Beitrag zum Unterrichte in der mathematischen Geographie.

Einen großen Teil der Zeit, welche dem Unterrichte in der mathematischen Geographie in der obersten Klasse der höheren Lehranstalten gewidmet wird, nehmen Berechnungen ein, welche sich auf das nautische Dreieck, Zenith, Pol, Stern, beziehen. Die Kenntnis des Sinussatzes und des Kosinussatzes der sphärischen Trigonometrie genügt, um den Schüler in stand zu setzen, mancherlei Aufgaben zu lösen, die sich über die Tageslänge, den Aufgangsort der Sonne, die Dauer der Dämmerung u. s. w. stellen lassen.

In dem schätzenswerten, weitverbreiteten und auch auf unserer Schule eingeführten Lehrbuche der Elementar-Mathematik von Mehler ist der erstere der beiden Sätze auf Umwegen und nach vielen Zwischenrechnungen gewonnen, obgleich er sich aus einer einfachen Figur leicht direkt entwickeln läßt.

Seien OX, OY, OZ drei vom Punkte O ausgehende, nicht in einer Ebene liegende Strahlen. Auf OX sei eine beliebige Strecke OA abgetragen. Man ziehe $AB \perp OY$, $AC \perp OZ$, $AL \perp OYZ$ und verbinde L mit B und C, so ist $\angle ABL$ der Neigungswinkel der Ebenen OXY und OZY, der mit β, ebenso $\angle ACL$, der Neigungswinkel der Ebenen OXZ und OYZ, der mit γ bezeichnet werden soll. Sei ferner $\angle AOB = c$, $\angle AOC = b$, so ist

$$AC = OA \,.\, \sin b;\; AB = OA \,.\, \sin c;\; AL = AC \,.\, \sin \gamma;\; AL = AB \,.\, \sin \beta.$$

Daraus ergiebt sich ohne weiteres der Sinussatz

$$1)\ \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Um den Kosinussatz abzuleiten, kann man folgendermaßen verfahren: Man denke sich OA um OY in die Ebene OYZ nach außen gedreht, so daß es mit OZ nicht auf dieselbe Seite fällt, es erhalte die Lage OD, und auch OA um OZ in die Ebene OYZ nach außen gedreht, so daß es mit OY nicht auf dieselbe Seite fällt, es erhalte dann die Lage OE. Ferner seien in A auf OA Lote in den Ebenen OXZ und OYZ errichtet, welche OY in F und OZ in G treffen, so ist FAG der Neigungswinkel α der beiden Ebenen OXY und OXZ, man denke sich dann das Dreieck FAG um FG in die Ebene OYZ gedreht, und es erhalte die Lage FHG, so ist, wenn $\angle YOZ = a$ gesetzt wird,

$$OF^2 + OG^2 - 2 \,.\, OF \,.\, OG \,.\, \cos a = HF^2 + HG^2 - 2\, HF \,.\, HG \cos \alpha$$

nun ergiebt die Figur, daß

$$OF^2 - HF^2 = OF^2 - FD^2 = OD^2 = OA^2$$
$$OG^2 - HG^2 = OG^2 - GE^2 = OE^2 = OA^2.$$

Also

$$OF \,.\, OG \,.\, \cos a = OA^2 + HF \,.\, HG \,.\, \cos \alpha$$
$$\cos a = \frac{OD}{OF} \cdot \frac{OE}{OG} + \frac{FD}{OF} \cdot \frac{GE}{OG} \cos \alpha$$

oder

$$2)\ \cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos \alpha.$$

Diese Formel auf die Polarecke angewandt ergiebt

$$3)\ \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos a.$$

In den Lehrplänen für die Realgymnasien und Oberrealschulen vom 31. März 1882 werden die Elemente der sphärischen Trigonometrie verlangt, soweit sie zum Verständnis der mathematischen Geographie erforderlich sind und in den Erläuterungen wird besonders betont, daß die Herleitung und Einübung der in den meisten Lehrbüchern gegebenen Formeln nicht erforderlich ist, sondern daß es genügt, wenn die Schüler die ersten Sätze richtig aufgefaßt haben und dadurch zur Berechnung einfacher Aufgaben der mathematischen Geographie, wenn auch auf etwas unbequemerem Wege, befähigt werden.

Die drei entwickelten Formeln sind in der That leicht abzuleiten und genügen nach den Anforderungen der Lehrpläne.

Bei diesen Aufgaben über das nautische Dreieck kommt es häufig vor, daß die Deklination und Rektascension der Sonne und die Zeitgleichung gegebene Stücke sind. Wie nun bei der Einführung in die Lehre von den Logarithmen gezeigt wird, wie man einen log berechnen kann, wie in dem ersten trigonometrischen Unterricht die Funktionen einiger Winkel berechnet werden, damit erkannt wird, wie die logarithmischen und trigonometrischen Tabellen entstehen, wie in dem mathematischen Unterrichte überhaupt der Schüler nur mit Werten rechnen soll, deren Entwickelung ihm klar gemacht werden kann, so meine ich, wäre es auch in der mathematischen Geographie wünschenswert anzugeben, wie es möglich ist, für jeden Moment den Ort der Sonne zu bestimmen.

Eine nur geringe Annäherung an die wahren Werte wird erhalten, wenn man von der ungleichmäßigen Bewegung der Erde in der Ekliptik absieht und die Länge der Sonne der Zeit proportional setzt, dann sind Deklination und Rektascension Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit bekannter Hypotenuse und bekanntem Winkel, und mit ihr wird man sich auf Gymnasien, wo die Ziele des mathematischen Unterrichts etwas niedriger gesteckt sind als auf den beiden anderen höheren Lehranstalten mit neunjähriger Lehrdauer, meistens begnügen müssen. Die Entwicklungen, welche bei der Berechnung des Orts der Sonne entstehen, wenn man die Keplerschen Gesetze berücksichtigt, überschreiten aber nicht den Lehrstoff der Realgymnasien und Oberrealschulen, im Gegentheil, sie bieten eine gute Gelegenheit, verschiedene Teile aus der Lehre von den Reihen, den größten und kleinsten Werten, der näherungsweisen Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung und aus der analytischen Geometrie zu wiederholen und anzuwenden.

Es sei S der Brennpunkt der Erdbahn, in welchem die Sonne steht, P das Perihel, EP der Bogen, welchen die Erde in der Zeit t, von dem Durchgang durch das Perihel gerechnet, zurücklegt, $2a$ und $2b$ die Hauptachsen der Ellipse, u die Umlaufszeit, so ist nach dem zweiten Keplerschen Gesetze

$$I)\ \frac{ESP}{ab\pi}=\frac{t}{u}.$$

Schlägt man um den Mittelpunkt M der Ellipse mit MP einen Kreis und zieht $EA \perp MP$, verlängert EA über E bis der Kreis in B getroffen wird, und zieht MB und ME, so ist

$$SEP=SEA+EAP.$$

Nun ist

$$EAP=\frac{b}{a}BAP=\frac{b}{a}\Big(BMP-BAM\Big)$$

also

$$EAP=\frac{b}{a}BMP-MEA$$

somit

$$SEP=\frac{b}{a}BMP-EMS.$$

Bezeichnet man $\angle ESA$ mit φ und $\angle BMP$ mit ϑ, so ist

$$ESP=\frac{1}{2}ab\vartheta-\frac{1}{2}MS.EA.$$

Ferner ist, wenn e die numerische Excentricität bedeutet,

$$MS = ae,\quad EA = b \sin \mathfrak{D}$$

also

$$ESP = \frac{1}{2} ab\mathfrak{D} - \frac{1}{2} abe \sin \mathfrak{D}$$

Setzt man diesen Wert von ESP in die Gleichung I, so wird

$$II)\quad \mathfrak{D} - e \sin \mathfrak{D} = \frac{2\pi t}{u}$$

Außerdem ist

$$ES . \sin \varphi = b \sin \mathfrak{D}$$

und weil

$$ES = \frac{b\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \varphi}$$

so ist

$$III)\quad \sin \mathfrak{D} = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \varphi}{1+e \cos \varphi}$$

Wenn nun u und e eines Planeten gegeben ist, so läßt sich aus Gleichung II zu jedem t das zugehörige $\mathfrak{D}$ nach der Methode der näherungsweisen Auflösung einer transcendenten Gleichung und dann aus Gleichung III der Wert von φ bestimmen, doch ist es auch möglich, φ direkt durch t auszudrücken. Dazu löse man Gleichung III nach φ auf:

$$\sqrt{1-e^2} \sin \varphi - e \sin \mathfrak{D} \cos \varphi = \sin \mathfrak{D}$$

Man setze

$$1)\quad \frac{e \sin \mathfrak{D}}{\sqrt{1-e^2}} = tg\lambda$$

so ist

$$\sin(\varphi - \lambda) = \frac{\sin \mathfrak{D} \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2}}$$

oder

$$\sin(\varphi - \lambda) = \frac{\sin \lambda}{e}$$

Mithin

$$2)\quad \varphi = \lambda + \arc \sin \frac{\sin \lambda}{e}$$

Aus Gleichung 1 folgt

$$\frac{\sin \lambda}{e} = \frac{\sin \mathfrak{D}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \mathfrak{D}}}$$

Entwickelt man die Wurzel nach dem binomischen Satze und vernachlässigt, wie es in der folgenden Rechnung durchweg geschehen soll, die Potenzen von e, welche höher wie die dritte sind, so erhält man

$$3)\quad \frac{\sin \lambda}{e} = \sin \mathfrak{D} + \frac{1}{4} e^2 \sin 2\mathfrak{D} \cos \mathfrak{D}$$

Dann ist nach der Reihe für den arcsin:

$$\arcsin \frac{\sin \lambda}{e} = \frac{\sin \lambda}{e} + \frac{1}{2.3} \frac{\sin^3 \lambda}{e^3} + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{\sin^5 \lambda}{e^5} + \ldots = \sin \mathfrak{D} + \frac{1}{2.3} \sin^3 \mathfrak{D} +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.5} \sin^5 \mathfrak{D} + \ldots + \frac{1}{4} e^2 \sin 2\mathfrak{D} \cos \mathfrak{D} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \mathfrak{D} + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 \mathfrak{D} + \ldots\right)$$

$$\arcsin \frac{\sin\lambda}{e} = \vartheta + \frac{e^2}{4}\,\frac{\sin 2\vartheta \cos\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta}}$$

oder

$$4)\quad \arcsin \frac{\sin\lambda}{e} = \vartheta + \frac{e^2}{4} \sin 2\vartheta.$$

Ferner ist nach Gleichung *3)*

$$\sin\lambda = e \sin\vartheta + \frac{e^3}{2} \sin\vartheta \cos^2\vartheta$$

und weil

$$\lambda = \sin\lambda + \frac{1}{2\,.\,3} \sin^3\lambda + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5} \sin^5\lambda + \ldots$$

so wird

$$\lambda = e \sin\vartheta + \frac{e^3}{2} \sin\vartheta \cos^2\vartheta + \frac{1}{6} e^3 \sin^3\vartheta$$

oder

$$5)\quad \lambda = e \sin\vartheta + \frac{e^3}{2} \sin\vartheta - \frac{e^3}{3} \sin^3\vartheta$$

Setzt man die Werte aus 4 und 5 in Gleichung 2 ein, so erhält man

$$IV)\quad \varphi = \vartheta + e \sin\vartheta + \frac{e^2}{4} \sin 2\vartheta + \frac{e^3}{2} \sin\vartheta - \frac{e^3}{3} \sin^3\vartheta.$$

In dieser Gleichung ist φ durch ϑ ausgedrückt mit Vernachlässigung von e^4 und höheren Potenzen von e. Es bleibt nun noch übrig ϑ durch t zu ersetzen, und dazu wird Gleichung *II* benutzt; nach derselben ist

$$6)\quad \vartheta = \frac{2\pi t}{u} + e \sin\vartheta$$

also

$$\sin\vartheta = \sin\left(\frac{2\pi t}{u} + e \sin\vartheta\right)$$

$$\sin\vartheta = \sin\frac{2\pi t}{u} \cos\left(e \sin\vartheta\right) + \cos\frac{2\pi t}{u} \sin\left(e \sin\vartheta\right)$$

$$7)\quad e\,.\,\sin\vartheta = e \sin\frac{2\pi t}{u}\left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2\vartheta\right) + e^2 \cos\frac{2\pi t}{u}\,.\,\sin\vartheta.$$

Setzt man die Werte aus *6* und *7* in *IV*, so wird

$$\varphi = \frac{2\pi t}{u} + 2e \sin\frac{2\pi t}{u} + \frac{1}{4} e^2 \sin 2\vartheta - e^3 \sin\frac{2\pi t}{u} \sin^2\vartheta + 2e^2 \cos\frac{2\pi t}{u} \sin\vartheta + \frac{1}{2} e^3 \sin\vartheta$$
$$- \frac{1}{3} e^3 \sin^3\vartheta.$$

Nach Gleichung *6* ist ferner

$$2\vartheta = \frac{4\pi t}{u} + 2e \sin\vartheta$$

$$\frac{1}{4} e^2 \sin 2\vartheta = \frac{1}{4} e^2 \sin\frac{4\pi t}{u} + \frac{e^3}{2} \cos\frac{4\pi t}{u} \sin\vartheta$$

$$2e^2 \cos\frac{2\pi t}{u} \sin\vartheta = e^2 \sin\frac{4\pi t}{u} + 2e^3 \cos^2\frac{2\pi t}{u} \sin\vartheta$$

folglich wird

$$\varphi = \frac{2\pi t}{u} + 2e \sin\frac{2\pi t}{u} + \frac{5}{4} e^2 \sin\frac{4\pi t}{u} + e^3 \left(\frac{1}{2} \sin\vartheta - \frac{1}{3} \sin^3\vartheta + \frac{1}{2} \cos\frac{4\pi t}{u} \sin\vartheta\right.$$
$$\left. + 2 \cos^2\frac{2\pi t}{u} \sin\vartheta - \sin\frac{2\pi t}{u} \sin^2\vartheta\right).$$

In der Klammer (K) kann nun wegen des Faktors e^3 überall statt $\mathfrak{S}$ gesetzt werden $\frac{2\pi t}{u}$ und dadurch wird

$$K=\frac{1}{2}\ sin\ \frac{2\pi t}{u}-\frac{4}{3}\ sin^3\ \frac{2\pi t}{u}+\frac{1}{2}\ cos\ \frac{4\pi t}{u}\ sin\ \frac{2\pi t}{u}+2\ cos^2\ \frac{2\pi t}{u}\ sin\ \frac{2\pi t}{u}$$

und wenn man die beiden letzten Posten durch den sin des Winkels ausdrückt:

$$K=3\ sin\ \frac{2\pi t}{u}-\frac{13}{3}\ sin^3\ \frac{2\pi t}{u}.$$

Nun ist

$$sin\ \frac{6\pi t}{u}=3\ sin\ \frac{2\pi t}{u}-4\ sin^3\ \frac{2\pi t}{u}$$

also

$$K=\frac{13}{12}\ sin\ \frac{6\pi t}{u}-\frac{1}{4}\ sin\ \frac{2\pi t}{u}$$

und schließlich erhält man

$$\varphi=\frac{2\pi t}{u}+2e\ sin\ \frac{2\pi t}{u}+\frac{5}{4}e^2\ sin\ \frac{4\pi t}{u}+\frac{e^3}{12}\left(13\ sin\frac{6\pi t}{u}-3\ sin\ \frac{2\pi t}{u}\right).$$

Anwendung:

Nach Klein, Himmelsbeschreibung, ist P_t die Länge des Perihels, im Jahre 1800

$$P_t = 99^0\ 30'\ 21{,}77''+(61{,}674+0{,}000\,1850\ t).t$$

wenn t die Anzahl der seit 1800 verflossenen Jahre ist, für $t=90$, ist

$$P_{90}=101^0\ 2'\ 53{,}93''.$$

Nach dem Nautical Almanac ist β, die heliocentrische Länge der Erde am 1. Januar 1890 im mittleren Mittag von Greenwich,

$$\beta=101^0\ 5'\ 30{,}6''$$

und die Länge vermehrt sich in 24 Stunden um $1^0\ 1'\ 9{,}4''$, daraus ergiebt sich, daß die Erde am 1. Januar $1^h\ 1^m\ 29{,}77^s$ vor dem mittleren Mittag von Greenwich durch das Perihel geht. Die Excentricität e der Erdbahn ist nach Klein

$$e_t = 0{,}016\,79207 - 0{,}000\,000\,4135\ \ t - 0{,}000\,000\,000\,0123\ t^2$$

das ergiebt

$$e_{90}=0{,}016\,754\,755$$

Ferner ist die Länge des siderischen Jahres $u=365{,}256\,374$. Nun soll nach der für φ entwickelten Formel beispielshalber berechnet werden Deklination δ, Rektascension ω und Zeitgleichung Z nebst ihren stündlichen Veränderungen für $t=100$ Tage. Man findet

$$\frac{2\pi t}{u}=98^0\ 33'\ 39{,}27''$$

der von e abhängige Ausdruck liefert noch $1^0\ 53'\ 32{,}33''$, also wird

$$\varphi=100^0\ 27'\ 11{,}6''$$

das ist der Winkel, um welchen sich der Radius vektor Sonne — Erde in 100 Tagen vom Durchgang durch das Perihel an gerechnet dreht, also bis zum 11. April $1^h\ 1^m\ 29{,}77^s$ vor dem mittleren Mittag in Greenwich. Um nun zu erfahren, wie groß der Winkel φ bis zum Mittag selbst wird, kann man folgendermaßen verfahren:

Es ist

$$\varphi=\frac{2\pi t}{u}+2e\ sin\ \frac{2\pi t}{u}+\ldots$$

Es sei

$$\varphi' = \frac{2\pi t'}{u} + 2e \sin \frac{2\pi t'}{u} + \ldots$$

Also

$$\frac{\varphi - \varphi'}{t \quad t'} = \frac{2\pi}{u} + 4e \frac{\sin \frac{\pi}{u}(t-t')}{t-t'} \cos \frac{\pi}{u}(t+t') + \frac{5}{2} e^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{u}(t-t')}{t-t'} \cos \frac{2\pi}{u}(t+t')$$

$$+ \frac{e^3}{12}\left[\frac{13 \sin \frac{3\pi}{u}(t-t')}{t-t'} \cos \frac{3\pi}{u}(t+t') - \frac{3 \sin \frac{\pi}{u}(t-t')}{t-t'} \cos \frac{\pi}{u}(t+t')\right]$$

also wenn

$$\left(\frac{\sin n\,(t-t')}{t-t'}\right)_{t=t'} = n$$

gesetzt wird, so erhält man die Geschwindigkeit der Änderung des Winkels φ zur Zeit t

$$\frac{\varphi-\varphi'}{t-t'} = \frac{2\pi}{u}\left[1 + 2e \cos \frac{2\pi t}{u} + \frac{5}{2} e^2 \cos \frac{4\pi t}{u} + \frac{e^3}{4}\left(13 \cos \frac{6\pi t}{u} - \cos \frac{2\pi t}{u}\right)\right]$$

Aus dieser Formel ergiebt sich, daß sich der Winkel φ am 11. April um $58'\ 48{,}11''$ in 24^h ändert, also in $1^h\ 1^m\ 29{,}77^s$ um $2'\ 30{,}67''$, so daß im mittleren Mittag

$$\varphi = 100^0\ 29'\ 42{,}3''.$$

Nun ist $\qquad P_{90} = 101^0\ 2'\ 53{,}9''$,

also die heliocentrische Länge der Erde $201^0\ 32'\ 36{,}2''$ und die geocentrische Länge der Sonne $\sigma = 21^0\ 32'\ 35{,}2''$,

Die Deklination der Sonne ergiebt sich nach der Formel

$$\sin \delta = \sin \sigma \,.\, \sin \varepsilon$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik ist. Nach Klein, Himmelskunde, beträgt

$$\varepsilon_t = 23^0\ 27'\ 54{,}8'' - 0{,}47244\ t'' + 0{,}0000014\ t^{2''}$$

also $\qquad \varepsilon_{90} = 23^0\ 27'\ 12{,}3''$.

Dann findet man $\qquad \delta = 8^0\ 24'\ 13{,}8''$.

Berechnung der stündlichen Änderung der Deklination.

Es ist $\qquad \sin \delta = \sin \sigma \,.\, \sin \varepsilon.$

Es sei $\qquad \sin \delta' = \sin \sigma' \,.\, \sin \varepsilon$

so ist

$$\sin \frac{\delta - \delta'}{2} \cos \frac{\delta + \delta'}{2} = \sin \varepsilon \sin \frac{\sigma - \sigma'}{2} \cos \frac{\sigma + \sigma'}{2}.$$

Ersetzt man die Sinus der Differenzen durch die Anzahl der Sekunden und

$$\frac{\cos \frac{\sigma + \sigma'}{2}}{\cos \frac{\delta + \delta'}{2}} = \frac{\cos \sigma}{\cos \delta}$$

so wird

$$\delta - \delta' = (\sigma - \sigma') \frac{\sin \varepsilon \cos \sigma}{\cos \delta}.$$

Für die tägliche Änderung der Länge ist oben gefunden $58'\ 48{,}11''$, das giebt für die stündliche:

$$\sigma - \sigma' = 147''$$

und man erhält $\qquad \delta - \delta' = 55''$.

Die Rektascension ω der Sonne findet man aus

$$tg\omega = tg\sigma \, . \cos \varepsilon.$$

für σ und ε die angegebenen Werte eingesetzt, giebt

$$\omega = 19^0\ 54'\ 32'',$$

in Zeit verwandelt $\omega = 1^h\ 19^m\ 38^s$

Die stündliche Änderung der Rektascension berechnet man ähnlich wie oben:

$$tg\omega = tg\sigma \cos \varepsilon$$

$$tg\omega' = tg\sigma' \cos \varepsilon$$

$$\frac{\sin(\omega - \omega')}{\cos \omega \cos \omega'} = \frac{\sin(\sigma - \sigma') \cos \varepsilon}{\cos \sigma \cos \sigma'}$$

$$\omega - \omega' = (\sigma - \sigma') \frac{\cos \varepsilon \cos \omega^2}{\cos \sigma^2}$$

und es wird $\omega - \omega' = 9{,}19^s$.

Berechnung der Zeitgleichung.

Man denkt sich eine zweite Sonne, welche sich gleichmäßig in der Ekliptik bewegt und mit der wahren Sonne gleichzeitig durch die Endpunkte der großen Achse der Erdbahn geht, so wird dieselbe am 1. Januar $1^h\ 1^m\ 29{,}77^s$ vor dem mittleren Mittage in Greenwich in der Richtung des Aphels erscheinen, von der Erde aus gesehen. Bis zum Frühlingspunkte hat sie $78^0\ 57'\ 6{,}1''$ zurückzulegen, da die Länge des Perihels $101^0\ 2'\ 53{,}9''$ beträgt. Diesen Winkel legt sie, da sie in $365{,}256374^d$ mit gleichbleibender Geschwindigkeit 360^0 zurücklegt, in $80^d\ 2^h\ 30^m\ 28{,}56^s$ zurück. Sie gelangt demnach am 22. März $1^h\ 28^m\ 58{,}79^s$ nach dem mittleren Mittag in Greenwich in den Frühlingspunkt. Zugleich mit ihr geht nun auch die mittlere Sonne durch den Frühlingspunkt und bewegt sich gleichmäßig im Äquator. Dieselbe legt dann bis zum Mittag des 11. April, also in $19^d\ 22^h\ 31^m\ 1{,}21^s$ einen Winkel von $19^0\ 39'\ 4{,}6''$ zurück. Nun beträgt die Rektascension der wahren Sonne $19^0\ 54'\ 32''$, also steht diese um $15'\ 27{,}4''$ weiter vom Meridian und geht deshalb um $1^m\ 1{,}8^s$ später durch den Kulminationspunkt, daher ist die Zeitgleichung $Z = +\ 1^m\ 1{,}8^s$. Die stündliche Änderung der Zeitgleichung ist leicht zu finden. Die mittlere Sonne bewegt sich in jeder Stunde um $(1:365{,}265)^h = 9{,}856^s$ weiter. Die Rektascension der wahren Sonne ändert sich jede Stunde um $9{,}19^s$, daher nimmt die Zeitgleichung stündlich um $0{,}666^s$ ab. — (Die erhaltenen Resultate stimmen mit den in den Ephemeriden für 1890 angegebenen bis auf Bruchtheile der Sekunden überein.)

Vier mal im Jahre wird die Zeitgleichung gleich Null und zwischen ihren Nullwerten liegen zwei Maxima und zwei Minima, wie sich auf folgende Weise ergiebt.

Die oben erwähnte zweite Sonne, welche sich gleichmäßig in der Ekliptik bewegt, braucht, um aus dem Aphel in den Frühlingspunkt zu kommen, $\frac{(\pi - p)\ u}{2\pi}$ Tage; (p ist die Länge des Perihels). Gleichzeitig mit ihr geht die mittlere Sonne durch den Frühlingspunkt und legt in $t - \frac{(\pi - p)\ u}{2\pi}$ Tagen einen Winkel ψ zurück im Äquator:

$$\psi = \frac{2\pi t}{u} - \pi + p.$$

Die Rektascension ω der wahren Sonne aber ist zu bestimmen aus

$$tg\omega = \cos \varepsilon \ tg\ (\varphi + p - \pi).$$

Setzt man zur Abkürzung die Glieder von φ, welche den Faktor e enthalten, gleich μ, so ist

$$\varphi = \frac{2\pi t}{u} + \mu$$

und also $tg\omega = \cos \varepsilon \ tg\ (\psi + \mu).$

Hieraus folgt

$$\sin(\psi-\omega+\mu)=tg^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin(\psi+\omega+\mu)$$

$$\sin(\psi-\omega+\mu)=tg^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin[2\psi+\mu-(\psi-\omega)]$$

$$tg(\omega-\psi)=\frac{\sin\mu-tg^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin(2\psi+\mu)}{\cos\mu+tg^2\frac{1}{2}e\cos(2\psi+\mu)}.$$

Die rechte Seite ist eine bekannte Funktion von t, man kann also aus dieser Formel für jede beliebige Zeit den Wert der Zeitgleichung $\omega-\psi$ finden; allerdings ist die Funktion sehr zusammengesetzt, und wenn es sich nur darum handelt, einen Überblick über den Verlauf von $\omega-\psi$ zu haben, so lassen sich erhebliche Vereinfachungen einführen.

Zunächst ist $\mu=2e\sin\frac{2\pi t}{u}+\ldots$, also $\cos\mu$ liegt zwischen 1 und 0,999 ... für alle Werte von t; dann ist $tg^2\frac{1}{2}\varepsilon=0{,}043$, der Nenner ist also für $t=o\ldots u$ nahe gleich 1, daher ist annähernd

$$tg(\omega-\psi)=2e\sin\frac{2\pi t}{u}-tg^2\frac{1}{2}\varepsilon\sin\left(\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu\right)$$

$$tg(\omega-\psi)=A-B.$$

Hieraus ergiebt sich für $t=o$ $\omega-\psi=3{,}7^m$ als Zeitgleichung für den 1. Januar. Wächst nun t, so wächst auch A und $-B$, weil $2p=202^0$ ist, und daher nähert sich $\omega-\psi$ seinem Maximum. Seinen größten negativen Wert erreicht B, wenn

$$\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu=\frac{3\pi}{2}$$

ist; dann ist $t=34^d$, also am 4. Februar $Z=14{,}1$. Nun muß etwas später ein Maximum der Zeitgleichung eintreten, wenn die Abnahme von $-B$ gleich der Zunahme von A wird. Wenn nämlich t über 34^d wächst, so nimmt A zu, $-B$ dagegen nimmt verhältnismäßig wenig ab, weil es in der Nähe seines Maximums sich befindet, daher wird Z erst einige Tage nach dem 4. Februar sein Maximum erreichen. Den größten positiven Wert erhält B wenn

$$\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu=\frac{5\pi}{2}$$

dann ist $t=125^d$ und $Z=-3{,}4_m$, das findet statt am 6. Mai, etwas später muß ein Minimum von Z eintreten, wenn die Abnahme von A gleich der Zunahme von $-B$ wird. Auf dieses Minimum folgt ein zweites Maximum für

$$\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu=\frac{7\pi}{2}.$$

Man erhält $t=218^d$, das ergiebt den 7. August und $Z=+5{,}5^m$. Das Maximum von Z muß vorher stattfinden, weil A für etwas kleinere Werte von t einen kleineren negativen Wert hat, B dagegen annähernd denselben Wert behält.

Endlich ist für

$$\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu=\frac{9\pi}{2}$$

$t=309$, $Z=-16{,}2^m$ am 6. November. Das Minimum für Z findet aus ähnlichen Gründen wie vorher kurz vor dem 6. November statt. (Die Ephemeriden ergeben das Minimum $-16^m\ 21^s$ am 3. November.) Zwischen den vier genannten Zeitpunkten liegen die, in welchen die Zeitgleichung gleich Null wird, und man erhält dieselben durch Lösung der Gleichung

$$\sin\left(\frac{4\pi t}{u}+2p+\mu\right)=2e\cot^2\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\frac{2\pi t}{u}.$$

Als erste Wurzel findet man durch Anwendung der „regula falsi“ $\frac{2\pi t}{u}=102{,}7^0$, woraus $t=104^d$, d. h. am 15. April ist die Zeitgleichung gleich Null; ebenso ergeben sich die drei anderen Zeitpunkte, der 14. Juni, der 1. September und der 24. Dezember, an diesen Tagen stimmt die mittlere mit der wahren Zeit überein.

Zwischen der Ab- und Zunahme der Zeitgleichung und der des Tages — unter Tag die Zeit vom Aufgang bis zum Untergang der wahren Sonne verstanden — findet nun ein enger Zusammenhang statt: Vom Anfang November, wo die Zeitgleichung ein Minimum ist, bis zum 21. Dezember nimmt die Deklination der Sonne, also auch die Tageslänge auf der nördlichen Halbkugel ab, die Zeitgleichung aber nimmt zu, daher die Abnahme des Tages größer vor dem mittleren Mittag als nach demselben. Die Vormittage (Zeit vom Aufgange der wahren Sonne bis zum mittleren Mittage) werden in dieser Zeit in unserer Breite um ca. 70^m kürzer, die Nachmittage (Zeit vom mittleren Mittage bis zum Untergange der wahren Sonne) werden nur um ca. 37^m kürzer, die ersteren nehmen um die doppelte Zunahme der Zeitgleichung, um ca. 33^m, mehr ab als die letzteren.) Vom 21. Dezember bis zum 11. Februar nimmt wegen der wachsenden Deklination die Tageslänge zu, die Zeitgleichung bleibt auch im Zunehmen, daher wachsen nun die Nachmittage mehr als die Vormittage. Nach dem kürzesten Tage nehmen die Vormittage sogar noch ab, und zwar so lange, bis die halbe tägliche Zunahme der Tageslänge mehr beträgt wie die tägliche Zunahme der Zeitgleichung. Daher die häufige Frage, wie kommt es, daß im Anfange des Jahres, obgleich die Tage länger werden, der Tagesanbruch nicht früher stattfindet? — Vom 11. Februar bis zum 14. Mai nimmt die Tageslänge zu, die Zeitgleichung ab, da ist die Zunahme der Vormittage größer wie die der Nachmittage um die doppelte Verminderung der Zeitgleichung, nämlich um 37^m. Vom 14. Mai bis 21. Juni wächst sowohl die Tageslänge, als auch die Zeitgleichung, die Nachmittage wachsen mehr als die Vormittage um 10^m Vom 21. Juni bis 1. August nimmt die Tageslänge ab, die Zeitgleichung zu; nach dem 21. Juni geht daher die Sonne noch später unter als am längsten Tage und es findet eine Abnahme der Nachmittage erst dann statt, wenn die halbe tägliche Abnahme der Tageslänge gleich der Zunahme der Zeitgleichung ist. Endlich vom 1. August bis zum 3. November nehmen die Tage ab und auch die Zeitgleichung vermindert sich um $22\frac{1}{2}^m$, die Nachmittage nehmen daher um 45^m mehr ab als die Vormittage; die Abnahme der Nachmittage beträgt nämlich in unserer Breite in dieser Zeit $3^h\ 26^m$, die der Vormittage $2^h\ 41^m$.

Berechnung der Deklination und Rektascension eines Planeten für einen gegebenen Moment.

Zum Schlusse soll noch kurz angegeben werden, wie man den Ort eines Planeten V zur Zeit t bestimmen kann. Dazu muß man die Lage seines Perihels, seines Knotenpunkts, die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik, seine Excentricität, mittlere Entfernung und Umlaufszeit und den Moment kennen, in welchem er durch das Perihel geht. Dann berechnet man durch den Winkel φ und den Winkel zwischen Perihel und Knotenpunkt den Abstand des Planeten V vom Knotenpunkt K; aus der Projektion des Winkels VSK auf die Ekliptik und der Länge FK des Knotenpunktes ergiebt sich die heliocentrische Länge FSW und Breite VSW. Ferner ergiebt sich aus

$$v=\frac{a\,(1-e^2)}{1+e\,\cos\varphi}$$

der Abstand v des Planeten von der Sonne. Auch dieser werde auf die Ekliptik projiciert, und man erhält als Projektion

$$v'=v\,\cos VSW$$

und als Abstand des Planeten von der Ekliptik

$$v''=v \sin VSW.$$

Für den gegebenen Zeitpunkt sei r die Entfernung der Erde von der Sonne. In dem Dreiecke, welches entsteht, wenn ESV auf die Ekliptik projiziert wird, kennt man r, v' und den eingeschlossenen Winkel α, welcher die Differenz der heliocentrischen Länge von Erde und Planet ist, kann also die übrigen Stücke berechnen. Die dritte Seite dieses Dreiecks sei r', so ist $\frac{v''}{r'}=tg b$, $b=$ geocentrische Breite. Der Winkel bei E und die Länge der Sonne ergeben die geocentrische Länge l des Planeten. Ferner berechne man aus

$$\cos FV=\cos b \,.\, \cos l$$

den Abstand FV des Planeten vom Frühlingspunkte und aus

$$\sin \lambda=\frac{\sin b}{\sin FV}$$

den Winkel zwischen FV und der Ekliptik. λ und ε bestimmen den Winkel λ' zwischen FV und dem Äquator, und schließlich findet man

$$\sin \delta=\sin FV \,.\, \sin \lambda'$$
$$tg \omega=tg FV \,.\, \cos \lambda'.$$

Diese Entwickelungen auf die Stellung der Venus am 11. April 1890 mittlerer Mittag Greenwich angewandt ergeben für

$$\varphi=\frac{2\pi t}{u}+2e \sin \frac{2\pi t}{u}+\,.\,.$$

folgende Werte:

$$e=0{,}0068159167$$
$$u=224{,}7007869.$$

Die Venus geht nach dem Nautical Almanac am 16. Oktober 1889 2^h 12^m 35^s durch das Perihel, dessen Länge 129^0 $58'$ $39''$ beträgt. Bis zum 11. April 1890 sind $t=176{,}9079^d$, das giebt $\varphi=282^0$ $40'$ $6''$. Die Neigung der Venusbahn gegen die Ekliptik beträgt 3^0 $23'$ $31''$, die Länge des aufsteigenden Knotens K ist gleich 75^0 $42'$ $16''$, die Venus ist also von demselben um 23^0 $0'$ $40''$ entfernt. Dadurch wird bestimmt

$$VSW=-1^0\ 19'\ 31''$$
$$FSW=52^0\ 43'\ 37''$$

wo das negative Zeichen angiebt, daß die Venus sich unter der Ekliptik befindet.

Man berechnet nun $r=1{,}002768$ und $v=0{,}722219$, die mittlere Entfernung der Venus gleich 0,723332 gesetzt, und erhält dann $v'=0{,}722026$, $v''=-0{,}01670389$; der von r und v' eingeschlossene Winkel $\alpha=148^0$ $49'$ $0''$; dann wird $l=34^0$ $32'$ $4''$, $r'=1{,}663036$, $b=0^0$ $34'$ $32''$. Die Entfernung der Venus vom Frühlingspunkte, wenn sie von der Erde aus gesehen wird, $FV=34^0$ $32'$ $19''$; $\lambda=1^0$ $0'$ $54''$, also $\varepsilon-\lambda=22^0$ $26'$ $18''$, sodaß sich endlich auf Zehner der Sekunden abgerundet ergiebt

$$\delta=12^0\ 29'\ 50''$$
$$\omega=2^h\ 9^m\ 50^s.$$

Dr. Heller, Oberlehrer.