+\sqrt[3]{2}}$; der

Asymptotenwinkel $\varphi$ ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{(1-2p)p'^3}{1-16p+4p^2-3p'^2(1+2p)^{2/3}(2p)^{1/3}}$$

Der Asymptotenwinkel der zusammenfallenden Hyperbeln K und H wird in dem Falle $p = 1/2$ ein Rechter, während der der Polcurve Null wird.

Geht nun der Punkt P auf K von A aus auf der positiven Seite von AB durch das Unendliche bis zu dem Schnittpunkte $P_1$ von K und $\xi+\eta=0$, der innerhalb des Winkels CAB liegt, dann von $P_1$ bis B, ferner von B durch das Unendliche bis $P_2$, dem anderen Schnittpunkte von $\xi+\eta=0$ und $K=0$, und endlich von $P^2$ zurück nach A, so durchläuft der zugehörige Punkt P′ den entsprechenden Kegelschnitt H in der Weise, daß er von B ausgehend ebenfalls auf der positiven Seite von AB sich durch das Unendliche bis P′ bewegt, dem Schnittpunkte von H und $\xi+\eta=0$ innerhalb des Winkels CBA, dann von P′ bis A, ferner von A durch das Unendliche bis P″, dem anderen Schnittpunkte von H und $\xi+\eta=0$ und von da bis nach B zurück. Zu diesen vier Theilen von K und H gehören nun folgende von $\Phi$ und $\Psi$. Der Punkt Q geht von C aus in der Richtung der Wendetangente $\xi=2p\eta$ durch das Fundamentaldreieck bis M, dann von M weiter in der Richtung $S_1$, durch das Unendliche bis C, von C in der Richtung von $\eta=2p\xi$, wieder durch das Dreieck bis M, und endlich geht er von M aus in der Richtung $S_2$, durch das Unendliche und zurück nach C. Der Punkt Q′ geht zuerst von $s_1$ nach s′, dann von s′ durch das Unendliche nach $s_2$, von $s_2$ nach s″ und von da wieder durch das Unendliche nach $s_1$ zurück. — Will man also zu einem Punkte P auf K zwischen $P_1$ und B den zugehörigen auf H finden, so hat man von P an denjenigen Theil von $\Psi$ eine Tangente zu ziehen, der zwischen s′ und $s_2$ liegt, der Schnittpunkt der Tangente mit H ist der zu B gehörige Punkt P′; liegt P aber auf einem anderen Theile von K, so ist jedesmal an einen anderen Theil von $\Psi$ eine Tangente zu ziehen um den richtigen Punkt P′ zu erhalten. —

§. 8 Schneidet man nun den Kegelschnitt K durch irgend einen Strahl von C aus, Fig. 4, so erhält man zwei Schnittpunkte $P_1$ und $P_2$, $\xi,\eta,\zeta$ und $\xi,\eta,-\zeta$. Die diesen Punkten entsprechenden Tangenten an H, $T_1'$ und $T_2'$ haben die Berührungspunkte $P_1' = \eta,\xi,-\frac{\zeta}{2p}$; $P_2' = \eta,\xi,\frac{\zeta}{2p}$; also $P_1'$ und $P_2'$ liegen mit dem Punkte C in einer Geraden; ihre entsprechenden Tangenten an K, nämlich $T_1$ und $T_2$ schneiden sich also in einem Punkte der Linie AB, dasselbe ist mit $T_1'$ und $T_2'$ der Fall. Der von C aus gezogene Strahl schneidet nun zugleich den Kegelschnitt H in noch zwei Punkten $P_3' = \xi,\eta,\frac{\zeta}{2p}$ und $P_4' = \xi,\eta,\frac{-\zeta}{2p}$, die Berührungspunkte ihrer entsprechenden Tangenten an K sind $P_3 = \eta,\xi,-\zeta$ und $P_4 = \eta,\xi,\zeta$; diese liegen also mit $P_1'$ und $P_2'$ auf derselben durch C gehenden Geraden; zugleich gehen auch $T_3'$ und $T_4'$ mit $T_1$ und $T_2$, ebenso $T_3$ und $T_4$ mit $T_1'$ und $T_2'$ durch denselben auf AB liegenden Punkt. Ferner sieht man, daß die Linien $P_1P_3$, $P_2P_4$ durch M gehen und daß $P_1P_4$, $P_2P_3 \parallel AB$ sind, mithin $T_1$ und $T_3$, $T_2$ und $T_4$ sich in $\xi+\eta=0$ und $T_1$ und $T_4$, $T_2$ und $T_3$ sich in $\xi-\eta=0$ schneiden; dasselbe findet für die entsprechenden Stücke des Kegelschnitts H statt. Daraus folgt eine einfache Construction um zu einem Punkte P auf K den zugehörigen von H zu finden, man zieht von P durch M eine Gerade, so erhält man auf K einen zweiten Punkt $P_1$, verbindet $P_1$ und C, so erhält man auf H zwei Schnittpunkte, welcher von ihnen der zu P gehörige ist, geht dann aus der Entwickelung des §. 5 hervor. Die Tangentenpaare $T_1\ T_1'$ bis $T_4\ T_4'$ geben vier Punkte $Q_1$ bis $Q_4$ auf der Polarcurve und zwar ist

$$Q_1 = y,-x,z \quad Q_2 = -y,x,z \quad Q_3 = x,-y,z \quad Q_4 = -x,y,z$$

$$\text{wo } x = \xi+2p\eta,\ y = \eta+2p\xi,\ z = -\frac{2p}{\zeta}(\xi^2-\eta^2)$$

Demnach liegt auch $Q_1\ Q_2$ und $Q_3\ Q_4$ auf einer Geraden mit C, $Q_1\ Q_3$ und $Q_2\ Q_4$ auf einer Geraden mit M und es ist $Q_1\ Q_4$ und $Q_2\ Q_3 \parallel \xi+\eta=0$. Daraus folgt, daß auch die Tangenten an die Polcurve, welche diesen Punkten entsprechen, dieselben mögen mit $U'$ bezeichnet werden, daß also auch $U_1'\ U_2'$ und $U_3'\ U_4'$ sich in AB schneiden, daß ferner $U_1'\ U_3'$ und $U_2'\ U_4'$ sich in den Punkten von $\xi+\eta=0$ schneiden und daß $U_1'\ U_4'$ und $U_2'\ U_3'$ sich in den Punkten von $\xi-\eta=0$ schneiden. Die Berührungspunkte von $U_1' \ldots U_4'$ sind

$$Q_1'=\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}-\mathfrak{z},\ Q_2'=\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z},\ Q_3'=\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z},\ Q_4'=\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z},$$

$$\text{wo } \mathfrak{x}=a+b \quad \mathfrak{y}=a-b \quad \mathfrak{z}=\frac{1-4p^2}{4p^2}\zeta^3$$

$$2a=(1+2p)(\xi+\eta)^3 \quad 2b=(1-2p)(\xi-\eta)^3.$$

Für diese und ihre entsprechenden Tangenten $U_1\ U_2\ U_3\ U_4$ an die Polarcurve findet dasselbe statt, wie für die Punkte $Q_1 \ldots Q_4$ und ihre entsprechenden Tangenten an $\Psi=0$.

Die 16 Punkte $P_{1234} \ldots Q'_{1234}$ bilden also vier vollständige Vierseite, welche die zwei festen Punkte M und C gemeinschaftlich haben, und die 16 Tangenten $T_{1234} \ldots U'_{1234}$ bilden die vier entsprechenden Vierseite mit drei gemeinschaftlichen festen Diagonalen, nämlich den Linien $\xi+\eta=0$, $\xi-\eta=0$ und $\zeta=0$.

In den vorhergehenden Paragraphen, ist ein solches Fundamentaldreieck ABC zu Grunde gelegt, daß die Gleichung des Kegelschnitts K nur die eine Constante p enthielt; der nächste Schritt wäre nun, die Lage von ABC so anzunehmen, daß K von zwei Constanten abhängt. Hier ist eine größere Mannichfaltigkeit für die Form der Gleichung von K möglich, indem man mehrerlei Weise drei Constanten in der allgemeinen Gleichung gleich Null setzen kann. Setzt man z. B. A, B und C gleich Null, so daß also K die Gleichung eines dem Dreieck ABC umschriebenen Kegelschnitts ist, so wird H die Gleichung des entsprechenden eingeschriebenen; am einfachsten wird indessen die Gleichung der Polarcurve und der Polcurve, wenn man D, E und F gleich Null setzt, es hat alsdann K die Form

$$K=p\xi^2+q\eta^2+r\zeta^2=0.$$

Die Gleichung des entsprechenden Kegelschnitts wird

$$H=\frac{1}{p}\xi^2+\frac{1}{q}\eta^2+\frac{1}{r}\zeta^2=0$$

Die Gleichung der Polarcurve wird nach §. 4

$$\Phi=r(p-q)^2\xi^2\eta^2+q(r-p)^2\eta^2\zeta^2+p(q-r)^2\zeta^2\xi^2=0$$

und für die Gleichung der Polcurve findet man

$$\Psi=[p(q-r)^2\xi^2]^{1/3}+[q(r-p)^2\eta^2]^{1/3}+[r(p-q)^2\zeta^2]^{1/3}=0.$$

Während in dem oben behandelten Falle nur für bestimmte Werthe von p, für welche zugleich K und H zusammenfielen, $\Phi$ eine Gerade, $\Psi$ ein Punkt wurde, wird jetzt die Polarcurve zur Geraden und die Polcurve zum Punkte, für alle Kegelschnitte, für die zwei Constanten einander gleich sind. Ist z. B. $p=q=1$, so ist der Punkt C des Fundamentaldreiecks und die Gerade AB desselben für eine ganze Schaar von Kegelschnitten, die man erhält, wenn man r von $-\infty \ldots 0$ gehen läßt, die gemeinschaftliche Polare und der gemeinschaftliche Pol.

**Die Gleichungen für K, H, $\Phi$ und $\Psi$ gestatten wegen ihrer einfachen und symmetrischen Form eine bequeme Discussion, deren Ausführung einer späteren Abhandlung vorbehalten bleibt.**

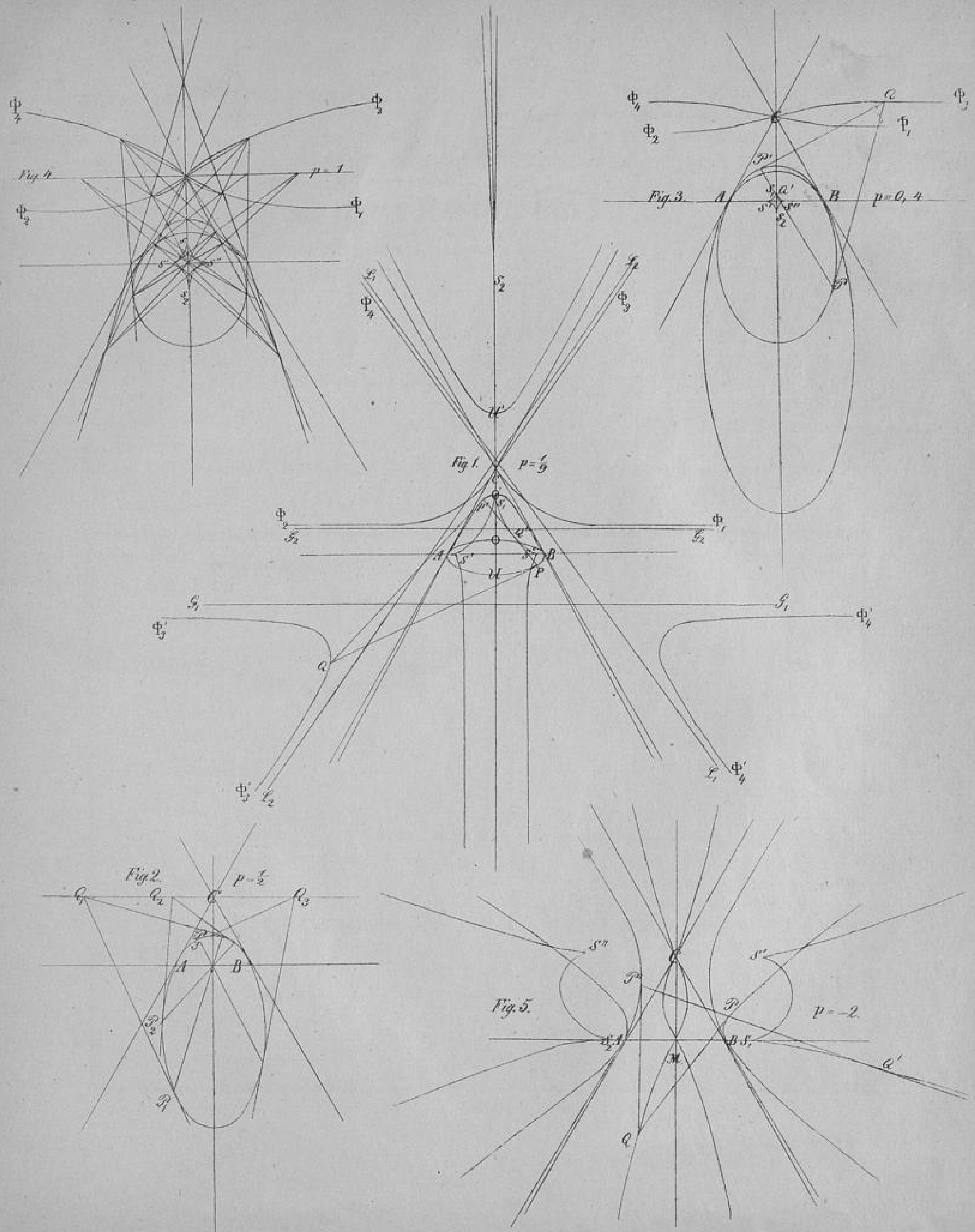
Fig. 1. $p = \frac{1}{9}$
Fig. 2. $p = \frac{1}{2}$
Fig. 3. $p = 0,4$
Fig. 4 $p = 1$
Fig. 5. $p = -2$