Soll auf Realschulen Differentialrechnung gelehrt werden?

Von

Dr. Wilhelm Bette,

Oberlehrer.

Beilage zu dem Jahresberichte der Halberstädter Realschule 1865.

Halberstadt.

Druck von Dölle & Sohn.

Die Unterrichts- und Prüfungsordnung der Real- und der höheren Bürgerschulen vom 6. October 1859 sucht durch Angabe der Pensen in den einzelnen Disciplinen das Ziel möglichst erkennbar und genau hinzustellen, welches unsere Realschüler erreichen sollen. Allein jene im Schul- und Verwaltungsfache rühmlichst ausgezeichneten Männer, welche bei diesen Anordnungen mitgewirkt haben, werden, eben weil ihnen der besondere Entwickelungsgang des Realschulwesens bekannt ist, gewiß nicht annehmen, daß alle die in dieser unserer Verfassungsurkunde enthaltenen Bestimmungen für ewige Zeiten Gültigkeit behalten. Ich habe es hier zunächst nur mit der Mathematik zu thun, aber eben grade hier braucht man nur die Schulprogramme der letzten Jahre flüchtig durchzublättern, um sich zu überzeugen, daß nicht gar zu viele meiner geehrten Collegen sich genau innerhalb der von dem Herrn Unterrichtsminister gesteckten Grenzen eingerichtet haben. Der Eine beliebt dieses, der Andere jenes Amendement; dem Einen will es nicht recht einleuchten, weshalb die nur besondern Zwecken dienende descriptive Geometrie für uns als obligatorisch betrachtet und nicht vielmehr den Gewerbeschulen überlassen wird; — Andere bedauern den Wegfall der sphärischen Trigonometrie, ohne welche allerdings kein Verständniß astronomischer Lehren möglich ist; — Andere halten die Auflösung cubischer Gleichungen namentlich bei stereometrischen Aufgaben für unentbehrlich; — noch Andere endlich wollen die Elemente der Differentialrechnung in das Pensum unserer Prima hineingezogen wissen oder meinen, sie, die Differentialrechnung, sei zwar nicht unmittelbar gefordert, aber als nothwendiges Hülfsmittel bei der analytischen Geometrie und bei der Herleitung der Reihen für transscendente Functionen stillschweigend vorausgesetzt. Diese mancherlei divergirenden Richtungen werden, davon bin ich überzeugt, durch die Umsicht der an der Spitze unseres Schulwesens stehenden Männer in einen Brennpunkt allmälig zurückgeleitet werden; ich selbst will den mir in diesem Programme verstatteten Raum dazu benutzen, um mir die Elemente der Differentialrechnung einmal darauf anzusehen, ob sie für den Schulunterricht brauchbar, resp. nothwendig sind oder nicht? Ich hoffe zu dem Resultate zu gelangen, daß man fähige Schüler ohne Differentialrechnung ziemlich weit förderen kann, und daß die Formeln dieser Wissenschaft in der Geometrie und Mechanik zwar eine schwer zu ersetzende Abkürzung gewähren, aber auch grade hier sich ohne gelehrte Ungeheuerlichkeiten in ein paar Stunden lehren und lernen lassen.

Was ist Differentialrechnung? Mit dieser einfachen Frage wird man eigentlich jeden Mathematiker in einige Verlegenheit setzen. Differentialrechnung, so kann man etwa sagen, ist derjenige Theil der Analysis, wo wir aus der Relation der veränderlichen Größen, die auf irgend eine Art miteinander verbunden sind, die Relation ihrer Veränderungen oder zusammengehörigen Differenzen suchen, sofern dabei die Quantität der Veränderungen selbst nicht in Betracht kommt. Sie bildet einen Theil der Analysis des Unendlichen, die man so nennt, weil die Differenzen, deren Verhältniß gesucht wird, als unendlich kleine Theilchen, ich möchte sagen, als Atome betrachtet werden, um das stetige Wachsen oder Abnehmen der variabelen Größe verfolgen, womöglich der Rechnung unterwerfen zu können, gleichsam das Verschwindende zu fassen, indem es verschwindet.

Allein ich gebe gern zu, daß diese Difinition so wenig, wie irgend eine andere, dem noch Uneingeweiheten einen klaren Begriff von dem eigentlichen Wesen und der Bedeutung der Differentialrechnung verschaffen dürfte. Weichen doch alle jene Heroen der Mathematik, deren Scharfsinne wir die Erfindung oder den weiteren Ausbau dieser sogenannten höheren Analysis verdanken, ein Newton, Leibnitz, Jac. und Joh. Bernouilli, Euler, d'Alembert, Lagrange u. a. m., in der Begründung ihrer Wissenschaft, so wesentlich von einander ab, daß man kaum begreift, wie alle diese von Haus aus weit auseinander gehenden Wege in der Hauptsache zu demselben Resultate führen. In der That, wer die Geschichte der Mathematik seit jenen Tagen, wo Newton durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf seine Fluxionenrechnung, Leibnitz durch die Betrachtung der Unterschiede und Summen in den Reihen der Zahlgrößen auf seine Differentialrechnung geleitet wurde, bis auf die neuere Zeit verfolgt, muß sich wunderen, daß die endlosen Streitigkeiten und Controversen über diesen Gegenstand dem ungeheuren Aufschwunge, welchen wir im 18. Jahrhundert Mathematik und Naturwissenschaften nehmen sehen, keinen Eintrag gethan zu haben scheinen, und man kann es unter solchen Umständen den Antidifferentialisten eben nicht verdenken, wenn sie nicht jeden Fortschritt der Wissenschaft der Leibnitz-Newtonschen Erfindung verdanken wollen. Jedenfalls ist es sehr zu bedauern, daß grade diese auf eine edlere höhere Abkunft pochende Tochter des Atlas bis auf den heutigen Tag nicht im Stande gewesen ist, ihre Ahnenprobe makellos zu bestehen und die hohen Säulen ihres Capitoliums auf absolut unverschiebbarem Grunde aufzuführen.

Bekanntlich hat der Ausdruck unendlich groß und unendlich klein unendlich viele Mißverständnisse und Mißdeutungen veranlaßt. In der Analysis der Alten finden wir den Ausdruck „unendlich" nirgend und selbst noch Cartesius, der doch vor Newton und Leibnitz das wesentliche Fundament der höheren Analysis, nämlich die Methode der unbestimmten Coefficienten in die Mathematik eingeführt hat, sucht das Wort ängstlich zu vermeiden. Viele andere tüchtige Analysten hielten daran fest, der Ausdruck unendliche Größe enthalte einen Widerspruch, Unendlichkeit sei ein Wort ohne Sinn und Verstand, so daß die Berliner Akademie der Wissenschaften es noch im Jahr 1784 für nöthig halten konnte, „eine genau bestimmte Theorie des sogen. Unendlichen" zu einer Preisaufgabe zu machen. Sie verlangte, man solle zeigen, wie es möglich gewesen, aus einem von namhaften Gelehrten für unstatthaft erklärten Begriffe so viele richtige Lehrsätze herzuleiten?

Allein jene Mathematiker des 18. Jahrhunderts, welche sich gegen die Zulassung des Unendlichen mit Händen und Füßen wehrten, haben sich in jenem ewigen Leben über den Sternen, seit dem sie dort mit lauter Unendlichkeiten zu thun haben, wohl eines Bessern besonnen. Der endliche Geist ist freilich nicht im Stande, das Unendliche zu fassen und zu begreifen; deshalb ist aber der Begriff des Unendlichen nicht ohne Sinn, sonst wäre der Gottesbegriff auch sinnlos und die ganze Welt eitel Dunst und Schein. Der Raum ist unendlich groß, die ihn erfüllende Materie ohne Ende theilbar und aus Atomen zusammengesetzt, die wir uns unendlich klein vorzustellen haben; die Zeit ist ewig, und kein menschliches Kunstwerk wird jemals so kleine Zeittheilchen darstellen, daß man sich nicht noch kleinere denken könnte; ein von stetig wirkenden Kräften fortbewegter Körper beschreibt eine Curve, deren noch so klein angenommener Theil doch immer noch eine krumme Linie ist; und so kann wohl der Mathematiker, der sich ja eben mit Raum, Zeit und Bewegung zu beschäftigen hat, nicht umhin, den Begriff des Unendlichen in seiner Wissenschaft zuzulassen, wenn er zunächst auch nur prüfend mit einer Hand in das dunkele Gebiet hinausgreift, während die andere noch an der schützenden Schranke festhält. Die Schwierigkeiten und Unbegreiflichkeiten der Differentialrechnung beginnen vielmehr grade da, wo uns einer der vorzüglichsten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts eine Verbesserung und rein wissenschaftliche Begründung verspricht. Man machte nämlich die interessante Entdeckung, daß die berühmte Tochter des Aeskulap, die Panacea, sich in eine unendliche Reihe metamorphosirt hat, und es war daher ein Leichtes, sich mit Hülfe einer solchen endlosen Progression über den Abgrund der Unendlichkeit hinüber zu schwingen!

Mit einer gewissen naiven Selbstgewißheit und genialer Leichtfertigkeit hat man mit solchen in infinitum fort laufenden Reihen das Mögliche oder eigentlich das Unmögliche geleistet und erst in der neuesten Zeit hat man sich endlich langsam dazu bequemt, den Mißbrauch einzugestehen, der mit einer an sich vortrefflichen Entdeckung getrieben worden ist. In der That haben in neuerer Zeit viele Theile der Theorie der unendlichen Reihen eine gänzliche Umgestaltung erhalten und viele Resultate, die für völlig allgemein galten, sind in Grenzen eingeschlossen worden, über die hinaus ihre Anwendung mindestens unsicher ist. Tüchtige Mathematiker haben unserer viel bewunderten Analysis eine ihr bevorstehende vollkommne Umgestaltung augurirt, obgleich bis jetzt noch der Baumeister zu fehlen scheint, der den Willen und die Kraft besitzt, das Gebäude auf sicherem Fundamente neu und schön aufzurichten, statt das alte stellenweise auszubessern. Ich für mein Theil bin von der Wahrheit dieser Prophezeiung vollkommen überzeugt und bedaure nichts mehr, als daß ich mich nicht stark genug fühle, um zu diesem Almagest der Zukunft ein paar paßliche Bausteine herbeitragen zu helfen. Ich habe zwar in den nachfolgenden zunächst für meine Schüler — denen ich gewissermaßen zum Abschlusse ihres mathematischen Schulcursus noch einen kurzen Einblick in die sog. höhere Analysis gewähren möchte, — bestimmten Zeilen, an mehren Stellen unumwunden meine Meinung ausgesprochen, bin mir aber dabei vollkommen bewußt geblieben, daß tadeln leichter ist, als besser machen.

Einige Erklärungen, welche in den meisten Lehrbüchern der Differentialrechnung vorangeschickt zu werden pflegen, z. B. über veränderliche und constante Größen, was man unter Function versteht, daß man die Functionen eintheilt in ganze und gebrochene, in rationale, irrationale und transscendente, u. dgl. m., darf bei den Primanern unserer Realschulen als bekannt vorausgesetzt werden.

Wenn in der Gleichung $y = f(x)$ die ursprünglich variabele Größe x um $\triangle x$ zunimmt, so ändert sich y in einer von dem Wesen dieser Function abhängigen Weise um $\triangle y$, so daß also

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x) \quad \text{und}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Um die Eigenschaften der Function kennen zu lernen, wird es begreiflicher Weise von Wichtigkeit sein, dieses Verhältniß der zusammen gehörigen Aenderungen näher ins Auge zu fassen. Nun gehört es aber zu dem Wesen einer solchen Function, daß die Aenderungen nicht sprungweise erfolgen, sondern daß die verschiedenen y stetig in einander übergehen, — und um daher das geheimnißvolle Walten der Natur, welches eben in dieser Stetigkeit des Zu- oder Abnehmens besteht, seinem Verständnisse möglichst nahe zu bringen, hat der menschliche Geist absolut kein anderes Mittel, als sich diese Aenderungen möglichst klein, oder wie man sich lieber auszudrücken pflegt, unendlich klein vorzustellen. Der Differenzen-Quotient $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ist nun im Allgemeinen immer eine Function von x und bleibt eine solche, wenn ich das $\triangle x$ immer kleiner werden lasse, endlich gradezu $= o$ setze.

Diese Grenze $= f'(x)$, der sich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ immer mehr nähert, je kleiner $\triangle x$ wird, nennt man den Differentialquotienten von y, und bezeichnet denselben ziemlich allgemein mit

$$\frac{dy}{dx} \text{ oder } \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x).$$

dx heißt das Differential von x, dy das Differential von y und wir wollen hier gleich vorläufig bemerken, daß, gleichwie in der Differenzenrechnung $\triangle x$ als unveränderlich in Vergleich zu $\triangle y$ gilt, auch hier dx als constant in Beziehung auf dy angesehen wird.

$\frac{dy}{dx}$ ist also ein Verhältniß von zwei unendlich kleinen Größen, und daß es für ein solches Verhältniß einen ganz bestimmten Ausdruck geben wird, kann eben so wenig zweifelhaft sein, als daß in jedem Atome des Wassers das Verhältniß des Wasserstoffes zum Sauerstoffe = 2 : 1 ist. Dem Anfänger macht es allerdings Schwierigkeiten, wenn er in

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

$\triangle x = o$ setzen soll; und die Meister der Wissenschaft, je höher sie gestiegen sind, um so unlieber berühren sie diese empfindliche Stelle, weil sie sich in der Regel von ihrer Höhe nicht zu unserem beschränkten „Unterthanen-Verstande" herablassen können. Man vergesse aber nicht, daß es für die Auffassung ein großer Unterschied ist, ob ich in dem obigen Ausdrucke ohne Umstände $\triangle x = o$ setze, oder nach und nach immer kleiner werden lasse. Ich sollte ferner meinen, daß man bei dem Uebergange vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten nicht dem x, sondern dem $\triangle x$ andere und andere Werthe beilegt, so daß also in dieser Beziehung nicht x, sondern $\triangle x$ die ursprünglich variabele Größe ist. Der Ausdruck $\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ oder kürzer $\frac{f(x + m) - f(x)}{m}$ müßte also nicht als f(x), sondern als $\mathfrak{f}(m)$ betrachtet werden. Für $m = o$ geht der Ausdruck über in $\frac{o}{o}$; allein ich fürchte nicht, daß der Anfänger daran erheblichen Anstoß nehmen kann, da er ja schon in den Elementen der Analysis diesem Symbole der Unbestimmtheit begegnet und zur Beantwortung der Frage aufgefordert wird, was ist der wahre Werth eines mathematischen Ausdrucks, wenn derselbe für einen bestimmten Werth der variabelen Größe $= \frac{o}{o}$ wird? Was wir also Differentialquotient genannt haben, ist nichts Anderes als $\mathfrak{f}(m)$ für $m = o$ oder $\mathfrak{f}'(m)$.

Oder man schreibe den obigen Differenzenquotienten so:

$$\frac{f(x)' - f(x)}{x' - x}.$$

Ist f(x) eine ganze rationale Function, oder läßt sie sich wenigstens in eine solche verwandeln, sei es auch nur in Form einer nach den Potenzen von x fortschreitenden Reihe, so ist leicht einzusehen, daß $f(x)' - f(x)$ durch $x' - x$ theilbar sein muß und nach Ausführung dieser Division hindert uns nichts, $x' = x$ zu setzen, wodurch dann also der sogenannte Differentialquotient erhalten wird.

Lagrange in seinem berühmte Werke: **Théorie des fonctions analytiques** hat bekanntlich die Vorstellungen von Differentialen, von unendlich kleinen Veränderungen, von Grenzverhältnissen &c. ganz vermieden, weil er sie nicht für deutlich genug hält, um in einer Wissenschaft, die sich auf ihre unumstößlichen Beweise so viel zu gute thut, als Grundlage zu dienen; aber leider **incidit in Scyllam!** Lagrange legt seiner Theorie folgende Reihe zu Grunde:

$$\frac{f(x + \triangle x) - fx}{\triangle x} = f'(x) + f''(x)\ \frac{\triangle x}{1\,.\,2} + f'''(x)\ \frac{\triangle x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ nennt er **fonctions dérivées** und zeigt dann, daß diese abgeleiteten Functionen nichts Anderes sind, als unsere Differentialquotienten. Allein ganz abgesehen davon, daß Lagranges Methode bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik nur dem Namen nach von der Methode der Grenzen sich unterscheidet, dürfte doch wohl die Frage erlaubt sein, was uns zu der Annahme berechtigt, daß sich die Differenz einer jeden Function einer veränderlichen Größe in eine nach den Potenzen der Differenz dieser Functionalgröße fortschreitende Reihe entwickeln läßt? Lagrange und nach ihm Andere suchen zwar zu beweisen, daß die obige Reihe für jede Function gilt ohne alle Ausnahme, und das blendende Licht, welches dieser große Geist überallhin ausstrahlt, könnte unsere des Sonnenglanzes ungewohnten Augen leicht hindern, genauer hinzusehen. Bei aller Hochachtung vor dem großen Meister, muß ich doch aufrichtig gestehen, daß mich der Beweis nicht befriedigt. Ob er Anfänger, für die er ja doch als Beweis des Fundamentalsatzes der ganzen Theorie bestimmt zu sein scheint, überzeugt, ist mir mehr als zweifelhaft, da Lagrange es eben nicht versteht, seine Gedanken in leicht verständlicher Form wiederzugeben. In der That ist obige Entwickelung nicht für jede Function ausführbar und noch weniger für jedes $\triangle x$ brauchbar, weil bei der Anwendung auf bestimmte Fälle Glieder $= o\,.\,\infty$ werden. Wir werden auf diesen Gegenstand später zurückkommen.

Für die meisten in der niederen Analysis vorkommenden Functionen läßt sich freilich ohne große Schwierigkeit nachweisen, daß,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = A + B \triangle x + C \triangle x^2 + \ldots.$$

Läßt man in dieser Entwickelung $\triangle x$ unendlich klein werden, so geht augenscheinlich $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in A über, da die mit $\triangle x$ multiplicirten Glieder der Reihe einen unendlich geringen Einfluß haben, mit a. W. $= o$ sind. Der Differentialquotient ist hiernach nichts Anderes, als der von $\triangle x$ unabhängigen Theil des Differenzenquotienten.

Mit allen derartigen Auseinandersetzungen ist aber dem Lernenden, der sich gleich von vornherein bei dem Worte Differentialquotient etwas Ordentliches vorstellen möchte, so gut wie gar nichts genützt. Um diesen wichtigen Zweck zu erreichen, hätte man den von den Begründern der Wissenschaft eingeschlagenen Weg umsoweniger verlassen sollen, als ja unsere Schüler schon in den Elementen der Geometrie mit den hierbei zum Grunde liegenden Begriffe bekannt gemacht werden, wenn man z. B. den Kreis als Polygon von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten sich vorstellt u. dgl. m.; — ich meine eine ganz einfache geometrische Betrachtung. Hieß ja doch Anfangs die Differentialrechnung „die directe Methode der Tangenten", die Integralrechnung, „**inversa methodus tangentium**".

Aus den Elementen der analytischen Geometrie ist bekannt, daß jede Function von der Form $y = f(x)$, insofern die Gleichung nicht etwa etwas an sich Unmögliches enthält, durch eine gerade oder krumme Linie bildlich dargestellt werden kann. Gleichung und Curve sind zusammengehörende Begriffe; aus der Gleichung lernt man die Eigenschaften der Curve kennen, aus dem Zuge der krummen Linie leitet man die Gleichung her. Wir wissen ferner, daß man unter einer Berührenden eine gerade Linie versteht, welche nur einen Punkt mit der Curve gemein hat, so zwar, daß zwischen ihr und der Curve keine andere gerade Linie durch diesen Punkt hindurch gelegt werden kann.*) Legt man nun durch die Punkte A und B in Figur 1 eine Secante, dann ist offenbar $AC = \triangle x$ und $BC = \triangle y$; daher $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die schneidende Linie mit der Abscissenaxe bildet. Lassen wir die Linie MS sich um den Punkt A so herum drehen, daß der Punkt B dem Punkte A immer näher und näher rückt, bis er endlich ganz mit demselben zusammen fällt, so geht die Schneidende über in die Berührende für den Punkt A. Natürlich sind gleichzeitig $\triangle x$ und $\triangle y$ immer kleiner und kleiner geworden, so daß $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ in $\frac{dy}{dx}$ übergeht. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ist also die Tangente des Winkels, den die Berührende für den Punkt (x, y) mit der Abscissenaxe macht.

Gleichwie nun, um den Zug einer Curve kennen zu lernen, die Richtung der Berührenden in jedem einzelnen Punkte das Wesentliche ist, so wird auch der analytische Ausdruck dieser Richtung, also der Differentialquotient für die Discussion einer Function von besonderer Bedeutung sein.

Für diejenigen Punkte der Curve z. B., wo sich dieselbe von unten nach oben, oder von oben nach unten umbiegt, wo also y ein Maximum oder Minimum wird, ist offenbar $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{dy}{dx} = 0$, die bekannte Regel, den größten oder kleinsten Werth einer Function zu bestimmen, worauf wir später zurückkommen werden.

Differentiation algebraischer Functionen.

Ist $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, so bedient man sich auch häufig der andern Schreibweise:

$$dy = f'(x) \,.\, dx.$$

Sie ist genau genommen falsch, denn $\frac{dy}{dx}$ hat nur einen Sinn, wenn man es als Verhältniß auffaßt. Man kann aber der Bequemlichkeit halber diese Schreibweise beibehalten, da man ja dem Ausdrucke jeden Augenblick wieder die richtige Form geben kann. y, u, v ... mögen irgend welche Functionen von x bezeichnen, so daß also y in $y + \triangle y$, u in $u + \triangle u$, v in $v + \triangle v$ ... übergeht, sobald die ursprünglich variabele Größe x um $\triangle x$ wächst.

Es sei 1) $y = ax + b$, so ist

$$(y + \triangle y) = a(x + \triangle x) + b$$

---

*) Leibnitz betrachtet jede Curve als ein Polygon unendlich vieler unendlich kleiner Atome und demgemäß die Tangente als die Verlängerung eines solchen Atomes.

$$\triangle y = a \triangle x \quad \text{oder} \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = a, \text{ folglich:}$$

$$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{oder} \quad dy = a\,dx\,.$$

2) $y = \dfrac{a}{x}$

$$y + \triangle y = \frac{a}{x + \triangle x}$$

$$\triangle y = \frac{a}{x + \triangle x} - \frac{a}{x}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = - \frac{a}{x\,(x + \triangle x)}.$$ Wird $\triangle x$ unendlich klein:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a}{x^2}.$$

3) $y = u \pm v$

$$y + \triangle y = u + \triangle u \pm v \pm \triangle v$$

$$\triangle y = \triangle u \pm \triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} \pm \frac{\triangle v}{\triangle x}$$ und wenn $\triangle x$ unendlich klein wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

4) $y = u\,.\,v$

$$y + \triangle y = (u + \triangle u)\,(v + \triangle v)$$

$$= u\,.\,v + u\triangle v + v\triangle u + \triangle u\,.\,\triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u\frac{\triangle v}{\triangle x} + v\frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle u}{\triangle x}\,.\,\triangle v.$$

wird hierin $\triangle x$ unendlich klein, so wird auch das Produkt aus dem Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$ in die unendlich kleine Größe dv verschwindend klein sein, und es bleibt:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ oder kurz:

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

5) $y = \dfrac{u}{v}$

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v}$$

$$\triangle y = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v(v + \triangle v)}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\dfrac{\triangle u}{\triangle x} - u\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v + \triangle v)}$$ und sobald $\triangle x$ unendlich klein wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \text{ oder kürzer:}$$

$$dy = \frac{v \cdot du - u\,dv}{v^2}.$$

6) $y = x^m$.

$y + \triangle y = (x + \triangle x)^m$; nach dem binomischen Lehrsatze:

$$= x^m + m x^{m-1} \triangle x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \triangle x^2 + \ldots \text{ daher}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \triangle x + \ldots \text{ Also für } \triangle x = \text{unendlich klein,}$$

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

Setzen wir voraus, daß der binomische Lehrsatz bereits allgemein für jeden beliebigen Exponenten bewiesen worden ist, so gilt das gewonnene Resultat ebenfalls für jeden beliebigen Exponenten.

Nun giebt sich aber die Differentialrechnung das Ansehen, daß der allgemeine Beweis dieses so überaus wichtigen Satzes erst durch sie zu Stande gebracht werden kann, und muß sich also nach einem allgemeinen Beweise der obigen Differentialformel ohne Anwendung des binomischen Theorems umsehen.

Es sei also:

7) $y = x^{\frac{m}{n}}$, also $y^n = x^m$, daher:

$$n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1} y}{y^n} = \frac{m}{n} x^{-1} y = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$$

8) $y = x^{-m}$, also $y x^m = 1$, daher:

$$y \cdot dx^m + x^m dy = o$$

$$y \cdot m \cdot x^{m-1} dx + x^m dy = o$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m x^{m-1} y}{x^m} = -m x^{-m-1}$$

9) $y = x^{-\frac{m}{n}}$, also $y^n x^m = 1$, daher

$$y^n dx^m + x^m dy^n = o$$

$$y^n m x^{m-1} dx + x^m n y^{n-1} dy = o$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m y^n x^{m-1}}{n x^m y^{n-1}} = -\frac{m}{n} y x^{-1} = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n} - 1}.$$

Demnach gilt obige Differentialformel auch für negative und gebrochene Exponenten. Freilich bleibt uns die Differentialrechnung den Beweis schuldig, daß die Formel auch für irrationale und imaginaire Exponenten richtig bleibt, wendet aber dennoch dieselbe auch in diesen Fällen an und gründet darauf weitreichende und verwickelte Schlüsse, die dann haltlos in der Luft schweben.

Enthält der auf diese Weise erhaltene Differentialquotient noch die variabele Größe x, ist derselbe also eine neue Function von x, etwa $f'x$, so kann man offenbar mit $f'(x)$ ganz in gleicher Weise die

Operation des Differentiirens vornehmen. Ist nämlich

$$y = f(x) \text{ und } dy = f'(x) \,.\, dx$$

so erhält man dy und x als variabel, dx hingegen als constant betrachtet:

$$d(dy) = f''(x) \,.\, dx \,.\, dx$$

$$d[d(dy)] = f'''(x) \,.\, dx \,.\, dx \,.\, dx \text{ u. s. w.}$$

Man bezeichnet $d(dy)$ mit d^2y, $d[d(dy)]$ mit d^3y u. s. w., erhält also:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''x \ldots.$$

und nennt diese abgeleiteten Functionen Differentialquotienten 2ter, 3ter .... Ordnung, oder sagt auch kurz 2ter, 3ter .... Differentialquotient.

Transscendente Functionen.

Transscendente Functionen, **quae vires Algebrae transscendunt**, wie Leibnitz sagt, kommen in der höheren Analysis vielfach vor, z. B. der Integrallogarithmus $\int \frac{dx}{\log. x}$, die **transscendentes elliptiques**, $-\int e^{-t^2} dt$ u. s. w. Hier kann aber selbstverständlich nur von denjenigen transscendenten Functionen die Rede sein, welche vorzugsweise so heißen und in der Analysis ein gewisses Bürgerrecht erworben haben, nämlich Exponentialgrößen, Logarithmen und Kreisfunctionen.

Die ganze rationale Function macht dem Mathematiker offenbar ungleich weniger Umstände und Schwierigkeiten, als jede andere und der Gedanke liegt daher nahe, zu untersuchen, ob sich nicht vielleicht jede beliebige gebrochene, irrationale oder transscendente Function in eine ganze rationale verwandeln läßt? Bei diesem Versuche wird man sich nun aber bald überzeugen, daß, wenn diese Transformation überhaupt ausführbar ist, eine unbegrenzte Anzahl von Gliedern zugelassen werden muß, also eine unendliche Reihe von der Form:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Läßt sich nun $f(x)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so sind die vorausgesetzten Coefficienten durch den bekannten Schluß: „die Reihe gilt für jeden Werth von x, also auch für $x = o$;" scheinbar leicht zu finden. Zunächst erhalte ich $A = f(o)$:

durch Differentiation:

$$\frac{df(x)}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots. \text{ folglich:}$$

$$B = \frac{df(o)}{dx} \text{ oder } = f'(o).$$

Durch wiederholte Differentiation:

$$\frac{d^2fx}{dx^2} = 2C + 2.3Dx + \ldots.$$

$$\frac{d^3fx}{dx^3} = \quad 2.3D \;+ \ldots.$$

also $$C = \frac{1}{1\,.\,2} \frac{d^2 f(o)}{dx^2} = \frac{f''(o)}{1\,.\,2}$$

$$D = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{d^3 f(o)}{dx^3} = \frac{f'''(o)}{1\,.\,2\,.\,3} \text{ u. s. w.}$$

daher $$f(x) = f(o) + f'(o) \frac{x}{1} + f''(o) \frac{x^2}{1\,.\,2} + f'''(o) \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots.$$

Das ist nun die berühmte Mac Laurin'sche Reihe, welche in der Analysis als untrügliches Universalmittel angeboten wird, um alle und jede Function in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Sie sieht allerdings recht einladend und elegant aus; Schade nur, daß sie uns so oft im Stiche läßt. Die Mac Laurin'sche Reihe ist nämlich nicht allgemein, sondern nur unter der Voraussetzung richtig, daß sich f(x) in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

auflösen läßt, was eben erst bewiesen werden soll und einfach — nicht wahr ist.

Es kann freilich nicht zweifelhaft sein, daß uns nichts hindert, daß wir vielmehr in unserem vollen Rechte sind, wenn wir für f(x) die vorstehende Reihenform voraussetzen, da sie sich doch einmal als die bequemste und gefügigste zu empfehlen scheint. Denn läßt sich nachher die Art und Weise, wie die ursprünglich veränderliche von den bekannten oder constanten Größen der Aufgabe abgesondert werden sollte, mit anderen Worten, lassen sich die vorausgesetzten unbestimmten Coefficienten A, B, C .... finden, so ist ja eben dadurch unsere Voraussetzung gerechtfertigt. Es wird dann Alles darauf ankommen, ob die erhaltene Reihe convergirt oder divergirt und nur im ersten Falle ist die Darstellung der Function durch eine unendliche Reihe möglich. Ist die Reihe dagegen divergent, so lernen wir eben nichts weiter daraus, als daß sie nur unter gewissen Bedingungen oder auch gar nicht existirt. Der geniale Humbug, der mit divergirenden Reihen vielfach getrieben wird, ist im Ganzen werthlos, und anstatt sich hinter hohle Redensarten zu verstecken, wie z. B. „die Reihe sei theoretisch richtig, aber nicht praktisch brauchbar", sollte man einfach und ehrlich sagen, unter den und den Umständen ist die Summe der Reihe nicht $= f(x)$, oder f(x) läßt sich nicht in eine Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

auflösen.

Prüfung der Convergenz der Reihen.

Eine Reihe nennt man convergent, wenn die Summe ihrer n ersten Glieder sich einem bestimmten Grenzwerthe um so mehr nähert, je größer man n annimmt, so daß also der Rest der Reihe immer kleiner wird. Es wäre für die Analysis ein großer Fortschritt, wenn man ein Mittel fände, die Convergenz der Reihen ganz allgemein bestimmt und sicher festzustellen. Einstweilen werden wir uns bescheiden müssen, die Frage in jedem einzelnen Falle besonders in's Auge zu fassen.

Nur in einem einzigen Falle sind wir im Stande, die Frage nach der Convergenz leicht und sicher zu beantworten, nämlich bei der bekannten geometrischen Progression:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. \text{ in inf.}$$

Die Summe für n Glieder ist bekanntlich

$$s = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Soll die Reihe in inf. fortgehen, so ist $n = \infty$ zu setzen. Ist nun $x < 1$, so ist $x^\infty = 0$, ist dagegen $x > 1$, so wird $x^\infty = \infty$. Für $x < 1$ ist daher die Summe der Reihe

$$s = \frac{1}{1 - x},$$

für $x > 1$ aber ist die Summe nicht $= \frac{1}{1 - x}$, sondern unendlich. Auch für $x = 1$ ist die Summe als ein Aggregat unendlich vieler Einsen = unendlich.*)

Jede beliebige andere Reihe kann man nun in Beziehung auf Convergenz und Divergenz dadurch prüfen, daß man sie mit dieser geometrischen Progression vergleicht.

Es sei nämlich die Reihe:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

Sind die Verhältnisse $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \ldots = p$, also immer gleich groß, dann ist

$$a_{n+1} = a_n p, \quad a_{n+2} = a_n p^2 \ldots, \text{ daher}$$

$$s = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1} + a_n(1 + p + p^2 + \ldots).$$

Die eingeklammerte Reihe ist aber nur zu summiren, wenn $p < 1$; wenn also in der gegebenen Reihe das Verhältniß zweier aufeinander folgender Glieder sich immer mehr der Größe p nähert, so hat dieselbe nur dann eine endliche Summe, wenn $p < 1$.

---

*) Die Sache ist so überaus einfach, daß man gar nicht begreift, wie sonst rühmlichst bekannte Mathematiker sich nicht scheuen, gerade mit dieser Reihe die haarsträubendsten Schlüsse zu Stande zu bringen, wie z. B.

$$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots = \frac{1}{1 - b}, \quad b = 10 \text{ giebt:}$$

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots = -\tfrac{1}{9}!$$

Oder:

$$1 - b + b^2 - b^3 + \ldots = \frac{1}{1 + b}, \quad b = 1 \text{ giebt}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2}!$$

Offenbar ist ja doch

$$1 - b + b^2 - b^3 + \ldots = \frac{1}{1 + b} \pm \frac{b^\infty}{1 + b}, \text{ also für } b = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1 \pm 1}{2} = 1 \text{ oder } = 0.$$

Guido Grandi glaubt, daß aus unendlich vielen 1 — 1 doch etwas Endliches entstehen könne und wittert in dieser Reihe die Lösung des Räthsels der Schöpfung aus Nichts! Leibnitz schreibt über diesen Gegenstand an Chr. Wolf: (Acta Erud. suppl. t. V. 1713). „Die Reihe ist für eine gerade Anzahl = 0, für eine ungerade = 1. Von einer unendlichen Anzahl kann man weder sagen, daß sie gerade, noch daß sie ungerade sei. Daher geschieht mit bewunderungswerther Feinheit der Natur bei dem Uebergange vom Endlichen zum Unendlichen, auch ein Uebergang von dem Disjunctiven zu einem Bestimmten in der Mitte zwischen beiden Disjunctiven liegenden. Da nun bei zwei gleich wahrscheinlichen Fällen das arithmetische Mittel für die Wahrscheinlichkeit zu nehmen ist, so beobachtet auch hier die Natur die Regel der Gerechtigkeit und giebt das Mittel zwischen 0 und 1, d. i. $\tfrac{1}{2}$!!" —

Werden ferner die Verhältnisse immer größer, so daß

$$a_{n+1} = a_n\,p, \quad a_{n+2} = a_n\,p\,p', \quad a_{n+3} = a_n\,p\,p'\,p'' \ldots, \text{ dann ist}$$
$$s = a_1 + a_2 \ldots + a_{n-1} + a_n(1 + p + p\,p' + p\,p'\,p'' \ldots).$$

Die Reihe $1 + p + p^2 \ldots$ war bloß nicht zu gebrauchen für $p > 1$; die Reihe $1 + p + pp' + pp'p'' \ldots$ hat aber in keinem Falle eine endliche Summe, da die p wachsen, also > 1 werden müssen. Wenn also in einer beliebigen Reihe das Verhältniß von zwei aufeinander folgenden Gliedern immer größer wird, so divergirt dieselbe und ist daher nicht zu gebrauchen. Wenn dagegen die Verhältnisse $p, p', p'' \ldots$ immer kleiner, also endlich < 1 werden, so ist $pp' < p^2$, $pp'p'' < p^3 \ldots$ Also hat $1 + p + pp' + pp'p'' + \ldots$ und damit auch

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

eine angebbare Summe.

Dieser Satz reicht glücklicher Weise aus, um festzustellen, ob die auf irgend eine Art für $f(x)$ gefundene unendliche Reihe brauchbar ist, oder nicht.

Wenn man nun in der Reihe

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$$

die Coefficienten A, B, $C \ldots$ durch den Mac Laurin'schen Satz finden kann, so ist dagegen natürlich nichts einzuwenden; es ist, wie gesagt, nur zu bedauern, daß es in gar vielen Fällen nicht geht. Abgesehen davon, daß es Selbstüberwindung kostet, auf Umwegen zu einem Ziele zu gelangen, was kürzer zu erreichen ist, daß einige Geduld dazu gehört, sich durch ein Labyrinth von Differentialformeln hindurch zu tasten, in dessen Halbdunkel von einem Erkennen des Gesetzes, nach welchem die Reihe verläuft, selten die Rede sein kann, — versagt nicht selten die Mac Laurin'sche Reihe ganz und gar, giebt die Coefficienten $= \infty$ oder $= \frac{0}{0}$ u. dgl. und beweist eben dadurch die von mir vorhin ausgesprochene Ansicht, daß sie, nämlich die Mac Laurin'sche Reihe, nicht allgemein gilt. Wenn daher die Adepten der sogenannten höheren Analysis mit einer gewissen Vornehmthuerei auf die nicht in die tiefsten Geheimnisse ihrer Hieroglyphen eingeweiheten Menschenkinder herabsehen, wenn sie behaupten, die Darstellung der transscendenten Functionen durch Reihen sei nur durch Differentialrechnung ausführbar und allgemein zu beweisen, so mögen es mir die Herren nicht übel nehmen, wenn ich ihnen nicht Alles glaube. Ich meine vielmehr die Differentialrechnung verkennt ihre Bestimmung, wenn sie die Entwickelung jener transscendenten Functionen als eine ihrer wichtigsten Aufgaben betrachtet und irrt, wenn sie die allgemeine Lösung dieser Aufgabe durch den Taylorschen resp. Mac Laurin'schen Satz gefunden zu haben behauptet. Die nur ein klein wenig anders als gewöhnlich gehandhabte Methode der unbestimmten Coefficienten führt ganz leicht und befriedigend zum Ziele und würde der Differentialrechnung sogar die Mühe ersparen können, die Differentialquotienten der fraglichen Functionen aufzusuchen. Da aber die hochgestellte Dame die Dienste ihrer vermeintlichen Magd nicht will, so lassen wir sie ihre Differentialquotienten selbst auffinden und kommen später auf die Herleitung der Reihen zurück.

Differentiation transscendenter Functionen.

1. $y = \overset{a}{\log}.\ x.$

Setzt man die Reihenentwickelung voraus

$$\overset{a}{\log}.\,(1 + x) = M\,[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots]$$

so folgt augenblicklich:

$$\frac{d \log. (1+x)}{dx} = M [1 - x + x^2 - x^3 + \ldots]$$

$$= \frac{M}{1+x};$$

oder wenn man $1 + x = z$ setzt,

$$\frac{d \log. z}{dz} = \frac{M}{z};$$

und für den natürlichen Logarithmus:

$$\frac{d \log. nat. x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Da beide gebrauchte Reihen nur für $x < 1$ convergiren, so gilt das Resultat zunächst nur für $x < 1$.

Nun ist aber:

$$\log. x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 2 [z + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 + \ldots]$$

daher $$d \log. x = 2 dz [1 + z^2 + z^4 + \ldots].$$

Da hier $z < 1$, so ist $1 + z^2 + z^4 + \ldots = \frac{1}{1-z^2} = \frac{(x+1)^2}{4x}$

und $$dz = \frac{2dx}{(x+1)^2}$$

daher $d \log. x = \frac{dx}{x}$, wie vorher.

Ohne die Reihenentwickelung zu kennen, findet man das Differential von $\log. x$ folgendermaßen:

Es sei $\frac{d \log. x}{dx} = f(x)$, dann ist:

$$\frac{d (\log. x^n)}{d (x^n)} = f(x^n) = \frac{n \, d \log. x}{n x^{n-1} \, dx}$$

$$f(x^n) = \frac{1}{x^{n-1}} f(x), \text{ oder:}$$

$$f(x) = x^{n-1} f(x^n)$$

Da n beliebig ist, so darf man n auch $= o$ setzen, dadurch erhält man:

$$f(x) = x^{-1} \; f(1).$$

$f(1)$ ist offenbar eine Constante $= M$, daher

$$f(x) = \frac{d \log. x}{dx} = \frac{M}{x}.$$

Setzt man $x = 1 + z$, ferner $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$

so daß $$\log. z = M \int (1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) \, dz$$

so erkennt man, daß M der Modul des Systems sein muß.

Gegen diese Herleitung ist einzuwenden, daß der Schluß, man dürfe in der Gleichung:

$$f(x) = x^{n-1} f(x^n)$$

auch $n = o$ setzen, nichts weniger als überzeugend ist, wenn wir auch allenfalls die Herbeiziehung der Integralrechnung entschuldigen wollen. *)

2. $y = a^x$.

Logarithmirt giebt: $\log. y = x \log. a$,

und differentiirt: $\frac{dy}{y} = dx \log. a$,

also $\frac{dy}{dx} = a^x \log. a$,

und $a = e$ gesetzt: $dy = d(e^x) = e^x dx$.

Aus der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$

folgt dasselbe Resultat unmittelbar.

3. $y = \sin x$ und $y' = \cos x$.

Kennt man bereits die Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

so folgt ohne alle Umstände: $d \sin x = \cos x\, dx$

und $d \cos x = -\sin x\, dx$.

Als eine kleine Geduldsprobe und als Beweis, daß man auch auf Umwegen über Stock und Stein zum Ziele gelangen kann, will ich die Methode hersetzen, wie gelehrte Leute diese beiden Differentiale finden. Wem die übertriebene Nullenrechnung nicht behagt, der mag diese Deduction überschlagen.

Es sei $\frac{d \sin x}{dx} = \varphi(x)$

da $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$, so ist

$\sin x\, d \sin x + \cos x\, d \cos x = o$,

daher $\frac{d \cos x}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} \varphi x$.

Nun ist $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

daher $d \sin(x+y) = \sin x\, d \cos y + \cos y\, d \sin x + \cos x\, d \sin y + \sin y\, d \cos x$,

also $\varphi(x+y)\, d(x+y) = -\sin x \frac{\sin y}{\cos y} \varphi y\, dy + \cos y\, \varphi x\, dx - \frac{\sin x}{\cos x} \varphi x\, dx + \cos x\, \varphi y\, dy$

$$= \cos(x+y)\left[\frac{\varphi y\, dy}{\cos y} + \frac{\varphi x\, dx}{\cos x}\right].$$

Setzt man hierin $y = (n-1)x$, wo n jede beliebige Größe haben kann, so ist:

$$\varphi(nx)\, d(nx) = \frac{\cos nx\, \varphi x\, dx}{\cos x} + \frac{\cos nx\, \varphi(n-1)x\, d(n-1)x}{\cos(n-1)x}$$

---

*) Die Formel $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}$ ist angeblich auch allgemein richtig und giebt doch für $n = o$ etwas Falsches, nämlich $\frac{1}{0}$ anstatt $\log x$.

oder $$n\varphi(nx) = \frac{\cos nx\, \varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\cos nx\, \varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}$$

und $$\frac{n\varphi\, nx}{\cos nx} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\,\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}. \quad \text{I.}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Reihe für n die Zahlenwerthe 2, 3, 4 ... n, so ist:

$$\frac{2\varphi\, 2x}{\cos 2x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{\varphi x}{\cos x}$$

$$\frac{3\varphi\, 3x}{\cos 3x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{2\varphi\, 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{4\varphi\, 4x}{\cos 4x} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{3\varphi\, 3x}{\cos 3x}$$

$$\cdots$$

$$\frac{n\varphi\, nx}{\cos nx} = \frac{\varphi x}{\cos x} + \frac{(n-1)\,\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x}.$$

Addirt man, so ergiebt sich für ein ganzes positives n das Resultat:

$$\frac{n\varphi\, nx}{\cos nx} - \frac{(n-1)\,\varphi x}{\cos x} = \frac{\varphi x}{\cos x} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\varphi\, nx}{\cos nx} = \frac{\varphi x}{\cos x}. \quad \text{II.}$$

Um zu beweisen, daß Gleichung II. richtig bleibt für jedes beliebige n, setze man in Gleichung I.

$$\frac{\varphi\, nx}{\cos nx} = \frac{\varphi(n-1)x}{\cos(n-1)x} = \frac{\varphi x}{\cos x};$$

dadurch erhalten wir $\dfrac{n\,\varphi x}{\cos x} = \dfrac{n\,\varphi x}{\cos x}$.

Da wir also durch diese Substitution etwas Richtiges erhalten, so muß Formel II. eben so gut, wie Formel I. für jeden Werth von n gelten. Nehmen wir nun $n = o$, so ist $\dfrac{\varphi o}{1} = \dfrac{\varphi x}{\cos x}$.

φo ist aber offenbar eine Constante, daher

$$\varphi x = C \cos x.$$

Um ferner noch die Constante C zu bestimmen, wird folgendermaßen geschlossen:

Da $\sin x < x$, so ist $\dfrac{\sin x}{x} < 1$;

und da $\mathrm{tg.}\, x > x$, so ist $\dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

$\dfrac{\sin x}{x}$ liegt also zwischen den Grenzen 1 und $\cos x$ ist also $= 1$ für $x = o$.

In der Gleichung $\dfrac{\sin x}{x} - 1 = o$, wird also o eine Wurzel sein, so daß $\dfrac{\sin x}{x} - 1$ den Factor $x - o$ enthalten muß. Daher $\sin x = x + Px^2$

und $$\frac{d \sin x}{dx} = 1 + 2x \,.\, Px\, \frac{x^2\, dP}{dx} = C \cos x.$$

Setzt man hierin endlich $x = o$, so ist $C = 1$, folglich:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Wer kein Freund ist von solchem Bombast, wird die folgende Herleitung bei weitem vorziehen. Es ist, $\Delta x = m$ gesetzt,

$$\sin(x+m) = \sin x \cos m + \cos x \sin m,$$
$$\cos(x+m) = \cos x \cos m - \sin x \sin m.$$

Daher $$\frac{\sin(x+m) - \sin x}{m} = -\sin x \frac{1-\cos m}{m} - \cos x \frac{\sin m}{m}$$
$$\frac{\cos(x+m) - \cos x}{m} = -\cos x \frac{1-\cos m}{m} - \sin x \frac{\sin m}{m}.$$

Setzen wir hierin m unendlich klein oder $= o$, so ist $\frac{\sin m}{m} = 1$

$$\frac{1-\cos m}{m} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} m^2}{2 \cdot \frac{1}{2} m} = \frac{\sin \frac{1}{2} m}{\frac{1}{2} m} \cdot \sin \frac{1}{2} m = o;$$

also da für $m = o$ der Differenzenquotient in den Differentialquotienten übergeht,

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \text{ und } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

4. $y = tg. x$, $y' = \cot x$.

$$\frac{d\, tg. x}{dx} = \frac{d\, \frac{\sin x}{\cos x}}{} = \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2} = \sec x^2.$$

und ebenso: $$\frac{d \cot x}{dx} = -\operatorname{cosec} x^2.$$

5. $y = \operatorname{arc} \sin x$, $y' = \operatorname{arc} \cos x$, $y'' = \operatorname{arc} tg. x$, $y''' = \operatorname{arc} \cot x$.

Aus $y = \operatorname{arc} \sin x$ folgt $x = \sin y$,

also: $$\frac{dx}{dy} = \cos y, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin y^2)}}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ebenso findet man leicht:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Aus $y = \operatorname{arc} tg. x$ folgt $x = tg. y$,

also: $$\frac{dx}{dy} = 1 + tg. y^2 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + tg. y^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arc} tg. x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

und ebenso: $$\frac{d \operatorname{arc} \cot x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Der merkwürdige Zusammenhang zwischen Logarithmen und Kreisfunctionen, der sich, sobald die Reihen für e^x, $\sin x$ und $\cos x$ bekannt sind, so leicht und sicher herausstellt, wird uns von der Differentialrechnung, welche diese Reihen hier noch ignorirt, auf folgende Art begreiflich gemacht:

Es ist: $$d \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\, dx}{1-x^2}.$$

Nun muthet man uns zu, in dieser Formel für x zu substituiren $\sqrt{(-1)}$ tg. φ, unbekümmert darum, ob die Formel in diesem sich jeder Kritik entziehenden Falle richtig bleibt oder nicht. Genug, es muß sein:

$$d \log \frac{1 + \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi}{1 - \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi} = \frac{2\sqrt{(-1)}\, d\varphi \sec \varphi^2}{1 + \text{tg. } \varphi^2} = 2\sqrt{(-1)}\, d\varphi$$

daher $$\log \frac{1 + \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi}{1 - \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi} = 2\varphi\sqrt{(-1)} + C.$$

Für $\varphi = o$ wird erhalten $o = C$,

daher $$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{1 + \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi}{1 - \sqrt{(-1)} \text{ tg. } \varphi} \qquad \text{I.}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi}{\cos\varphi - \sqrt{(-1)} \sin\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{[\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi]^2}{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \log [\cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi].$$

Daraus folgt weiter: $e^{\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos\varphi + \sqrt{(-1)} \sin\varphi$

und wenn φ in $-\varphi$ übergeht: $e^{-\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos\varphi - \sqrt{(-1)} \sin\varphi$ $\Big\}$ II.

Setzt man $n\varphi$ anstatt φ, so ist:

$$e^{\pm n\varphi\sqrt{(-1)}} = \cos n\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin n\varphi,$$

und wenn man die Gleichung II. zur n^{ten} Potenz erhebt:

$$e^{\pm n\varphi\sqrt{(-1)}} = [\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin\varphi]^n$$

daher: $$(\cos\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sqrt{(-1)} \sin n\varphi.$$

Setzt man in Gleichung I. tg. $\varphi = \frac{a}{b}$, so ist

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{(-1)}} \log \frac{a + b\sqrt{(-1)}}{a - b\sqrt{(-1)}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)}} \log \frac{a + b\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

daher: $$\log [a + b\sqrt{(-1)}] = \log \sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(-1)} \text{ arc tg. } \frac{a}{b};$$

so daß also der Logarithmus einer unmöglichen Größe keine neue unmögliche Größe, vielmehr von der Form ist $A + B\sqrt{(-1)}$.

Ich will diese Untersuchung nicht weiter fortsetzen und es Jedem überlassen, ob ihn solche Deductionen überzeugen oder nicht. Zum Schluß und zum Beweise, wie die Meister der Analysis, denen wir diese Beweise verdanken, mit solchen Formeln umspringen, will ich nur noch die Summation folgender Reihen hinzufügen:

$$y = \sin\alpha + a \sin(\alpha + \varphi) + a^2 \sin(\alpha + 2\varphi) + a^3 \sin(\alpha + 3\varphi) \ldots.$$
$$y' = \cos\alpha + a \cos(\alpha + \varphi) + a^2 \cos(\alpha + 2\varphi) + a^3 \cos(\alpha + 3\varphi) \ldots.$$

Da $\cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$ und $\sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$

$$2y\sqrt{(-1)} = e^{\alpha\sqrt{(-1)}} \Big[1 + a e^{\varphi\sqrt{(-1)}} + a^2 e^{2\varphi\sqrt{(-1)}} + a^3 e^{3\varphi\sqrt{(-1)}} \ldots.\Big]$$
$$- e^{-\alpha\sqrt{(-1)}} \Big[1 + a e^{-\varphi\sqrt{(-1)}} + a^2 e^{-2\varphi\sqrt{(-1)}} + a^3 e^{-3\varphi\sqrt{(-1)}} \ldots.\Big]$$

und da die eingeklammerten Reihen geometrische Progressionen sind,

$$2y\sqrt{(-1)} = \frac{e^{\alpha\sqrt{(-1)}}}{1-ae^{\varphi\sqrt{(-1)}}} - \frac{e^{-\alpha\sqrt{(-1)}}}{1-ae^{-\varphi\sqrt{(-1)}}}$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sqrt{(-1)}\sin\alpha}{1-a(\cos\varphi+\sqrt{(-1)}\sin\varphi)} - \frac{\cos\alpha - \sqrt{(-1)}\sin\alpha}{1-a(\cos\varphi-\sqrt{(-1)}\sin\varphi)},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$y = \frac{\sin\alpha - a\sin(\alpha-\varphi)}{1-2a\cos\varphi+a^2}.$$

auf ganz ähnliche Weise: $y' = \dfrac{\cos\alpha - a\cos(\alpha-\varphi)}{1-2a\cos\varphi+a^2}.$

Ist $\alpha=\varphi$ und $a=1$, so wird:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\alpha. \qquad \text{I.}$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots \text{ in inf.} = -\tfrac{1}{2}. \qquad \text{II.}$$

Das sieht recht niedlich aus, ist aber leider nicht wahr.

Man setze z. B. in II. $\alpha=0$, oder $=\pi$, so ist

$$1+1+1+1\ldots = -\tfrac{1}{2} \quad \text{oder}$$

$$-1+1-1+1\ldots = -\tfrac{1}{2}.$$

Dieselbe Substitution in Gleichung 1 giebt

$$0+0+0+0\ldots = \infty.$$

Diese Sonderbarkeiten rühren eben daher, daß man vergißt, in der Summenformel $1+b+b^2\ldots = \dfrac{1}{1-b}$ muß $b<1$ sein.

Es unterliegt natürlich keinem Zweifel, daß man bei den transscendenten Functionen eben so gut, wie bei den algebraischen einen 2ten, 3ten, 4ten ... Differentialquotienten suchen kann.

$$\begin{array}{lllll}
y = e^x & y = \log x & y = \sin x & y = \cos x & y = \operatorname{arc}\sin x \\[4pt]
\dfrac{dy}{dx} = e^x & \dfrac{dy}{dx} = x^{-1} & \dfrac{dy}{dx} = \cos x & \dfrac{dy}{dx} = -\sin x & \dfrac{dy}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\[4pt]
\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x & \dfrac{d^2y}{dx^2} = -x^{-2} & \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sin x & \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\cos x & \dfrac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\[4pt]
\dfrac{d^3y}{dx^3} = e^x & \dfrac{d^3y}{dx^3} = 2x^{-3} & \dfrac{d^3y}{dx^3} = -\cos x & \dfrac{d^3y}{dx^3} = \sin x & \dfrac{d^3y}{dx^3} = (1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}
\end{array}$$

u. s. w.

Der Taylor'sche Lehrsatz.

Der Taylor'sche Lehrsatz, zu welchem wir jetzt übergehen, ist diejenige analytische Formel, durch welche $f(x+\Delta x)$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickelt dargestellt wird. Je mehr Gewicht in der Analysis auf diesen Satz gelegt wird, desto mehr muß man bedauern, daß trotz aller Mühe, welche seit dem ersten Bekanntwerden desselben in **Brook Taylors Methodus incrementorum** im Jahre 1715 bis heute die bedeutendsten Mathematiker daran gesetzt haben, ein allgemein befriedigender, namentlich durch Einfachheit überzeugender Beweis noch fehlt.

Taylor selbst deutet folgenden Weg an:

Bedeutet in einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung y das erste Glied, Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y \ldots$ bezüglich die ersten Glieder der aufeinander folgenden Differenzen-Reihen, so ist das allgemeine Glied der Reihe:

$$y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 y \ldots.$$

oder y als eine Function von x betrachtet,

$$= y + \frac{n\,\Delta x}{1}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n\,.\,(n-1)\,\Delta x^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)\,.\,\Delta x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\ldots.$$

Denkt man sich nun, daß $n\Delta x$, indem Δx in's Unendliche ab, n dagegen in's Unendliche zunimmt, immer eine constante Größe $= h$ bleibt, so gehen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\ldots$ über in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}\ldots$ und gleichzeitig $n\Delta x$, $n(n-1)\Delta x^2\ldots$ in h, $h^2\ldots$ und man erhält:

$$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2 y}{dx^2}\frac{h^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3 y}{dx^3}\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\ldots.$$

welches die berühmte Taylor'sche Reihe ist.

Lagrange, der diese Reihe als Grundlage der ganzen Differentialrechnung und Functionentheorie betrachtet wissen will, sucht sie in seiner **Théorie des fonctions analytiques** auf folgende Art zu begründen:

Da $f(x+h)$ für $h+o$ in $f(x)$ übergeht, so muß die Reihe nothwendig ein von h unabhängiges Glied $= f(x)$ enthalten:

Folglich wird die Reihe sein:

$$f(x) + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma}\ldots.$$

Nun zeigt Lagrange zunächst, daß keiner der Exponenten α, β, $\gamma\ldots$ ein Bruch oder eine negative Zahl sein kann. Denn, sagt er, fx und $f(x+h)$ haben wegen der gleichen Functionszeichen auch gleich viel Werthe. Wäre nun auch nur ein Exponent z. B. α ein Bruch, so hätte Ax^{α} mehr als einen Werth, und $f(x+h)$ hätte also mehr Werthe als $f(x)$, welches ungereimt wäre. Nehmen wir ferner einen Exponenten z. B. β negativ an, so wäre für $h=o$, das Glied $Bh^{\beta} = \infty$, d. h. fx wäre für jeden Werth von x unendlich, was wieder unmöglich ist.

Derartige Beweise sind freilich mehr genial als ehrlich.

Wie oft kommt es doch wohl in der Analysis vor, daß man zwei mehrdeutige Ausdrücke gleichsetzt und dann untersuchen muß, welche Werthe zusammen gehören, d. h. wirklich gleich sind? Und wie dann, wenn f(x), wie es bei Logarithmen und Kreisfunctionen in der That der Fall ist, eine unbegrenzte Anzahl von Werthen hat? Dann ist doch sicher die Anzahl der Werthe von $f(x+h)$ trotz des gebrochenen Exponenten nicht größer als unendlich. Und warum sollte denn nicht β negativ sein können? Es braucht nur noch ein zweiter Exponent negativ zu sein, dann ist ja $f(x) = \infty - \infty$. Es muß also zugestanden werden, — Lagrange bleibt uns den Beweis, daß die Exponenten α, β, $\gamma\ldots$ ganze positive Zahlen sein müssen, schuldig.

Zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C ... gelangt er nach dieser Einleitung auf folgendem Wege, der allerdings an einigen Abgründen vorbeiführt, so daß wir wohl thun dürften, wenigstens ein Auge zuzumachen, um bei dem Anblicke der Ungeheuer der grausigen Tiefe, ich meine beim Anblicke der doppelt unendlichen Reihen, nicht von einem gelinden Schwindel ergriffen zu werden.

Man setze $(h + k)$ für h, so erhält man, bloß die erste Potenz von k beibehaltend:

$$\begin{aligned} f(x+h+k) = f(x) &+ Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \dots \\ &+ [A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \dots] k \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Setzt man dagegen $x + k$ für x und bedenkt, daß $A, B, C \dots$ Functionen von x sind, daß also gleichwie

$f(x+k)$ übergeht in $fx + Ak + \dots$ auch
A " " $A + A'k + \dots$
B " " $B + B'k + \dots$ u. s. w.,

so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h+k) = f(x) &+ Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \dots \\ &+ [A + A'h + B'h^2 + C'h^3 + D'h^4 + \dots] k \\ &+ \dots \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzung der Coefficienten von k,

$$A + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 \dots = A + A'h + B'h^2 + C'h^3 + D'h^4 \dots,$$

daher:
$$A' = 2B$$
$$B' = 3C$$
$$C' = 4D \quad \text{u. s. w.}$$

Nun ist offenbar, daß A' aus A, B' aus B .... ebenso derivirt ist, wie A aus $f(x)$. Bezeichnet man also, wie Lagrange es thut, die erste abgeleitete Function mit $f'(x)$, die 2te mit $f''(x)$, die 3te mit $f'''(x)$ ...., so ist

$$A = f'(x)$$
$$B = \tfrac{1}{2}A' = \frac{1}{2} f''(x)$$
$$C = \tfrac{1}{3}B' = \frac{1}{2\,.\,3} f''(x)$$
$$D = \tfrac{1}{4}C' = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} f'''(x) \quad \text{u. s. w.,}$$

demnach ist also:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1\,.\,2} + f'''(x)\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

Schließlich wird nachgewiesen, daß die fonctions dérivées nichts Anderes sind als Differentialquotienten.

Andere Mathematiker gehen bei dem Beweise des Taylor'schen Lehrsatzes von der Voraussetzung aus, daß sich jede Function in eine Reihe entwickeln läßt von der Form:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots$$

eine ganz handgreiflich falsche Voraussetzung, wie uns schon die Reihenausdrücke für $\log x$ und $\cot x$ lehren.

Wieder Andere lassen vorläufig negative oder gebrochene Exponenten zu, und setzen:

$$f(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \ldots,$$

so daß also:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= A(x+h)^\alpha + B(x+h)^\beta + C(x+h)^\gamma + \ldots \\ &= A\left[x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\,.\,2}x^{\alpha-2}h^2 + \ldots\right] \\ &\quad + B\left[x^\beta + \beta x^{\beta-1}h + \frac{\beta(\beta-1)}{1\,.\,2}x^{\beta-2}h^2 + \ldots\right] \\ &\quad + C\left[x^\gamma + \gamma x^{\gamma-1}h + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\,.\,2}x^{\gamma-2}h^2 + \ldots\right] \\ &\quad + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta \ldots \\ &+ [\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \delta Dx^{\delta-1} \ldots]\, h \\ &+ [\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)Bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)Cx^{\gamma-2} + \delta(\delta-1)Dx^{\delta-2} \ldots]\,\frac{h^2}{2} \\ &+ [\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)Ax^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)(\beta-2)Bx^{\beta-3} + \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)Cx^{\gamma-3} \ldots]\,\frac{h^3}{2\,.\,3} \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

Hier sind nun die Coefficienten von h, $\frac{h^2}{2}$, $\frac{h^3}{2\,.\,3}$ .... offenbar nichts Anderes, als die Differentialquotienten und wir erhalten also:

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2\,.\,3} \ldots$$

Diese Herleitung sieht etwas befriedigender aus, leidet aber doch an denselben Mängeln. Einmal entziehen sich die doppelt unendlichen Reihen in Beziehung auf Convergenz jeder Kritik, sodann ist es sonderbar, daß der Taylor'sche Lehrsatz sich das Ansehen giebt, den binomischen Lehrsatz für jeden beliebigen Exponenten beweisen zu können, und doch bei seiner eigenen Herleitung sich darauf stützt.

Sei dem aber, wie ihm wolle, sicherlich wird die Taylor'sche Reihe nicht unter allen Umständen, sondern nur, wenn sie convergirt zu gebrauchen seien. Sie ist nur dann wahr, wenn

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,\frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)} : \frac{d^ny}{dx^n}\,\frac{h^n}{1\,.\,2\ldots n} < 1,$$

$$\text{oder}\quad \frac{h}{n+1} < \left[\frac{d^ny}{dx^n} : \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right];$$

und sind außerdem α, β, γ keine ganzen positiven Zahlen, so muß auch $h < x$ sein.

Ungeachtet dieser Halbheiten leitet man doch die bereits oben angeführte Mac Laurin'sche (Stirling'sche) Reihe mit einer bemerkenswerthen Seelenruhe daraus ab. Man setzt $x = o$, was doch nicht unter allen Umständen zulässig ist, und substituirt dann wieder x für h.

Also: $$f(h) = f(o) + \frac{df(o)}{dx}h + \frac{d^2f(o)}{dx^2}\frac{h^2}{2} \ldots$$

und dann: $$fx = f(o) + \frac{df(o)}{dx}x + \frac{d^2f(o)}{dx^2}\frac{x^2}{2} \ldots$$

Neuere Mathematiker haben die Lücken im Beweise des Taylor'schen Lehrsatzes recht wohl gefühlt und zu ihrer theilweisen Beseitigung manchen dankenswerthen Beitrag geliefert. Daß es ihnen aber nicht gelungen ist, uns andere nicht in den hohen Priesterorden eingeweihete Menschenkinder von der Wahrheit des Taylor'schen Orakelspruches zu überzeugen, will ich mir erlauben, durch ein Beispiel zu erläutern, indem ich den Beweis, wie ihn einer der vorzüglichsten Differentialisten giebt, mittheile. Ich fürchte sehr, es wird uns dabei zu Muthe werden, wie dem Schüler in Göthe's Faust, der bei Mephistos Vorlesungen über Philosophie gesteht:

„Kann euch nicht eben recht verstehen. —
Mir wird von alle dem so dumm,
Als ging mir ein Mühlrad im Kopf herum.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Summe der unendlichen Reihe:

$$f(x) - \frac{df(x)}{dx} x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \quad \text{I.}$$

unter allen Umständen eine constante Größe ist. Dies wird allerdings richtig sein, wenn sie differentiirt o giebt. Die Differentiation ergiebt:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}\\
&-\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}x\\
&\qquad + \frac{d^2y}{dx^2}x + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{2}\\
&\qquad\qquad - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{x^2}{2} - \frac{d^4y}{dx^4}\frac{x^3}{2\,.\,3}\ \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn diese Reihe convergirt, dann allerdings heben sich alle Theile weg und der Schluß, daß Reihe I. = const, ist richtig. Wie denn aber, wenn die Reihe nicht convergirt, d. h. wenn wir bei dem k^{ten} Gliede abbrechend finden, daß $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} \frac{x^k}{1\,.\,2\,.\,k}$ nicht verschwindend klein wird? — Eine solche Basis für einen allgemein sein sollenden Beweis, ist eben nicht Vertrauen einflößend.

Es ist ferner:

$$(1-x)^n = \Sigma(-1)^h B_n^h x^h \quad {}^{*)}$$

$$B_n^h = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-h+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots h} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n}{1\,.\,2\,..\,(n-h)\,.\,1\,.\,2\ldots h} = \frac{n!}{(n-h)!\,h!},$$

daher: $$(1-x)^n = \Sigma \frac{(-1)^h n!\, x^h}{h!\,(n-h)!},$$

oder da n hier constant ist:

$$\frac{(1-x)^n}{n!} = \Sigma \frac{(-1)^h x^h}{h!\,(n-h)!}$$

---

*) Σ bedeutet: eine Reihe von Gliedern, deren allgemeines Glied ist ...
B_n^h „ den h^{ten} Binomial-Coefficienten.
$n!$ „ Product der Zahlen von 1 bis n.

Setzt man hierin $x = 1$, so ist im Allgemeinen

$\Sigma \frac{(-1)\,h}{h!\,(n-h)!}$ immer $= o$. Die einzige Ausnahme ist die, wenn n selber $= o$ wird. In diesem Falle ist $(1-x)^0 = 1$, also auch

$$\Sigma \frac{(-1)\,h}{h!\,(n-h)!} = 1.$$

Es wäre allerdings gut, wenn die gelehrten Leute uns begreifen helfen wollten, was das Product der Zahlen von 1 bis o, oder gar von 1 bis $-h$ bedeuten soll? Es wird uns ohnehin schon sauer genug, o^0 uns als 1 vorzustellen. —

Im Allgemeinen ist also auch:

$$(x+k)\,\Sigma \frac{(-1)^h}{h!\,(n-h)!} \text{ oder } \Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^n}{h!\,(n-h)!} \text{ oder}$$

$$\Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^h (x+k)^{(n-h)}}{h!\,(n-h)!} = o \quad \text{II.}$$

Setzt man in Gleichung I. $(x+k)$ für x, so ist:

$$C = f(x+k) - (x+k)\frac{d\,f(x+k)}{d\,x} + \frac{(x+k)^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 f(x+k)}{d\,x^2} \ldots. \quad \text{III.}$$

Durch Subtraction von I. und III., wenn man $f(x+k)$ auf eine Seite bringt

$$\left.\begin{aligned} f(x+k) = f(x) + (x+k)\frac{d\,f(x+k)}{d\,x} - \frac{(x+k)^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 f(x+k)}{d\,x^2} + \frac{(x+k)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^3 f(x+k)}{d\,x^3} \ldots \\ - x\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\frac{d\,x^2}{d^2 f(x)} - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^3 f(x)}{d\,x^3} \quad \ldots \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

Nun müßte man aus III. die Differentialquotienten von $f(x+k)$ suchen und in IV. einsetzen, allerdings eine endlose Arbeit.

Es ist nach I.

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^n f x}{d\,x^n} \quad \text{V.}$$ und wenn man $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ für $f(x)$ einsetzt:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+1} f(x)}{d\,x^{n+1}}, \text{ ebenso}$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+2} f(x)}{d\,x^{n+2}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!}\,\frac{d^{n+h} f(x)}{d\,x^{n+h}} \quad \text{VI.}$$

Setzt man ferner in V. $(n-1)$ für n, so ist:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{d^n f x}{d\,x^n}, \text{ ebenso:}$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{d^n f x}{d\,x^n}$$

$$\ldots\ldots$$

$$C = \Sigma \frac{(-1)^{n-h} x^{n-h}}{(n-h)!}\,\frac{d^n f x}{d\,x^n} \quad \text{VII.}$$

Setzt man in **V.** $x+k$ für x, so ist:

$$C = \Sigma \frac{(-1)^n (x+k)^n}{n!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n}$$

und dies von **V.** abgezogen:

$$o = \Sigma \frac{(-1)^n x^n}{n!} \, \frac{d^n f x}{d x^n} - \Sigma \frac{(-1)^n (x+k)^n}{n!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n}. \text{ Ebenso}$$

$$o = \Sigma \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \, \frac{d^n f x}{d x^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-1} (x+k)^{n-1}}{(n-1)!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n}$$

$$o = \Sigma \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \, \frac{d^n f x}{d x^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-2} (x+k)^{n-2}}{(n-2)!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n} \qquad \textbf{VIII.}$$

$$\cdots\cdots$$

$$o = \Sigma \frac{(-)^{n-h} x^{n-h}}{(n-h)!} \, \frac{d^n f x}{d x^n} - \Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n}.$$

Es kommt nun darauf an, aus diesen Gleichungen die Größen $\frac{d f(x+k)}{d x}$, $\frac{d^2 f(x+k)}{d x^2}$, $\frac{d^3 f(x+k)}{d x^3}$ u. s. w. zu eliminiren. Zu dem Ende multipliciren wir sämmtliche Gleichungen mit den vorläufig noch unbestimmten Coefficienten $g, g', g'' \ldots g^h$ und addiren, so ist:

$$o = \Sigma \Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} x^{n-h}}{(n-h)!} \, \frac{d^n f x}{d x^n} - \Sigma \Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} \, \frac{d^n f(x+k)}{d x^n}. \qquad \textbf{IX.}$$

Sollen hieraus die Differentialquotienten von $f(x+k)$ verschwinden, so müssen die Coefficienten von $\frac{d^n f(x+k)}{d x^n} = o$ sein,

also:
$$\Sigma \frac{(-1)^{n-h} g^{(h)} (x+k)^{n-h}}{(n-h)!} = o \quad \text{oder}$$

$$(-1)^n \Sigma \frac{(-1)^h (x+k)^{n-h} g^{(h)}}{(n-h)!} = o.$$

Vergleichen wir dieses mit Formel **II.** und setzen beides gleich, so erhalten wir:

$$g^{(h)} = \frac{(x+k)^h}{h!}. \qquad \textbf{X.}$$

Wenn man also dem $g^{(h)}$ diesen Werth beilegt, so fallen sämmtliche Glieder des zweiten Theiles in **IX.** weg, mit Ausnahme derjenigen Glieder, welche man erhält, wenn $n = o$ gesetzt wird. Da nun aber h nicht größer als n sein darf, so ist für $n = o$ auch $h = o$; das correspondirende g ist also $\frac{(x+k)^0}{o!} = 1$ und $\frac{d^0 f(x+k)}{d x^0} = f(x+k)$. Also wird aus Gleichung **IX.**

$$f(x+k) = \Sigma \Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^h \; x^{n-h}}{h! \; (n-h)} \, \frac{d^n f x}{d x^n}$$

Der Coefficient von $\frac{d^n f x}{d x^n}$ ist also:

$$\Sigma \frac{(-1)^{n-h} (x+k)^h \; x^{n-h}}{h! \; (n-h)!}, \text{ wo } h = o, 1, 2, \ldots.$$

Nun ist $(z-x)^n = \Sigma \, B_n^h \, z^h \, (-x)^{n-h}$

$$= \Sigma \frac{n!}{h! \; (n-h)!} \, z^h \, (-x)^{n-h}$$

und setzt man $z = x + k$, so ist

$$k^n = \Sigma \frac{n!\,(x+k)^h\,(-x)^{n-h}}{h!\,(n-h)!} \quad \text{oder}$$

$$\frac{h^n}{n!} = \Sigma \frac{(x+k)^h\,(-x)^{n-h}}{h!\,(n-h)!}$$

Mithin ist der Coefficient von $\frac{d^n f x}{d x^n}$ nichts weiter als $\frac{k^n}{n!}$,

daher $$f(x+k) = \Sigma \frac{k^n}{n!} \frac{d^n f x}{d x^n}, \quad \text{d. h.}$$

$$f(x+k) = f(x) + \frac{d f(x)}{d x} k + \frac{d^2 f(x)}{d x^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3 f(x)}{d x^3} \frac{k^3}{2 \,.\, 3} \ldots .$$

Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,
Es müsse sich dabei doch auch was denken lassen!

Allein bei dieser Häufung schwer oder gar unverdaulicher Formeln möchte es wohl zu entschuldigen sein, wenn Einer und der Andere an das Heren-Einmaleins in Göthe's Faust erinnert wird. Der Belehrung Suchende bewundert zwar den Scharfsinn des Lehrmeisters, ist aber nicht im Stande, ihm zu folgen auf dem Drahtseile über den Abgrund des — Nichts und wir dürfen es ihm also nicht verdenken, wenn er zu einem Orakel kein rechtes Vertrauen hat, das auf falschen Voraussetzungen basirt, statt sich um Convergenz und Divergenz zu kümmern, uns einigen Hocus Pocus vormacht und mit einer wahren Sündfluth unendlich vieler unendlich langer Reihen überschwemmt!

Wenn wir nun bei Functionen mit einer veränderlichen Größe schon mit einigem Mißtrauen an den Taylor'schen Satz herangetreten sind, so werden wir uns noch viel weniger befriedigt fühlen, wenn er auf zwei Veränderliche angewendet werden soll und begnügen uns daher mit folgender kurzen Andeutung:

Von zwei von einander unabhängigen Variabeln x und y ist x in Beziehung auf y und y in Beziehung auf x als constant zu betrachten. Ich kann also in $y = f(x, u)$ zuerst x in $x + k$ und dann u in $u + h$ über gehen lassen, oder umgekehrt.

Dadurch erhalte ich:

$$\begin{aligned} y' = y &+ \frac{dy}{dx} k + \frac{d^2 y}{d x^2} \frac{k^2}{2} \\ &+ \frac{dy}{du} h + \frac{d^2 y}{dx \,.\, du} h \,.\, k + \ldots \\ &+ \frac{d^2 y}{d u^2} \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{du}$ nennt man partielle Differentialquotienten und man überzeugt sich leicht, daß das vollständige Differential von y aus der Summe der partiellen Differentiale besteht.

Man drückt dies folgendermaßen aus:

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx + \left(\frac{dy}{du}\right) du.$$

Soll man also eine Function mit zwei veränderlichen Größen vollständig differentiiren, so muß man dieselbe erst in Beziehung auf die eine, dann in Beziehung auf die andere differentiiren und die Resultate addiren.

Anwendung der Differentialrechnung.

I. Entwickelung der transscendenten Functionen in Reihen.

Bei dieser Unzuverlässigkeit der Taylor'schen resp. Mac Laurin'schen Reihe ist es gewiß wünschenswerth, den Gebrauch dieser Sätze möglichst einzuschränken. Ich habe bereits weiter oben die vollständige Entbehrlichkeit der Differentialrechnung bei Entwickelung der Potenzen, Logarithmen und Kreisfunctionen behauptet und gesagt, daß die ein klein wenig erweiterte Methode der unbestimmten Coefficienten leicht und sicher zum Ziele führt.

Wir haben uns schon überzeugt, daß man die Form der Reihe für $f(x)$ ganz nach Belieben voraussetzen darf, weil sich, wenn die vorausgesetzte Form unpassend sein sollte, auch die vorausgesetzten Coefficienten nicht berechnen lassen. Ferner haben wir gesehen, daß die ganze rationale Form, also eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots,$$

wenn nicht die natürlichste, jedenfalls die angenehmste ist. Durch Anwendung des bekannten Satzes: „die Reihe gilt für jedes x, also auch für $x = o$" ergiebt sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} A &= fx \\ B &= \frac{fx - A}{x} \\ C &= \frac{fx - A - Bx}{x^2} \\ D &= \frac{fx - A - Bx - Cx^2}{x^3} \end{aligned}\right\} \text{für } x = o. \quad \text{u. s. w.}$$

Leider führt uns das aber selten zum Ziele, weil wir überall dem vieldeutigen Symbole $\frac{0}{0}$ begegnen, und wir werden daher gewiß wohl thun, wenn wir uns nach einer Reihenform umsehen, die uns über diese Schwierigkeit hinweg hilft.

Die ganze rationale Form werden wir sicherlich nicht ohne Noth aufgeben; und da, meine ich denn, liegt es wohl nahe genug, statt der gewöhnlichen Potenzen sogenannte Facultäten, d. h. statt der Producte gleicher Factoren, Producte äquidifferenter Factoren, für $f(x)$ also eine Reihe von folgender Form vorauszusetzen:

$$f(x) = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots. \qquad \text{I.}$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes: „die Reihe soll für jedes x gelten, also gilt sie auch für $x = o$, $x = m$, $x = 2m$ .... sind wir im Stande die Coefficienten A, B, C .... zu bestimmen, ohne durch das sich immer wiederholende $\frac{0}{0}$ in Verlegenheit gesetzt zu werden.

Unsere Reihe I. hat zugleich den Vorzug der größeren Allgemeinheit; findet sich nämlich am Ende der Untersuchung, daß das vor der Hand beliebige m auch $= o$ gesetzt werden kann, so geht I. über in die gewöhnliche Reihe:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots \qquad \text{II.}$$

Es versteht sich übrigens von selbst, daß (I.) nicht die einzige Form ist, welche vorausgesetzt werden kann und darf. Unter Umständen empfiehlt es sich auch, statt der Vielfachen von m, Potenzen von m anzunehmen. Also:

$$f(x) = A + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)(x-m) + Ex(x-1)(x-m)(x-m^2) \ldots. \qquad \text{III.}$$

Legen wir nun die Reihe I. zu Grunde, so erhalten wir leicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= f(o) \\ B &= \frac{f(m) - A}{m} \\ C &= \frac{f(2m) - 2Bm - A}{1.2.m^2} \\ D &= \frac{f(3m) - 2.3Cm^2 - 3Bm - A}{1.2.3m^3} \\ E &= \frac{f(4m) - 2.3.4Dm^3 - 3.4Cm^2 - 4Bm - A}{1.2.3.4m^4} \\ &\;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{IV.}$$

und durch wiederholte Substitution

$$\left.\begin{aligned} A &= f(o) \\ B &= \frac{f(m) - f(o)}{m} \\ C &= \frac{f(2m) - 2f(m) + f(o)}{1.2m^2} \\ D &= \frac{f(3m) - 3f(2m) + 3f(m) - f(o)}{1.2.3m^3} \\ E &= \frac{f(4m) - 4f(3m) + 6f(2m) - 4f(m) + f(o)}{1.2.3.4m^4} \\ &\;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{V.}$$

Das allgemeine Gesetz, dem diese interessanten Formeln folgen, ist eben so leicht zu erkennen!, als zu beweisen. Es wird sein:

$$A_k = \frac{f(km) - B_k^1 f(k-1)m + B_k^2 f(k-2)m - \ldots (-1)^k B_k^k f(o)}{1.2.3\ldots k\, m^k}. \qquad \text{VI.}$$

Mit Hülfe dieser Formel, auf deren Beweis ich sogleich zurückkommen werde, lassen sich sämmtliche Coefficienten der Reihe ohne Schwierigkeit finden.

Eine andere Methode, diese Coefficienten zu bestimmen, welche in vielen Fällen rascher zum Ziele führt, ist folgende:

Hat man

$$y = f(x) = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m)\ldots$$

worin m als Abkürzung für Δx angesehen werden soll, so ergiebt sich leicht:

$$y' = f(x+m) = A + B(x+m) + C(x+m)x + D(x+m)x(x-m)\ldots$$

und $$\Delta y = f(x+m) - f(x) = mB + 2mCx + 3mDx(x-m)\ldots,$$

daher: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B + 2Cx + 3Dx(x-m) + 4Ex(x-m)(x-2m)\ldots \qquad \text{VII.}$$

Sobald wir also im Stande sind, aus den Eigenschaften der gegebenen Function den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ abzuleiten und ihn durch einen ähnlichen Reihenausdruck darzustellen, z. B.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A' + B'x + C'x(x-m) + D'x(x-m)(x-2m)\ldots,$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichen Facultäten:

$$B = A'$$

$$2C = B' \quad \text{also} \quad C = \tfrac{1}{2} B'$$

$$3D = C' \quad \text{„} \quad D = \tfrac{1}{3} C' \quad \text{u. s. w.}$$

Stellt sich hierbei heraus, daß $m = o$ gesetzt werden kann, so geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten und die vorausgesetzte Reihe in die gewöhnliche nach den einfachen Potenzen von x geordnete über, so daß es also in diesem Falle angänglich ist, der Function die Form zu geben:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

vorausgesetzt, daß die erhaltene Reihe convergirt.

A. Die Exponentialgrößen und der binomische Lehrsatz.

Potenzen werden in den Elementen der Arithmetik zunächst nur als Producte gleicher Factoren aufgefaßt. Zu ihrer Berechnung bedarf es selbstverständlich keiner Reihen. Desto willkommener sind uns dieselben da, wo die Frage nicht mehr zurückgewiesen werden kann, was bedeutet a^x sobald der Exponent keine ganze positive Zahl, vielmehr durchaus beliebig, gleichviel ob ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, rational oder irrational, möglich oder imaginair ist? Man behilft sich bei der Beantwortung dieser Frage gewöhnlich so gut es eben gehen will, indem man a^{-m} auf $\frac{1}{a^m}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ auf $\sqrt[n]{a^m}$ zurückführt, die übrigen Fälle aber kurz abfertigt, oder wohl gar ignorirt, ungeachtet man besonders in der Differentialrechnung von diesen anderen Fällen den ausgedehntesten Gebrauch macht. Sehen wir uns vor allen Dingen nach einer Erklärung der Potenzen um, so werden wir durch die bekannte Eigenschaft derselben, so bald der Exponent eine ganze positive Zahl ist, genöthigt, zu sagen: Potenz ist eine solche Function, welche die Eigenschaft hat, daß

$$f(x) \,.\, f(y) = f(x + y) \text{ ist.}$$

In der That genügt diese Definition vollständig und es läßt sich aus derselben namentlich die Reihe für a^x eben so kurz und bündig, als allgemein ableiten.

Setzen wir die Reihe voraus:

$$a^x = A + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots$$

oder da $A = f(o) = 1$

$$a^x = 1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots \quad \text{I.,}$$

so ist zunächst:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B + 2Cx + 3Dx(x - m) + 4Ex(x - m)(x - 2m) \ldots \quad \text{II.}$$

Ferner ist wegen der Grundeigenschaft der Potenzen:

$$a^x \,.\, a^m = a^{x+m},$$

daher $\quad a^{x+m} = a^m\,[1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots],$

und wenn man I. abzieht und mit m dividirt:

$$\frac{a^{x+m} - a^x}{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^m - 1}{m}\,[1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots] \quad \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Facultäten erhält man, $\frac{a^m - 1}{m}$ einstweilen $= g$ gesetzt:

$$B = g$$

$$2C = gB \quad \text{also:} \quad C = \frac{g^2}{1 \, . \, 2}$$

$$3D = gC \qquad D = \frac{g^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$$

$$4E = gD \qquad E = \frac{g^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \text{ u. s. w.}$$

Substituiren wir für die Größen A, B, C ... die gefundenen Werthe, so erhalten wir:

$$a^x = 1 + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right] x + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^2 \frac{x(x-m)}{1 \, . \, 2} + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^3 \frac{x(x-m)(x-2m)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \ldots \quad \text{IV.}$$

Dies ist nun die vollständige Reihenentwicklung für die Function a^x, oder es sind deren eigentlich unzählige, weil wir über die Differenz m noch gar nichts festgesetzt haben. Am liebsten möchten wir natürlich $m = o$ setzen. Dadurch wird aber $\frac{a^m - 1}{m} = \frac{0}{0}$, und da wir zur Zeit noch nicht wissen, was hier $\frac{0}{0}$ bedeutet, so lassen wir diesen besonderen Fall vorläufig noch auf sich beruhen und setzen für m das zunächst Einfachste, nämlich $m = 1$. Dadurch wird:

$$a^x = 1 + [a-1] \, x + [a-1]^2 \frac{x(x-1)}{1 \, . \, 2} + [a-1]^3 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \ldots$$

oder wenn man $a - 1 = b$ nimmt:

$$[1 + b]^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{1 \, . \, 2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} b^3 + \ldots \quad \text{V.}$$

und wenn man die üblichen Zeichen für die Binomial-Coefficienten vorziehen sollte:

$$[1 + b]^x = 1 + B^1(x) \, b + B^2(x) \, b^2 + B^3(x) \, b^3 \ldots$$

Wer die harte Geduldsprobe ausgehalten hat, sich auf endlosen Umwegen durch allerlei einzelne Fälle zu einem allgemein sein sollenden Beweise des so überaus wichtigen binomischen Lehrsatzes hindurch zu arbeiten, muß sich angenehm überrascht fühlen, wenn er sich überzeugt, daß sich dieser Satz ganz leicht und ganz allgemein, der Exponent mag sein, was er will, bloß aus der Grundeigenschaft der Potenzen ohne Einmischung fremdartiger Vorstellungen herleiten und beweisen läßt.

Der Fehler, den man bei der Herleitung des binomischen Lehrsatzes zu machen pflegt, ist nach meinem Dafürhalten einfach der, daß man von vorn herein nicht den Exponenten, auf den es doch eben ankömmt, sondern die Basis als ursprünglich variabele Größe betrachtet und in der Reihe abzusondern sucht.

Die im vorigen Abschnitte zur Berechnung der Größen A_1, A_2, A_3 angegebene Formel VI. läßt sich nun ebenfalls allgemein beweisen. Es sei:

$$A_k = \frac{f(o) + a_1 \, fm + a_2 \, f2m + a_3 \, f3m \ldots + a_k \, fkm}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, k \, m^k}.$$

Die Zahlen a_1, a_2, a_3, ... sind offenbar von der Natur der Function unabhängig, also immer dieselben, $f(x)$ mag sein, was es will. Ist nun $fx = a^x$, dann ergiebt sich, wie wir gesehen haben:

$$A_k = \frac{[a^m - 1]^k}{1 \, . \, 2 \ldots k \, m^k}$$

$$= [-1]^k \frac{1 - B_k^1 a^m + B_k^2 a^{2m} - B_k^3 a^{3m} \dots \pm B_k^k a^{km}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k\, m^k},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes ohne Weiteres folgt.

Um die Convergenz der binomischen Reihe zu prüfen, haben wir das Verhältniß von zwei aufeinander folgenden Gliedern zu untersuchen. Dieses ist:

$$\frac{x-k}{k+1}\, b \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{x}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}}\, b \,.$$

Je größer k wird, desto mehr nähert sich dieser Quotient der Größe $-b$ und die Reihe wird also nur dann convergiren, wenn $b < 1$.

Sobald also der Exponent x keine ganz positive Zahl und $b > 1$ ist, haben wir durchaus kein Recht, zu behaupten, daß die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + B_x^1 b + B_x^2 b^2 + \dots$$

$= (1 + b)^x$ sei. Dieselbe ist also zwar richtig für jeden beliebigen Exponenten, keineswegs aber für jede beliebige Wurzel und muß daher, wenn sie praktisch angewendet werden soll, umgeformt werden.

Z. B.: $\sqrt{(50)} = [49 + 1]^{\frac{1}{2}} = 7\,[1 + \tfrac{1}{49}]^{\frac{1}{2}}$, oder

$$[1 + b]^{-x} = \left[1 - \frac{b}{1+b}\right]^x \text{ und dergl.}$$

Die Herleitung des binomischen Lehrsatzes aus dem Mac Laurin'schen, ist deshalb nicht zu empfehlen, weil der letztere ohne Newtons Theorem vorauszusetzen, selbst nicht befriedigend bewiesen werden kann und weil die Differentialformel $dx^m = mx^{m-1}dx$ für irrationale und imaginaire Exponenten zweifelhaft bleibt.

B. Die Logarithmen.

Daß man log x nicht durch eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$a + bx + cx^2 \dots$$

darstellen kann, ist einleuchtend, weil $a = \log o = -\infty$ werden würde. Es liegt daher nahe, für $\log[1 + x]$ einen solchen Reihenausdruck zu suchen, weil in diesem Falle das absolute Glied $= o$ wird.

Unsere Voraussetzung soll also sein:

$$\log[1 + x] = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \dots \quad \text{I.}$$

Nun ist: $\log[1 + x + m] - \log[1 + x] = \log\left[1 + \frac{m}{1+x}\right]$

$$= A\,\frac{m}{1+x} + B\left[\frac{m}{1+x}\right]^2 + C\left[\frac{m}{1+x}\right]^3 + \dots$$

daher: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A}{1+x} + m\Phi x$, und wenn $m = o$,

$$= \frac{A}{1+x} = A[1 - x + x^2 - x^3 + \dots]. \quad \text{II.}$$

Wie wir gesehen haben, ist allgemein:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + 2Bx + 3Cx(x - m) \dots \text{ und wenn } m = o,$$

$$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \dots \quad \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten in II. und III.

$$2B = -A \quad \text{und also} \quad B = -\tfrac{1}{2}A$$
$$3C = A \qquad C = \tfrac{1}{3}A$$
$$4D = -A \qquad D = -\tfrac{1}{4}A \quad \text{u. s. w.}$$

folglich $$\log(1+x) = A[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots] \qquad \text{IV.}$$

$$A \text{ ist} = \frac{\log(1+x)}{x} \text{ für } x = o,$$

oder $\log(1+x) = y$, daher $1 + x = a^y$ gesetzt,

$$A = \frac{y}{a^y - 1} \text{ für } y = o. \qquad \text{V.}$$

Nimmt man $a = 1 + b$, so ist der Nenner dieses Ausdrucks

$$yb + \frac{y(y-1)}{1.2}b^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}b^3 \ldots$$

Wenn man daher in V. mit y hebt und dann $y = o$ setzt:

$$A = \frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots}$$

und $$\log[1+x] = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots} \qquad \text{VI.}$$

Wird die Größe A, der sogenannte Modulus des Logarithmensystems, $= 1$ angenommen, wo dann die Basis e erst noch zu berechnen sein wird, so erhält man den natürlichen Logarithmus

$$\log \text{nat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \qquad \text{VII.}$$

Will man bei dieser Herleitung die oben bereits angegebene Differentialformel

$$d\log x = \frac{dx}{x} \text{ oder vielmehr } d\log(1+x) = \frac{dx}{1+x}$$

zum Grunde legen, so ist dagegen nichts einzuwenden, indessen nothwendig ist es, wie wir gesehen haben, nicht. Vielmehr gebe ich der folgenden ohne Differentialformeln auskommenden Methode um so unbedenklicher den Vorzug, als sie den natürlichen Zusammenhang der Potenzen, Logarithmen und Kreisfunctionen leichter erkennen läßt.

Wir haben gefunden:

$$a^x = 1 + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]x + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^2 \frac{x(x-m)}{1.2} + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^3 \frac{x(x-m)(x-2m)}{1.2.3} \ldots \qquad \text{VIII.}$$

Ist $a^x = y$, oder $x = \log y$, so wird $a^{mx} = y^m$ sein.

Setzt man aber in Gleichung VIII. mx statt x, so erhält man

$$a^{mx} = y^m = 1 + [a^m - 1]x + [a^m - 1]^2 \frac{x(x-1)}{1.2} + [a^m - 1]^3 \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots \qquad \text{IX.}$$

und $$\frac{y^m - 1}{a^m - 1} = x + [a^m - 1]\,\varphi x. \qquad \text{X.}$$

Hierin ist m beliebig. Kann ich nun dem m einen solchen Werth beilegen, daß $a^m - 1 = o$ wird, so bleibt auf der rechten Seite die zu bestimmende Größe x oder log y allein stehen. Ein solcher Werth ist $m = o$, so daß also:

$$\log y = \frac{y^m - 1}{a^m - 1}, \text{ für } m = o. \qquad \text{XI.}$$

Freilich erhalten wir dadurch $\log y = \frac{0}{0}$; indessen ist durch einfache Anwendung des binomischen Lehrsatzes der wahre Werth dieser $\frac{0}{0}$ werdenden Function leicht anzugeben. Es sei nämlich $y = 1 + z$ und $a = 1 + b$, dann ist:

$$\frac{(1+z)^m - 1}{(1+b)^m - 1} = \frac{mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 \ldots}{mb + \frac{m(m-1)}{1.2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} b^3 \ldots}$$

Hebt man hierin im Zähler und Nenner m fort und setzt dann $m = o$, so ist zufolge Gleichung XI.

$$\log y = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \ldots}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 \ldots} \qquad \text{XII.}$$

wie vorhin.

Wir haben in XI. Zähler und Nenner durch m dividirt, so daß also

$$\log y = \frac{y^m - 1}{m} : \frac{a^m - 1}{m} \text{ für } m = o.$$

Der nur von der Grundzahl abhängige Nenner, oder der sogenannte Modul, ist für die natürlichen Logarithmen $= 1$, daher:

$$\log \text{nat } y = \frac{y^m - 1}{m} \text{ für } m = o,$$

und ebenso $\log \text{nat } a = \frac{a^m - 1}{m}$ „ „

Damit erledigt sich zugleich eine im vorigen Abschnitte offen gelassene Frage. In der für a^x erhaltenen allgemeinen Reihe konnten wir m nicht $= o$ setzen, weil wir nicht wußten, was $\frac{a^m - 1}{m}$ für $m = o$ bedeutet. Jetzt sehen wir, es ist der natürliche Logarithmus von a oder La, daher:

$$a^x = 1 + x\,La + \frac{x^2 La^2}{1.2} + \frac{x^3 La^3}{1.2.3} \ldots \qquad \text{XIII.}$$

Nimmt man für a die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so erhält man die berühmte Exponential-Reihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots \qquad \text{XIV.}$$

aus welcher sich bekanntlich e leicht berechnen läßt, indem man $x = 1$ setzt,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots$$

Die für $\log(1+x)$ erhaltene Reihe wird nun freilich, wie man sich leicht überzeugen kann nur dann convergiren, wenn $x < 1$ angenommen wird. Das ist auch ganz natürlich, da wir dieselbe aus einer anderen Reihe abgeleitet haben, welche auch nur für $x < 1$ wahr ist, nämlich:

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots = \frac{1}{1+x}.$$

Da aber für $x < 1$ sowohl

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots, \text{ als auch}$$
$$\log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots,$$

so ist auch $$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\,[x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots]$$

und $\frac{1+x}{1-x} = z$ gesetzt:

$$\log z = 2\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 \ldots\right]$$

eine Reihe, welche immer convergirt.

Des beschränkten Raums halber, will ich mich bei anderen noch besser convergirenden Reihen, z. B.

$$\log (z+k) = \log z + 2\left[\left(\frac{k}{2z+k}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3 + \ldots\right]$$

nicht weiter aufhalten.

Aus demselben Grunde muß ich darauf verzichten, noch andere Reihenformen anzugeben für $\log x$. Nur eine dieser Reihen will ich schließlich hier noch mittheilen, weil mir dieselbe nicht uninteressant zu sein scheint, nämlich:

$$\overset{a}{\log}\, x = \frac{1}{a-1}(x-1) - \frac{1}{a^2-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right) + \frac{1}{a^3-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a^2}-1\right)$$
$$+ \frac{1}{a^4-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a^2}-1\right)\left(\frac{x}{a^3}-1\right) - \ldots.$$

Der Quotient von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist $\frac{a^{k-1}}{a^k}\left(\frac{x}{a^{k-1}}-1\right) = \frac{x}{a^k} - \frac{1}{a}$. Je größer k wird, desto mehr nähert sich dieser Quotient der Größe $\frac{1}{a}$, wird also, da a die Basis des Systems ist, < 1 sein, so daß die angegebene Reihe immer convergirt, wenn sie sich auch grade zur Berechnung eines Logarithmensystems nicht besonders empfehlen möchte.

Die Auffindung des Beweises darf ich wohl dem freundlichen Leser überlassen.

C. Die Kreisfunctionen.

a. Sinus und Cosinus.

Die Grundeigenschaften der beiden Functionen Sinus und Cosinus sind in den beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+m) &= \sin x \cos m + \cos x \sin m \\ \text{und}\qquad \cos(x+m) &= \cos x \cos m - \sin x \sin m \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

vollständig enthalten. Wenn $\sin x = y$ und $\cos x = z$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos m - 1}{m}\sin x + \frac{\sin m}{m}\cos x \\ \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{\cos m - 1}{m}\cos x - \frac{\sin m}{m}\sin x \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Nehme ich nun an, daß

$$\sin x = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m)\ldots.$$
$$\cos x = a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m)\ldots.,$$

so erhalte ich durch Substitution des in der Einleitung erhaltenen allgemeinen Ausdrucks für den Differenzenquotienten:

$$\left.\begin{aligned}
&B + 2Cx + 3Dx(x-m) + 4Ex(x-m)(x-2m) + \ldots \\
&\qquad = \frac{1-\cos m}{m}\left[A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots\right] \\
&\qquad + \frac{\sin m}{m}\left[a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m) + \ldots\right] \\
\text{und}\quad &b + 2cx + 3dx(x-m) + 4ex(x-m)(x-2m) + \ldots \\
&\qquad = \frac{1-\cos m}{m}\left[a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m) + \ldots\right] \\
&\qquad - \frac{\sin m}{m}\left[A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots\right].
\end{aligned}\right\}\ \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Facultäten erhalte ich eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, um daraus die Größen $A, B, C \ldots a, b, c \ldots$ zu bestimmen. Da nun m beliebig ist, so eröffnet sich uns die Aussicht auf eine unendlich große Anzahl verschiedener Reihen. Ob die erhaltenen Reihen convergiren, d. h. ob sie wahr sind, das ist freilich eine andere Frage. Setzen wir z. B. $m = \pi$, so ist:

$$B = -\frac{2}{\pi}A$$

$$2C = -\frac{2}{\pi}B \quad \text{daher} \quad C = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 A}{1.2}$$

$$3D = -\frac{2}{\pi}C \quad " \quad D = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 A}{1.2.3}$$

$$4E = -\frac{2}{\pi}D \quad " \quad E = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 A}{1.2.3.4} \quad \text{u. s. w.}$$

und ganz ebenso

$$2b = -\frac{2}{\pi}a$$

$$3c = -\frac{2}{\pi}b \quad \text{daher} \quad c = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 a}{1.2}$$

$$4d = -\frac{2}{\pi}c \quad " \quad d = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 a}{1.2.3} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\sin x = A\left[1 - \frac{x}{\pi}2 + \frac{\frac{x}{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)}{1.2}2^2 - \frac{\frac{x}{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(\frac{x}{\pi}-2\right)}{1.2.3}2^3 + \ldots\right] \qquad \text{IV.}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber die erhaltene Reihe nichts Anderes als $(1-2)^{\frac{x}{\pi}}$, daher

$$\sin x = A(-1)^{\frac{x}{\pi}} \quad \text{oder für} \quad \frac{x}{\pi} = y.$$

$\sin y\pi = A(-1)^y$ und ganz ebenso:

$\cos y\pi = a(-1)^y$.

Da nun offenbar $A = o$ und $a = 1$ sein muß, so ist

$$\sin y\pi = o$$
$$\cos y\pi = (-1)^y.$$

Die Reihe IV. ist also nur zu gebrauchen, wenn y eine ganze Zahl ist.

Wenn es noch eines weiteren Beweises bedürfte, so würde es sich hier von neuem bestätigen, daß die Summe der Reihe:

$$1 - yb + \frac{y(y-1)}{1.2} b^2 - \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} b^3 + \ldots$$

keineswegs $= (1-b)^y$ ist, sobald $b > 1$ und y keine ganze positive Zahl ist. Wir kommen sonst leicht zu solchen abenteuerlichen Resultaten, daß jeder Sinus $= o$ und jeder Cosinus $= 1$ sein muß.

Aehnliche Substitutionen, z. B. $m = \frac{1}{2}\pi$, $m = \frac{1}{3}\pi$ und dergl. will ich übergehen. Unter allen Umständen brauchbare Reihen erhält man nur dann, wenn man in II. $m = o$ setzt, d. h. also $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ in den Differentialquotienten übergehen läßt. Will man sich hierbei der bereits abgeleiteten Differentialformeln bedienen, so ist um so weniger dagegen einzuwenden, als grade in diesem Falle der Mac Laurin'sche Satz sich sehr gefügig zeigt. Indessen ist zur Herleitung der Reihen für den Sinus und den Cosinus die Differentialrechnung nichts weniger als unentbehrlich. Wir wissen bereits, daß für $m = o$, $\frac{\sin m}{m} = 1$ und $\frac{1 - \cos m}{m} = o$ ist. Für $m = o$ werden aber die Reihen nach den einfachen Potenzen von x fortschreiten und die Gleichungen III. gehen über in:

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots = \quad a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$$
$$b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \ldots = -A - Bx - Cx^2 - Dx^3 \ldots$$

Da ferner leicht bewiesen werden kann, weil $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$, daß in der Sinusreihe nur ungrade, in der Cosinusreihe dagegen nur grade Potenzen von x vorkommen können, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen:

$$B = \quad a \text{ und da } a = 1, \qquad B = 1$$
$$2c = -B \qquad c = \frac{-1}{1.2}$$
$$3D = \quad c \qquad D = \frac{-1}{1.2.3}$$
$$4e = -D \qquad e = \frac{-1}{1.2.3.4}$$
$$5F = \quad e \qquad F = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$6g = -F \qquad g = \frac{-1}{1.2.3.4.5.6} \quad \text{u. s. w.,}$$

daher:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

und
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

b. Tangente und Cotangente.

Bei den Reihen für Tangente und Cotangente lassen uns alle Künste der Differentialrechnung vollständig im Stiche und wir müssen versuchen, ob wir mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln ausreichen. Unternimmt man es $\frac{\sin x}{\cos x}$ in eine Reihe von der Form

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots.$$

zu verwandeln, so lassen sich zwar die Coefficienten α, β, γ .... alle einer nach dem anderen einzeln bestimmen, indessen mit dem Erkennen des Gesetzes, nach welchem diese Reihe verläuft, sieht es schlimm aus, da wohl Niemand im Ernste behaupten darf, daß die Bernouillischen Zahlen, das Problem lösen. Aus den für Sinus und Cosinus gefundenen Reihen überzeugt man sich zunächst, daß, wenn es überhaupt für die Tangente und Cotangente nach den Potenzen des Bogens geordnete Reihen giebt, dieselben nur ungrade Potenzen von x enthalten und daß außerdem die Cotangente mit $\frac{1}{x}$ anfängt. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \cot x &= \frac{1}{x} + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \\ \mathrm{tg.}\ x &= \quad\ ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

Anstatt jede dieser beiden Reihen einzeln aufzusuchen, möchte es wohl zweckmäßiger sein, beide in ihrem nothwendigen Zusammenhange zu betrachten, wozu sich z. B. die Gleichungen eignen:

$$\mathrm{tg.}\ x = \cot x - 2 \cot 2x. \qquad \text{II.}$$

und

$$\mathrm{tg.}\ x \cot x = 1. \qquad \text{III.}$$

Aus II. folgt:

$$ax + bx^3 + cx^5 \ldots = \frac{1}{x} + Ax + Bx^3 + Cx^5 \ldots$$
$$- 2\left[\frac{1}{2x} + 2Ax + 2^3 Bx^3 + 2^5 Cx^5 \ldots\right]$$

Aus III. folgt:

$$\begin{aligned} 1 = a + bx^2 &+ cx^4 + dx^6 \\ + aAx^2 &+ bAx^4 + cAx^6 + \ldots \\ &+ aBx^4 + bBx^6 \\ &\qquad\quad + aCx^6 \end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned} a &= -A(2^2-1) && \text{und} \quad a = 1 \\ b &= -B(2^4-1) && \qquad\quad b + aA = o \qquad \text{IV.} \\ c &= -C(2^6-1) && \qquad\quad c + bA + aB = o \\ d &= -D(2^8-1) \ldots && \qquad\quad d + cA + bB + aC = o \ldots \end{aligned}$$

Die Gleichungen reichen offenbar hin, um sämmtliche Coefficienten zu berechnen; leider aber bedürfen wir zur Berechnung irgend eines derselben alle vorhergehenden und sind nicht im Stande das allgemeine Gesetz herauszufühlen. Wir finden:

$$a = 1 \qquad \text{und} \qquad A = -\frac{1}{1.2}$$

$$b = \frac{1}{1.3} \qquad\qquad B = -\frac{1}{3.1.3.5}$$

$$c = \frac{2}{1.3.5} \quad \text{und} \quad C = -\frac{2}{9.1.3.5.7}$$

$$d = \frac{17}{3.1.3.5.7} \qquad D = -\frac{1}{5.1.3.5.7.9}$$

$$e = \frac{62}{3.1.3.5.7.9} \qquad E = -\frac{2}{9.1.3.5.7.9.11}$$

$$f = \frac{1382}{15.1.3.5.7.9.11} \qquad F = -\frac{1382}{5.1.3.5.7.9.1.3.5.7.9.11.13} \text{ u. s. w.}$$

Will man lieber die Differentialformel zum Grunde legen:

$$d\,\text{tg.}\,x = (1 + \text{tg.}\,x^2)\,dx,$$

so hat man:

$$\begin{aligned} a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 \ldots = 1 + a^2x^2 &+ abx^4 + acx^6 + adx^8 \\ &+ bax^4 + b^2x^6 + bcx^8 \\ &\qquad + cax^6 + cbx^8 \ldots, \\ &\qquad\qquad + dax^8 \end{aligned}$$

woraus sich ebenfalls eine genügende Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der Größen a, b, c, d ... ergiebt. Allein auch hier sind wir nicht im Stande das allgemeine Glied anzugeben und somit fehlen uns auch die Mittel, die Convergenz der Reihe zu prüfen.

Ich meine, man hat auch eben nicht Ursache, sich über das Mißlingen derartiger Versuche zu wundern. Man sollte vielmehr eine Function nicht gewaltsam in eine Form hinein zwängen wollen, in die sie nicht paßt und nicht vergessen, daß die Reihe

$$ax + bx^3 + cx^5 + \ldots$$

nicht für einen bestimmten Werth der Variabeln $\pm \infty$ werden, für größere und kleinere Werthe dagegen eine endliche Summe geben kann.

Nach den in der Einleitung aufgestellten Formeln ist das allgemeine Glied der Reihe für die Tangente

$$\frac{\text{tg.}\,km - B^1_k.\,\text{tg.}\,(k-1)m + B^2_{(k-2)}\,\text{tg.}\,(k-2)m \ldots (-1)^k B^k_k.\,\text{tg.}\,o}{m^k} \cdot \frac{x^k}{1.2.3\ldots k}$$

für $m = o$. Ob sich aus dieser Formel etwas machen läßt, muß ich des beschränkten Raumes wegen einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Wollen wir es weiter versuchen, die Tangente in eine nach den Facultäten geordnete Reihe aufzulösen, so will ich der Kürze halber dem m oder Δx gleich von vorn herein einen passenden Werth geben, und $\frac{1}{4}\pi = \alpha$ gesetzt, folgende Reihe annehmen:

$$\text{tg.}\,x = 1 + a(x-\alpha) + b(x-\alpha)(x-3\alpha) + c(x-\alpha)(x-3\alpha)(x-5\alpha) + \ldots$$

Durch Anwendung der in der Einleitung gegebenen Formeln folgt leicht:

$$a = -\frac{1}{\alpha}$$

$$b = +\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$c = -\frac{1}{2.3\alpha^3}$$

$$d = +\frac{1}{2.3.4\alpha^4} \text{ u. s. w.,}$$

daher: $$\operatorname{tg.} x = 1 - \frac{(x-\alpha)}{\alpha} + \frac{(x-\alpha)(x-3\alpha)}{2.\alpha^2} - \frac{(x-\alpha)(x-3\alpha)(x-5\alpha)}{2.3\alpha^3} + \ldots.$$

oder $\frac{x}{\alpha} = z$ gesetzt:

$$\operatorname{tg.} \alpha z = 1 - (z-1) + \frac{(z-1)(z-3)}{1.2} - \frac{(z-1)(z-3)(z-5)}{1.2.3} + \ldots. \quad \text{VI.}$$

Das sieht allerdings recht hübsch aus, kann uns aber zur Berechnung der Tangente ebenso wenig nützen, als die gewöhnliche Reihe. Setzt man nämlich $z = 2u + 1$, so wird:

$$\operatorname{tg.} (2u+1)\alpha = 1 - 2u + \frac{2^2 u(u-1)}{1.2} - \frac{2^3 u(u-1)(u-2)}{1.2.3} \ldots. \quad \text{VII.}$$
$$= (-1)^u,$$

also ist die Reihe nur richtig für $u = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Die in **VII.** dargestellte Reihe convergirt nämlich nicht und ihre Summe, sobald u keine ganze Zahl bedeutet, ist daher weder $(-1)^u$, noch $\operatorname{tg.}(2u+1)\alpha$.

c. Die Logarithmen des Sinus und Cosinus.

Es ist leicht zu übersehen, daß sich log sin x gar nicht in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln läßt, daß es dagegen für $\log \frac{\sin x}{x}$ möglicher Weise eine Reihe von der Form giebt:

$$\alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \ldots.$$

Der Mac Laurin'sche Satz ist auch hier nicht zu gebrauchen, da er sämmtliche Coefficienten $= \frac{0}{0}$ giebt:

Es ist $$d \log \frac{\sin x}{x} = \cot x - \frac{1}{x},$$ oder die Reihe für cot x substituirt:

$$2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 \ldots. = A x + B x^3 + C x^5 \ldots.$$

Die Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ lassen sich also ganz leicht finden, wenn man **A**, **B**, **C** .... kennt. Da man aber für die Cotangente keine brauchbare Reihe besitzt, so ist es nicht der Mühe werth, sich dabei aufzuhalten.

Um uns gewissermaßen für das Fehlschlagen ihrer Bemühungen bei dieser Reihe zu entschädigen, tischen uns die Differentialkünstler andere wunderbare Productionen auf, von denen ich des Raumes wegen nur ein paar Proben geben kann.

Sin x wird bekanntlich o für $x = o$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$ u. s. w. Der Ausdruck für sin x muß also nach einem bekannten algebraischen Satze die Factoren $x, x-\pi, x+\pi, x-2\pi \ldots.$ enthalten, so daß:

$$\sin x = A x (x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi) \ldots.$$

Da nun für $x = o$, $\frac{\sin x}{x} = 1$, so ist $A = \frac{1}{(-\pi)(+\pi)(-2\pi)(+2\pi)\ldots.}$,

daher: $$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right] \ldots. \quad \text{I.}$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ leitet man daraus ab:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots.}{3.3.5.5.7.7\ldots.} \quad \text{II.}$$

Nimmt man von I. den Logarithmus, so ist:

$$\log \sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots\ldots$$

$$= \log x - \frac{x^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{\pi^8} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{x^2}{4\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{4^2\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{4^3\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{4^4\pi^8} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{x^2}{9\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{9^2\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{9^3\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{9^4\pi^8} - \ldots\ldots$$

$$- \ldots\ldots$$

$$= \log x - \frac{x^2}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right] - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}\left[1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right]\ldots$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem vorhin für **log sin x** gefundenen, so ergiebt sich:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots = \frac{1}{90}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{1}{945}\pi^6 \qquad \text{u. s. w.}$$

Das sind nun zwar mehr interessante Curiositäten, als brauchbare Resultate, aber es mag drum sein. Wenn dagegen gleich hinterher auch die Summe der natürlichen Zahlen u. s. w. **in inf.** angegeben wird, so weiß ich nicht, ob ich mehr die Geschicklichkeit oder die Naivetät der gelehrten Herren bewundern soll. Man schließt:

$$\frac{1}{1+e^u} = 1 - e^u + e^{2u} - e^{3u} + \ldots,$$

also von vorn herein falsch, da die Reihe nur richtig ist für $e^u < 1$.

Weiter: $$\frac{1}{1+e^u} = 1 - \left[1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!}\ldots\right]$$

$$+ \left[1 + 2u + \frac{2^2u^2}{2!} + \frac{2^3u^3}{3!}\ldots\right]$$

$$- \left[1 + 3u + \frac{3^2u^2}{2!} + \frac{3^3u^3}{3!}\ldots\right]\ldots$$

$$= (1-1+1-1\ldots) - u(1-2+3-4\ldots) + \frac{u^2}{2}(1-2^2+3^2-4^2+\ldots)$$

$$- \frac{u^3}{3!}(1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots)\ldots$$

Setzt man $-u$ statt u, so ist $\dfrac{1}{1+e^{-u}} = \dfrac{e^u}{e^u+1} = 1 - \dfrac{1}{1+e^u}$

$$= (1-1+1-1\ldots) + u(1-2+3-4\ldots) + \frac{u^2}{2}(1-2^2+3^2-4^2\ldots)$$

$$+ \frac{u^3}{3!}(1 - 2^3 + 3^3 - 4^3\ldots)\ldots$$

Addirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich nach dem bekannten Satze:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2}$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots = 0.$$

Subtrahirt man dagegen, so ist:

$$u\,[1 - 2 + 3 - 4 \ldots] + \frac{u^3}{3!}\,[1 - 2^2 + 3^3 - 4^3 \ldots] \ldots = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^u - 1}{e^u + 1}$$

Setzt man ferner $u = 2x\sqrt{(-1)}$, also $\dfrac{e^u - 1}{e^u + 1} = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{x\sqrt{(-1)}}}{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{x\sqrt{(-1)}}} = \text{tg.}\, x\sqrt{(-1)}$

und dann für tg.x die Reihenentwickelung, so kommt heraus

$$1 - 2 + 3 - 4 \ldots = \tfrac{1}{4}$$
$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 = -\tfrac{1}{8} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist gar nicht zu begreifen, wie sonst grundgescheute Leute so barocke Sätze hinstellen können. Offenbar ist doch

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots = 1 + (3-2) + (5-4) \ldots = 1 + 1 + 1 \ldots = \infty$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^5 + 5^2 \ldots = (4-1) + (16-9) + (36-25) \ldots = 3 + 7 + 11 \ldots$$

Die Summe von n Gliedern ist $= n\,(2n+1)$, also die Summe der Reihe in inf. $= \infty$.

d. Arcus Sinus x und Arcus Tangens x.

Die Aufgabe, den Bogen aus dem Sinus oder aus der Tangente zu berechnen, läßt sich auf mehrfache Weise lösen, am schlechtesten durch den Mac Laurin'schen Satz.

Für $y = \sin x$ haben wir oben bei der Reihenentwickelung ohne Schwierigkeit $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ und daraus für $m = o$, $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ gefunden. Ist aber $\sin x = y$, so muß $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$ sein; und daher

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

oder, wenn die Bezeichnung $x = \text{arc}\ y$ eingeführt wird,

$$\frac{d\ \text{arc}\ y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}},$$

also nach dem binomischen Lehrsatze

$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}\,\frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\,y^4 + \tfrac{1}{8}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^8 + \ldots$$

Nehme ich nun für arc y die Reihe an

$$\text{arc}\ y = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \ldots,$$

mithin

$$\frac{d\ \text{arc}\ y}{dy} = a + 3by^2 + 5cy^4 + 7dy^6 + \ldots,$$

so lassen sich durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen die Größen a, b, c .... leicht bestimmen und es ist

$$\text{arc}\ y = y + \frac{1}{3\,.\,2}\,y^3 + \frac{1}{5\,.\,4}\,\frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\,y^5 + \frac{1}{8\,.\,7}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^7 + \ldots$$

Ebenso, wenn $z = \mathrm{tg.}\ x$, war $\frac{dz}{dx} = 1 + \mathrm{tg}\, x^2 = 1 + z^2$. Also

$$\frac{dx}{dz} = (1 + z^2)^{-1}, \text{ und so lange } z^2 < 1$$
$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots.$$

Nehmen wir nun wieder

$$\mathrm{arc}\ z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots,$$

so ist:
$$\frac{d\ \mathrm{arc}\ z}{dz} = A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + \ldots$$

und daher:
$$\mathrm{arc}\ z = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \ldots.$$

Diese wichtige Reihe wird meistens durch den bekannten Zusammenhang der Logarithmen und Kreisfunctionen auf eine recht sinnreiche Weise gewonnen.

Bewirkt man nämlich in der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

die Substitution $x = \pm \alpha \sqrt{(-1)}$, so ergiebt sich das überraschende Resultat:

$$e^{\alpha\sqrt{(-1)}} = \cos\alpha + \sqrt{(-1)}\sin\alpha$$

und
$$e^{-\alpha\sqrt{(-1)}} = \cos\alpha - \sqrt{(-1)}\sin\alpha,$$

folglich durch Division:
$$e^{2\alpha\sqrt{(-1)}} = \frac{1 + \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg}\,\alpha},$$

und
$$2\alpha\sqrt{(-1)} = \log\frac{1 + \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \sqrt{(-1)}\ \mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Da nun
$$\log\frac{1+u}{1-u} = 2\,[u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \ldots],$$

so folgt leicht
$$\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha - \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}\,\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\mathrm{tg}\,\alpha^5 - \ldots.$$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ giebt die unter dem Namen der Leibnitz'schen bekannten Reihe:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.$$

Setzt man $\frac{1}{4}\pi = \alpha + \beta$, also $1 = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}$ und daher $\mathrm{tg.}\,\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\beta}$ so bekömmt man zur Berechnung von π besser convergirende Reihen. Es kommt nur darauf an, $\mathrm{tg}\,\beta$ und $\mathrm{tg}\,\alpha$ möglichst klein anzunehmen, also z. B. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$ und $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}$, dann erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^4} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots.$$

II. Vieldeutige Symbole.

Wenn $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt, so kommt das offenbar daher, daß $f(x)$ sowohl als $\varphi(x)$ den Factor $(x - a)$ ein oder mehreremale enthalten, so daß

$$y = \frac{(x-a)^m\ f'(x)}{(x-a)^n\ \varphi'(x)}.$$

y wird daher $= \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ sobald $m = n$; dagegen o oder ∞, jenachdem $m \gtrless n$, und es kommt nun darauf an, im Zähler und Nenner diesen gemeinschaftlichen Factoren zu heben. Dazu bietet uns die Differentialrechnung ihre Dienste an. Es sei $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dann ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn man in demselben $x = a$ und $k = x - a$ einsetzt:

$$F(a) = \frac{f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{d^2 f(a)}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3 f(a)}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\cdots}{\varphi(a) + \frac{d\varphi(a)}{dx}(x-a) + \frac{d^2\varphi(a)}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi(a)}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\cdots}$$

Läßt man $f(a)$ und $\varphi(a)$ im Zähler und Nenner fort, da beide $=$ o sind, und dividirt mit $(x-a)$, so erhält man, da alle mit $(x-a)$ multiplicirten Glieder wegfallen:

$$F(a) = \frac{d\,f(a)}{dx} : \frac{d\,\varphi(a)}{dx}$$

Die einfache Regel ist also folgende: Wenn für $x = a$ eine gebrochene Function $= \frac{0}{0}$ wird, so nehme man vom Zähler und vom Nenner die Differentialquotienten und setze dann $x = a$. Sollte auch $\frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{0}{0}$ werden, so gelangt man durch ähnliche Schlüsse zu dem Ergebniß, daß

$$F(a) = \frac{d^2 f(a)}{dx^2} : \frac{d^2\varphi(a)}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

Allein, da der Taylor'sche Lehrsatz nicht überall paßt, so werden wir zu dieser seiner neuen Gestalt, wo $f(a)$ sogar in eine nach den Potenzen von $(x-a)$ fortschreitende Reihe verwandelt ist, auch kein unbedingtes Vertrauen haben. Glücklicher Weise können wir auch bei ganzen rationalen Functionen und bei allen denjenigen Ausdrücken, die wir in ganze rationale zu verwandeln gelernt haben, den Satz entbehren, da in diesem Falle nichts leichter ist, als mit $(x-a)$ zu dividiren.

Andere mehrdeutige Symbole als: $\infty - \infty$, oder $\frac{\infty}{\infty}$, oder $0 . \infty$ lassen sich leicht auf $\frac{0}{0}$ reduciren, ersteres indem man auf gleichen Nenner bringt, die letzteren, indem man im Zähler sowohl als im Nenner die reciproken Werthe substituirt.

Ein paar Beispiele mögen die Sache erläutern:

1. $$\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a - \sqrt[4]{(ax^3)}} \text{ für } x = a.$$

Zähler und Nenner differentiirt:

$$\frac{\frac{1}{2}[2a^3x - x^4]^{-\frac{1}{2}}[2a^3 - 4x^3] - \frac{1}{3}a^3(a^2x)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{4}[ax^3]^{-\frac{3}{4}}\,3ax^2};$$

hierin $x = a$ gesetzt, giebt $f(a) = \frac{16}{9}a$.

Dieses Beispiel ist dadurch geschichtlich merkwürdig, weil Joh. Bernouilli zu seiner Zeit die französischen Algebraisten und Antidifferentialisten damit neckte. Ich kann unmöglich glauben, daß diese Aufgabe die französischen Mathematiker in Verlegenheit gesetzt hat, da sie sich ohne Differentialrechnung ganz leicht lösen läßt. $\frac{a}{x} = y$ gesetzt, giebt:

$$a\,\frac{[2y - y^4]^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}}{1 - y^{\frac{3}{4}}}, \text{ für } y = 1$$

und $y = 1 + z$, $\quad a\,\dfrac{[1 - 2z(1 + mz)]^{\frac{1}{2}} - [1 + z]^{\frac{1}{3}}}{1 - [1 + z]^{\frac{3}{4}}}$, für $z = 0$

$$= a\,\frac{[1 - z(1 + mz) + nz^2(1 + mz)^2 \ldots.] - [1 + \tfrac{1}{3}z + pz^2 \ldots.]}{1 - [1 + \tfrac{3}{4}z + qz^3 \ldots.]}.$$

Hebt man die Einsen, dividirt Zähler und Nenner mit z und setzt $z = 0$, so erhält man, wie vorhin: $\frac{16}{9}\,a$.

2. $\quad \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ für $x = 90^0$.

Differentiirt giebt: $\quad \dfrac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$.

Setzt man $x = 90^0$, so erhält man 1.

Ohne Differentialrechnung ergiebt sich:

$$\frac{-2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x + 2 \cos \tfrac{1}{2}x^2}{2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x - 2 \sin \tfrac{1}{2}x^2} = \cot \tfrac{1}{2}x,$$

also für $x = 90^0$, wie vorhin $= 1$.

3. $\quad \dfrac{b}{x^2} - \dfrac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ ist $\infty - \infty$ für $x = 0$;

$\dfrac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ ist $\frac{0}{0}$. Setzt man $\dfrac{x}{b} = \sin \Phi$, so daß $\Phi = 0$,

so erhält man: $\quad \dfrac{1 - \cos \Phi}{b \sin \Phi^2} = \dfrac{1}{2b \cos \tfrac{1}{2}\Phi^2}$ und dies wird $\dfrac{1}{2b}$ für $\Phi = 0$.

4. $\quad \log x \,.\, \mathrm{tg.}\, \frac{\pi}{2}x$, ist $0 \,.\, \infty$ für $x = 1$,

aber $\quad \dfrac{\log x}{\cot \frac{\pi}{2} x}$ ist $\frac{0}{0}$ für $x = 1$

und dies giebt: $\dfrac{2}{\pi}$.

5. $\quad \dfrac{\log x}{\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}\pi \,.\, x}$ für $x = 0$ giebt $\frac{\infty}{\infty}$, folglich

$\dfrac{\cot \tfrac{1}{2}\pi \,.\, x}{(\log x)^{-1}}$ für $x = 0$ giebt $\frac{0}{0}$.

An diesem Beispiele scheitern alle Künste der Differentialrechnung. Die erste Ableitung giebt $-\dfrac{x \,.\, (\log x)^2}{(\sin \tfrac{1}{2}\pi \,.\, x)^2}$, also $0 \,.\, \infty$ und die fortgesetzte Differentiation führt uns nur noch tiefer hinein. Es fragt sich, was ist:

$$x^m \,.\, \log x^n \text{ oder } [x^{\frac{m}{n}} \log x]^n, \text{ also } x^p \log x \text{ für } x = 0.$$

Man setze $x^p = u$, also $\log x = \dfrac{1}{p} \log u$, dann ist:

$$y = \frac{1}{p} u \,.\, \log u = \frac{1}{p} \log e^{u \log u} = \frac{1}{p} \log (e^u)^{\log u}, \text{ also für } u = 0,$$

$$y = \frac{1}{p} \log 1^{-\infty} = 0.$$

III. Bestimmung der Maxima und Minima.

Wir haben bereits oben davon gesprochen, daß jede Gleichung von der Form $y = f(x)$, wenn sie sonst nicht etwas an sich Unmögliches enthält, immer durch eine Curve bildlich dargestellt werden kann. Ferner haben wir bereits gesehen, wenn $y = f(x)$ als analytischer Ausdruck einer Curve gedacht wird, so ist $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührende des Punktes (x, y) mit der Abscissenaxe bildet. Wird nun $\frac{dy}{dx}$ oder $\operatorname{tg}. \alpha = o$, so läuft die Berührende mit der Abscissenaxe parallel. Dieses ist aber bei den höchsten und tiefsten Punkten der Curve, also da der Fall, wo $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum wird, und wir haben daher zur Bestimmung dieser Punkte eine sehr einfaches Mittel, indem wir $\frac{dy}{dx} = o$ setzen und aus dieser Gleichung x bestimmen.

Zu demselben Resultate führt der Taylor'sche Lehrsatz, dessen Zulassung hier weniger bedenklich erscheint, weil in diesem Falle k sehr klein angenommen werden muß. Für ein hinreichend kleines k muß nämlich sowohl $f(x+k)$ als auch $f(x-k)$ bei einem Maximum $< f(x)$, und bei einem Minimum $> f(x)$ sein, oder $f(x+k) - f(x)$ sowohl als $f(x-k) - f(x)$ ist für das Maximum negativ, für das Minimum positiv.

Nun ist:
$$f(x+k) - fx = \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2} \ldots,$$
$$f(x-k) - f(x) = -\frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2} \ldots.$$

Für ein hinreichend kleines k ist aber das erste Glied der Reihe $\frac{dy}{dx}k$ größer als die Summe aller folgenden; mithin kann die Bedingung, daß $f(x+k) - f(x)$ so wohl, als $f(x-k) - f(x)$ zugleich positiv, oder zugleich negativ sein sollen, nur dann erfüllt werden, wenn $\frac{dy}{dx} = o$ ist, so daß also die Auflösung dieser Gleichung uns diejenigen Werthe von x geben muß, für welche y am größten oder kleinsten wird.

Ist nun aber $\frac{dy}{dx} = o$, so ist die Summe der übrig bleibenden Reihe für hinreichend kleine Werthe von k positiv oder negativ, jenachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ wird, und wir haben es also im ersten Falle mit einem Minimum im anderen mit einem Maximum zu thun.

Ist $y = f(x, u)$ also eine Function mit zwei veränderlichen Größen, so gelangt man durch ganz ähnliche Schlüsse zu der Regel: man setze die partiellen Differentialquotienten, also sowohl $\frac{dy}{dx}$, als auch $\frac{dy}{du} = o$, und bestimme aus diesen beiden Gleichungen x und u. Ob man ein Maximum oder ein Minimum erhält, geht zwar auch aus den folgenden partiellen Differentialquotienten hervor, aber das Verfahren dürfte sich seiner Weitläufigkeit wegen nicht sehr empfehlen.

Glücklicher Weise lassen sich fast alle Aufgaben über diesen höchst interessanten Theil der Mathematik lösen, ohne allen Differential-Apparat — und sogar mit Leichtigkeit, sobald $f(x)$ eine ganze Function ist, oder sich in eine solche verwandeln läßt, so daß

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 \ldots$$

In diesem Falle ist nämlich ganz gewiß:

$$\begin{aligned} f(x+k) &= f(x) + ak + bk^2 + ck^3 \ldots \\ f(x-h) &= f(x) - ah + bh^2 - ch^3 \ldots \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Soll nun $f(x)$ ein Maximum oder Minimum sein, so ist für hinreichend kleine h und k,

$$f(x+k) = f(x-h) \text{ oder } f(x+k) - f(x-h) = 0. \qquad \text{II.}$$

Zieht man die beiden Gleichungen I. von einander ab, so ist:

$$f(x+k) - f(x-h) = a(k+h) + b(k^2-h^2) + c(k^3+h^3) \ldots$$

$f(x+k) - f(x-h)$ ist also immer durch $k+h$ theilbar; oder $x-h=u$ und $k+h=m$, $f(u+m) - f(u)$ durch m theilbar.

Wenn man also $f(u+m) - f(u)$ durch m dividirt und dann $= 0$ setzt, so ergiebt sich aus dieser Gleichung derjenige Werth von u, für welchen $f(u)$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

Oder man setze in der gegebenen Gleichung für x die beiden Werthe x' und x'', so zwar, daß $x' < x$ und $x'' > x$, so ist:

$$f(x') - f(x'') = B(x'-x'') + C(x'^2 - x''^2) + \ldots,$$

so daß also $f(x') - f(x'')$ immer durch $x' - x''$ theilbar sein wird.

Soll nun $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum werden, so kann man x' und x'' jedenfalls dem x nahe genug nehmen, so daß $f(x') = f(x'')$ oder $f(x') - f(x'') = 0$. Man bilde also diese Differenz und hebe den gemeinschaftlichen Factor $x' - x''$ fort, so erhält man die Gleichung

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = 0.$$

Rücken nun beide Punkte x' und x'' dem Punkte x immer näher und näher, d. h. setze ich $x' = x'' = x$, so erhalte ich eine Gleichung, aus welcher dasjenige x, welches $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, gefunden werden kann.

Ein paar Beispiele sollen auch hier das Gesagte deutlich machen. Bei dem lebhaften Interesse, welches auch schon die Anfänger an dergleichen Aufgaben zu nehmen pflegen, bedauere ich, daß ich mich auf nur wenige beschränken muß.

1. In einen graden Kegel, dessen Höhe $= b$, Radius $= a$ ist, soll ein grader Cylinder hinein gezeichnet werden, dessen Volumen ein Maximum ist.

Der Radius des Cylinders sei x, seine Höhe y, so erhält man leicht $y = \frac{b}{a}(a-x)$. Das Volumen $v = x^2 y \pi$, daher:

$$v = \frac{b}{a}\pi x^2 (a-x),$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b}{a}\pi(2ax - 3x^2) = 0; \text{ also } x = \frac{3}{2}a.$$

Oder: $\quad ax'^2 - x'^3 = ax''^2 - x''^3$, d. h. $a(x'^2 - x''^2) = x'^3 - x''^3$,

durch $x' - x''$ getheilt: $\quad a(x'+x'') = x'^2 + x'x'' + x''^2$

und $x' = x'' = x$ gesetzt, giebt, wie vorhin $x = \frac{3}{2}a$.

2. Welche von den Kugeln, die um einen der Brennpunkte eines durch Rotation um die große Achse entstandenen Ellipsoids beschrieben werden können, hat innerhalb des Ellipsoids die größte Calotte?

Die Gleichung der Ellipse durch Polar-Coordinaten ist:

$$r = \frac{a[1-e^2]}{1-e\ \cos\varphi} = \frac{m}{1-e\ \cos\varphi}.$$

r ist zugleich Radius der Kugel. Die Calotte $= 2r\pi h$ und da h offenbar $= r(1-\cos\varphi) = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi^2$, so wird: $v = 4r^2\pi\sin\frac{1}{2}\varphi^2$, oder der Werth von r substituirt:

$$v = \frac{4m^2\pi\ \sin\frac{1}{2}\varphi^2}{(1-e\cos\varphi)^2} = 4m^2\pi\left[\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{1-e+2e\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\right]^2.$$

Es soll, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = u$ gesetzt, $z = \dfrac{u}{1-e+2eu^2}$ ein Maximum werden. Durch Differentiation erhalten wir: $\dfrac{1-e+2eu^2-4eu^2}{N^2} = o$, also $u = \sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\dfrac{1-e}{2e}}$

$$\cos\varphi = \frac{2e-1}{e} \text{ und } r = \frac{a(1-e^2)}{1-(2e-1)} = \tfrac{1}{2}a(1+e).$$

Ohne Differentialrechnung:

$$\frac{u'}{1-e+2eu'^2} = \frac{u''}{1-e+2eu''^2} \text{ oder geordnet:}$$

$$(u'-u'')(1-e) = 2eu'u''(u'-u'').$$

Mit $u'-u''$ gehoben und dann $u' = u'' = u$, giebt wie vorhin:

$$u = \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-e}{2e}}.$$

Die Aufgabe ist nur dann möglich, wenn $e > \frac{1}{3}$, oder $2a\sqrt{2} > 3b$.

3. $y = \dfrac{\log x}{x}$. Für welches x wird y ein Maximum?

Differentiirt giebt: $\dfrac{1-\log x}{x^2} = o$, also $x = e$,

und da $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-1-2(1-\log x)}{x^3}$ für $x = o$ negativ wird, so haben wir hier ein Maximum.

Ohne Differentialrechnung ist nach der ersten Methode:

$$\left[\frac{\log(x+m)}{x+m} - \frac{\log x}{x}\right] : m = \frac{x\log(x+m)-(x+m)\log x}{m} = o$$

$$= \frac{x\log x + x\log\left(1+\frac{m}{x}\right) - x\log x - m\log x}{m} = o$$

und hierin $m = o$ gesetzt, giebt wie vorhin $1-\log x = o$, $x = e$.

4. In einem rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Inhalt $= a^3$, soll man die 3 Seiten x, y, z so annehmen, daß die Oberfläche ein Minimum wird.

Die halbe Oberfläche ist $xy + xz + yz$ und da $z = \dfrac{a^3}{xy}$, so ist die Function, welche ein Minimum werden soll: $v = xy + \dfrac{(x+y)a^3}{xy}$

$$\frac{dv}{dx} = y - \frac{a^3}{x^2} = o \text{ und } \frac{dv}{dy} = x - \frac{a^3}{y^2} = o,$$

woraus sich ohne Weiteres $x = y = z$, also der aus den Elementen bekannte Satz ergiebt.

Dasselbe Resultat erhalte ich auch ohne Differentialquotienten, indem ich in der Gleichung

$$v = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

zuerst bloß x und dann bloß y als veränderlich betrachte.

Ich erhalte $(x' - x'')y - \frac{a^3(x' - x'')}{x'\,x''} = o$; also gehoben und $x' = x'' = x$,

$$y - \frac{a^3}{x^2} = o \text{ und natürlich ebenso } x - \frac{a^3}{y} = o.$$

IV. Anwendung auf die Theorie der Curven.

Ihre glänzendsten Erfolge hat die Analysis des Unendlichen, welche sich dann freilich nicht auf Differentialrechnung beschränken darf, sondern erst in der Integralrechnung zum Abschlusse kommen muß, bei ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik gehabt. Hier gehört sie aber auch wesentlich hin, und die ersten Begründer der Theorie hatten ganz Recht, wenn sie ihre Erfindung entweder vom geometrischen Standpunkte aus Methode der Tangenten, oder von der Idee der Bewegung ausgehend **methodus fluxionum** nannten.

Wir haben bereits oben gesehen, daß $\frac{dy}{dx}$ nichts Anderes ist als die Tangente des Winkels, den die Berührende mit der Absciffenachse bildet, also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, woraus dann weiter folgt (fig. 2)

die Normale $PN = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$,

" Tangente $PT = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$,

" Subnormale $ON = y\frac{dy}{dx}$

" Subtangente $OT = y\frac{dx}{dy}$.

Beispiele.

1. Ellipse. Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$. Daher die Gleichung der Berührenden an den Punkt $\xi\eta$,

$$\frac{y\eta}{b^2} + \frac{x\xi}{a^2} = 1,$$

Normale $= \sqrt{(1 - e^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)}$, Subnormale $= x\,(1 - e^2)$,

Tangente $= \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)}$, Subtangente $= \frac{1}{x}(a^2 - x^2)$.

Die Resultate für die Hyperbel folgen hieraus von selbst.

2. Parabel. Gleichung $y^2 = 2px$

$\frac{dy}{dx} = \text{tg.}\,\alpha = \frac{p}{y}$. Daher die Gleichung der Berührenden an den Punkt $\xi\,\eta$

$$y\eta = p(x + \xi).$$

Normale $= \sqrt{(2px + p^2)}$, Subnormale $= p$,

Tangente $= \sqrt{(2px + 4x^2)}$ Subtangente $= 2x$.

3. Die logarithmische Linie. Gleichung $y = a^x$ oder $x = k \log y$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{y}, \text{ Subtangente } = k.$$

Bei der einfachsten algebraischen Linie, der Parabel, ist also die Subnormale, — bei der einfachsten transscendenten Curve, dagegen ist die Subtangente constant.

4. Die Cycloide. Gleichung $y = a - a\cos\varphi$ und $x = a\varphi - a\sin\varphi$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi,\ \frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos\varphi), \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg.}\,\alpha = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Die Subnormale $= y\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = a\sin\varphi = MP''$ (Fig. 3.), woraus sich eine einfache Construction der Berührenden ergiebt.

Daß man bei den Kegelschnitten alle diese Resultate auch ohne Differentialrechnung ableiten kann, wissen die Schüler, oder können es wenigstens in jedem guten Lehrbuche der analytischen Geometrie nachlesen. Man kann es aber auch fast bei jeder andern Curve. Die Tangente des Winkels den eine Secante mit der Abscissenachse bildet ist $\frac{y - y'}{x - x'}$. Soll die Secante in die Berührende übergehen, so hat man $x - x'$ fortzuheben und dann $x' = x''$ zu setzen, grade wie wir es bei anderen Gelegenheiten auch gemacht haben. Z. B. bei der Cycloide ist:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{-a(\cos\varphi - \cos\varphi')}{a(\varphi - \varphi') - a(\sin\varphi - \sin\varphi')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi') - \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ und setzt dann $\varphi = \varphi'$, so ist bekanntlich $\frac{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} = 1$ und folglich $\text{tg.}\,\alpha = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$, wie vorhin.

Nun bleibt aber die Differentialrechnung nicht dabei stehen, uns durch den ersten Differentialquotienten die Richtung anzugeben, welche die Curve in jedem einzelnen Punkte gegen die Hauptachse nimmt, sondern sie lehrt uns auch die größere oder geringere Krümmung derselben für diesen oder jenen Punkt kennen. Diese Krümmung wird offenbar am zweckmäßigsten durch einen Kreis gemessen, da dieser überall gleichmäßig gekrümmt ist, so daß die größere oder geringere Krümmung nur von dem Halbmesser abhängt. Die Aufgabe besteht also darin, einen Kreis anzugeben, der sich im Punkte P so nahe als möglich an die Curve anlegt. Dieser Kreis heißt Krümmungskreis, sein Radius der Krümmungshalbmesser. Kreis und Curve haben natürlich eine gemeinschaftliche gradlinige Tangente und der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Normale des Punktes P.

Die Gleichung des Kreises ist $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$.

Soll derselbe durch drei Punkte der Curve gehen, so hat man die drei Gleichungen:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$$
$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 = r^2$$
$$(x'' + \xi)^2 + (y'' - \eta)^2 = r^2$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man unter allen Umständen die Coordinaten des Mittelpunktes und den Radius finden. Rückt man nun die Punkte $x'y'$ und $x''y''$ dem Punkte xy immer näher und näher, so erhält man zuletzt einen durch drei unendlich nahe bei einander liegende Punkte gehenden Kreis, und dieses ist eben der Krümmungskreis. Man hat also nach geschehener Elimination $x = x' = x''$ zu setzen.

Bei der Ellipse ist z. B. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, oder kürzer:

$$x = a\cos\varphi \text{ und } y = b\sin\varphi,$$

daher:

$$(a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{I.}$$
$$(a\cos\varphi' - \xi)^2 + (b\sin\varphi' - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{II.}$$
$$(a\cos\varphi'' - \xi)^2 + (b\sin\varphi'' - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{III.}$$

I. — II. giebt: $(a^2 - b^2)(\cos\varphi^2 - \cos\varphi'^2) - 2a\xi(\cos\varphi - \cos\varphi') - 2b\eta(\sin\varphi - \sin\varphi') = o$,

oder:

$$o = (a^2 - b^2)\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$$
$$- a\xi\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2} + b\eta\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi}{2},$$

und nachdem mit $\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$ gehoben;

$$\eta - \xi\frac{a}{b}\,\mathrm{tg.}\frac{\varphi+\varphi'}{2} + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = o. \qquad \text{IV.}$$

Ebenso erhalte ich durch Combination der I. und III. Gleichung:

$$\eta - \xi\frac{a}{b}\,\mathrm{tg.}\frac{\varphi+\varphi''}{2} + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi''}{2} = o. \qquad \text{V.}$$

Aus IV. und V.:

$$o = -\xi\frac{a}{b}\left[\mathrm{tg.}\frac{\varphi+\varphi'}{2} - \mathrm{tg.}\frac{\varphi+\varphi''}{2}\right] + \frac{a^2-b^2}{b}\left[\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} - \sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi''}{2}\right].$$

Die erste Klammer wird $\dfrac{\sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi''}{2}}$; die zweite Klammer ist

$$= \tfrac{1}{2}(\sin\varphi + \sin\varphi') - \tfrac{1}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi'') = \tfrac{1}{2}(\sin\varphi' - \sin\varphi'') = \sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2},$$

also nachdem der gemeinschaftliche Factor $\sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}$ gehoben ist,

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2},$$

und wenn $\varphi = \varphi' = \varphi''$

$$(\xi) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\varphi^3.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben:

$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi^3 .$$

Endlich
$$r^2 = \left[a \cos \varphi - \frac{a^2 - b^2}{a} \cos \varphi^3\right]^2 + \left[b \sin \varphi + \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi^3\right]^2$$
und nach einer leichten Reduction

$$r^2 = \frac{[a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2]^3}{a^2 b^2} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8 b^8}$$

$$= \frac{(a^2 - e^2 x^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(\varrho \varrho')^3}{a^2 b^2} .$$

In gleicher Weise für die Hyperbel

$$r^2 = \frac{(e^2 x^2 - a^2)^3}{a^2 b^2} = \frac{(\varrho \varrho')^3}{a^2 b^2} ,$$

und für die Parabel

$$r^2 = \frac{8 (x + \frac{1}{2} p)^3}{p} = \frac{8 \varrho^3}{p} ,$$

wo ϱ den Radiusrector bedeutet. Man sieht, daß bei sämmtlichen Kegelschnitten der Cubus der Normale zum Krümmungshalbmesser in einem constanten Verhältnisse steht.

Das hier erläuterte Verfahren wird nicht allein bei den Kegelschnitten, sondern auch bei den Curven höherer Ordnung zum Ziele führen, allein in den meisten Fällen ist die Rechnung so wenig übersichtlich und so unbequem, daß wir den von der Differentialrechnung gewiesenen Richtweg wählen. Es muß zugegeben werden, daß hier die Grenze ist, über welche wir ohne einen von der hohen Differentialbehörde ausgestellten Paß nicht hinüber gelangen dürften.

Wenn in dem sogenannten charakteristischen Dreiecke **ABC**, der Bogen **AB** unendlich klein wird $= ds$, so kann ich ds als grade Linie betrachten und es ist offenbar

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 .$$

Sei (Fig. 4.) MM' ein sehr kleiner Bogen, ds, welchen Curve und Kreis miteinander gemeinschaftlich haben, O Mittelpunkt des Krümmungskreises. Kreis und Curve haben also in M und in M' gemeinschaftliche Tangenten, welche mit der Hauptachse die Winkel α und α', oder da hier von zwei möglichst nahe beieinander liegenden Punkten die Rede ist, die Winkel α und $\alpha + d\alpha$ bilden. Der Unterschied dieser beiden Winkel, also $d\alpha$ ist nun aber, wie aus der Figur leicht hervorgeht = dem von den beiden Radien OM und OM' gebildeten Winkel und daher ist arc MM' oder $ds = r . d\alpha$, d. h.

$$r . d\alpha = \sqrt{dx^2 + dy^2} .$$

Nun ist $d \operatorname{tg} \alpha = (1 + \operatorname{tg} \alpha^2)\, d\alpha$, also

$$r . d \operatorname{tg} \alpha = (1 + \operatorname{tg} \alpha^2) \sqrt{dx^2 + dy^2} ,$$

ferner
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} ,\quad d \operatorname{tg} \alpha = \frac{d^2 y}{dx} ,$$
folglich

$$r \frac{d^2 y}{dx} = \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right] \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder:
$$r = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3} : \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2 y}{dx^2}$$

und wenn N die Normale des Punktes x y bedeutet:

$$r = \frac{N^3}{y^3} : \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Die Gleichung des Kreises ist:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2.$$

Differentiirt:

$$(x - \xi) + (y - \eta) \frac{d y}{d x} = 0$$

$$1 + \frac{d y^2}{d x^2} + (y - \eta) \frac{d^2 y}{d x^2} = 0.$$

Also
$$\eta - y = \frac{d x^2 + d y^2}{d^2 y} \quad \text{und} \quad \xi - x = - \frac{d x^2 + d y^2}{d^2 y} \frac{d y}{d x}.$$

Die meisten Lehrbücher gehen bei Herleitung dieser Formeln vom Taylor'schen Lehrsatze aus. So elegant das auch zu sein scheint, möchte ich doch nicht dazu rathen. Ich ziehe es vor, mir die Entstehung der Formel geometrisch möglichst klar zu machen, anstatt eine geheimnißvolle Maschine durch einen Druck in Bewegung zu setzen, um am Ende doch nicht zu wissen, ob da im Inneren nicht irgend ein kleines Rad seine Dienste versagt hat?

Als Beispiel diene die Cycloide.

Gleichung:
$$y = a(1 - \cos\varphi) \quad \text{und} \quad x = a(\varphi - \sin\varphi),$$

$$d y = a \sin\varphi \, d\varphi \quad " \quad d x = a(1 - \cos\varphi)\, d\varphi, \quad \frac{d y}{d x} = \cot \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$d^2 y = a \cos\varphi \, d\varphi^2 + a \sin\varphi \, d^2\varphi,$$

$$d^2 x = 0 = a(1 - \cos\varphi)\, d^2\varphi + a \sin\varphi \, d\varphi^2, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} = - \cot \tfrac{1}{2}\varphi,$$

daher
$$d^2 y = a\, d\varphi^2 \, [\cos\varphi - 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2] = - a\, d\varphi^2,$$

ferner
$$d\varphi = \frac{d x}{a(1 - \cos\varphi)},$$

folglich:
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{1}{a(1 - \cos\varphi)^2} = - \frac{1}{4 a \sin_{2} \varphi^4}$$

und
$$r = - 4 a \sin \tfrac{1}{2}\varphi^4 (1 + \cot \tfrac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{3}{2}} = - 4 a \sin \tfrac{1}{2}\varphi = - 2\sqrt{2 a y}.$$

Die Mittelpunkte aller Krümmungskreise für die stetig aufeinander folgenden Punkte der Curve bilden zusammen einen geometrischen Ort, die sogenannte **Evolute** der Curve, die dann in dieser Beziehung die **Evolvente** heißt. Um die Gleichung dieser Evolute zu bestimmen, hat man einfach aus obigen Gleichungen für $\eta - y$ und $\xi - x$ die Größen y und x zu eliminiren.

Bei obiger Differentiation der Gleichung des Kreises war bloß x und y veränderlich; d. h. wir betrachteten nur verschiedene Punkte desselben Kreises. Will man dagegen von einem Krümmungskreise zum anderen übergehen, so sind auch ξ und η variabel.

Setzt man zur Abkürzung
$$\eta - y = t \quad \text{und} \quad \xi - x = - t \frac{d y}{d x},$$

so ist
$$d\eta - d y = d t \quad \text{und} \quad d\xi - d x = - d t \frac{d y}{d x} - t \frac{d^2 y}{d x},$$

also: $$d\xi - dx = -[d\eta - dy]\frac{dy}{dx} - \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]dx\,,$$

d. h. $$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad -\frac{dx}{dy} = \frac{d\eta}{d\xi}\,.$$

Da nun $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels φ ist, den die Berührende mit der Hauptachse macht, so ist $-\frac{dx}{dy}$ die Tangente des Winkels $\varphi + 90^0$, den die Normale mit der Hauptachse bildet. Normale und Krümmungshalbmesser fallen aber zusammen.

Aber $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist die Tangente des Winkels φ', den die Berührende an den Punkt $\xi\eta$ der Evolute macht, also ist $\varphi + 90 = \varphi'$ d. h. der Krümmungshalbmesser an den Punkt xy ist immer eine Berührende für den Punkt $\xi\eta$ der Evolute.

Denkt man sich also um die Evolute einen biegsamen Faden gelegt und wickelt diesen gleichmäßig ab, so nämlich, daß der abgewickelte Faden fortwährend die Evolute berührt, so ist leicht zu sehen, daß der Endpunkt des Fadens die Evolvente beschreibt; — wovon eben der Name hergenommen ist.

Beispiel 1. Parabel:

$$\xi - x = \frac{y^2 + p^2}{p} \qquad \text{also} \quad \xi = 3x + p$$

$$\eta - y = -\frac{2x + p}{p}\sqrt{2px} \qquad \text{„} \quad \eta = -\frac{2x}{p}\sqrt{2px}\,,$$

woraus leicht folgt:

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p} = m\xi'^3$$

also eine Parabel höherer Ordnung.

Beispiel 2. Cycloide:

$$\eta - y = -(1 + \cot\tfrac{1}{2}\varphi^2)\, 4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^4 = -4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$\eta = -2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \quad \text{also} \quad \eta = -y$$

$$\xi - x = 4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\cot\tfrac{1}{2}\varphi = 2a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad \xi = a(\varphi + \sin\varphi).$$

Aus beiden Gleichungen für η und ξ müßte φ eliminirt werden. Man sieht aber leicht, daß dieselben eine auffallende Aehnlichkeit mit den Gleichungen der Cycloide haben. Durch eine einfache Coordinaten-Verwandlung, indem $\xi' = \xi + a\pi$, $\eta' = \eta + 2a$ und $\varphi' = \varphi + \pi$ gesetzt wird, erhält man

$$\eta' = a(1 - \cos\varphi') \quad \text{und} \quad \xi' = a(\varphi' - \sin\varphi').$$

Die Evolute der Cycloide ist also ebenfalls eine Cycloide. Die Coordinaten ihres Anfangspunktes sind $-2a$ und $-a\pi$.

Es ist zwar schwer, sich von einem interessanten Gegenstande loszureißen, allein aus nahe liegenden Gründen muß ich mich schon mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, um so mehr, da diese letzten Untersuchungen jedenfalls jenseit der Grenzen liegen, welche im 19. Jahrhundert die Lehrer der Mathematik dem Unterrichte auf unseren Realschulen angewiesen sehen möchten.

Kommen wir nun zum Schlusse, nachdem wir uns die hauptsächlichsten Anwendungen der Differentialrechnung näher darauf angesehen haben, auf die Frage zurück, ob dieser erste Theil der höheren Analysis bei der täglich mächtiger anwachsenden Strömung des Lebens und bei den dadurch mehr und mehr gesteigerten Anforderungen in der Mathematik für unsere Schulzwecke nothwendig ist?

Bei dem allgemeinen Beweise des binomischen Lehrsatzes, bei der Herleitung der Reihen für Logarithmen und Kreisfunctionen, überhaupt bei der Darstellung transscendenter Functionen durch unendliche Reihen, ist, wie wir uns überzeugt haben, die Differentialrechnung nicht allein entbehrlich, sondern sie versagt sogar mitunter ihre Dienste, während wir durch die allergewöhnlichsten Hülfsmittel der bescheidenen niederen Analysis leicht und sicher zum Ziele gelangen.

Namentlich aber haben wir zu dem Taylor'schen resp. Mac Laurin'schen Satze kein unbedingtes Vertrauen gewinnen können und gesehen, daß man mit diesen stolzgezäumten Paradepferden der Infinitesimalrechnung nicht selten leichtsinniges Spiel treibt, überhaupt mit divergirenden Reihen Sachen an den Tag bringt, die einem — Witze ähnlicher sehen, als einem ehrlichen Lehrsatze.

Bei der Bestimmung des wahren Werthes eines mehrdeutigen Symbols und bei dem Auffinden der Maxima und Minima reichten ebenfalls die einfachsten algebraischen Operationen aus, so lange $f(x)$ eine ganze rationale Function ist, oder in eine solche verwandelt werden kann. Diese Verwandlung ist aber bei allen algebraischen Functionen ausführbar und auch bei den transscendenten, so weit sie das Bürgerrecht in der Mathematik erhalten haben, möglich. Die Differentialrechnung, die auch hier mitunter versagt, bietet uns also bloß ein Verfahren, das durch seine knappe Bezeichnung in vielen Fällen etwas kürzer und bequemer, jedenfalls aber nicht so viel werth ist, um seinetwegen durch eine neue Theorie dem Schüler den Fortschritt zu erschweren.

Nicht viel anders liegt die Sache bei den Anwendungen auf geometrische Sätze. Die eigentliche Methode der Tangenten ist nicht allein bei den Kegelschnitten sondern auch bei den Curven höherer Ordnung ganz bequem ausführbar ohne Differentialrechnung und wird durch sie wegen der Allgemeinheit der Zeichensprache nur übersichtlicher. Außerdem kommt nur noch die Bestimmung des Krümmungshalbmessers und der Evolute in Frage, während alle übrigen sich hier anreihenden Untersuchungen der Integralrechnung anheimfallen. Bei den Kegelschnitten läßt sich der Krümmungsradius ohne Herbeiziehung jener Sublimitäten leicht angeben, erst darüber hinaus wird die Rechnung zwar nicht unmöglich, aber ermüdend und weitläufig. Wenn nun auch der am sausenden Webestuhle der Zeit schaffende Weltgeist unaufhaltsam vorwärts schreitet und seine Anforderungen an die Bildungsanstalten immer mehr steigert, so muß doch zugestanden werden, daß unsere Realschüler gewiß nicht hinter diesen Anforderungen zurückbleiben, auch wenn sie nicht über die angedeutete Grenze befördert werden, hinter welcher wir ja ohnehin mehr geistreichen Zeitvertreib, als wirklich nützliche und brauchbare Dinge finden; — und so scheint denn auch für die Aufgaben der analytischen Geometrie die Hülfe der Differentialrechnung entbehrlich.

Nun kann es wohl keine Frage sein, daß von zwei Wegen, die in der Mathematik zu demselben Ziele führen, unter allen Umständen, ganz besonders aber für den Lernenden, derjenige welcher von der Sonne beleuchtet einen freien Umblick gestattet, den Vorzug vor einem anderen verdient, der durch das nächtliche Dunkel eines künstlichen Tunnels führt, selbst wenn die Meisterhand eines Newton die glatten Schienen zusammen gefügt hätte! Kömmt hinzu, daß wir auf der künstlichen plutonischen Schienenstraße Eulen nach Athen befördern, daß wir durch sie sogar Zeit verlieren und dafür an Einsicht und Verständniß nichts gewinnen, so wird uns die Wahl wohl nicht schwer werden.

Es ist wahr, die Differentialformeln helfen uns oft, über im Wege liegende Hindernisse hinweg, ohne daß wir wissen, wie? Allein der bewußtlose Nachtwandler klettert auch auf schwindelndem Stege sicher über die gefährlichsten Abgründe und doch wird es wohl Niemandem einfallen, diese Nachtseite der Natur dem selbstbewußten Tagleben vorzuziehen.

Ausnahmen will ich allenfalls gelten lassen. Wenn ein besonders strebsamer und befähigter Schüler des Herzens Gelüste nicht zähmen kann, wenn er in das fabelhafte Jenseit einen prüfenden Blick werfen und das geheimnißvolle Walten jener kleinen Wichtelmännchen beobachten will, so mag er nur getrost an die Arbeit gehen. Es wird ihm nicht schwer werden, den rührig schaffenden Zwergen die Tarnkappe abzugewinnen, wenn er weiß, daß er nicht nöthig hat, sich an den Dornen der Taylor'schen Erfindung die Finger zu verwunden.

Sind aber einmal die ersten Schritte gethan, so wird der Wissensdurstige nicht auf halbem Wege stehen bleiben, sondern sich auch ein klein wenig in dem Gebiete der Integralrechnung umsehen wollen. Freilich sieht es in diesen Regionen zum Theil noch wunderlicher aus, als in denen, welche wir bisher durchwandert haben, und es würde mir daher recht angenehm sein, wenn ich bald Gelegenheit fände, meinen Spaziergang fortzusetzen und meinen lieben jungen Freunden die herrlichen Wunderwerke auch dieses neuen Feenlandes zu zeigen, — seine erhabenen, zum Theil auf den Wüstensand gebaueten Pyramiden, das unendlich verschlungene Gewirr seiner Labyrinthe, seine vieldeutige Hieroglyphenschrift, auf welche man trotz ihrer Unerweislichkeit doch sehr weit reichende wichtige Schlüsse zu gründen weiß, — vor allen seine in den Himmel wachsenden Bäume, die man, um ihre Himmelfahrt nicht aufzuhalten, mit Wurzeln an die irdische Heimath zu ketten, unterlassen hat.

Fig. 1.

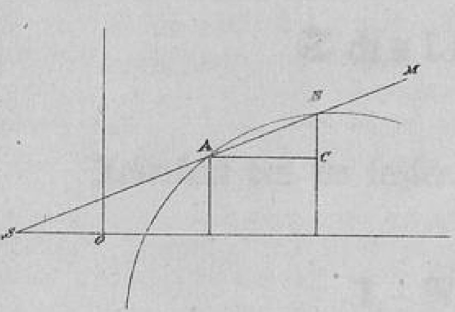

Fig. 2.

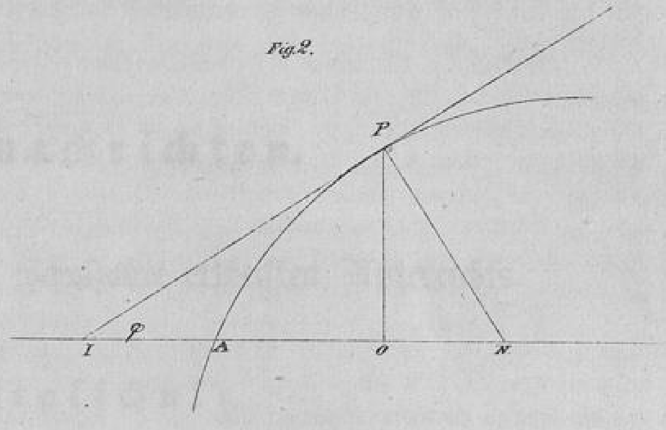

Fig. 3.

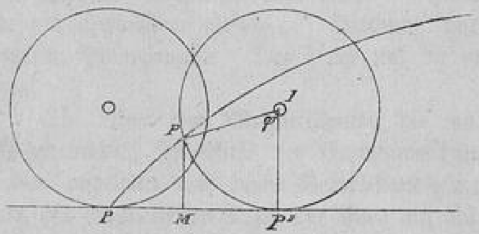

Fig. 4.