Ueber die

Krümmung des elliptischen Paraboloids.

Allgemeine Untersuchungen über die Krümmung der Flächen haben manche scharfsinnige Mathematiker angestellt und dabei eine große Anzahl merkwürdiger Sätze gefunden. Auf spezielle Arten von Flächen sind aber diese Sätze wenig angewandt worden, was seinen Grund vorzugsweise wohl darin hat, daß jene allgemeinen Untersuchungen eine nicht geringe Anzahl von Coordinaten-Verwandlungen zu Hülfe nehmen und dadurch zur Anwendung auf spezielle Fälle wenig geeignet sind. Diesen Mangel erkannte der hochverdiente Grunert und entwickelte die Theorie der Krümmung in einer solchen Weise, daß die sich ergebenden Formeln ohne irgend welche Transformation der Coordinaten eine unmittelbare Anwendung auf alle speciellen Arten von Flächen gestatten. Den von Grunert eingeschlagenen Weg habe ich bei dieser Abhandlung über die Krümmung des elliptischen Paraboloids verfolgt und dadurch manche, wie ich glaube, merkwürdige und elegante Formeln erhalten.

Daß sich die Gleichungen und Formeln für das hyperbolische Paraboloid aus den gewonnenen ohne Schwierigkeit ableiten lassen, ergiebt sich aus der Vergleichung der beide Paraboloide charakterisirenden Gleichungen auf der Stelle.

Das elliptische Paraboloid.

Die Gleichung des elliptischen Paraboloids sei im Allgemeinen

$$1.\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \pm \frac{2z}{c} = 0,^{*)}$$

dann ist nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw)

$$2.\quad \frac{u}{a^2}(x-u) + \frac{v}{b^2}(y-v) \pm \frac{1}{c}(z-w) = 0.$$

*) Im folgenden wollen wir, um Irthümer zu vermeiden, die doppelten Vorzeichen, welche nicht auf die Vorzeichen in Gleichung 1 zu beziehen sind, einklammern. Die nicht eingeklammerten Vorzeichen dagegen sind, die oberen auf das obere, die unteren auf das untere Vorzeichen in Gleichung 1 zu beziehen.

Bezeichnen wir eine beliebige durch den Punkt (uvw) gelegte Ebene durch die Gleichung

$$3.\quad A\,(x-u) + B\,(y-v) + C\,(z-w) = 0,$$

so sind:

$$4.\quad \frac{x-u}{\pm B\,\frac{1}{c} - C\,\frac{v}{b^2}} = \frac{y-v}{C\,\frac{u}{a^2} \mp A\,\frac{1}{c}} = \frac{z-w}{A\,\frac{v}{b^2} - B\,\frac{u}{a^2}}$$

die Gleichungen der Berührenden im Punkte (uvw) derjenigen Curve, in welcher die Oberfläche des Paraboloids von der durch Gleichung 3 charakterisirten Ebene geschnitten wird. Diese Curve wollen wir der Kürze halber den Schnitt nennen.

Nach den Prinzipien der analytischen Geometrie ist ferner die Gleichung der Normalebene des Schnitts im Punkte (uvw)

$$5.\quad \left\{\pm B\,\frac{1}{c} - C\,\frac{v}{b^2}\right\}(x-u) + \left\{C\,\frac{u}{a^2} \mp A\,\frac{1}{c}\right\}(y-v) + \left\{A\,\frac{v}{b^2} - B\,\frac{u}{a^2}\right\}(z-w) = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit 3 folgende Gleichungen für die Normale des Schnitts im Punkte (uvw) ergeben:

$$6.\quad \frac{x-u}{A\left\{A\frac{u}{a^2} + B\frac{v}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} - \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{u}{a^2}} = \frac{y-v}{A\left\{A\frac{u}{a^2} + B\frac{v}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} - \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{v}{b^2}} = \frac{z-w}{A\left\{A\frac{u}{a^2} + B\frac{v}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} \mp \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{1}{c}}.$$

Für einen zweiten Punkt $(u_1 v_1 w_1)$ des Schnitts sind also die Gleichungen der Normale:

$$7.\quad \frac{x-u_1}{A\left\{A\frac{u_1}{a^2} + B\frac{v_1}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} - \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{u_1}{a^2}} = \frac{y-v_1}{A\left\{A\frac{u_1}{a^2} + B\frac{v_1}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} - \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{v_1}{b^2}} = \frac{z-w_1}{A\left\{A\frac{u_1}{a^2} + B\frac{v_1}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\} \mp \left\{A^2+B^2+C^2\right\}\frac{1}{c}}.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen die Divisoren in den Gleichungen 6 und 7 mit U, V, W resp. U_1, V_1, W_1, so gehen jene Gleichungen über in

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W},$$

$$\frac{x-u_1}{U_1}=\frac{y-v_1}{V_1}=\frac{z-w_1}{W_1}$$

oder in

$$\frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}\,\frac{z-w}{W},$$

$$8. \quad \frac{x-u-(u_1-u)}{U_1}=\frac{y-v-(v_1-v)}{V_1}=\frac{z-w-(w_1-w)}{W_1};$$

woraus wir mittelst leichter Rechnung für die Coordinaten des Durchschnittspunktes beider Normalen folgende Werthe erhalten:

$$9. \quad \frac{x-u}{U}=\frac{y-v}{V}=\frac{z-w}{W}=\frac{V_1\,(u_1-u)-U_1\,(v_1-v)}{UV_1-VU_1}.$$

Weil nun bekanntlich der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Schnitts im Punkte (uvw) die Grenze ist, welcher sich der Durchschnittspunkt der beiden Normalen immer mehr und mehr nähert, wenn der Punkt $(u_1 v_1 w_1)$ dem Punkte (uvw) immer näher und näher rückt; so ist, wenn wir die Coordinaten des Krümmungs-Mittelpunktes im Punkte (uvw) des Schnitts mit X, Y, Z bezeichnen:

$$10. \quad \frac{X-u}{U}=\frac{Y-v}{V}=\frac{Z-w}{W}=\operatorname{Lim}\frac{V_1\,(u_1-u)-U_1\,(v_1-v)}{UV_1-VU_1}.$$

Mit der Bestimmung von

$$\operatorname{Lim}\frac{V_1\,(u_1-u)-U_1\,(v_1-v)}{UV_1-VU_1}=\operatorname{Lim}\frac{V_1-U_1\,\dfrac{v_1-v}{u_1-u}}{U\,\dfrac{V_1-V}{u_1-u}-V\,\dfrac{U_1-U}{u_1-u}}$$

werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Der Punkt $(u_1 v_1 w_1)$ muß den Gleichungen 3 und 1 genügen, folglich ist:

$$11. \quad A\,(u_1-u)+B\,(v_1-v)+C\,(w_1-w)=0 \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{u_1}{a}\right)^2+\left(\frac{v_1}{b}\right)^2\pm\frac{2w_1}{c}=0;$$

also, da $\left(\frac{u}{a}\right)^2+\left(\frac{v}{b}\right)^2\pm\frac{2w}{c}=0$ ist,

$$12. \quad \frac{u_1+u}{a^2}\,(u_1-u)+\frac{v_1+v}{b^2}\,(v_1-v)\pm\frac{2}{c}\,(w_1-w)=0.$$

Aus den Gleichungen 11 und 12 folgt nach leichter Rechnung:

$$\frac{v_1-v}{u_1-u}=\frac{C\,\dfrac{u_1+u}{a^2}\mp A\,\dfrac{2}{c}}{\pm B\,\dfrac{2}{c}-C\,\dfrac{v_1+v}{b^2}};$$

folglich

$$\operatorname{Lim} \frac{v_1 - v}{u_1 - u} = \frac{C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c}}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}};$$

also, da offenbar

$$\operatorname{Lim} V_1 = V \text{ und } \operatorname{Lim} U_1 = U$$

ist, erhalten wir nach Einsetzung der aus dem Obigen bekannten Werthe für U und V vermittelst leichter Rechnung:

$$13.\ \operatorname{Lim}\left\{V_1 - U_1 \frac{v_1 - v}{u_1 - u}\right\} = C . \frac{\left\{A^2 + B^2 + C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\} - \left\{A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c}\right\}^2}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}}$$

$$= C . \frac{\left\{A \frac{v}{b^2} - B \frac{u}{a^2}\right\}^2 + \left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\}^2 + \left\{C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c}\right\}^2}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}}.$$

Ferner hat man nach dem Obigen offenbar die Formeln:

$$\frac{U_1 - U}{u_1 - u} = A \left\{\frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} \cdot \frac{v_1 - v}{u_1 - u}\right\} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2},$$

$$\frac{V_1 - V}{u_1 - u} = B \left\{\frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} \cdot \frac{v_1 - v}{u_1 - u}\right\} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{b^2} \cdot \frac{v_1 - v}{u_1 - u};$$

folglich, wenn wir zur Grenze übergehen und für $\operatorname{Lim} \frac{v_1 - v}{u_1 - u}$ den gefundenen Werth einführen:

$$\operatorname{Lim} \frac{U_1 - U}{u_1 - u} =$$

$$\frac{A\left[\frac{A}{a^2}\left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\} + \frac{B}{b^2}\left\{C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c}\right\}\right] - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2}\left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\}}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}},$$

$$\operatorname{Lim} \frac{V_1 - V}{u_1 - u} =$$

$$\frac{B\left[\frac{A}{a^2}\left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\} + \frac{B}{b^2}\left\{C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c}\right\}\right] - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{b^2} \cdot \left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\}}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}};$$

woraus nach einigen, keiner besonderen Schwierigkeit unterworfenen Rechnungen folgt:

$$U \operatorname{Lim} \frac{U_1 - U}{u_1 - u} - V \operatorname{Lim} \frac{V_1 - V}{u_1 - u}$$

14.
$$= C \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \frac{\frac{1}{a^2} \left\{ \pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} \right\}^2 + \frac{1}{b^2} \left\{ C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} \right\}^2}{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}}.$$

Nach gehöriger Substitution liefert uns daher die Gleichung 10 für die Coordinaten des Krümmungs-Mittelpunktes folgende Werthe:

$$\frac{X - u}{A \left\{ A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} \right\} - \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \frac{u}{a^2}}$$

$$= \frac{Y - v}{B \left\{ A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} \right\} - \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \frac{v}{b^2}}$$

15.
$$= \frac{Z - w}{C \left\{ A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} \right\} \mp \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \frac{1}{c}}$$

$$= \frac{\left\{ A \frac{v}{b^2} - B \frac{u}{a^2} \right\}^2 + \left\{ \pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} \right\}^2 + \left\{ C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} \right\}^2}{\left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left[\frac{1}{a^2} \left\{ \pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} \right\}^2 + \frac{1}{b^2} \left\{ C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} \right\}^2 \right]}$$

$$= \frac{\left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\} - \left\{ A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} \right\}^2}{\left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left[\frac{1}{a^2} \left\{ \pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} \right\}^2 + \frac{1}{b^2} \left\{ C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} \right\}^2 \right]}.$$

Ferner ist, wenn wir mit R den Krümmungsradius bezeichnen,

$$R^2 = (X - u)^2 + (Y - v)^2 + (Z - w)^2;$$

also, weil, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$U^2 + V^2 + W^2$$
$$= \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left[\left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\} - \left\{ A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} \right\}^2 \right]$$
$$= \left\{ A^2 + B^2 + C^2 \right\} \left[\left\{ A \frac{v}{b^2} - B \frac{u}{a^2} \right\}^2 + \left\{ \pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} \right\}^2 + \left\{ C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} \right\}^2 \right]$$

ist:

$$16.\quad R = \frac{\left[\left\{A\frac{v}{b^2} - B\frac{u}{a^2}\right\}^2 + \left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\left[\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2\right]}$$

$$= \frac{\left[\left\{A^2+B^2+C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\} - \left\{A\frac{u}{a^2} + B\frac{v}{b^2} \pm C\frac{1}{c}\right\}^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\left[\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2\right]}.$$

Erwähnen wollen wir noch, daß man den im Obigen häufig wiederkehrenden Ausdruck

$$\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2$$

leicht auf die Form

$$\frac{A^2a^2 + B^2b^2 \mp 2Cc\left\{Au + Bv + Cw\right\}}{a^2b^2c^2}$$

bringt, welche in obige Formeln eingeführt werden kann, wenn es in gewissen Fällen vortheilhaft sein sollte.

Wir wollen nun die **Normalschnitte** betrachten.

Soll die durch Gleichung 3 charakterisirte Ebene einen Normalschnitt bestimmen, also auf der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) (Gleichung 2) senkrecht stehen, so ist die analytische Bedingung hierfür:

$$A\frac{u}{a^2} + B\frac{v}{b^2} \pm C\frac{1}{c} = 0.$$

Daher ist nach 15 und 16 für die Normalschnitte:

$$17.\quad X - u = -\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\left\{A^2+B^2+C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2},$$

$$Y - v = -\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\left\{A^2+B^2+C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2},$$

$$Z - w = \mp\frac{1}{c}\cdot\frac{\left\{A^2+B^2+C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2};$$

$$R = \frac{\left\{A^2+B^2+C^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2}\left\{\pm B\frac{1}{c} - C\frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C\frac{u}{a^2} \mp A\frac{1}{c}\right\}^2};$$

woraus auf der Stelle folgt:

$$X - u = -\frac{u}{a^2} \cdot \frac{R}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad Y - v = -\frac{v}{b^2} \cdot \frac{R}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z - w = \mp \frac{1}{c} \cdot \frac{R}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Bezeichnen wir das vom Anfange der Coordinaten auf die Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) gefällte Perpendikel durch P, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \mp \frac{w}{c\,P};$$

daher auch

$$X - u = \pm \frac{u}{a^2} \cdot \frac{c}{w} \cdot PR, \quad Y - v = \pm \frac{v}{b^2} \cdot \frac{c}{w} \cdot PR, \quad Z - w = \frac{1}{w}\, PR.$$

Nehmen wir nun an, daß die Lage der Ebene des Normalschnittes (Gleichung 3) durch eine in der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) liegende grade Linie bestimmt werde, deren Gleichungen

$$19. \quad \frac{x-u}{\cos \vartheta} = \frac{y-v}{\cos \omega} = \frac{z-w}{\cos \pi}$$

sein mögen, so muß nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$20. \; A \cos \vartheta + B \cos \omega + C \cos \pi = 0, \quad 21. \; \frac{u}{a^2} \cos \vartheta + \frac{v}{b^2} \cos \omega \pm \frac{1}{c} \cos \pi = 0$$

sein. Nach Gleichung 17 ist

$$A \frac{u}{a^2} + B \frac{v}{b^2} \pm C \frac{1}{c} = 0,$$

woraus in Verbindung mit 20

$$A = F\left\{\frac{v}{b^2} \cos \pi \mp \frac{1}{c} \cos \omega\right\}, \; B = F\left\{\pm \frac{1}{c} \cos \vartheta - \frac{u}{a^2} \cos \pi\right\}, \; C = F\left\{\frac{u}{a^2} \cos \omega - \frac{v}{b^2} \cos \vartheta\right\}$$

folgt, wo F einen gewissen Factor bezeichnet.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 21 und

$$\cos \vartheta^2 + \cos \omega^2 + \cos \pi^2 = 1$$

ergiebt sich leicht:

$$A^2 + B^2 + C^2 = F^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\},$$

$$\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2} = F \cos \vartheta \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\},$$

$$C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c} = F \cos \omega \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\},$$

$$\frac{1}{a^2}\left\{\pm B \frac{1}{c} - C \frac{v}{b^2}\right\}^2 + \frac{1}{b^2}\left\{C \frac{u}{a^2} \mp A \frac{1}{c}\right\}^2 = F^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^2 \left\{\frac{\cos \vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2}\right\};$$

daher ist nach 18 für den Normalschnitt:

$$22.\quad X-u=-\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}},\quad Y-v=-\frac{\frac{v}{b^2}}{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}},\quad Z-w=\mp\frac{\frac{1}{c}}{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}};$$

$$R=\frac{\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}}.$$

Für einen zweiten Normalschnitt, der durch die grade in der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) liegende Linie

$$23.\quad \frac{x-u}{\cos\vartheta_1}=\frac{y-v}{\cos\omega_1}=\frac{z-w}{\cos\pi_1}$$

bestimmt sein mag, ergeben sich folgende Formeln, in denen die Bedeutung der Zeichen von selbst einleuchten wird:

$$24.\quad X_1-u=-\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}},\quad Y_1-v=-\frac{\frac{v}{b^2}}{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}},\quad Z_1-w=\mp\frac{\frac{1}{c}}{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}};$$

$$R_1=\frac{\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}}.$$

Nehmen wir nun an, daß die beiden Normalschnitte auf einander senkrecht stehen, daß also die beiden in der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) liegenden graden Linien, welche die Lage der Schnitte bestimmen, einen rechten Winkel mit einander bilden, so muß nach den Lehren der analytischen Geometrie folgende Gleichung stattfinden:

$$25.\quad \cos\vartheta\cos\vartheta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\pi\cos\pi_1=0;$$

woraus in Verbindung mit der Gleichung

$$26.\quad \frac{u}{a^2}\cos\vartheta_1+\frac{v}{b^2}\cos\omega_1\pm\frac{1}{c}\cos\pi_1=0\quad\text{(vergl. 21)}$$

folgt:

$$27.\quad \cos\vartheta_1=F_1\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\pi\right\},$$

$$\cos\omega_1=F_1\left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\vartheta\right\},$$

$$\cos\pi_1=F_1\left\{\frac{v}{b^2}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\omega\right\},$$

wo F_1 wiederum einen gewissen Factor bezeichnet.

Quadriren wir diese Gleichungen und addiren sie dann, so folgt mit Hülfe der Gleichung 21 und der bekannten Gleichung

$$\cos\vartheta^2 + \cos\omega^2 + \cos\pi^2 = 1$$

auf der Stelle

$$28. \quad F_1{}^2 = \frac{1}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}.$$

Eliminiren wir nun aus den Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\vartheta + \frac{v}{b^2}\cos\omega \pm \frac{1}{c}\cos\pi = 0, \quad \cos\vartheta^2 + \cos\omega^2 + \cos\pi^2 = 1$$

der Reihe nach die Größen $\cos\vartheta$ und $\cos\omega$, so erhalten wir:

$$\frac{u^2}{a^4}\left\{\cos\omega^2 + \cos\pi^2\right\} + \left\{\frac{v}{b^2}\cos\omega \pm \frac{1}{c}\cos\pi\right\}^2 = \frac{u^2}{a^4},$$

$$\frac{v^2}{b^4}\left\{\cos\pi^2 + \cos\vartheta^2\right\} + \left\{\pm\frac{1}{c}\cos\pi + \frac{u}{a^2}\cos\vartheta\right\}^2 = \frac{v^2}{b^4};$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}\left\{\cos\omega^2 + \cos\pi^2\right\} - \left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega - \frac{v}{b^2}\cos\pi\right\}^2 = \frac{u^2}{a^4},$$

$$\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}\left\{\cos\pi^2 + \cos\vartheta^2\right\} - \left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi \mp \frac{1}{c}\cos\vartheta\right\}^2 = \frac{v^2}{b^4};$$

folglich

$$\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega - \frac{v}{b^2}\cos\pi\right\}^2 = \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}\sin\vartheta^2 - \frac{u^2}{a^4},$$

$$\left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi \mp \frac{1}{c}\cos\vartheta\right\}^2 = \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}\sin\omega^2 - \frac{v^2}{b^4};$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen 27 und 28

$$29. \quad \frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2} + \frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2} = \frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}.$$

Substituiren wir diesen Werth in 24, so gehen diese Gleichungen über in:

$$30. \quad X_1 - u = -\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}},$$

$$Y_1 - v = -\frac{\frac{v}{b^2}}{\frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}},$$

$$Z_1 - w = \mp \frac{\frac{1}{c}}{\frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}};$$

$$R_1 = \frac{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Aus den obigen Formeln ergiebt sich nun auf der Stelle:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{1}{R_1} = \frac{\frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

daher ist

$$31. \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

woraus wir mit Hülfe der Gleichung

$$c^2\left\{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right\} = \mp 2cw$$

nach leichter Rechnung folgende merkwürdige und elegante Formel erhalten:

$$32. \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{a^2 + b^2 \mp 2cw}{a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

aus welcher auf der Stelle erhellt, daß die Summe der reciproken Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrecht stehender Normalschnitte für jeden Punkt des Paraboloids constant ist.

Ferner ist

$$33. \quad \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = \frac{\frac{\cos 2\vartheta}{a^2} + \frac{\cos 2\omega}{b^2}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Bemerken wollen wir noch, daß der häufig auftretende Ausdruck

$$\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2} + \frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2} = \frac{\sin\vartheta^2}{a^2} + \frac{\sin\omega^2}{b^2} - \frac{\frac{u^2}{a^6} + \frac{v^2}{b^6}}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}$$

mit Hülfe der Gleichungen 27, 28 und 1 leicht in die Form

$$\frac{a^2 \cos \vartheta^2 + b^2 \cos \omega^2 \mp 2c \cos \pi \left\{ u \cos \vartheta + v \cos \omega + w \cos \pi \right\}}{a^2 b^2 c^2 \left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\}}$$

umgeändert werden kann.

Wir wollen nun die **Normalschnitte der größten und kleinsten Krümmung**, d. h. die Normalschnitte zu bestimmen suchen, deren Krümmungsradius resp. ein Maximum oder Minimum ist.

Für einen beliebigen Normalschnitt ist nach 22

$$R = \frac{\left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{\cos \vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2}},$$

wo für jeden Punkt des Paraboloids der Zähler des Bruches constant, der Nenner dagegen veränderlich ist. Der Krümmungsradius wird also ein Maximum oder Minimum sein, je nachdem die Größe $\frac{\cos \vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2}$ ein Minimum oder Maximum ist. Wir werden daher im folgenden nur die Bedingungen festzustellen haben, unter denen die Größe $\frac{\cos \vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2}$ ein Maximum oder Minimum ist.

Zwischen den Winkeln ϑ, ω und π bestehen die beiden Gleichungen

35. $\frac{u}{a^2} \cos \vartheta + \frac{v}{b^2} \cos \omega \pm \frac{1}{c} \cos \pi = 0$ und 36. $\cos \vartheta^2 + \cos \omega^2 + \cos \pi^2 = 1$,

so daß also nur einer der drei Winkel, etwa ϑ, als unabhängig variabel betrachtet werden kann.

Soll die Größe

$$\frac{\cos \vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos \omega^2}{b^2}$$

ein Maximum oder Minimum sein, so muß der erste Differentialquotient, d. i.

37. $$-\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{a^2} + \frac{\cos \omega}{b^2} \frac{d \cos \omega}{d \vartheta} = 0 \text{ sein.}$$

Die Gleichungen 35 und 36 differentirt geben:

$$-\frac{u}{a^2} \sin \vartheta + \frac{v}{b^2} \frac{d \cos \omega}{d \vartheta} \pm \frac{1}{c} \frac{d \cos \pi}{d \vartheta} = 0 \text{ und}$$

$$-\cos \vartheta \sin \vartheta + \cos \omega \frac{d \cos \omega}{d \vartheta} + \cos \pi \frac{d \cos \pi}{d \vartheta} = 0;$$

woraus folgt:

$$\frac{d \cos \omega}{d \vartheta} = -\sin \vartheta \cdot \frac{\pm \frac{1}{c} \cos \vartheta - \frac{u}{a^2} \cos \pi}{\frac{v}{b^2} \cos \pi \mp \frac{1}{c} \cos \omega}, \quad \frac{d \cos \pi}{d \vartheta} = -\sin \vartheta \cdot \frac{\frac{u}{a^2} \cdot \cos \omega - \frac{v}{b^2} \cos \vartheta}{\frac{v}{b^2} \cos \pi \mp \frac{1}{c} \cos \omega}.$$

Führen wir für $\frac{d \cos \omega}{d \vartheta}$ den gefundenen Werth in die Gleichung 37 ein, so geht diese über in

38. $$\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega \cos \pi - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos \pi \cos \vartheta \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta \cos \omega = 0$$

oder in

$$\frac{\frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}{\cos\vartheta}-\frac{\frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}}{\cos\omega}\pm\frac{\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}}{\cos\pi}=0.$$

Somit haben wir zur Bestimmung der drei Winkel ϑ, ω, π die drei Gleichungen 35, 36 und 38, mit deren Lösung wir uns später beschäftigen werden.

Für einen zweiten Normalschnitt, welcher auf dem durch die Winkel ϑ, ω, π bestimmten senkrecht steht, haben wir die Gleichungen:

$$39.\quad \frac{u}{a^2}\cos\vartheta_1+\frac{v}{b^2}\cos\omega_1\pm\frac{1}{c}\cos\pi_1=0,\qquad 40.\quad \cos\vartheta_1{}^2+\cos\omega_1{}^2+\cos\pi_1{}^2=0,$$

$$41.\quad \cos\vartheta\cos\vartheta_1+\cos\omega\cos\omega_1+\cos\pi\cos\pi_1=0.$$

Man sieht gleich, daß die beiden ersten Gleichungen zwei Bedingungen für das Maximum oder Minimum sind, und es fragt sich nun, wie es mit der dritten Bedingung steht. Diese ist nach 38

$$42.\quad \frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cos\omega_1\cos\pi_1-\frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cos\pi_1\cos\vartheta_1\pm\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\cos\vartheta_1\cos\omega_1=0.$$

Ob diese Bedingung erfüllt ist, wollen wir jetzt untersuchen.

Aus den Gleichungen 39 und 41 folgt, wie bereits früher bewiesen ist:

$$\cos\vartheta_1=F_1\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\pi\right\},\quad \cos\omega_1=F_1\left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\vartheta\right\},$$

$$\cos\pi_1=F_1\left\{\frac{v}{b^2}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\omega\right\}.$$

Durch Substitution geht daher die zu untersuchende Größe über in die Form

$$F_1{}^2\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\vartheta\right\}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\omega\right\}\\ -\frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\omega\right\}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\pi\right\}\\ \pm\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\omega-\frac{v}{b^2}\cos\pi\right\}\left\{\frac{u}{a^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\vartheta\right\}\end{array}\right\},$$

woraus wir für die eingeklammerte Größe zunächst folgenden Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned}&\mp\frac{u}{a^2}\cdot\frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{c}\left[\frac{\cos\vartheta^2}{b^2}-\frac{\cos\omega^2}{a^2}+\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\cos\pi^2\right]\\ &+\frac{u}{a^2}\cos\omega\cos\pi\left[-\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{1}{b^2}-\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\right]\\ &+\frac{v}{b^2}\cos\pi\cos\vartheta\left[\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\right]\\ &\pm\frac{1}{c}\cos\vartheta\cos\omega\left[\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{1}{b^2}-\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\right],\end{aligned}$$

welchen wir mit Hülfe der Gleichungen

$$\cos\vartheta^2=1-\left\{\cos\omega^2+\cos\pi^2\right\},\ \cos\omega^2=1-\left\{\cos\pi^2+\cos\vartheta^2\right\},$$

$$\cos\pi^2=1-\left\{\cos\vartheta^2+\cos\omega^2\right\}$$

auf der Stelle überführen in:

$$\pm \frac{u}{a^2} \cdot \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c} \{ \cos \omega^2 + \cos \pi^2 \{ \mp \frac{u}{a^2} \cdot \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a^2} \} \cos \pi^2 + \cos \vartheta^2 \}$$

$$\pm \frac{u}{a^2} \cdot \frac{v}{b^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{c} \{ \cos \vartheta^2 + \cos \omega^2 \{$$

$$+ \frac{u}{a^2} \cos \omega \cos \pi \left[- \frac{u^2}{a^4} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{v^2}{b^4} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \right]$$

$$+ \frac{v}{b^2} \cos \pi \cos \vartheta \left[\frac{u^2}{a^4} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{b^4} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \right]$$

$$\pm \frac{1}{c} \cos \vartheta \cos \omega \left[\frac{u^2}{a^4} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{v^2}{b^4} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \right].$$

Diesen Ausdruck bringen wir durch weitere Entwickelung leicht auf die Form:

$$\Big[\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{v}{b^2} \cos \pi \pm \frac{1}{c} \cos \omega \right\} - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \left\{ \pm \frac{1}{c} \cos \vartheta + \frac{u}{a^2} \cos \pi \right\} \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \times$$

$$\left\{ \frac{u}{a^2} \cos \omega + \frac{v}{b^2} \cos \vartheta \right\} \Big] \left\{ \frac{u}{a^2} \cos \vartheta + \frac{v}{b^2} \cos \omega + \frac{1}{c} \cos \pi \right\} - \left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\} \times$$

$$\left[\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega \cos \pi - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos \pi \cos \vartheta \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta \cos \omega \right],$$

woraus sich, weil

$$\frac{u}{a^2} \cos \vartheta + \frac{v}{b^2} \cos \omega \pm \frac{1}{c} \cos \pi = 0,$$

$$\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega \cos \pi - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos \pi \cos \vartheta \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta \cos \omega = 0$$

ist, auf der Stelle ergiebt, daß der Ausdruck verschwindet, folglich auch die in 42 angegebene Bedingung

$$\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega_1 \cos \pi_1 - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \pi_1 \cos \vartheta_1 \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta_1 \cos \pi_1 = 0$$

erfüllt ist.

Hieraus ergiebt sich also, daß die Gleichungen

35. $\frac{u}{a^2} \cos \vartheta + \frac{v}{b^2} \cos \omega \pm \frac{1}{c} \cos \pi = 0,$ 36. $\cos \vartheta^2 + \cos \omega^2 + \cos \pi^2 = 1,$

38. $\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega \cos \pi - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos \pi \cos \vartheta \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta \cos \pi = 0,$

39. $\frac{u}{a^2} \cos \vartheta_1 + \frac{v}{b^2} \cos \omega_1 \pm \frac{1}{c} \cos \pi_1 = 0,$ 40. $\cos \vartheta_1{}^2 + \cos \omega_1{}^2 + \cos \pi_1{}^2 = 1,$

42. $\frac{u}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cos \omega_1 \cos \pi_1 - \frac{v}{b^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cos \pi_1 \cos \vartheta_1 \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right\} \cos \vartheta_1 \cos \pi_1 = 0$

immer zusammen bestehen. Bietet also ein Normalschnitt in Bezug auf den Krümmungsradius den Fall eines Maximums oder Minimums dar, so gilt dies stets auch für den darauf senkrecht stehenden Normalschnitt. Diese beiden Normalschnitte, deren Krümmungsradien resp. Maxima oder Minima sind, wollen wir nach George Salmon Hauptschnitte und deren Krümmungsradien Hauptradien nennen.

Um die Lage der Hauptschnitte zu bestimmen, werden wir jetzt die Gleichungen

$$\frac{u}{a^2}\cos\vartheta + \frac{v}{b^2}\cos\omega \pm \frac{1}{c}\cos\pi = 0,\quad \cos\vartheta^2 + \cos\omega^2 + \cos\pi^2 + 1,$$

$$\frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cos\omega\cos\pi - \frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cos\pi\cos\vartheta \pm \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right\}\cos\vartheta\cos\pi = 0$$

in Bezug auf ϑ, ω und π als unbekannte Größen auflösen, der Auflösung jedoch folgende algebraische Betrachtung vorausschicken.

Haben wir drei Gleichungen von der Form

$$a_1 + b_1 x + c_1 y = 0,\quad a_2 + b_2 x + c_2 y = 0,\quad a_3 + b_3 x + c_3 y = 0,$$

so ist, da man im Allgemeinen zwei Größen m und n so bestimmen kann, daß den beiden Gleichungen

$$a_1 = a_2 m + a_3 n,\quad b_1 = b_2 m + b_3 n$$

genügt wird, nach erfolgter Substitution:

$$a_2 m + a_3 n + \left\{b_2 m + b_3 n\right\} x + c_1 y = 0,\quad a_2 + b_2 x + c_2 y = 0,\quad a_3 + b_3 x + c_3 y = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$b_2 c_3 - c_2 b_3,\quad b_3 c_1 - c_3 (b_2 m + b_3 n),\quad (b_2 m + b_3 n) c_2 - c_1 b_2$$

und addiren sie dann zu einander, so ist, da die Coefficienten von x und y identisch 0 sind:

$$\left\{a_2 m + a_3 n\right\}\left\{b_2 c_3 - c_2 b_3\right\} + a_1\left[b_3 c_1 - c_3\left\{b_2 m + b_3 n\right\}\right] + a_2\left[\left\{b_2 m + b_3 n\right\}c_2 - c_1 b_2\right] = 0$$

oder, wenn wir nach m und n ordnen:

$$m\left\{b_2 a_3 - a_2 b_3\right\}c_2 + n\left\{b_2 a_3 - a_2 b_3\right\}c_3 = \left\{b_2 a_3 - a_2 b_3\right\}c_1.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch $\left\{b_2 a_3 - a_2 b_3\right\}$, was immer geschehen kann, wenn obige beiden Gleichungen befriedigt sind, indem dann diese Differenz nicht verschwindet, so ist

$$c_1 = c_2 m + c_3 n.$$

Hieraus sehen wir also, daß, wenn die Gleichungen

$$a_1 + b_1 x + c_1 y = 0,\quad a_2 + b_2 x + c_2 y = 0,\quad a_3 + b_3 x + c_3 y = 0$$

erfüllt sind, sich im Allgemeinen zwei Größen m und n so bestimmen lassen, daß den Gleichungen

$$a_1 = a_2 m + a_3 n,\quad b_1 = b_2 m + b_2 n,\quad c_1 = c_2 m + c_3 n$$

genügt wird.

Führen wir jetzt drei Hülfsgrößen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein und setzen

$$\mathfrak{x} = R\cos\vartheta,\quad \mathfrak{y} = R\cos\omega,\quad \mathfrak{z} = R\cos\pi,\quad \text{also}\quad \frac{\mathfrak{x}}{R} = \cos\vartheta,\quad \frac{\mathfrak{y}}{R} = \cos\omega,\quad \frac{\mathfrak{z}}{R} = \cos\pi,$$

so erhalten wir:

$$R^2\left\{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2}\right\} = \frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2},$$

oder, da nach dem Obigen $R\left\{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2}\right\} = \sqrt{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}$ ist,

$$43.\quad R\sqrt{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}} = \frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2}.$$

Zwischen den Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bestehen die Gleichungen

$$44.\quad \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2=R^2,\qquad 45.\quad \frac{u}{a^2}\cdot\mathfrak{x}+\frac{v}{b^2}\cdot\mathfrak{y}\pm\frac{1}{c}\cdot\mathfrak{z}=0,$$

woraus folgt, daß nur eine der drei Größen, etwa $\mathfrak{x}$, als unabhängig variabel betrachtet werden kann.

Differentiiren wir die drei letzten Gleichungen nach $\mathfrak{x}$ und beachten, daß $\frac{dR}{d\mathfrak{x}}=0$ die Bedingung des Maximums oder Minimums ist, so erhalten wir:

$$\frac{\mathfrak{x}}{a^2}+\frac{\mathfrak{y}}{b^2}\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}}=0,\quad \mathfrak{x}+\mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}+\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=0,\quad \frac{u}{a^2}+\frac{v}{b^2}\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\pm\frac{1}{c}\,\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathfrak{x}}=0.$$

Wenden wir auf diese drei Gleichungen obige algebraische Betrachtung an, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$46.\quad \frac{\mathfrak{x}}{a^2}=\mathfrak{x}\,M+\frac{u}{a^2}N,\quad \frac{\mathfrak{y}}{b^2}=\mathfrak{y}\,M+\frac{v}{b^2}N,\quad 0=\mathfrak{z}M\pm\frac{1}{c}N,$$

woraus, wenn wir sie der Reihe nach mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ multipliciren und dann zu einander addiren, auf der Stelle folgt:

$$47.\quad M=\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}.$$

Dividiren wir die Gleichungen 46 durch N und ordnen sie nach $\frac{\mathfrak{x}}{N}$, $\frac{\mathfrak{y}}{N}$, $\frac{\mathfrak{z}}{N}$, so ist:

$$\left\{\frac{1}{a^2}-M\right\}\frac{\mathfrak{x}}{N}=\frac{u}{a^2},\quad \left\{\frac{1}{b^2}-M\right\}\frac{\mathfrak{y}}{N}=\frac{v}{b^2},\quad -M\cdot\frac{\mathfrak{z}}{N}=\pm\frac{1}{c}.$$

Nehmen wir hierzu die Gleichung 45 und dividiren sie durch N,

$$\frac{u}{a^2}\cdot\frac{\mathfrak{x}}{N}+\frac{v}{b^2}\cdot\frac{\mathfrak{y}}{N}\pm\frac{1}{c}\cdot\frac{\mathfrak{z}}{N}=0,$$

so haben wir vier Gleichungen, aus denen sich die drei Größen $\frac{\mathfrak{x}}{N}$, $\frac{\mathfrak{y}}{N}$, $\frac{\mathfrak{z}}{N}$ vollständig eliminiren lassen, was zu einer bloß noch M als unbekannte Größe enthaltenden Gleichung führt. Führen wir diese Elimination aus, so erhalten wir:

$$0=\frac{u^2}{a^4}M\left\{\frac{1}{b^2}-M\right\}+\frac{v^2}{b^4}M\left\{\frac{1}{a^2}-M\right\}-\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{a^2}-M\right\}\left\{\frac{1}{b^2}-M\right\},$$

oder, wenn wir nach Potenzen von M ordnen:

$$0=\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}M^2-\left\{\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right\}M+\frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

Bezeichnen wir die beiden Werthe, welche M haben kann, durch M und M_1, so folgt aus der Theorie der Gleichungen:

$$M+M_1=\frac{\frac{u^2}{a^4}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{b^4}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right\}}{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}},$$

oder, wie man mit Hülfe der Gleichung $c^2\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}=\mp 2cw$ leicht findet,

48. $M + M_1 = \dfrac{a^2 + b^2 \mp 2cw}{a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}}$ und 49. $M.M_1 = \dfrac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}$.

Durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen erhält man mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander:

$$50.\quad M = \frac{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\pm) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}}}{2a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}},$$

$$M_1 = \frac{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\mp) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}}}{2a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4} + \dfrac{v^2}{b^4} + \dfrac{1}{c^2}\right\}}.$$

Bezeichnet nun M wieder die beiden durch M und M_1 bezeichneten Werthe dieser Größe, so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen

$$\left\{\frac{1}{a^2} - M\right\}\frac{\mathfrak{x}}{N} = \frac{u}{a^2},\ \left\{\frac{1}{b^2} - M\right\}\frac{\mathfrak{y}}{N} = \frac{v}{b^2},\ -M \cdot \frac{\mathfrak{z}}{N} = \pm\frac{1}{c}$$

für $\frac{\mathfrak{x}}{N}$, $\frac{\mathfrak{y}}{N}$, $\frac{\mathfrak{z}}{N}$ folgende Ausdrücke, wenn wir vorher setzen:

$$Q = -\frac{M\left\{1 - a^2M\right\}\left\{1 - b^2M\right\}}{a^2b^2},\quad Q_1 = -\frac{uM\left\{1 - b^2M\right\}}{a^2b^2},$$

$$Q_2 = -\frac{v \cdot M\left\{1 - a^2M\right\}}{a^2b^2},\quad Q_3 = \pm\frac{\left\{1 - a^2M\right\}\left\{1 - b^2M\right\}}{a^2b^2c}:$$

$$\frac{\mathfrak{x}}{N} = \frac{Q_1}{Q},\quad \frac{\mathfrak{y}}{N} = \frac{Q_2}{Q},\quad \frac{\mathfrak{z}}{N} = \frac{Q_3}{Q};\quad \text{also}\quad \mathfrak{x} = \frac{Q_1}{Q} \cdot N,\ \mathfrak{y} = \frac{Q_2}{Q} \cdot N,\ \mathfrak{z} = \frac{Q_3}{Q} \cdot N,$$

oder, da $\mathfrak{x} = R\cos\vartheta$, $\mathfrak{y} = R\cos\omega$, $\mathfrak{z} = R\cos\pi$ ist,

$$\cos\vartheta = \frac{Q_1}{Q} \cdot \frac{N}{R},\quad \cos\omega = \frac{Q_2}{Q} \cdot \frac{N}{R},\quad \cos\pi = \frac{Q_3}{Q} \cdot \frac{N}{R}.$$

Quadriren und addiren wir diese Gleichungen, so ist:

$$\frac{N^2}{R^2} = \frac{Q^2}{Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_3{}^2},$$

woraus mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander folgt:

$$\cos\vartheta = (\pm)\frac{Q_1}{\sqrt{Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_3{}^2}},\quad \cos\omega = (\pm)\frac{Q_2}{\sqrt{Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_3{}^2}},$$

$$\cos\pi = (\pm)\frac{Q_3}{\sqrt{Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_3{}^2}},$$

oder, da nach leichter Rechnung

$$Q_1{}^2 + Q_2{}^2 + Q_3{}^2 = \frac{\left\{1 - a^2M\right\}^2\left\{1 - b^2M\right\}^2}{a^4b^4} \cdot \left\{\left(\frac{uM}{1 - a^2M}\right)^2 + \left(\frac{vM}{1 - b^2M}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\right\}$$

sich ergiebt,

$$51. \quad \cos\vartheta = (\pm)\,\frac{\dfrac{uM}{1-a^2M}}{\left\{\left(\dfrac{uM}{1-a^2M}\right)^2+\left(\dfrac{vM}{1-b^2M}\right)^2+\dfrac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\omega = (\pm)\,\frac{\dfrac{vM}{1-b^2M}}{\left\{\left(\dfrac{uM}{1-a^2M}\right)^2+\left(\dfrac{vM}{1-b^2M}\right)^2+\dfrac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\pi = (\pm)\mp\,\frac{\dfrac{1}{c}}{\left\{\left(\dfrac{uM}{1-a^2M}\right)^2+\left(\dfrac{vM}{1-b^2M}\right)^2+\dfrac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Ob in diesen Formeln die obern oder untern (eingeklammerten) Zeichen genommen werden, ist ganz gleichgültig, da man dadurch doch nur ein und dieselbe durch den Punkt (uvw) gehende grade Linie erhält, wogegen aber sofort einleuchtet, daß wegen des doppelten Werthes der Größe M obige Formeln für $\cos\vartheta$, $\cos\omega$, $\cos\pi$ stets zwei Werthe liefern, welche, wie gleich bewiesen werden soll, beide reell sind.

Die für $\cos\vartheta$, $\cos\omega$ und $\cos\pi$ gefundenen Werthe sind offenbar reell, wenn M reell ist. Diese Größe ist aber reell, wenn $\left\{a^2+b^2\mp 2cw\right\}^2-4a^2b^2c^2\left\{\dfrac{u^2}{a^4}+\dfrac{v^2}{b^4}+\dfrac{1}{c^2}\right\}\geqq 0$ ist.

Setzen wir

$$\mp 2cw = c^2\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\},$$

so geht die Differenz zuerst über in

$$\left\{a^2+b^2+c^2\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\}^2-4a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}$$

und dann in

$$\left\{a^2+b^2\right\}^2+c^4\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}^2+2c^2\left\{a^2+b^2\right\}\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}-4a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right\}.$$

Nun ist aber:

$$\left\{a^2+b^2\right\}-4a^2b^2=\left\{a^2-b^2\right\}^2,$$

$$\left\{a^2-b^2\right\}^2+c^4\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}^2=\left\{a^2-b^2+c^2\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\}^2-2c^2\left(a^2-b^2\right)\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}$$
$$=\left\{a^2-b^2-c^2\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\}^2+2c^2\left(a^2-b^2\right)\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\},$$

$$2c^2\left(a^2+b^2\right)\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}-4a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right\}=2c^2\left(a^2-b^2\right)\left\{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right\};$$

daher erhalten wir nach erfolgter Substitution den Ausdruck

$$\left\{a^2-b^2+c^2\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\}^2-4c^2\left\{a^2-b^2\right\}\frac{v^2}{b^2}$$

oder

$$\left\{a^2-b^2-c^2\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right\}^2+4c^2\left\{a^2-b^2\right\}\frac{v^2}{a^2},$$

aus denen auf der Stelle erhellet, daß obige Differenz niemals negativ werden kann.

Es ist nun noch nöthig, den zweiten Differentialquotienten von $\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}=M$ zu entwickeln, mit Rücksicht darauf, daß der erste Differentialquotient dieser Größe verschwindet.

Aus den Gleichungen 37 und 38 ergiebt sich auf der Stelle

$$\frac{dM}{d\vartheta}=2\sin\vartheta\cdot\frac{\frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cos\omega\cos\pi-\frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cos\pi\cos\vartheta\pm\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right\}\cos\vartheta\cos\omega}{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega};$$

also ist

$$-\frac{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega}{2\sin\vartheta}\frac{dM}{d\vartheta}=\frac{\cos\vartheta}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega\right\}+\frac{\cos\omega}{b^2}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\pi\right\}.$$

Differentiiren wir die linke Seite der Gleichung, so erhalten wir:

$$-\frac{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega}{2\sin\vartheta}\frac{d^2M}{d^2\vartheta};$$

differentiiren wir die rechte Seite, so geht sie über in die Form:

$$-\frac{\sin\vartheta}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega\right\}+\frac{\cos\vartheta}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\frac{d\cos\pi}{d\vartheta}\mp\frac{1}{c}\frac{d\cos\omega}{d\vartheta}\right\}$$
$$+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{d\cos\omega}{d\vartheta}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\pi\right\}+\frac{\cos\omega}{b^2}\left\{\mp\frac{1}{c}\sin\vartheta-\frac{u}{a^2}\frac{d\cos\pi}{d\vartheta}\right\}.$$

Substituiren wir für $\frac{d\cos\omega}{d\vartheta}$ und $\frac{d\cos\pi}{d\vartheta}$ die oben gefundenen Werthe, so finden wir mit Hülfe von 35 leicht:

$$-\frac{\sin\vartheta}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega\right\}+\frac{1}{b^2}\frac{d\cos\omega}{d\vartheta}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\pi\right\}$$
$$=-\sin\vartheta\cdot\frac{\frac{1}{a^2}\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega\right\}^2+\frac{1}{b^2}\left\{\pm\frac{1}{c}\cos\vartheta-\frac{u}{a^2}\cos\pi\right\}}{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega}$$

und, wenn wir die Formeln 27 und 28 jetzt anwenden,

$$=-\sin\vartheta\left\{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}\right\}\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}}{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega};$$

$$\frac{v}{b^2}\cdot\frac{d\cos\pi}{d\vartheta}\mp\frac{1}{c}\,\frac{d\cos\omega}{d\vartheta}=\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}}{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega};$$

$$\mp\frac{1}{c}\sin\vartheta-\frac{u}{a^2}\,\frac{d\cos\pi}{d\vartheta}=\sin\vartheta\cos\omega\cdot\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}}{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega}.$$

Zur Bestimmung des zweiten Differentialquotienten erhalten wir demnach folgende Gleichung:

$$\frac{\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\pi\right\}^2}{2\sin\vartheta^2}\cdot\frac{d^2M}{d\vartheta^2}$$
$$=\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}\left[\left\{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}\right\}-\left\{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}\right\}\right],$$

woraus folgt

$$\frac{d^2M}{d\vartheta^2}=2\sin\vartheta^2\cdot\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}}{\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi\mp\frac{1}{c}\cos\omega\right\}^2}\left[\left\{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}\right\}-\left\{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}\right\}\right].$$

Wie aus allem Vorhergehenden unzweideutig erhellet, ist der zweite Differentialquotient von $\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}$ oder M, also

$$\frac{d^2M_1}{d\vartheta_1{}^2}=2\sin\vartheta_1{}^2\cdot\frac{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}}{\left\{\frac{v}{b^2}\cos\pi_1\mp\frac{1}{c}\cos\omega_1\right\}^2}\left[\left\{\frac{\cos\vartheta^2}{a^2}+\frac{\cos\omega^2}{b^2}\right\}-\left\{\frac{\cos\vartheta_1{}^2}{a^2}+\frac{\cos\omega_1{}^2}{b^2}\right\}\right].$$

Aus den beiden letzten Gleichungen sieht man, daß $\frac{d^2M}{d\vartheta^2}$ und $\frac{d^2M_1}{d\vartheta_1{}^2}$ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, daß also die eine von den beiden Größen M und M_1 und also auch von den beiden Größen R_1 und R ein Maximum, die andere ein Minimum ist.

Nach 22 und 24 ist

$$\frac{1}{R}=\frac{M}{\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}},\qquad\frac{1}{R_1}=\frac{M_1}{\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

substituiren wir für M und M_1 die gefundenen Werthe, so erhalten wir zur Bestimmung der Hauptradien folgende merkwürdige Formeln, in denen die Vorzeichen auf einander zu beziehen sind:

$$52.\quad\frac{2}{R}=\frac{a^2+b^2\mp2cw\,(\pm)\sqrt{\left\{a^2+b^2\mp2cw\right\}^2-4a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}}}{a^2b^2c^2\left\{\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{2}{R_1} = \frac{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\mp) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}}{a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{M + M_1}{\left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{1}{RR_1} = \frac{MM_1}{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}}.$$

$$R + R_1 = \frac{M + M_1}{MM_1} \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\};$$

oder, wenn wir für $M + M_1$ und MM_1 die unter 48 und 49 angegebenen Werthe einsetzen:

$$53.\quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{a^2 + b^2 \mp 2cw}{a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{1}{RR_1} = \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^2,$$

$$R + R_1 = \left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\} \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

oder, wenn wir das Perpendikel P auch hier einführen:

$$54.\quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{P^3}{w^3}\, c \cdot \frac{\mp(a^2 + b^2) + 2cw}{a^2b^2}, \qquad \frac{1}{RR_1} = \frac{c^2}{a^2b^2} \cdot \frac{P^4}{w^4},$$

$$R + R_1 = \frac{w}{c} \cdot \frac{\mp(a^2 + b^2) + 2cw}{P}.$$

Für die Coordinaten der Krümmungsmittelpunkte der Hauptschnitte (siehe 22) erhalten wir endlich folgende Formeln, in welchen die oberen Zeichen den Mittelpunkt des einen, die untern den des andern Schnittes bestimmen:

$$55.\quad X - u = -2 \cdot \frac{u\,b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\pm) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}},$$

$$Y - v = -2 \cdot \frac{v\,c^2a^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\pm) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}},$$

$$Z - w = \mp 2 \cdot \frac{a^2b^2c \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}{a^2 + b^2 \mp 2cw\ (\pm) \sqrt{\left\{a^2 + b^2 \mp 2cw\right\}^2 - 4a^2b^2c^2 \left\{\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right\}}}.$$

Zuletzt wollen wir noch die Werthe zu ermitteln suchen, welche die Hauptradien und die Winkel ϑ, ω, π annehmen, wenn der Punkt (uvw) in den Durchschnitt der Coordinaten-Ebenen mit dem Paraboloid hineinfällt.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Winkel ϑ, ω, π sind:

35. $\frac{u}{a^2}\cos\vartheta + \frac{v}{b^2}\cos\omega \pm \frac{1}{c}\cos\pi = 0,$ 36. $\cos\vartheta^2 + \cos\omega^2 + \cos\pi^2 = 1,$

38. $\frac{u}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cos\omega\cos\pi - \frac{v}{b^2}\cdot\frac{1}{a^2}\cos\pi\cos\vartheta \pm \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right\}\cos\vartheta\cos\omega = 0.$

Setzen wir zuerst $u = 0,$

so ist die Gleichung 38 befriedigt, wenn

entweder $\cos\vartheta = 0$ oder $cv\cos\pi \pm \left\{a^2 - b^2\right\}\cos\omega = 0$ ist.

Ist $\cos\vartheta = 0,$

so folgt aus 35 und 36

$$\cos\omega = (\pm)\frac{b^2}{\sqrt{b^4 + c^2v^2}}, \qquad \cos\pi = (\pm)\mp\frac{cv}{\sqrt{b^4 + c^2v^2}},$$

also

$$\frac{\cos\vartheta^2}{a^2} + \frac{\cos\omega^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^4 + c^2v^2} \quad \text{und} \quad R = \frac{\left\{b^4 + c^2v^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{b^4 c};$$

ist aber

$$cv\cos\pi \pm \left\{a^2 - b^2\right\}\cos\omega = 0,$$

und bezeichnen ϑ_1, ω_1, π_1; R_1 die Werthe, welche in diesem Falle die Winkel ϑ, ω, π und der Hauptradius R annehmen, so folgt aus der letzten Gleichung in Verbindung mit 35 auf der Stelle:

$$\left\{(a^2 - b^2)\,b^2 - c^2v^2\right\}\cos\omega_1 = 0 \text{ und hieraus } \cos\omega_1 = 0,$$

daher nach 35 $\cos\pi_1 = 0$, und nach 36 $\cos\vartheta_1 = (\pm)\,1;$

folglich ist

$$\frac{\cos\vartheta_1^{\,2}}{a^2} + \frac{\cos\omega_1^{\,2}}{b^2} = \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad R_1 = a^2\cdot\frac{\left\{b^4 + c^2v^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{b^2c}.$$

Setzen wir nun $v = 0$, so erhalten wir in ganz analoger Weise:

$$\cos\vartheta = (\pm)\frac{a^2}{\sqrt{a^4 + c^2u^2}}, \qquad \cos\omega = 0, \qquad \cos\pi = (\pm)\mp\frac{cu}{\sqrt{a^4 + c^2u^2}},$$

$$R = \frac{\left\{a^4 + c^2u^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4c};$$

$$\cos\vartheta_1 = 0, \quad \cos\omega_1 = (\pm)\,1, \quad \cos\pi_1 = 0.$$

$$R_1 = b^2\cdot\frac{\left\{a^4 + c^2u^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{a^2c}.$$

Setzen wir drittens $w = 0$ und beachten, daß wegen der Gleichung

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 \pm \frac{2w}{c} = 0$$

gleichzeitig $u = 0$ und $v = 0$ sein muß, so wird:

$$\cos \vartheta = (\pm)\, 1, \quad \cos \omega = 0, \quad \cos \pi = 0,$$

$$R = \frac{a^2}{c};$$

$$\cos \vartheta_1 = 0, \quad \cos \omega_1 = (\pm)\, 1, \quad \cos \pi_1 = 0,$$

$$R_1 = \frac{b^2}{c}.$$

Da die Gleichung der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte ($u = 0$, $v = 0$, $w = 0$)

$$z = 0$$

ist, also die Berührungsebene mit der Ebene der xy und demnach die Normale in diesem Punkte mit der Axe der z zusammenfällt, so ergiebt sich aus dem Obigen folgender Satz:

Wenn der Punkt (uvw) im Durchschnitt der Ebenen der xz und der yz mit dem elliptischen Paraboloid gelegen ist, so ist die eine von den beiden in der Berührungsebene des Paraboloids im Punkte (uvw) gelegenen Linien, durch welche die Hauptschnitte des Paraboloids für jenen Punkt bestimmt werden, stets der dritten Coordinatenaxe parallel, die andere steht auf dieser Axe senkrecht; fällt aber der Punkt (uvw) in den Anfang der Coordinaten, so bilden die Curven, in denen das Paraboloid von den Coordinatenebenen geschnitten wird, die Hauptschnitte des Paraboloids.

Das elliptische Rotations-Paraboloid.

Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des elliptischen Paraboloids $a = b$, so erhalten wir die Gleichung eines Paraboloids, welches durch Rotation einer Parabel um die z Axe entstanden ist.

Ist $a = b$, so wird

$$\left\{ a^2 + b^2 \mp 2cw \right\}^2 - 4\, a^2 b^2 c^2 \left\{ \frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} + \frac{1}{c^2} \right\} = \left\{ c^2 \cdot \frac{u^2 + v^2}{a^2} \right\}^2$$

und demnach

$$M = \frac{1}{a^2}, \qquad M_1 = \frac{1}{a^2 c^2 \left\{ \frac{u^2 + v^2}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right\}};$$

also ist

$$\cos \vartheta = \frac{\infty}{\infty}, \quad \cos \omega = \frac{\infty}{\infty}, \quad \cos \pi = 0;$$

$$\cos \vartheta_1 = (\pm) \frac{a^2 u}{\sqrt{\left\{ u^2 + v^2 \right\} \left\{ a^4 + (u^2 + v^2)\, c^2 \right\}}},$$

$$\cos \omega_1 = (\pm) \frac{a^2 v}{\sqrt{\left\{ u^2 + v^2 \right\} \left\{ a^4 + (u^2 + v^2)\, c^2 \right\}}},$$

$$\cos \pi_1 = (\pm) \frac{2 a^2 w}{\sqrt{\left\{ u^2 + v^2 \right\} \left\{ a^4 + (u^2 + v^2)\, c^2 \right\}}};$$

oder

$$\cos \vartheta_1 = (\pm) \frac{u}{c\sqrt{(u^2+v^2)\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}}},$$

$$\cos \omega_1 = (\pm) \frac{v}{c\sqrt{(u^2+v^2)\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}}},$$

$$\cos \pi_1 = (\pm) \frac{2w \cdot}{c\sqrt{(u^2+v^2)\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}}};$$

oder auch, da, wie man leicht findet,

$$c\sqrt{(u^2+v^2)\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}} = \sqrt{u^2+v^2+4w^2}$$

ist,

$$\cos \vartheta_1 = (\pm) \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+4w^2}}, \qquad \cos \omega_1 = (\pm) \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+4w^2}},$$

$$\cos \pi_1 = (\pm) \frac{2w}{\sqrt{u^2+v^2+4w^2}}.$$

Um die Werthe von $\cos \vartheta = \frac{\infty}{\infty}$ und $\cos \omega = \frac{\infty}{\infty}$ in diesem speciellen Falle zu bestimmen, setzen wir in den Gleichungen

$$35.\quad \frac{u}{a^2}\cos\vartheta + \frac{v}{a^2}\cos\omega \pm \frac{1}{c}\cos\pi = 0, \qquad 36.\quad \cos\vartheta^2 + \cos\omega^2 + \cos\pi^2 = 1,$$

$$38.\quad \left\{ u\cos\omega - v\cos\vartheta \right\} \cos\pi = 0$$

$\cos\pi = 0$, worauf wir zur Bestimmung von ϑ und ω folgende Gleichungen erhalten:

$$\cos\vartheta = (\pm)\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad \cos\omega = (\mp)\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Aus den obigen Formeln folgt:

$$\frac{\cos\vartheta^2+\cos\omega^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{\cos{\vartheta_1}^2+\cos{\omega_1}^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^4+\left\{u^2+v^2\right\}c^2};$$

daher ist:

$$R = a^2 \cdot \left\{\frac{u^2+v^2}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left\{a^4+(u^2+v^2)c^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{c},$$

$$R_1 = a^2c^2\left\{\frac{u^2+v^2}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{\left\{a^4+(u^2+v^2)c^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{a^4c};$$

also

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=2\cdot\frac{a^2\mp cw}{a^4\,c^2\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

$$RR_1=a^4c^2\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^2=\frac{\left\{a^4+(u^2+v^2)\,c^2\right\}^2}{a^4c^2}=\frac{\left\{a^2\mp 2cw\right\}^2}{c^2},$$

$$R+R_1=2\cdot(a^2\mp 2cw)\left\{\frac{u^2+v^2}{a^4}+\frac{1}{c^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ax. Willert.