Abgekürzte Rechnung mit Dezimalzahlen.

Der verstorbene Professor Dr. Schwarz, der frühere Rektor unsrer Anstalt, hat im Jahre 1882 eine Programmarbeit geschrieben:

„Die Theorie der Rechnung mit abgekürzten Dezimalbrüchen.“

Über denselben Gegenstand hat derselbe Verfasser schon früher in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht, herausgegeben von Hoffmann 1874, eine Abhandlung geliefert. Der Grund der jetzigen Arbeit ist folgender:

In den erwähnten Abhandlungen ist das Hauptgewicht auf scharfe Bestimmung der Fehlergrenze gelegt, nur etwaige falsche Anwendung der abgekürzten Rechnung vermeiden zu lassen. In Folgendem dagegen will ich mich bemühen zu zeigen, wie man auch bei zusammengesetzten Aufgaben durch vorhergehende Einrichtung der Rechnung ein genügendes Resultat gewinnt, ohne jedesmal an die Fehlerbestimmung denken zu müssen. Will man das Resultat auch in der letzten verlangten Stelle ganz genau haben, so darf man nur eine Stelle mehr berechnen und schliefslich diese Stelle wegstreichen.

Bei streng wissenschaftlichen Aufgaben wird man freilich eine genaue Untersuchung des begangenen Fehlers nicht vermeiden können; bei den meisten praktischen Aufgaben jedoch ist diese Untersuchung entbehrlich und erschwert nur für mathematisch weniger Vorgebildete die Möglichkeit, durch abgekürzte Rechnung das gewünschte Resultat zu gewinnen.

Seitdem die Mafse, Gewichte und Münzen nach dem Dezimalsystem eingeteilt sind, ist für jedermann die Kenntnis der gewöhnlichen Rechnung mit Dezimalbrüchen unentbehrlich, die Kenntnis der abgekürzten Rechnung mit Dezimalzahlen wenigstens wünschenswert.

Die Bildung und Bedeutung einer Dezimalzahl möge durch ein Beispiel veranschaulicht werden.

Es ist:

$$3745,10296 = 3\,.\,1000 + 7\,.\,100 + 4\,.\,10 + 5\,. + \tfrac{1}{10} + \tfrac{0}{100} + \tfrac{2}{1000} + \tfrac{9}{10000} + \tfrac{6}{100000}$$

Jede Ziffer der Dezimalzahl ist an ihrer Stelle zehnmal so viel wert, als wenn sie eine Stelle weiter rechts stände. Die Zehntel werden von den Einern durch das Komma getrennt.

Die Ziffern rechts vom Komma heifsen Dezimalstellen. Aus der in dieser Gleichung enthaltenen Definition der Dezimalzahl folgen nun als Regeln für die gewöhnliche Rechnung mit Dezimalzahlen:

Eine Dezimalzahl wird mit 10, 100, 1000 . . . multipliciert oder dividiert, indem man das Komma um 1, 2, 3 . . . Stellen nach rechts resp. nach links rückt. Wenn es beim Multiplicieren rechts, beim Dividieren links an Dezimalstellen fehlt, so werden diese durch Nullen ergänzt. An die Stelle der etwa fehlenden Ganzen wird ebenfalls eine Null gesetzt.

Dezimalzahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man sie so unter einander schreibt, dafs Komma unter Komma, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner . . . . . Zehntel unter Zehntel . . . . . zu stehen kommen, und dann die Addition resp. Subtraktion wie bei mehrziffrigen ganzen Zahlen ausführt. Fehlen in einigen Summanden rechts Stellen, so denkt man sie für die Rechnung durch Nullen ersetzt. Im Resultate wird dann das Komma an die durch die Summanden vorgeschriebene Stelle gesetzt

Dezimalzahlen werden mit einander multipliciert wie ganze Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma; das Produkt erhält dann soviel Stellen rechts vom Komma, wie die Faktoren zusammen haben.

Die Multiplikation fängt man in Rücksicht auf die spätere abgekürzte Rechnung am besten mit der höchsten Stelle des Multiplikators an und rückt dann nach rechts aus.

Wer bei der gewöhnlichen Multiplikation gewohnt ist, mit der kleinsten Stelle des Multiplikators zu beginnen und dann nach links auszurücken, mufs die andere Art der Multiplikation auch einüben.

Für die Division von Dezimalbrüchen gilt folgende Regel: Man rücke im Divisor das Komma ans Ende, im Dividendus eben so viele Stellen wie im Divisor nach rechts, dividiere dann wie bei ganzen Zahlen und stelle im Quotienten das Komma an die durch den Dividendus vorgeschriebene Stelle. Nach Analogie der Multiplikationsregel kann man die Regel für die Division folgendermafsen aussprechen: Dezimalzahlen werden durch einander dividiert wie ganze Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma. Der Quotient erhält dann so viele Stellen rechts vom Komma, wie der Dividendus hat, vermindert um die Zahl der Dezimalstellen des Divisors. Um eine gewünschte Zahl von Dezimalstellen im Quotienten zu erhalten, mufs man an den Dividendus ev. die nötigen Nullen anhängen. Ist die Zahl der Ganzen vor dem Komma des Divisors gröfser als die des Dividendus, so hat man vor den erhaltenen Quotienten die nötige Zahl von Nullen zu setzen.

Beispiele für die gewöhnliche Rechnung mit Dezimalzahlen:

Addition	Subtraktion		Multiplikation	Division
23,04	126,46	69,3 m	12,06 . 9,7032	7,909 : 2,343 auf 3 Stellen
267,306	87,5	7,576 m	10854	2,343 | 7,909000 | $3,375_6$
0,0042	38,96	61,724 m	8442	7 029
1,9			3618	8800
292,2502			2412	7029
			117,020592	17710
				16401
				13090
				11715
				1375

Da der Rest 1375 mehr als die Hälfte des Divisors 2343 beträgt, wird in der letzten Stelle statt 5 besser 6 geschrieben.

Die durch die gewöhnliche Rechnung wie in den obigen Beispielen gewonnenen Resultate sind unter der Voraussetzung richtig, dafs die für die Aufgabe gegebenen Zahlen genau sind. In den meisten Fällen wird diese Voraussetzung aber nicht zutreffen. So ist z. B. das Resultat der zweiten Subtraktionsaufgabe nur dann richtig, wenn man weifs, dafs die 69,3 m bis auf mm genau gemessen oder anderweitig berechnet sind. Ist z. B. 32,56 m eine bis auf cm genau gemessene Gröfse, so hat die Aufgabe: 32,56 m $\pm$ 0,004 m nur das Resultat 32,56 m, weil 4 additive oder subtraktive mm auf eine nur bis auf cm genau gemessene Gröfse keinen Einflufs haben.

In fast allen praktischen Aufgaben sind die gegebenen Zahlenwerte nur Näherungswerte, d. h. bis auf eine gewisse Zahl von Dezimalstellen richtige Dezimalzahlen; man mufs also auch in den durch gewöhnliche Rechnung gewonnenen Resultaten die falschen Stellen wegstreichen. Läfst man in der Rechnung selbst schon die falschen oder für das Resultat überflüssigen Dezimalstellen weg, so rechnet man abgekürzt.

Abgekürzte Rechnung.

Verkürzt man eine Dezimalzahl, so wird die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit erhöht, wenn die erste fortgelassene Ziffer 5 oder gröfser als 5 ist,

z. B. 7,3489 um eine Stelle verkürzt wird 7,349,
12,3527 - zwei Stellen - - 12,35.

Der Fehler in der letzten Stelle kann höchstens eine halbe Einheit betragen.

Addiert man abgekürzte Dizimalzahlen, so ist der Fehler in der letzten Dezimalstelle kleiner als die halbe Zahl der Summanden.

Das vorher gegebene Beispiel der Addition auf 2 Stellen abgekürzt berechnet wird:

$$\begin{array}{r} 23{,}04 \\ 267{,}31 \\ 1{,}90 \\ \hline 292{,}25 \end{array}$$

Im 2. Summanden ist statt der letzten 0 eine 1 geschrieben, weil die erste weggelassene Stelle 6 ist, der dritte Summand fällt ganz fort.

Abgekürzte Multiplikation.

Das obige Beispiel der Multiplikation soll auf 2 Dezimalstellen berechnet werden.

$$\begin{array}{r} 12{,}06\ .\ 9{,}7032 \\ \hline 108{,}54 \\ 8{,}44 \\ 0{,}04 \\ \hline 117{,}02 \end{array}$$

In der Rechnung ist das erste Teilprodukt 12,06 . 9 ohne Abkürzung berechnet, weil Einer mit Hundertteilen multipliciert Hundertteile, d. h. 2 Dezimalstellen geben. Das zweite Teilprodukt 12,06 . 0,7 würde 3 Stellen, also eine Stelle zu viel geben, nämlich 8,442. Würde man die letzte Stelle des Multiplikandus 6 weglassen, 12,0 . 0,7 = 8,40, so erhielte man wol 2 Stellen, von denen aber die letzte falsch ist. Um die beiden Dezimalstellen dieses Teilprodukts richtig zu erhalten, denke man sich die letzte Stelle des Multiplikandus 6 gestrichen, berücksichtige aber den Einfluſs, welchen die gestrichene Ziffer auf die letzte zu berechnende Stelle ausübt. Von dem Produkte 7 . 6 = 42 ist die Ziffer 2 wegzulassen, die Ziffer 4 aber zu dem Produkte 7 . 120 zuzuzählen. Man sagt: 7 . 6 = 42, das giebt 4 zur Korrektur; das zweite Teilprodukt wird demnach 8,44. Für die Berechnung des folgenden Teilprodukts würde man wieder eine Stelle des Multiplikandus die 0 gestrichen denken, der Multiplikator ist 0, also das ganze Teilprodukt 0. Für das nächste Teilprodukt ist die 2 des Multiplikandus zu streichen und dann mit der 3 zu multiplicieren. Die 2 bedeutet nämlich Einer, die 3 Tausendstel, das Produkt würde also 3 Stellen, d. h. eine Stelle zu viel geben. 3 . 2 = 6 giebt 1 zur Korrektur, da die letzte beibehaltene Ziffer um 1 zu erhöhen ist, wenn die erste fortgelassene Ziffer 5 oder gröſser als 5 ist; dieses Teilprodukt wird also 3 . 1 + 1 = 4 in der letzten Stelle. Streicht man nun die 1 des Multiplikandus und multipliciert mit 2, so erhält man nichts mehr zur Korrektur. Addiert man die Teilprodukte, so erhält man das Resultat 117,02, welches mit dem durch nicht abgekürzte Rechnung gewonnenen Resultate übereinstimmt.

Hat der Multiplikator nur Einer vor dem Komma, und rechnet man wie in diesem Beispiel nur das erste Teilprodukt vollständig, das zweite schon abgekürzt, so hat das Endprodukt eben so viel Dezimalstellen, wie der Multiplikandus bei Beginn der Rechnung hatte. Hat man 2 beliebige Dezimalzahlen zu multiplicieren, so kann man im Multiplikator das Komma so rücken, daſs er nur Einer vor dem Komma hat, muſs aber im Multiplikandus das Komma eben so viel Stellen nach der entgegengesetzten Seite rücken, damit das Resultat richtig bleibt. Nachdem man dieses ausgeführt hat, wird die weitere Rechnung ebenso wie in vorigem Beispiel auszuführen sein.

35,764 . 19,583 auf 2 Dezimalstellen zu berechnen.

Rücke im zweiten Faktor das Komma eine Stelle nach links, dafür im ersten Faktor eine Stelle nach rechts, dann lautet die Aufgabe:

357,64 . 1,9583.

Der Multiplikandus hat 2 Stellen. Wenn man also nur mit der ersten Ziffer 1 des Multiplikators ohne Abkürzung multipliciert und dann weiter abgekürzt rechnet, so wird das Resultat auch 2 Dezimalstellen haben, Man braucht während der Rechnung selbst dann nicht weiter auf das Komma zu achten. Die Rechnung wird analog der vorigen Aufgabe in folgender Weise ausgeführt:

$$
\begin{array}{r}
\underline{357{,}64\ .\ 1{,}9583} \\
35764 \\
32188 \\
1788 \\
286 \\
\underline{11} \\
700{,}37
\end{array}
$$

Resultat: $35{,}764 \cdot 19{,}583 = 700{,}37$.

In folgendem Beispiel will ich die Ausführung so beschreiben, wie beim „lauten“ Vorrechnen der rechnende Schüler zu verfahren hätte.

$0{,}0785 \cdot 325{,}49$ auf 3 Dezimalstellen zu berechnen.

Ich rücke im Multiplikator das Komma 2 Stellen nach links
- - - Multiplikandus - - - - - rechts.

Der Multiplikandus hat jetzt nur 2 Dezimalstellen, daher hänge ich noch eine Null an. (Die Rechnuug steht unter der Beschreibung.) $3 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 5 = 15$ (die 5 ist hinzuschreiben, die 1 in der vorhergehenden Stelle zuzuzählen.) $3 \cdot 8 = 24$, $+ 1 = 25$. $3 \cdot 7 = 21$, $+ 2 = 23$. Jetzt wird die 0 gestrichen. $2 \cdot 0 = 0$ giebt keine Korrektur. $2 \cdot 5 = 10$. $2 \cdot 8 = 16$, $+ 1 = 17$. $2 \cdot 7 = 14$, $+ 1 = 15$. Die 5 wird gestrichen. $5 \cdot 5 = 25$, giebt 3 zur Korrektur. $5 \cdot 8 = 40$, $+ 3 = 43$. $5 \cdot 7 = 35$, $+ 4 = 39$. 8 gestrichen. $4 \cdot 8 = 32$, giebt 3 zur Korrektur. $4 \cdot 7 = 28$, $+ 3 = 31$. 7 gestrichen. $9 \cdot 7 = 63$, giebt 6 zur Korrektur. Berücksichtigt man noch die folgende Ziffer 8 und rechnet so: $9 \cdot 8 = 72$. $9 \cdot 7 = 63$, $+ 7 = 70$, so sieht man, daſs statt der letzten 6 richtiger 7 zu schreiben ist. Die Summierung geschieht auf die bekannte Weise.

$$
\begin{array}{r}
\underline{7{,}850\ .\ 3{,}2549} \\
23550 \\
1570 \\
393 \\
31 \\
\underline{7} \\
25{,}551
\end{array}
$$

Resultat: $0{,}0785 \cdot 325{,}49 = 25{,}551$.

Da bei richtiger Rechnung der Fehler in einem Teilprodukt kleiner als eine halbe Einheit in der letzten Stelle ist, so muſs der Fehler in der letzten Stelle des Produkts kleiner als die halbe Zahl der Teilprodukte sein. Bei einiger Übung sieht man, welche Zahl für die jedesmalige Korrektur im einzelnen Teilprodukte die richtige ist, man kann auch, wenn man ein oder mehrere Male bei der Korrektur zu viel oder zu wenig erhöht hat, in den folgenden Teilprodukten dieses ausgleichen. Dadurch wird der Gesamtfehler bedeutend kleiner, als die halbe Zahl der Teilprodukte, und bei recht aufmerksamer Rechnung kann man sogar die letzte Stelle genau herausbekommen.

Vorausgesetzt ist bei allen Aufgaben, daſs die gegebenen Zahlen so weit genau sind, wie sie zur Rechnung kommen.

Weitere Beispiele für die abgekürzte Multiplikation folgen später bei zusammengesetzten Aufgaben und bei der Anwendung der abgekürzten Rechnung.

Abgekürzte Division.

Wenn man das Resultat der Division, den Quotienten, mit dem Divisor multipliciert, so muſs bei Berücksichtigung des Restes der Dividendus herauskommen. Hat der Divisor vor dem Komma nur Einer, und multipliciert man den Quotienten mit dem Divisor abgekürzt, so erhält man im Dividendus ebenso viele Stellen, wie solche der Quotient hat. Umgekehrt muſs man, wenn der Divisor nur Einer vor dem Komma hat, durch abgekürzte Division (Rechnung ohne Anhängung weiterer Stellen oder Nullen an den Dividendus) im Quotienten ebenso viele Stellen erhalten, wie sie der Dividendus hat.

7,909 : 2,343 auf 3 Dezimalstelleu zu berechnen.

Bei der nicht abgekürzten Rechnung erhielten wir als Quotienten 3,376 (6 etwas zu hoch). Multipliciert man abgekürzt 3,376 . 2,343, so mufs 7,909 herauskommen.

$$\begin{array}{r l}
\underline{3{,}376\ .\ 2{,}343} & \\
6752 & \\
1012 & \text{(2 statt 3, weil die 6 zu hoch genommen ist)} \\
135 & \\
\underline{10} & \\
7{,}909 &
\end{array}$$

Man mufs nun, auch ohne Nullen an den Dividendus 7,909 anzuhängen, bei der Division 7,909 : 2,343 das richtige Resultat 3,376 herausbekommen. Man verfährt in folgender Weise:

$$\begin{array}{r l}
7{,}909 & :\ 2{,}343 = 3{,}376 \\
\underline{7\ 029} & \\
880 & \\
\underline{703} & \\
177 & \\
\underline{164} & \\
13 &
\end{array}$$

Der erste Teilquotient ist 3. 3 . 2343 = 7029. Der Rest ist 880. Bei gewöhnlicher Division würden wir nun eine Null an den Rest anhängen und weiter dividieren. Statt eine Null anzuhängen, denken wir die letzte Stelle des Divisors 3 gestrichen, so erhalten wir durch Division denselben Quotienten, wir müssen nur die gestrichene 3 zur Korrektur benutzen. Der nächste Quotient wird wieder 3. 3 . 3 = 9, giebt 1 zur Korrektur. 3 . 4 = 12, + 1 = 13. 3 . 3 = 9, + 1 = 10. 3 . 2 = 6, + 1 = 7. Der Rest wird 177; darauf denken wir uns die 4 gestrichen. 23 in 177 geht 7 mal. 7 . 4 = 28, giebt 3 zur Korrektur. 7 . 3 = 21, + 3 = 24. 7 . 2 = 14, + 2 = 16. Der Rest ist 13. Nun wird die 3 gestrichen; 2 in 13 giebt unter Berücksichtigung der Korrektur besser 6 als 5. Wir haben demnach durch abgekürzte Division den richtigen Quotienten 3,376 gefunden. Der Quotient hat soviel Stellen wie der Dividendus, daher das Komma zwischen 3 und 3. Hat der Divisor nicht eine Stelle vor dem Einerkomma, so kann man das Komma so verschieben, dafs nur Einer vor dem Komma stehen, man mufs aber im Dividendus das Komma ebenso viele Stellen nach derselben Seite rücken.

374,25 : 46,527 auf 3 Dezimalstellen zu berechnen.

Rücke im Divisor das Komma eine Stelle nach links, ebenso im Dividendus, dann hat der Divisor eine Stelle vor dem Komma, der Dividendus 3 Dezimalstellen, der Quotient dann auch 3 Dezimalstellen

$$\begin{array}{r l}
37{,}425 & :\ 4{,}652\cancel{7} = 8{,}044 \\
\underline{37\ 222} & \\
203 & \\
\underline{186} & \\
17 & \\
\underline{18} & \\
-1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\underline{8{,}044\ .\ 4{,}6527} \\
32176 \\
4826 \\
402 \\
16 \\
\underline{6} \\
37{,}426
\end{array}$$

Die letzte Ziffer des Divisors 7 mufste von vorn herein gestrichen werden, weil an den Dividendus, der die richtige Stellenzahl hatte, keine Null angehängt werden durfte. Im Übrigen ist die Rechnung ganz analog dem vorigen Beispiel ausgeführt. Der letzte Teilquotient ist besser 4 als 3, aber etwas zu hoch, daher ist das durch die Multiplikationsprobe erhaltene Produkt in der letzten Stelle um 1 gröfser als der Dividendus.

567,4 : 0,3256 bis auf die Ganzen genau zu dividieren

5674 : 3,256 = 1743	1743 . 3,256
3256	5229
2418	349
2279	87
139	10
130	5675
9	
10	
— 1	

74,54 : 0,92 auf eine Dezimalstelle zu berechnen.

745,4 : 9,2 = 81,0	81,0 . 9,2
736	7290
94	162
92	745,2
2	

Abgekürzte Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke.

$\frac{126{,}56 \,.\, 86{,}429}{125{,}375}$ auf zwei Dezimalstellen zu berechnen.

Die Aufgabe enthält eine Multiplikatiou und eine Division. Nehmen wir den zweiten Faktor des Zählers als Multiplikator, so rücken wir das Komma eine Stelle nach links, dafür im Multiplikandus eine Stelle nach rechts. Der Zähler ist jetzt 1265,6 . 8,6429. Darauf wird im Divisor das Komma 2 Stellen nach links gerückt, also im Dividendus ebenso 2 Stellen nach links. Da das Komma im Multiplikator nicht mehr geändert werden soll, rückt man im Multiplikandus das Komma 2 Stellen nach links. Da das Resultat nur auf 2 Dezimalstellen berechnet werden soll, wird die dritte Dezimalstelle des Multiplikandus 6 gestrichen. Die Aufgabe ist jetzt nach den vorher gegebenen Regeln eingerichtet, da der Dividendus als Produkt so viel Dezimalstellen hat wie der Multiplikandus, also nach Ausführung der Division auch der Quotient.

Die Aufgabe lautet jetzt:

$\frac{12{,}65\cancel{6} \,.\, 8{,}6429}{1{,}25375}$	$12{,}65\cancel{6}$. 8,6429	109,37 : $1{,}253\cancel{7}\cancel{5}$ = 87,24
	10125	100 30
	759	9 07
	50	8 77
	2	30
	1	25
	109,37	5
		5

Resultat: 87,24.

$\frac{27{,}342 \,.\, 0{,}06523}{0{,}2476 \,.\, 0{,}9827}$ auf 2 Dezimalstellen zu berechnen.

Die Aufgabe erfordert 2 Multiplikationen und die Division der Produkte durch einander. Sollen die zweiten Faktoren im Zähler und im Nenner Multiplikatoren werden, so rücken wir im Multiplikator des Zählers das Komma 2 Stellen nach rechts, dafür im Multiplikandus 2 Stellen nach links; im Multiplikator des Nenners 1 Stelle nach rechts, im Multiplikandus eine Stelle nach links.

Die Aufgabe ist jetzt:

$$\frac{0{,}27342 \,.\, 6{,}523}{0{,}02476 \,.\, 9{,}827}$$

Nun soll der Divisor eine Stelle vor dem Komma haben, das Produkt 0,02 . . . . 9,8 . . ., welches den Divisor bildet, hat aber erst in der ersten Dezimalstelle eine Ziffer, da $\frac{2}{100} \,.\, 9 = \frac{18}{100} = 1{,}8$ Zehntel ist; wir rücken also im Multiplikandus des Nenners das Komma eine Stelle nach rechts, im Multiplikandus des Zählers auch eine Stelle nach rechts. Jetzt geben wir dem Multiplikandus des Zählers so viel Stellen, wie wir im Resultate haben wollen, d. h. wir streichen die beiden letzten Ziffern desselben 42 weg.

Die Aufgabe lautet jetzt:

$$\frac{2{,}73\cancel{42} \,.\, 6{,}523}{0{,}2476 \,.\, 9{,}827}$$

Der ganze Dividendus besteht, wie man schon vor der Ausführung der Rechnung übersehen kann, aus 2 Ziffern vor dem Komma, 2 Ziffern nach dem Komma, im ganzen also aus 4 Ziffern. Da nun der Divisor nur eine Ziffer vor dem Komma hat, berechnen wir ihn auf 3 Dezimalstellen, weil die dritte Stelle desselben auch noch Einfluſs auf die Ausführung der Rechnung hat.

Die vollständig eingerichtete Aufgabe ist:

$$\frac{2{,}73\cancel{42} \,.\, 6{,}523}{0{,}247\cancel{6} \,.\, 9{,}827}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}73\cancel{4} \,.\, 6{,}523 \\ \hline 1640 \\ 137 \\ 5 \\ 1 \\ \hline 17{,}83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}2476 \,.\, 9{,}827 \\ \hline 2228 \\ 198 \\ 5 \\ 2 \\ \hline 2{,}433 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 17{,}83 : {,}433 = 7{,}33 \\ \underline{17\,03} \\ \;\;80 \\ \;\;\underline{73} \\ \;\;\;\;7 \\ \;\;\;\;\underline{7} \end{array}$$

Resultat: 7,33.

$$\frac{13{,}78 \,.\, 65{,}32 - 125{,}98 \,.\, 16{,}345}{52{,}66 \,.\, 13{,}92 - 0{,}8923 \,.\, 5700}$$ auf 3 Dezimalstellen zu berechnen.

Der Ausdruck ist ein Bruch, dessen Zähler ebenso wie der Nenner eine Differenz zweier Produkte aus je 2 Faktoren ist. Zur Ausführung der Rechnung hat man also viermal zu multiplicieren, zweimal zu subtrahieren und einmal zu dividieren.

Nehmen wir die zweiten Faktoren überall zu Multiplikatoren (man könnte natürlich mit demselben Rechte auch die ersten Faktoren zu Multiplikatoren wählen), so ist das Komma in den 2 Multiplikatoren des Zählers, sowie im ersten Multiplikator des Nenners, je eine Stelle nach links, dafür in den entsprechenden Multiplikanden je eine Stelle nach rechts zu rücken. Im zweiten Multiplikator des Nenners muſs das Komma 3 Stellen nach links, im zugehörigen Multiplikandus 3 Stellen nach rechts gerückt werden.

Die Aufgabe lautet jetzt:

$$\frac{137{,}8 \,.\, 6{,}532 - 1259{,}8 \,.\, 1{,}6345}{526{,}6 \,.\, 1{,}392 - 892{,}3 \,.\, 5{,}700}$$

Der Nenner würde, wie leicht zu ersehen ist, im ersten Produkte 3 Stellen vor dem Komma, im zweiten Produkte 4 Stellen vor dem Komma haben. Das zweite Produkt ist negativ, der ganze Nenner wird also negativ und hat 4 Stellen vor dem Komma. Da er nur eine Stelle vor dem Komma haben soll, rücken wir in den beiden Multiplikanden des Nenners und ebenso in denen des Zählers das Komma je 3 Stellen nach links. Jetzt ist in Bezug auf das Komma die Aufgabe richtig eingerichtet, sie lautet:

$$\frac{0{,}1378 \,.\, 6{,}532 - 1{,}2598 \,.\, 1{,}6345}{0{,}5266 \,.\, 1{,}392 - 0{,}8923 \,.\, 5{,}700}$$

Man hat jetzt darauf zu sehen, daſs die Multiplikanden des Zählers die im Resultate verlangte Zahl von Dezimalstellen haben, das sind in unserm Falle 3; man streicht also die vierten

Stellen in beiden Multiplikanden des Zählers aus und benutzt sie nur zur Korrektur. Der Dividendus 0,1 . . 6 — 1,2 . 1,6 . . wird ebenso wie der Divisor negativ und hat nur eine Stelle vor dem Komma, da das erste Glied Zehntel als höchste Stelle, das zweite Glied Einer als höchste Stelle enthält, und letzteres negativ ist. Man braucht daher den Divisor auch nur auf 3 Dezimalstellen zu berechen, wovon die letzte noch zu streichen und nur zur Korrektur zu benutzen ist, da die ganze Stelle des Divisors gröſser als die des Dividendus wird. Das Resultat ist positiv.

Zur Ausführung der Rechnung hat man jetzt den Ausdruck:

$$\frac{0{,}137\cancel{8}\ .\ 6{,}532 - 1{,}259\cancel{8}\ .\ 1{,}6345}{0{,}526\cancel{6}\ .\ 1{,}392 - 0{,}8923\ .\ 5{,}700}$$

$$\begin{array}{r}
\underline{0{,}137\cancel{8}\ .\ 6{,}532}\\
827\\
69\\
\underline{4}\\
0{,}900
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{1{,}259\cancel{8}\ .\ 1{,}6345}\\
1260\\
756\\
38\\
\underline{6}\\
-\ 2{,}060\\
\underline{0{,}900}\\
-\ 1{,}160
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{0{,}526\cancel{6}\ .\ 1{,}392}\\
527\\
158\\
47\\
\underline{1}\\
0{,}733
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\underline{0{,}892\cancel{3}\ .\ 5{,}7}\\
4462\\
\underline{624}\\
-\ 5{,}086\\
\underline{0{,}733}\\
-\ 4{,}353
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1{,}160 : 4{,}35\cancel{3} = 0{,}266.\\
\ \ \underline{871}\\
\ \ \ 289\\
\ \ \underline{261}\\
\ \ \ \ 28
\end{array}$$

Resultat: 0,266.

$$\frac{3467\ (5724 - 13{,}45\ .\ 267{,}5)}{0{,}8374\ .\ 469{,}35 + 86{,}342}$$ auf Ganze zu berechnen.

Dieser Ausdruck ist ein Bruch, dessen Zähler ein Produkt aus 2 Faktoren, dessen Nenner eine Summe aus 2 Gliedern ist. Der zweite Faktor des Zählers ist eine Differenz, deren zweites Glied wieder ein Produkt aus 2 Faktoren ist. Das erste Glied des Nenners ist auch ein Produkt aus 2 Faktoren.

Im ersten Gliede des Nenners wähle ich den zweiten Faktor zum Multiplikator, rücke also das Komma 2 Stellen nach links, dafür muſs im Multiplikandus das Komma 2 Stellen nach rechts gerückt werden. Der ganze Nenner (83, . . 4, . . + 86, . .) hat 3 Stellen vor dem Komma, ich muſs also das Komma 2 Stellen nach links rücken und zwar im ersten Faktor des ersten Gliedes und im zweiten Gliede; dafür rücke ich im Zähler das Komma auch 2 Stellen nach links und zwar im ersten Faktor. Der Ausdruck hat, wenn man die angegebenen Operationen der Reihe nach wirklich ausführt, jetzt folgendes Aussehen:

$$\frac{34{,}67\ (5724 - 13{,}45\ .\ 267{,}5)}{0{,}{,}83{,}74\ .\ 4{,}69{,}35 + 0{,}86{,}342}$$

Den letzten Faktor des Zählers nehme ich zum Multiplikator, rücke also das Komma 2 Stellen nach links, im zugehörigen Multiplikandus 2 Stellen nach rechts. Nun wähle ich den ersten Faktor des ganzen Zählers als Multiplikator (für die Gewinnung des Produkts ist es gleichgültig, welchen der Faktoren man zum Multiplikator nimmt), habe also das Komma desselben noch eine Stelle nach links zu rücken, dafür in beiden Gliedern des Multiplikandus eine Stelle nach rechts; da das Komma in diesen Zahlen schon am Ende stand, ist statt dessen im ersten Gliede und im ersten Faktor des zweiten Gliedes je eine Null anzuhängen. Der Zähler ist jetzt vollständig eingerichtet, da der Multiplikandus nur Ganze hat. Der Zähler 3, . . (50000 — 30000) besteht im Ganzen aus 5 Ziffern, der Nenner muſs also auf 4 Dezimalstellen berechnet werden. Der Multiplikandus des ersten Gliedes hat die richtigen 4 Dezimalstellen, im zweiten Gliede ist die letzte Stelle 2 zu streichen. Wenn alle genannten Veränderungen an dem ursprünglich gegebenen Ausdrucke vollzogen sind, so hat dieser jetzt folgendes Aussehen:

$$\frac{3{,}4{,}67\ (57240 - 13{,}450\ .\ 2{,}67{,}5}{0{,}{,}83{,}74\ .\ 4{,}69{,}35 + 0{,}86{,}342}$$

```
  13450 . 2,675        0,8374 . 4.6935        73712 : 4,7937 = 15377
  26900                  33496                 47937
   8070                   5024                 25775
    942                    754                 23969
     67                     25                  1806
 -35979                      4                  1438
 +57240                 3,9303                   368
  21261 . . 3,467       0,8634                   335
  63784                 4,7937                    33
   8504                                           33
   1276
    148
  73712
```

Resultat: 15377.

Die Ausführung der Rechnung in dieser Aufgabe ist nur dann richtig, wenn die in dem gegebenen Ausdrucke vorkommenden Zahlen genau richtig sind, so daſs man berechtigt ist, Nullen anzuhängen. Sind dagegen die gegebenen Ziffern abgekürzte, d. h. nur auf die angegebenen Stellen richtige Zahlen, so sind die beiden letzten berechneten Stellen falsch, weil bei diesen die fehlenden Stellen zur Geltung gekommen wären. Das Resultat ist dann nur auf Hunderte richtig und hätte von vorne herein kürzer berechnet werden können.

Abgekürzte Berechnung der Quadratwurzel.

Nachdem man, vom Komma ausgehend, die Zahl in Gruppen zu je 2 Ziffern abgeteilt hat, berechnet man, soweit Gruppen vorhanden sind, auf dem gewöhnlichen Wege die ersten Ziffern der Quadratwurzel; die folgenden Stellen findet man durch abgekürzte Division.

```
 √7561,54 = 86,9571               86,9,571 . 8,6,9571
   64                             695657
16 | 1161                          52174
   |  996                           7826
172 | 16554                          435
    | 15561                           61
1738 |  993                            1
     |  869                       7561,54
        124
        122
          2
```

Um die vierte Ziffer der Quadratwurzel 5 zu finden, muſs man von 2 . 869 = 1738 die letzte Ziffer streichen und nur zur Korrektur benutzen, da sie bei der Division zur ersten Ziffer der ersten fehlenden Gruppe gehört. Das Quadrat der gefundenen Zahl 5 kommt nicht mehr zur Geltung. Von da ab hat man nur abgekürzt weiter zu dividieren. In obiger Aufgabe schloſs der gegebene Radikand mit einer vollen Gruppe ab, etwas anders gestaltet sich die Rechnung, wenn der Radikand mit der ersten Ziffer einer Gruppe abschlieſst.

```
 3 ___________
 V 546,794 = 23,3836(5)
   4
4 | 146
  | 129
46 | 1779
   | 1389
466 | 3904
    | 3734
       170
       140
        30
        28
```

```
23,3836(5) . 23,3836
--------------------
467673
 70151
  7015
  1871
    70
    14
--------
546,794
```

Nachdem die 3 ersten Ziffern der Wurzel gefunden sind, ist nur noch eine Ziffer 4 herunterzuziehen. Daher kommt 2 . 233 = 466 als Divisor noch zur vollen Geltung und das Quadrat der neuen Ziffer $8^2 = 64$ giebt 6 zur Korrektur. Von da ab wird abgekürzt weiter dividiert.

Man erhält bei der abgekürzten Rechnung für die Quadratwurzel ebenso viel Ziffern, wie sie der Radikand hat.

Abgekürzte Berechnung der Kubikwurzel.

Nachdem man, vom Komma ausgehend, die Zahl in Gruppen zu je 3 Ziffern abgeteilt hat, berechnet man, so weit Gruppen vorhanden sind, auf dem gewöhnlichen Wege die ersten Ziffern der Kubikwurzel; die folgenden Ziffern findet man in ähnlicher Weise, wie bei der Quadratwurzel, durch abgekürzte Division; man mufs aber die Veränderung des Divisors berücksichtigen, welche er durch die neu hinzutretenden Ziffern der Wurzel erleidet, sowie den Einflufs der Glieder $3ab^2$ und b^3.

```
                       5 5
 3                    34 966
 V 5.624,451    =   17,78389
     1                 1
3 | 4624              189
  | 21                289
    147                2429
      343             31329
    3913                28384
867 | 711451          3161284
    | 6069               1067
       2499               284
         343               32
      632233          316,2667
93987 | 79218
      | 75190
          340
        75530
9484 | 3688
     | 2845
        843
        759
         84
```

```
316,2,667 . 1,7,78389
---------------------
 3162667
 2213867
  221386
   25301
     949
     253
      28
---------
5624,451
```

```
51 . 49
-------
 204
  459
-------
 2499
```

```
531 . 64
--------
 319
  21
--------
 340
```

Der Radikand schliefst in obiger Aufgabe mit einer vollen Gruppe ab; die letzte Stelle des neu gebildeten $3a^2 = 3 \,.\, 177^2 = 93987$, die 7, mufs gestrichen werden, da sie zur ersten Ziffer der nächsten Gruppe gehört, die nicht mehr vorhanden ist. Das Glied $3ab^2 = 3 \,.\, 177 \,.\, 8^2$ giebt noch 340 zur Korrektur, da erst 2 Stellen fehlen. Das nächste Glied b^3 giebt nichts mehr zur Korrektur (es könnte höchstens 1 zur Korrektur gerechnet werden; besser ist es aber, diese 1 nicht zu rechnen, da die 1 zu grofs ist und 340 auch etwas zu grofs genommen war). Bei Berechnung der nächsten Ziffer der Wurzel mufs man den Einflufs berücksichtigen, welchen die vorhin zur Kubikwurzel hinzugekommene Stelle 8 auf die jetzt noch übrig bleibenden Ziffern des Divisors ausübt. Letzterer wird $3 \,.\, 31612 = 9484$. Das Glied $3ab^2$ hat dieses Mal keinen Einflufs mehr, und man findet die letzten Ziffern der Kubikwurzel durch abgekürzte Division. Die Probe beweist die Richtigkeit der Rechnung, da $17{,}78389^3 = 5624{,}451$ giebt.

$\sqrt[3]{6}$ auf 5 Dezimalstellen zu berechnen.

```
                              34              3,301925 . 1,81712       543 . 49
   3                         3 62             ------------------       --------
  √ 6,000.00  =           1,81712               330193                   22
     1                    -------               264154                    5
 3 | 5000                    1                    3302                   --
     24                    224                    2311                   27
     192                   ---                      33
      512                  324                       7
     ----                    361                ------
     4832                  -----                6,00000
     ----                  32761
 972 | 16800                25389
        972               -------
         54               3301489
       ----                   363
       9774                    73
       ----               -------
9828 | 7026               3,301925
       6880
         27
       ----
       6907
       ----
  99 | 119
        99
       ---
        20
```

Die letzte Gruppe des Radikand besteht in diesem Beispiel aus 2 Ziffern, daher ist $3a^2b$ und $3ab^2$ bis dahin vollständig zu berechen, $b^3 = 1$ giebt keine Korrektur. Der nächste Divisor $3a^2$ mufs um 2 Stellen verkürzt werden, $3ab^2$ um 3 Stellen. Die neue Ziffer der Kubikwurzel hat noch einen geringen Einflufs auf den nächsten Divisor, das Glied $3ab^2$ nicht mehr.

Im Allgemeinen erhält man bei der abgekürzten Berechnung der Kubikwurzel für die Wurzel ebenso viel Ziffern, wie sie der Radikand hat.

Regeln für die abgekürzte Rechnung mit Dezimalzahlen.

Man rücke das Komma in jedem vorkommenden Multiplikator so, dafs nur eine Stelle vor dem Komma steht, im zugehörigen Multiplikandus ebenso viele Stellen nach der entgegengesetzten Seite, dann hat das Produkt so viel Dezimalstellen wie der Multiplikandus. Man rücke das Komma in jedem vorkommenden Divisor so, dafs er nur eine Stelle vor dem Komma hat, im zugehörigen Dividendus ebenso viele Stellen nach derselben Seite, dann hat der Quotient so viele Dezimalstellen, wie der Dividendus.

Hat man einen zu berechnenden Ausdruck nach diesen Regeln eingerichtet, so hat man darauf zu sehen, daſs jeder einzelne Teil des Ausdruckes auf so viele Stellen berechnet wird, wie viele bei der Fortsetzung der Rechnung zur Geltung kommen; auch muſs man einen Ausdruck nicht auf mehr Stellen berechnen, als es die ursprünglich gegebenen Zahlen nach ihrer Genauigkeit gestatten.

Quadrat- und Kubikwurzeln werden nach der Einteilung vom Komma aus in Gruppen zu je 2 resp. 3 auf gewöhnliche Weise berechnet, so weit Gruppen vorhanden sind; die übrigen Ziffern der Wurzeln werden unter Beachtung der nötigen Korrekturen durch abgekürzte Division gewonnen. Die Zahl der Ziffern der Wurzel ist fast immer gleich der Zahl der Ziffern des Radikanden, höchstens um 1 kleiner oder gröſser als diese Zahl.

Anwendung der abgekürzten Rechnung mit Dezimalzahlen auf verschiedene Aufgaben.

1 kg kostet 12,67 M., wieviel kosten 13,475 kg?

Wegen des Resultats ist das Produkt auf 2 Dezimalstellen zu berechnen.

$$\begin{array}{r} \underline{13{,}4{,}75\ .\ 1{,}2{,}67} \\ 13475 \\ 2695 \\ 808 \\ \underline{94} \\ 170{,}72 \end{array}$$

13,475 kg kosten 170,72 M.

1 m = 3,1862 preuſsische Fuſs, 1 pr. Fuſs = wieviel m?

$$\begin{array}{r|r|l} 3{,}1862 & 1{,}0000 & 0{,}3139 \\ & \underline{9559} & \\ & 441 & \\ & \underline{319} & \\ & 122 & \\ & \underline{95} & \\ & 27 & \end{array}$$

1 pr. Fuſs = 0,3139 m.

Man darf an die 1 im Dividendus nur 4 Nullen anhängen, da bei der folgenden Null schon die nächste nicht angegebene Stelle des Divisors wenigstens zur Korrektur zur Geltung käme.

Wieviel ganze Umläufe macht ein Rad von 2,134 m Umfang auf derselben Wegstrecke, auf welcher ein Rad von 1,342 m Umfang 3945 Umläufe macht?

1,332 m U. = 3945 Umläufe,
2,134 ?

$$\frac{3945\ .\ 1{,}342}{2{,}134}\ \text{U.}$$

$$\begin{array}{r} \underline{3945\ .\ 1{,}342} \\ 3945 \\ 1184 \\ 158 \\ \underline{8} \\ 5294 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5294 : 2{,}134 = 2481 \\ \underline{4268} \\ 1026 \\ \underline{854} \\ 172 \\ \underline{170} \\ 2 \end{array}$$

Bei der Addition der Teilprodukte ist in der Einerstelle statt 25 besser 24 zu rechnen, weil bei der Multiplikation 3 mal eine zu groſse Einerzahl genommen ist.

Das Rad macht 2481 Umläufe.

Zu einer Mauer werden 1235 Steine à cm 42 lang, 14,4 breit und 9,5 dick gebraucht, wieviel würde man brauchen, wenn jeder Stein cm 34,5 lang, 12,6 breit, 8 dick wäre?

42 cm l., 14,4 cm br., 9,5 cm d., 1235 St.,
34,5 — 12,6 — 8 — ?

$$\frac{1235\ .\ 42\ .\ 14{,}4\ .\ 9{,}5}{34{,}5\ .\ 12{,}6\ .\ 8\ .}\ \text{St.}$$

Die Längen mufs man in dieser Aufgabe mit den Breiten und Dicken vollständig multiplicieren, da auch die letzte Stelle bei der folgenden Multiplikation und Division wenigstens zur Korrektur zur Geltung kommt.

14,4 . 9,5
1296
72
136,8 . 42
5472
2736
5745,6

34,5 . 12,6
345
69
207
434,7 . 8
3477,6

1235 . 5,7456
6175
865
49
6
1
7096 : 3477$\cancel{6}$ = 2041
6955
141
139
2

$$\frac{1235 . 5{,}745{,}6}{3{,}477{,}6}$$

Man würde 2041 Steine brauchen.

Um wieviel Prozent jährlich hat sich Berlin von 1880 bis 1885 vergröfsert, wenn Berlin (ohne Vororte) 1880 1120330, 1885 1316382 Einwohner zählte. Es sollen die Prozente auf 3 Dezimalstellen angegeben werden.

1120330 Einwohner vermehrten sich in 5 Jahren um 196052 Einwohner,
100 - - - - 1 Jahr - ?

$\frac{19{,}605200}{1{,}120330 . 5}$ % . 19,605 : 6,601$\cancel{6}$ = 3,500
16805
2800
2801

Berlin vergröfserte sich von 1880 bis 1885 jährlich um 3,500 %.

Wieviel Zinsen erhielt man von 13765 M. Kapital zu $4\frac{3}{4}$ % in $2\frac{1}{2}$ Monaten?

100 M. geben in 12 M. $4\frac{3}{4}$ M. Z.,
13765 - - - $2\frac{1}{2}$ - ?

$$\frac{19 . 13765 . 5}{4 . 100 . 2 . 12} \text{ M. Z.} = \frac{1376 . 95}{9600} \text{ M. Z.} = \frac{13{,}76 . 9{,}5}{9{,}6} \text{ M. Z.}$$

137,65 . 9,5
123885
6883
1307,68

1307,68 : 9,6 = 136,22
96
347
288
596
576
208
192
16

Man erhielt 136,22 M. Zinsen.

Welches Kapital bringt zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 10 Mon. 20 Tg. 567,4 M. Zinsen? Es sollen nur die ganzen M. berechnet werden.

100 M. C. in 1 J. $4\frac{1}{2}$ M. Zs.,
? - - - $2\frac{8}{9}$ - 567,4 - -

$$\frac{100 . 9 . 5 . 567{,}4}{26 . 24} \text{ M. C.} = \frac{567{,}4 . 4{,}5}{2{,}6 . 2{,}4} \text{ M. C.}$$

5674 . 4,5
22696
2837
25533

2,6 . 2,4
52
104
6,24

25533 : 6,24 = 4092
2496
573
562
11
12

Das Kapital ist 4092 M.

In welcher Zeit erhält man von 5769 M. C. zu $3\frac{3}{4}$ % 145,5 M. Zinsen?

100 M. 1 J. $3\frac{3}{4}$ M. Z.,
5769 - ? - 145,5 - -

$$\frac{100 \,.\, 4 \,.\, 145{,}5}{5769 \,.\, 15 \,.}\text{ J.} = \frac{58200 \,.\, 360}{5769 \,.\, 15}\text{ Tage} \qquad \frac{582{,}\cancel{00} \,.\, 3{,}60}{5{,}7690 \,.\, 1{,}5}\text{ Tg.}$$

582 . 3,6	5,769 . 1,5	2095 : 8,65$\cancel{3}$ = 242 Tg. = 8 M. 2 Tg.
1746	5769	1731
349	2884	364
2095	8,653	346
		18
		17

Resultat: 8 Monate 2 Tage.

Zu wieviel % erhält man von 35750 M. Kapital in 1 Monat 5 Tagen 145,25 M. Zs.? auf 2 Dezimalstellen.

35750 M. C. in $1\frac{1}{6}$ M. 145,25 M. Z.
100 - - - 12 - ? - -

$$\frac{145{,}25 \,.\, 100 \,.\, 6 \,.\, 12}{35750 \,.\, 7}\,\% \qquad \frac{14525 \,.\, 72}{250250}\,\% = \frac{1{,}45\cancel{25} \,.\, 7{,}2}{2{,}50250}\,\%$$

1,45$\cancel{25}$. 7,2	10,46 : 2,50$\cancel{2}$ = 4,18
1017	10 01
29	45
10,46	25
	20

Resultat: 4,18 %.

Auf welche Summe wachsen 537,75 M. mit Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$ % in 5 Jahren an?

100 M. C. geben in 1 J. $4\frac{1}{2}$ M. Zs.,

1 - - - - 1 - $\frac{4\frac{1}{2}}{100} = 0{,}045$ M. Zs.

1 M. wächst in 1 Jahr auf $1 + 0{,}045 = 1{,}045$ M. an.

Nach Verlauf eines Jahres hat sich also das Kapital mit dem Faktor 1,045 multipliciert

1 M. wächst in 2 J. auf $1{,}045 \,.\, 1{,}045$ M. $= 1{,}045^2$ M. an,

1 - - - 5 - - $1{,}045 \,.\, 1{,}045 \,.\, 1{,}045 \,.\, 1{,}045 \,.\, 1{,}045 = 1{,}045^5$,

537,75 - - - 5 - - $537{,}75 \,.\, 1{,}045^5$.

Es ist also der Ausdruck zu berechnen: $537{,}75 \,.\, 1{,}045^5$.

1,045 . 1,045	537,75 . 1,092025 . 1,092025 . 1,045	587,23$\cancel{7}$. 1,092025	641,27 . 1,045
1045	537750	58724	64127
4180	48398	5285	2565
5225	1075	117	321
1,092025	11	1	670,13
	3	641,27	
	587,237		

Resultat: 670,13 M.

Welchen baaren Wert hat eine nach 3 J. 4 M. 24 T. fällige Schuld von 967,5 M., wenn $4\frac{3}{4}$ % Rabatt 1) auf 100, 2) in 100 gerechnet werden?

100 M. 1 J. = $4\frac{3}{4}$ R.
100 - 3 - 4 M. 24 T. ?

24 T. = $\frac{4}{5}$ M.
$4\frac{4}{5}$ M. = $\frac{2}{5}$ J.

$$\frac{17}{5} \,.\, \frac{19}{4} = \frac{\begin{array}{r}17\\153\\\hline 323\end{array}}{20} = 16{,}15$$

1) auf 100 116,15 Sch. = 100 b. W.
967,5 - ?

$\frac{967{,}5}{1{,}1615}$ M. b. W.

2) in 100 100 Sch. = 83,85 b. W.
967,5 - ?

83,85 . 9,675	967,50 : 1,1615 = 832,98
75465	92920
5031	3830
587	3485
42	345
811,25	232
	113
	104
	9
	9

Resultat: 1) auf 100 gerechnet 832,98 b. W.
2) in - - 811,25 - -

$5\frac{1}{3}$ % Rabatt auf 100 für 2 J. 3. M. 15 Tg. = ? % Rabatt in 100.

$5\frac{1}{3}$ % R. 1 J.
? - - 2 - $3\frac{1}{2}$ M.

$$5\tfrac{1}{3} \cdot 2\tfrac{7}{24}\,\% = \tfrac{16}{3}\cdot\tfrac{55}{24}\,\% = \tfrac{110}{9}\,\% = 12{,}22\ldots\,\%$$

112,22 . . Sch. = 100 b. W.
100 - ?

$$\frac{100{,}00}{1{,}12{,}22} \text{ b. W.}$$

$$\left(100 - \frac{100{,}00}{1{,}1222}\right) \text{ M. R. für } 2\tfrac{7}{24} \text{ J.}$$
? - - - 1 -

$$\frac{(112{,}22. - 100.)\ 24}{1{,}1222\ .\ 55}\,\% = \frac{12{,}22\ .\ 2{,}4}{1{,}1222\ .\ 5{,}5}$$

$$\begin{array}{r} 12{,}22\cancel{2}\ .\ 2{,}4 \\ \hline 2444 \\ 489 \\ \hline 29{,}33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112{,}2\cancel{2}\ .\ 5{,}5 \\ \hline 5611 \\ 561 \\ \hline 6{,}172\,. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29{,}33 : 6{,}17\cancel{2} = 4{,}75 \\ 2469 \\ \hline 464 \\ 432 \\ \hline 32 \\ 31 \\ \hline 1 \end{array}$$

Resultat: 4,75 % Rabatt in 100.

Jemand mischt 28,367 kg à 1,45 M. mit 17,578 kg à 1,14 M. und 14,456 kg à 0,95 M. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

$$= \frac{28{,}367\ .\ 1{,}45 + 17{,}578\ .\ 1{,}14 + 14{,}456\ .\ 0{,}95}{\underbrace{28{,}367 + 17{,}578 + 14{,}456}_{60{,}401}} \text{ M.}$$

$$\frac{2{,}8{,}36\cancel{7}\ .\ 1{,}45 + 1{,}7{,}5\cancel{78}\ .\ 1{,}14 + 1{,}4{,}4\cancel{56}\ .\ 0{,}95}{6{,}0{,}401} \text{ 2 Dezimalstellen}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}83\cancel{6}\ .\ 1{,}45 \\ \hline 284 \\ 113 \\ 14 \\ \hline 4{,}11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}75\cancel{7}\ .\ 1{,}14 \\ \hline 176 \\ 18 \\ 7 \\ \hline 2{,}01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}95\ .\ 1{,}445 \\ \hline 95 \\ 38 \\ 4 \\ \hline 1{,}37 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}49 : 6{,}04 = 1{,}24 \\ 604 \\ \hline 145 \\ 121 \\ \hline 24 \\ 24 \\ \hline \end{array}$$

Resultat: Ein kg der Mischung kostet 1,24 M.

Jemand hat 2 Sorten Silber, die erste vom Feingehalt 524, die zweite vom Feingehalt 975. Wieviel mufs er von jeder Sorte zusammenschmelzen, um 19,75 kg vom Feingehalte 823 zu erhalten?

Er nimmt x kg von der ersten, $(19{,}75 - x)$ kg von der zweiten Sorte.

$$x\ .\ 524 + (19{,}75 - x)\ 975 = 19{,}75\ .\ 823.$$
$$x\ .\ 524 + 19{,}75\ .\ 975 - 975\,x = 19{,}75\ .\ 823.$$
$$x\,(975 - 524) = 19{,}75\ (975 - 823).$$
$$451\,x = 19{,}75\ .\ 152.$$

$$x = \frac{152\ .\ 19{,}75}{451} = \frac{15{,}200\ .\ 1{,}9{,}75}{4{,}51} \text{ auf 3 Dezimalstellen.}$$

$$\begin{array}{r} 15{,}200\ .\ 1{,}975 \\ \hline 15200 \\ 13680 \\ 1064 \\ 76 \\ \hline 30{,}020 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30{,}020 : 4{,}51 = \\ 2706 \\ \hline 2960 \\ 2706 \\ \hline 254 \\ 226 \\ \hline 28 \\ 27 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} 19{,}7\cancel{5}0 \\ 6{,}656 \\ \hline 13{,}094 \end{array} \text{ kg}$$

Resultat: Er mufs 6,656 kg von der ersten Sorte nehmen.
- - 13,094 - - - zweiten Sorte nehmen.

Eine Metallegierung aus Zinn und Kupfer wiegt in der Luft 524 gr, im Wasser 455 gr. Wieviel von jedem Metalle enthielt der Körper, wenn das spezifische Gewicht des Zinnes 7,29, das des Kupfers 8,88 ist?

Der Körper enthält x gr Zinn, $524 - x$ gr Kupfer.

7,29 gr Zinn verlieren im Wasser 1 gr an Gewicht.
x - - - - - $\frac{x}{7,29}$ - - -

8,88 gr Kupfer verlieren im Wasser 1 gr an Gewicht
$524 - x$ - - - - - $\frac{524 - x}{8,88}$ - - -

Der ganze Gewichtsverlust beträgt $524 - 455 = 69$ gr, daher die Gleichung:

$$\frac{x}{7,29} + \frac{524 - x}{8,88} = 69 \qquad 8,88\,x + 524 \,.\, 7,29 - 7,29\,x = 69 \,.\, 7,29 \,.\, 8,88$$

$$x = \frac{69 \,.\, 7,29 \,.\, 8,88 - 524 \,.\, 7,29}{8,88 - 7,29}$$

7,29 . 69
4374
6561
503,01

$$x = \frac{503,01 \,.\, 8,88 - 524 \,.\, 7,29}{1,59}$$ die ganzen gr berechnet giebt:

503,0̸ . 8,88	524 . 7,29	646 : 1,59 = 406
4024	3668	636
402	105	10
40	47	9
4466	— 3820	

Resultat: Die Legierung enthält 406 gr Zinn, 118 gr Kupfer.

A., B., C. führten einen Handel in Gemeinschaft. A. liefs seine Einlage von 4625 M. 8 Monat 15 Tg. im Geschäfte, B. 2746 M. 5 Mt. 20 Tg., C. 1578 M. 10 Mt. 12 Tg. Beim Abschlufs ergab sich ein Gewinn von 1842 M. Wieviel erhält davon jeder?

A. 4625 M. $8\frac{1}{2}$ Mt. = 4625. $8\frac{1}{2}$ M. 1 Mt.
B. 2746 - $5\frac{2}{3}$ - = 2746. $5\frac{2}{3}$ - 1 -
C. 1578 - $10\frac{2}{5}$ - = 1578. $10\frac{2}{5}$ - 1 -

4625 . 17 : 2	2746 . 17 : 3	1578 . 52 : 5	39312,5
4625	2746	7890	15527,33
32375	19122	3156	16411,2
78625 : 2 = 39312,5	46582 : 3 = 15527,3	82056 : 5 = 16411,2	71251,03

$$\text{A. erhält } \frac{1842 \,.\, 39312,5}{71251} = \frac{1842 \,.\, 3,93125}{7,1251}$$

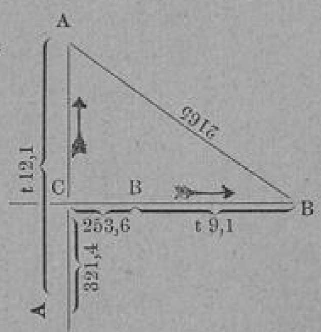
$$\text{B. - } \frac{1842 \,.\, 15527,3}{71251} = \frac{1842 \,.\, 1,55273}{7,1251}$$

$$\text{C. - } \frac{1842 \,.\, 16411.2}{71251} = \frac{1842 \,.\, 1,64112}{7,1251}$$

1842000 : 7,12513 = 258.522	258,522 . 3,93125	258,522 . 1.55273	258,522 . 1,64112
1425026	77557	25852	25852
416974	23267	12926	15511
356257	776	1293	1034
60717	26	52	26
57001	5	18	3
3716	1	1	424,26
3567	1016,32	401,42	
154			
142			
12			

Resultat: A. erhält 1016.32 M.
B. - 401,42 -
C. - 424,26 -
1842,00

Zwei Körper A. und B. bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien mit den Geschwindigkeiten von 12,1 m und 9,1 m. A. ist 321,4 m vom Schnittpunkt entfernt und seine Bewegung ist nach dem Schnittpunkt hin gerichtet. B. ist 253.6 m vom Schnittpunkt entfernt und seine Bewegung ist vom Schnittpunkte ab gerichtet. Wann wird die Entfernung der beiden Körper von einander 2165 m betragen?



$$(12{,}1\,t - 321{,}4)^2 + (9{,}1\,t + 253{,}6)^2 = 2165^2$$

$$t^2\,(12{,}1^2 + 9{,}1^2) - 2\,t\,(321{,}4 \,.\, 12{,}1 - 253{,}6 \,.\, 9{,}1) = 2165^2 - 321{,}4^2 - 253{,}6^2$$

$$t^2 - 2\,t\,\underbrace{\frac{321{,}4 \,.\, 12{,}1 - 253{,}6 \,.\, 9{,}1}{12{,}1^2 + 9{,}1^2}}_{a} = \underbrace{\frac{2165^2 - 321{,}4^2 - 253{,}6^2}{12{,}1^2 + 9{,}1^2}}_{b}$$

$$t = a \pm \sqrt{b + a^2}$$

$$a = \frac{32{,}1{,}4 \,.\, 1{,}2{,}1 - 2{,}53{,}6 \,.\, 9{,}1}{1{,}2{,}1^2 + 0{,}9{,}1^2}$$

$$b = \frac{21650 \,.\, 2{,}165 - 321{,}4 \,.\, 3{,}21{,}4 - 253{,}6 \,.\, 2{,}53{,}6}{1{,}2{,}1^2 + 0{,}9{,}1^2}$$

a wird eine Zahl, welche nur eine Stelle vor dem Komma hat
b - - - - - - 5 Stellen - - - - -

a berechne ich auf eine Dezimalstelle, dann habe ich entsprechend b nur auf Zehner genau zu berechnen.

32,14 . 1,21		2,536 . 9,1	1,21 . 1,21		0,09,1 . 9,1		a = 15,8 : 2,29 = 6,9
321		228	1210		819		137
64		3	242		9		21
4		23,1 = 15,8.	12	+	0,828 = 2,292		
38,9	—		1,464				

21650 . 2,165	321,4 . 3,214	253,6 . 2,536	103	4520 : 2,292 = 1972
4330	96	51	64	2292
217	6	12	— 167	2228
130	1	1	+ 4687	2063
10	103	64	4520	165
4687				190
				5

$a^2 = 6{,}9^2$ giebt annähernd 5 Zehner.
$a^2 + b = 19770$

$\sqrt{1|97|7.} = 140,6.$ $\qquad t = 6,9 \pm 140,6$

1 $\qquad t_1 = 147,5$

2 | 97 $\qquad t_2 = -133,7$

96

28 | 17

Resultat: Die Entfernung der beiden Körper von einander war vor 133,7 Sekunden und wird nach 147,5 Sekunden gleich 2165 m sein.

Wie grofs ist der Inhalt eines Kugelsegments, wenn der Radius der Kugel r = 160 cm, der Radius des Grundkreises des Kugelsegments $\varrho = 30$ cm ist?

Es sollen die Liter bis auf eine Dezimalstelle berechnet werden.

Der Inhalt des Kugelsegments J. ist: $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$. Hierin ist $h = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$.

$$J = \frac{\pi}{3}\left(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)^2 \left(2r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2r^2 - \varrho^2 - 2r\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)\left(2r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(4r^3 - 2r\varrho^2 - 4r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} + 2r^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \varrho^2\sqrt{r^2 - \varrho^2} - 2r(r^2 - \varrho^2)\right)$$

$$J = \frac{\pi}{3}\left(2r^3 - (2r^2 + \varrho^2)\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right)$$

$$J = \frac{3,14\,..}{3}\left(2 \cdot 16^3 - (2 \cdot 16^2 + 3^2)\sqrt{16^2 - 3^2}\right) \text{ Liter.}$$

16 . 16
16
96
256 . 16
256
1536
4096 . 2
8192,0
8188,2
3,8

256 . 2
512
9
521

256
9
247

$\sqrt{247,00}$ 15,7163
1
2 | 147
125
30 | 2200
2149
314 | 510
314
196
188
8

521,0,0 . 1,5,7163
52100
26050
3647
52
31
2
8188,2

3,14 : 3 = 1,05.

3,8 . 1,05
38
2
4,0

Resultat: Der Inhalt ist 4,0 Liter.