Die Determinanten und ihre Anwendung in der Schule.

Einleitung.

Die Wichtigkeit der Determinanten für alle Gebiete der Mathematik hat schon vielfach dazu Veranlassung gegeben, wenigstens die ersten Elemente der Determinantentheorie in einer für Schüler geeigneten Form auszuarbeiten und vorzutragen. Die passendste Gelegenheit dazu bietet wohl die Durchnahme der verschiedenen Methoden zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen. Da dieses schon in Tertia geschieht, und die Sätze über Permutationen und Kombinationen bis dahin den Schülern noch unbekannt sind, habe ich in dieser Arbeit versucht, die einfachsten Sätze über Determinanten ohne streng kombinatorische Grundlage, nur auf Grund der Eigenschaft der Determinante, dafs sie die Summe der Produkte der Elemente einer Zeile mit den dazu gehörigen Unterdeterminanten ist, wobei die Wahl des Vorzeichens der Unterdeterminanten in geeigneter Weise vorgenommen werden mufs, abzuleiten und einige Anwendungen zu geben.

Hat man 2 Gleichungen 1. Grades mit 2 Unbekannten:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \quad \text{so ist:} \end{aligned}$$

$$x = \frac{ce - fb}{ae - db} \qquad y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

Hat man 3 Gleichungen 1. Grades mit 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + ky + lz &= m \quad \text{so ist:} \end{aligned}$$

$$x = \frac{d\,(fl - kg) - h\,(bl - kc) + m\,(bg - fc)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

$$y = \frac{a\,(hl - mg) - e\,(dl - mc) + i\,(dg - hc)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

$$z = \frac{a\,(fm - kh) - e\,(bm - kd) + i\,(bh - fd)}{a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)}$$

Wendet man diese für die allgemeinen Coefficienten a b c · · · · nach einer der bekannten Methoden gefundenen Resultate auf Zahlenbeispiele an:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 5x + 2y &= 12 \quad \text{so wird:} \end{aligned}$$

$$x = \frac{10 \, . \, 2 - 12 \, . \, 4}{3 \, . \, 2 - 5 \, . \, 4} = 2. \qquad y - \frac{3 \, . \, 12 - 5 \, . \, 10}{3 \, . \, 2 - 5 \, . \, 4} = 1.$$

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 4z &= 80 \\ 5x + 6y - 3z &= 30 \\ 2x + 3y + 7z &= 90 \quad \text{so wird:} \end{aligned}$$

$$x = \frac{80\left(6.7 - 3.(-3)\right) - 30\,(5.7 - 3.4) + 90\left(5.(-3) - 6.4\right)}{3\left(6.7 - 3\ (-3)\right) - \ 5\,(5.7 - 3.4) + \ 2\left(5.(-3) - 6.4\right)} = \frac{-120}{-40} = 3.$$

$$y = \frac{3\left(30.7 - 90.(-3)\right) - 5\,(80.7 - 90.4) + 2\left(80.(-3) - 30.4\right)}{-40} = 7.$$

$$z = \frac{3\,(6.90 - 3.30) - 5\,(5.90 - 3.80) + 2\,(5.30 - 6.80)}{-40} = 9.$$

Diese Anwendung der allgemeinen Resultate auf Zahlenbeispiele ist die Befolgung einer nur mechanischen Regel, welche in den allgemeinen Resultaten enthalten ist.

Es fragt sich nun, ob man diese Regel als ein so allgemeingültiges Gesetz aussprechen kann, daſs man im Stande ist, nur auf Grund dieses Gesetzes die n Unbekannten aus einem System von n Gleichungen 1. Grades auszurechnen. Es ergeben sich aus den allgemeinen Resultaten folgende Beobachtungen:

Die Werte für die Unbekannten, die zu einem System von Gleichungen gehören, sind Brüche mit demselben Nenner.

Ist ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten gegeben, so sind sowohl Zähler als Nenner der Unbekannten Aggregate von Produkten zu je 2 Faktoren.

Wählt man für den Nenner ae — db das Symbol:

$$ae - db = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

so erhält man für die Zähler von x und y

$$ce - fb = \begin{vmatrix} c & h \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$af - dc = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Das System der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

hat demnach die Lösungen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$

Ist ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so sind sowohl Zähler als Nenner der Unbekannten Aggregate von Produkten zu je 3 Faktoren. Die eine Hälfte der Produkte ist positiv, die andere Hälfte negativ.

Der gemeinsame Nenner der Unbekannten

$$a\,(fl - kg) - e\,(bl - kc) + i\,(bg - fc)$$

läſst sich folgendermaſsen schreiben:

$$a \begin{vmatrix} f & g \\ k & l \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c \\ k & l \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}.$$

Wählt man für diesen Ausdruck das Symbol

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

so wird, wie das Auge lehrt,

$$\text{der Zähler von } x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ m & k & l \end{vmatrix}$$

$$\text{- - - } y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & m & l \end{vmatrix}$$

$$\text{- - - } z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & k & m \end{vmatrix}$$

Das System der 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + ky + lz &= m \end{aligned}$$

hat also die Lösungen:

$$x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ m & k & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & m & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \qquad z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & k & m \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

Die vorhin eingeführten Symbole heifsen Determinanten, und zwar ist:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \text{ eine Determinante 2. Grades}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & k & l \end{vmatrix} \text{ eine Determinante 3. Grades.}$$

Eine Determinante 2. Grades ist von $4 = 2^2$ Gröfsen abhängig, die man Elemente der Determinante nennt.

Entsprechend ist eine Determinante 3. Grades von $9 = 3^2$ Elementen abhängig.

Nach den bisherigen Beobachtungen ist anzunehmen, dafs die Werte der n Unbekannten, welche zu einem System von n Gleichungen 1. Grades gehören, Brüche sein werden, deren Zähler und Nenner aus Determinanten n. Grades bestehen. Bevor wir jedoch darauf näher eingehen, wollen wir das Wesen und die hauptsächlichsten Eigenschaften der Determinanten untersuchen.

Eine Bemerkung möge noch voran geschickt werden. Zu einer Determinante n. Grades gehören n^2 Elemente. Ist die Determinante von hohem Grade, so genügen die Buchstaben des Alphabets nicht mehr zur Bezeichnung der Elemente. Man wählt infolge dessen zur Unterscheidung der n^2 Elemente n Buchstaben, von denen jeder einen der Indices (Zeiger) 1 . . . bis n hat, z. B. $a_1, a_2 \ldots a_n, b_1 \ldots b_n \ldots$ oder besser einen einzigen Buchstaben mit doppelten Indices: $a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}, a_{21} \ldots a_{2n} . a_{nn}$, so dafs z. B. a_{12} ein von a_{21} verschiedenes Element ist.

Symbol, Definition und Entwickelung der Determinante.

Symbol.

$$\text{Das Schema } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist ein von Cauchy eingeführtes Symbol für einen bestimmten algebraischen Ausdruck, welcher nach Gaufs Determinante genannt wird. Die Vertikalreihen des quadratförmigen Symbols heifsen Kolonnen, die Horizontalreihen heifsen Zeilen. $a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \ldots a_{nn}$ ist die Diagonalreihe. Die mit doppelten Indices versehenen Gröfsen $a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}\ a_{21} \ldots a_{2n} \ldots a_{nn}$ sind die n^2 verschiedenen Elemente der Determinante n. Grades.

Die doppelten Indices zeigen nicht nur an, dafs die einzelnen Elemente von einander dem Werte nach verschieden sind, sondern lassen zugleich die Stelle erkennen, an welcher das

Element steht. Z. B. a_{34} ist dasjenige Element, welches in der 3. Zeile und in der 4. Kolonne steht.

Denkt man sich die zu einem Elemente gehörige Zeile und Kolonne fort, so bleibt eine Determinante $(n-1)$. Grades stehen, welche die zu diesem Elemente gehörige Unterdeterminante heifst. Unterdrückt man die zu einem Elemente dieser Unterdeterminante gehörige Zeile und Kolonne, so bleibt eine Determinante $(n-2)$. Grades u. s. w.

Z. B. ist die zu dem Elemente a_{23} der Determinante 4. Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ gehörige Unterdeterminante 3. Grades } = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Die zu dem Elemente a_{41} gehörige Unterdeterminante 2. Grades $= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$.

Verfolgt man dieses Verfahren noch weiter, so erhält man als zu dem Elemente a_{12} gehörige Unterdeterminante 1. Grades das Element a_{34}.

Definition.

Die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist ein Aggregat sämtlicher Produkte zu je n Faktoren, welche aus den gegebenen n^2 Elementen so gebildet sind, dafs in jedem Produkte aus jeder Zeile und aus jeder Kolonne ein Element als Faktor vorkommt. In keinem Produkte dürfen demnach 2 Faktoren aus derselben Zeile oder derselben Kolonne vorkommen, da sonst nicht alle Zeilen und Kolonnen in einem Produkte von n Faktoren vertreten sein können.

Die eine Hälfte der Produkte ist positiv, die andere negativ; die nähere Bestimmung der Vorzeichen bleibt noch vorbehalten.

Denkt man sich die Determinante entwickelt und nimmt sämtliche Glieder heraus, welche den gemeinsamen Faktor a_{ik} haben, so erhält man als Faktor von a_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante; denn in keinem der dazu gehörigen Glieder darf als Faktor ein Element aus der i. Zeile und der k. Kolonne vorkommen.

Diese Unterdeterminante des Elementes a_{ik} wollen wir ohne Rücksicht auf das Vorzeichen α_{ik} nennen.

In der Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ ist die zu dem Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(i-1)} & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)} & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} \quad \cdot & a_{n(k-1)} & a_{n(k+1)} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ordnen wir die ganze Determinante nach den Elementen einer Zeile oder Kolonne, was wir thun können, da ja in jedem Gliede der Determinante aus der gewählten Zeile oder Kolonne ein Element als Faktor vorkommen mufs, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Eine Determinante ist ein Aggregat der Produkte aus den Elementen einer beliebigen Zeile oder Kolonne mit den zugehörigen Unterdeterminanten.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{i1}\,\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\,\alpha_{in} \quad \text{oder} \\ = a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots + a_{nk}\,\alpha_{nk} \end{matrix}$$

wo die α die zu den a gehörigen positiven oder negativen Unterdeterminanten sind. Wir haben jetzt ein Mittel, um sämtliche Glieder einer Determinante zu bilden, wenn wir berücksichtigen, dafs sich die Gröfsen α ebenso wie die ursprüngliche Determinante nach den Elementen einer ihrer Zeilen oder Kolonne ordnen lassen, und dafs man in der Zerlegung so fortfahren kann, bis man auf Determinanten 1. Grades, d. h. auf ein Element selbst kommt. Es fehlt zur vollständigen Wertbestimmung der Determinante nur noch die Bestimmung des Vorzeichens der einzelnen Glieder.

Für die Bestimmung der Vorzeichen wollen wir folgendes festsetzen:

$\alpha_{11}\ \alpha_{31}\ \alpha_{51}\ldots$ sollen die positiven Unterdeterminanten von $a_{11}\ a_{31}\ a_{51}\ldots$ sein.
$\alpha_{21}\ \alpha_{41}\ \alpha_{61}\ldots$ - - negativen - - $a_{21}\ a_{41}\ a_{61}\ldots$ -

Da die Größen α als Determinanten ihrerseits wieder nach demselben Princip entwickelt werden können, so genügt diese Bestimmung um eine Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne vollständig zu entwickeln.

Entwickelung der Determinanten nach den Elementen der ersten Kolonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{21}\,(a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{13}) + a_{31}\,(a_{12}\, a_{23} - a_{22}\, a_{13})$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{31}\, a_{12}\, a_{23} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \left(a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right) \\ &- a_{21} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \right) \\ &+ a_{31} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right) \\ &- a_{41} \left(a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} - a_{11}\, a_{22}\, a_{43}\, a_{34} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23}\, a_{44} + a_{11}\, a_{32}\, a_{43}\, a_{24} \\ &+ a_{11}\, a_{42}\, a_{23}\, a_{34} - a_{11}\, a_{42}\, a_{33}\, a_{24} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33}\, a_{44} + a_{21}\, a_{12}\, a_{43}\, a_{34} \\ &+ a_{21}\, a_{32}\, a_{13}\, a_{44} - a_{21}\, a_{32}\, a_{43}\, a_{14} - a_{21}\, a_{42}\, a_{13}\, a_{34} + a_{21}\, a_{42}\, a_{33}\, a_{14} \\ &+ a_{31}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{44} - a_{31}\, a_{12}\, a_{44}\, a_{24} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{44} + a_{31}\, a_{22}\, a_{43}\, a_{14} \\ &+ a_{31}\, a_{42}\, a_{13}\, a_{24} - a_{31}\, a_{42}\, a_{23}\, a_{14} - a_{41}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{34} + a_{41}\, a_{12}\, a_{33}\, a_{24} \\ &+ a_{41}\, a_{22}\, a_{13}\, a_{34} - a_{41}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{14} - a_{41}\, a_{32}\, a_{13}\, a_{24} + a_{41}\, a_{32}\, a_{23}\, a_{14}. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,.\,.\, a_{1n} \\ a_{n1} \,.\,.\, a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & .\,. & a_{2n} \\ . & . & \\ a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & .\,. & a_{1n} \\ a_{32} & .\,. & a_{3n} \\ a_{n2} & .\,. & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & .\,. & a_{1n} \\ a_{22} & .\,. & a_{2n} \\ a_{42} & .\,. & a_{4n} \\ . & . & \\ a_{n2} & .\,. & a_{nn} \end{vmatrix} - \ldots.$$

$$- (-1)^n\, a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{(n-1)\,2} & & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \left\{ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & .\,. & a_{3n} \\ a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{23} & .\,. & a_{2n} \\ a_{43} & .\,. & a_{4n} \\ a_{n3} & .\,. & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^n\, a_{n2} \begin{vmatrix} a_{23} & .\,. & a_{2n} \\ a_{(n-1)\,3} & .\,. & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix} \right\} \\ &- a_{21} \left\{ a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & .\,. & a_{3n} \\ a_{n3} & . & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{13} & .\,. & a_{1n} \\ a_{43} & .\,. & a_{4n} \\ a_{n3} & .\,. & a_{nn} \end{vmatrix} \ldots. + (-1)^n\, a_{n2} \begin{vmatrix} a_{13} & .\,. & a_{1n} \\ a_{33} & .\,. & a_{3n} \\ a_{(n-1)\,3} & .\,. & a_{(n-1)\,n} \end{vmatrix} \right\} \\ &+ - - - \mp - \end{aligned}$$

$$-(-1)^n a_{n1}\left\{a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdot\,\cdot & a_{2n} \\ a_{(n-1)3} & \cdot\,\cdot & a_{(n-1)n}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ a_{33} & & a_{3n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ a_{(n-1)2} & & a_{(n-1)n}\end{vmatrix} \ldots + (-1)^n a_{(n-1)2}\begin{vmatrix} a_{13} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot\,\cdot & & \cdot\,\cdot \\ a_{(n-2)3} & \cdot\,\cdot & a_{(n-1)n}\end{vmatrix}\right\}$$

Entwickelung einiger Determinanten, deren Elemente specielle Werte haben.

$$\begin{vmatrix} a & o \\ o & b \end{vmatrix} = ab;$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,ab.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1\,.\,8 - 2\,.\,3. = 2.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix} \\ &= a\,(bc - a^2) - b\,(b^2 - ac) + c\,(ab - c^2) \\ &= 3\,abc - a^3 - b^3 - c^3. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & o \\ o & a & b \\ b & o & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1.\,(45 - 48) - 4\,(18 - 24) + 7\,(12 - 15) \\ &= 1\,(-3) - 4\,(-6) + 7\,(-3) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 8\,(10 - 63) - 3\,(2 - 54) + 4\,(7 - 30) = -360.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(-1) - 1\,.\,1 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -5\,(25 - 24) - 4\,(-30 - 28) + 3\,(36 + 35) = 440.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ b & c & o & a \\ c & o & a & b \\ o & a & b & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & o & a \\ o & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c & o \\ o & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c & o \\ c & o & a \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= a\,(ac^2 - b^2c - a^3) - b\,(2abc - b^3) + c\,(-ab^2 - c^3 + a^2c)$$

$$= -a^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c + b^4 - c^4.$$

$$-\begin{vmatrix} o & c & b & a \\ c & o & a & b \\ b & a & o & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = -a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,(-3 - 232 - 245) - 2\,(-2 + 180 + 190) + 3\,(-116 - 135 - 5) - 4\,(-98 - 114 + 4)$$

$$= -1152.$$

Entwickelung der Determinanten nach den Elementen einer beliebigen Kolonne oder Zeile.

Will man eine Determinante nach den Elementen einer andern Kolonne, oder nach den Elementen irgend einer Zeile entwickeln, so mufs man darauf achten, dafs die Glieder der Determinante dieselben Vorzeichen erhalten, wie bei der vorigen Entwickelung. Z. B. mufs die Unterdeterminante $n - 2$. Grades, welche zu den Elementen $a_{21}\ a_{12}$ gehört, dasselbe Vorzeichen erhalten, gleichgültig, ob man die Entwickelung mit der 1ten oder 2ten Kolonne oder Zeile beginnt.

Zu diesem Zwecke mufs man den Unterdeterminanten der Elemente in ungerader Zeile der 2ten Kolonne dasselbe Vorzeichen geben, wie den Unterdeterminanten der Elemente in gerader Zeile der 1ten Kolonne und umgekehrt.

Da nach der Definition $\alpha_{11}\ \alpha_{31}\ \alpha_{51}\ \ldots$ die positiven, $\alpha_{21}\ \alpha_{41}\ \alpha_{61}\ \ldots$ die negativen Unterdeterminanten von $a_{11}\ a_{31}\ a_{51}\ \ldots\ a_{21}\ a_{41}\ \ldots$ sind, so müssen nach dem vorhergehenden $\alpha_{12}\ \alpha_{32}\ \alpha_{52}$ die negativen, $\alpha_{22}\ \alpha_{42}\ \alpha_{62}\ \ldots$ die positiven Unterdeterminanten von $a_{12}\ a_{32}\ a_{52}\ a_{22}\ a_{42}\ a_{62}$ sein. Ebenso werden $\alpha_{13}\ \alpha_{33}\ \alpha_{53}\ \ldots$ die positiven, $\alpha_{23}\ \alpha_{43}\ \alpha_{63}\ \ldots$ die negativen Unterdeterminanten von $a_{13}\ a_{33}\ a_{53}\ \ldots\ a_{23}\ a_{43}\ a_{63}\ \ldots$

Allgemein wird α_{ik} die positive Unterdeterminante von a_{ik}, wenn a_{ik} in gerader Kolonne und gerader Zeile oder in ungerader Kolonne und ungerader Zeile steht, wenn also $i + k$ eine gerade Zahl ist.

α_{ik} ist die negative Unterdeterminante von a_{ik}, wenn a_{ik} in gerader Kolonne und ungerader Zeile oder in ungerader Kolonne und gerader Zeile steht, wenn also $i + k$ eine ungerade Zahl ist.

Die Unterdeterminante des Elementes a_{ik} ist also $= (-1)^{i+k}\,\alpha_{ik}$.

Man erhält für die Vorzeichen der Unterdeterminanten folgendes Schema:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & . - & (-1)^n \\ - & + & - & + & . & . & . . + & (-1)^n \\ + & - & . & - & - & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ - & (-1)^n & & & & & & +1 \end{vmatrix}$$

Einige Lehrsätze der Determinantentheorie.

1) Haben die Elemente einer Zeile oder Kolonne einen gemeinsamen Faktor, so kann man denselben vor die Determinante setzen; umgekehrt kann man eine Determinante dadurch mit einem Faktor multiplicieren, dafs man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit dem Faktor multipliciert.

Beweis. Haben die Elemente der iten Kolonne den gemeinsamen Faktor l, so dafs $a_{ki} = l b_{ki}$ ist, so wird, wenn wir die Det. nach den Elementen der iten Kolonne entwickeln:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots & l b_{1i} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots & l b_{2i} & \ldots a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{n1} \ldots & l b_{ni} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = l\, b_{1i}\,\alpha_{1i} + l\,.\,b_{2i}\,\alpha_{2i} + \ldots + l b_{ni}\,\alpha_{ni}$$

$$= l\,(b_{1i}\,\alpha_{1i}\,. + \ldots + b_{ni}\,\alpha_{ni}) = l \begin{vmatrix} \alpha_{11} & b_{1i} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{n1} & b_{ni} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

2) Wenn die Elemente einer Zeile oder Kolonne alle bis auf eins verschwinden, so reduciert sich die Determinante auf das Produkt dieses Gliedes mit der zugehörigen Unterdeterminante.

Es ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\,.\,0 \ldots & a_{ik} & \ldots 0 \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik}\,\alpha_{ik}.$$

Man sieht dieses sofort ein, wenn man die Determinante nach den Elementen der iten Zeile entwickelt.

Zusatz. Man kann demnach jede Determinante n. Grades als eine Determinante höhern Grades darstellen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{n1} \quad\; a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & A_1 \dots A_n & \\ 0 & a_{11} & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & B & B_1 & \dots & B_n \\ 0 & 1 & A_1 & \dots & A_n \\ 0 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{21} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

Die Gröfsen $A_1 \,..\, A_n$, B $B_1 \dots B_n$ sind ganz willkürlich.

3) Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei parallele Zeilen oder Kolonnen mit einander vertauscht.

Beweis. Die zu den Elementen einer beliebigen Zeile oder Kolonne gehörigen Unterdeterminanten bleiben dieselben, auch wenn man die betreffende Zeile oder Kolonne mit einer Nachbarzeile oder Nachbarkolonne vertauscht. Da die Elemente aber aus einer geraden Zeile oder Kolonne in eine ungerade oder umgekehrt aus einer ungeraden Zeile oder Kolonne in eine gerade gelangt sein müssen, so haben die betreffenden Unterdeterminanten nach der Vertauschung andere Vorzeichen als vor der Vertauschung. Demnach ändert die ganze Determinante durch die Vertauschung zweier Nachbarzeilen oder zweier Nachbarkolonnen ihr Vorzeichen. Vertauscht man nun zwei beliebige Zeilen oder Kolonnen, z. B. die ite Kolonne mit der kten, so kann dieses in der Weise geschehen, dafs man durch wiederholte Vertauschung zweier Nachbarkolonnen zunächst die ite Kolonne zur kten Kolonne macht; dieses geschieht durch $k-i$malige Vertauschung zweier Nachbarkolonnen. Die ursprünglich kte Kolonne, welche jetzt die $k-i$te K. ist, muls nur noch durch fortgesetzte Vertauschung zweier Nachbarkolonnen zur iten gemacht werden. Dieses geschieht durch $(k-i-1)$malige Vertauschung. Im ganzen hat man also $2(k-i)-1$, d. h. eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Nachbarkolonnen vorgenommen. Die Determinante hat demnach $2(k-i)-1$ mal ihr Vorzeichen geändert, d. h. sie hat durch die Vertauschung der iten mit der kten Kolonne das dem ursprünglichen Vorzeichen entgegengesetzte erhalten.

4) Eine Determinante hat den Wert Null, wenn in zwei parallelen Zeilen oder Kolonnen die entsprechenden Elemente gleich oder proportional sind.

Beweis. Sind die entsprechenden Elemente zweier Zeilen oder Kolonnen proportional, so kann man dadurch, dafs man den betreffenden gemeinschaftlichen Faktor aus einer dieser beiden Zeilen oder Kolonnen vor die Determinante setzt, die beiden Zeilen oder Kolonnen gleichmachen. Vertauscht man nun die beiden gleichen Zeilen oder Kolonnen, so kann sich, weil die Elemente in beiden Reihen dieselben sind, an der Determinante nichts ändern; nach Satz (3) ändert sich aber das Vorzeichen. Wir haben also $D = -D$. Das kann aber nicht anders geschehen, als wenn $D = 0$ wird

5) Wenn man die Elemente einer Zeile oder Kolonne mit den zu den Elementen einer andern Zeile oder Kolonne gehörenden Unterdeterminanten multipliciert, so ist die Summe dieser Produkte gleich Null. Sind i und k von einander verschieden, so ist:

$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + a_{2i}\,\alpha_{2k} + \dots + a_{ni}\,\alpha_{nk} = 0.$$

Beweis. Man kann die Summe dieser Produkte als Determinante schreiben, welche sich von der bisher immer gebrauchten Determinante dadurch unterscheidet, dafs die kte Kolonne fehlt, an ihrer Stelle aber die ite Kolonne zum zweiten Male vorkommt, so dafs eine Determinante mit 2 gleichen parallelen Kolonnen entsteht, welche nach (4) $= 0$ ist.

Es wird:

$$a_{1i}\,\alpha_{1k} + \dots + a_{ni}\,\alpha_{nk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1i} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{n(k-1)} & a_{ni} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

6) Wenn die Elemente einer Zeile oder Kolonne aus 2 oder mehr Gliedern bestehen, so zerfällt die Determinante in eben so viele Determinanten.

Es wird z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} + b_{1k} \dots a_{1n} \\ \cdot - - - - - - \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nk} + b_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{1k} + b_{1k})\,\alpha_{1k} + \dots (a_{nk} + b_{nk})\,\alpha_{nk}$$

$$= a_{1k}\,\alpha_{1k} + \dots + a_{nk}\,\alpha_{nk} + b_{1k}\,\alpha_{1k} + \dots + b_{nk}\,\alpha_{nk}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - - \\ a_{n1} \dots a_{nk} \quad a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \dots b_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - - - \\ a_{n1} \dots b_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

7) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu allen Elementen einer Zeile oder Kolonne die mit einem gemeinschaftlichen Faktor multiplicierten Elemente einer andern Zeile oder Kolonne addiert.

Beweis. Addiert man zu den Elementen der iten Kolonne die mit l multiplicierten Elemente der kten Kolonne, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} + l a_{1k} \dots + a_{1n} \\ - - - - - - \\ a_{n1} \dots a_{ni} + l a_{nk} \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1n} \\ - - \quad - \\ a_{n1} \dots a_{ni} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ - - - - \\ a_{n1} \dots a_{nk} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die zweite Determinante hat zwei gleiche parallele Kolonnen, ist also nach (4) $= 0$.

Das Produkt zweier Determinanten und die adjungierte Determinante.

Sollen zwei Determinanten beliebigen Grades mit einander multipliciert werden, so können wir die Determinante niedern Grades (2. Zusatz) auf denselben Grad bringen, welchen die andere Determinante hat, so daſs zwei Determinanten desselben Grades zu multiplicieren sind.

Die gegebenen Determinanten seien:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

Zunächst vertauschen wir in der zweiten Determinante die Zeilen mit den Kolonnen, wodurch der Wert nicht geändert wird, so daſs das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \quad a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{21} \dots b_{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}\, b_{2n} \dots b_{nn} \end{vmatrix} \text{ zu bilden ist.}$$

Wir können nun das Produkt dieser beiden Determinanten als Determinante des 2n. Grades schreiben, indem wir die Elemente der einen Determinante in die ersten n Zeilen der ersten n Kolonnen, die Elemente der andern Determinante in die letzten n Zeilen der letzten n Kolonnen des Schemas von $(2n)^2$ Elementen stellen, wenn wir die eine der freigebliebenen Ecken, zu denen auch je n^2 Elemente gehören, mit Nullen ausfüllen und den Elementen der letzten freigebliebenen Ecke beliebige Werte geben.

Indem wir statt dieser beliebigen Werte zum Zwecke der Umformung geeignete Werte wählen, schreiben wir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{1n} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & 0 & & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Daſs wir berechtigt sind, das Produkt in obiger Weise zu schreiben, geht aus Folgendem hervor. Jedes Glied der Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ hat in der groſsen Determinante als Faktor die Det. $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{n1} \\ b_{1n} & b_{nn} \end{vmatrix}$, so dafs also sämtliche Glieder des Produktes in der grofsen Determinante vorkommen müssen.

Dafs aber auch kein anderes Glied vorkommt, oder was dasselbe ist, dafs alle andern Glieder der grofsen Determinante verschwinden, läfst sich auf folgende Weise begründen. Alle nicht zum Produkte beider Determinanten gehörigen Glieder müssen aus jeder der beiden andern Ecken wenigstens ein Element als Faktor haben, denn der Faktor eines beliebigen Elements der rechten obern Ecke von n^2 Elementen kann nur $n-1$ Male eins der Elemente a und ebenso nur $n-1$ Male eins der Elemente b als Faktor haben; damit also das Glied ein Produkt von n Faktoren wird, mufs aus der linken untern Ecke von n^2 Elementen ein Element als Faktor hinzutreten. Alle diese Elemente haben aber den Wert Null. Die grofse Determinante von $(2n)^2$ Elementen läfst sich nun so umformen, dafs sie als Produkt zweier anderer Determinanten n. Grades geschrieben werden kann, von denen die eine den Wert ± 1 hat, so dafs also das Produkt zweier Determinanten n. Grades sich schliefslich als eine Det. desselben Grades darstellen läfst. Zu diesem Zwecke addieren wir die mit a_{11} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{21} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{n1} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der 1. Kolonne. Ebenso addieren wir die mit a_{12} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{22} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{n2} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der 2. Kolonne. Auf dieselbe Weise fahren wir fort, addieren also schliefslich die mit a_{1n} multiplicierten Elemente der $(n+1)$. Kolonne, die mit a_{2n} multiplicierten Elemente der $(n+2)$. Kolonne, ... die mit a_{nn} multiplicierten Elemente der 2n. Kolonne zu den entsprechenden Elementen der n. Kolonne.

Alle genannten Umformungen ändern an dem Werte der grofsen Determinante nichts. Die linke obere Ecke von n^2 Elementen besteht jetzt wegen der geeigneten Wahl der rechten obern Ecke aus Nullen, und die ganze Determinante nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{1n} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn}
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \ldots + a_{n1} b_{n1}, & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} \ldots + a_{n2} b_{n1}, & \ldots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} \ldots + a_{nn} b_{n1}, & b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\
a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} + \ldots + a_{n1} b_{n2}, & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} \ldots + a_{n2} b_{n2}, & \ldots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} \ldots + a_{nn} b_{n2}, & b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} + \ldots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \ldots + a_{n2} b_{nn}, & \ldots & a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} \ldots + a_{nn} b_{nn}, & b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn}
\end{vmatrix}$$

Nach dem Früheren reduciert sich nun diese Determinante von $(2n)^2$ Elementen auf das positive oder negative Produkt der beiden Determinanten vom n. Grade:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \ldots + a_{n1} b_{n1}; & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + \ldots + a_{n2} b_{n1}, & \ldots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} \ldots + a_{nn} b_{n1} \\
a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} \ldots + a_{n1} b_{n2}; & a_{12} b_{22} + a_{22} b_{22} \ldots + a_{n2} b_{n2}, & \ldots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} \ldots + a_{nn} b_{n2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} \ldots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \ldots + a_{n2} b_{nn}, & \ldots & a_{1n} b_{1n} + a_{2n} b_{2n} \ldots + a_{nn} b_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & \ldots & 1 \\
0 & -1 & \ldots & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & -1
\end{vmatrix}$$

Ist n gerade, so ist die erste dieser beiden Determinanten positiv, weil das 1. Element derselben in ungerader Zeile der 1. Kolonne der grofsen Determinante steht, die zweite Determinante wird $= +1$.

Ist n ungerade, so wird die erste der beiden Determinanten negativ, weil ihr erstes Element in gerader Zeile der 1. Kolonne der grofsen Determinante steht, die zweite Determinante wird -1.

Das Produkt beider Determinanten wird also auch positiv.

Wir haben demnach folgenden Satz gewonnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21} + \dots + a_{n1} b_{n1}, & a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21} + \dots + a_{n2} b_{n1}, & \dots & a_{1n} b_{11} + a_{2n} b_{21} + \dots + a_{nn} b_{n1} \\ a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22} \dots + a_{n1} b_{n2}, & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22} + \dots + a_{n2} b_{n2}, & \dots & a_{1n} b_{12} + a_{2n} b_{22} + \dots + a_{nn} b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{11} b_{1n} + a_{21} b_{2n} \dots + a_{n1} b_{nn}, & a_{12} b_{1n} + a_{22} b_{2n} \dots + a_{n2} b_{nn}, & \dots & a_{1n} b_{1n} + a_{n2} b_{2n} \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix}$$

Das Produkt zweier Determinanten vom n. Grade wird eine Determinante desselben Grades, in welcher das Element der i. Zeile und der k. Kolonne gleich der Summe der Produkte der Elemente in der i. Kolonne der zweiten Determinante mit den zugehörigen Elementen in der k. Kolonne der ersten Determinante ist.

Anmerkung. Da man in einer Determinante die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen kann, so kann das Produkt zweier Determinanten 4 verschiedene Formen annehmen, je nachdem man die Elemente der Zeilen oder Kolonnen der zweiten Determinante mit den Elementen der Zeilen oder der Kolonnen der ersten Determinante multipliciert.

Beispiel.

$$\text{Es ist} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2. \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 16 + 15 - 6 = 25.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.1+3.0+1.3, & 0.1+6.0+5.3, & 1\,1+2.0+3.3 \\ 2.3+3.5+1.1, & 0.3+6.5+5.1, & 1.3+2.5+3.1 \\ 2.2+3.4+1.0, & 0.2+6.4+5.0, & 1.2+2.4+3.0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 22 & 35 & 16 \\ 16 & 24 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 22 & 35 & 16 \\ 8 & 12 & 5 \end{vmatrix}$$

Zieht man die mit 3 multiplicierte 1. Kolonne von der 2ten, die mit 2 multiplicierte 1. Kolonne von der dritten ab, so wird das Produkt

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 22 & -31 & -28 \\ 8 & -12 & -11 \end{vmatrix} = 10\,(341 - 336) = 50$$

Man kann den Multiplikationssatz auch umgekehrt dazu benutzen, eine gegebene Determinante in das Produkt zweier Determinanten umzuwandeln, z. B:

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a+c & a+b & b+c \\ a+b & b+c & a+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -a+b+c & a-b+c & a+b-c \\ a-b+c & a+b-c & -a+b+c \\ a+b-c & -a+b+c & a-b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Bildet man aus den n^2 Unterdeterminanten, welche zu den Elementen einer gegebenen Determinante n. Grades gehören, wieder eine Determinante, so erhält man die zu der gegebenen adjungierte Determinante.

Lehrsatz. Die adjungierte Determinante ist gleich der $(n-1)$. Potenz der gegebenen Determinante.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}$$

Beweis. Nach dem Multiplikationssatz wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\,\alpha_{11} + \dots + a_{n1}\,\alpha_{n1} & \dots\dots & a_{11}\,\alpha_{1n} \dots + a_{n1}\,\alpha_{nn} \\ a_{12}\,\alpha_{11} \quad \dots + a_{n2}\,\alpha_{n1} & \dots\dots & a_{12}\,\alpha_{1n} \dots + a_{n2}\,\alpha_{nn} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & & \\ a_{n1}\,\alpha_{11} \quad \dots + a_{nn}\,\alpha_{n1} & \dots\dots & a_{1n}\,\alpha_{1n} \dots + a_{nn}\,\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante sind sämtliche Elemente in der Diagonalreihe gleich der gegebenen Determinante, alle andern Elemente sind $= 0$ (nach Satz 5). Die Determinante reduciert sich also auf das Produkt der Elemente in der Diagonalreihe, sie wird also $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix}^n$.

Dividieren wir auf beiden Seiten durch die gegebene Determinante, so erhalten wir obigen Satz.

Anwendung der Determinanten auf ein System linearer Gleichungen.

Aufgabe. Es sollen die n Unbekannten $x_1 \dots x_n$ aus einem System von n Gleichungen 1. Grades bestimmt werden. Die Gleichungen seien:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n &= A_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n &= A_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots + a_{nn}\,x_n &= A_n \end{aligned}$$

Man bilde aus den Koefficienten der Unbekannten die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

deren Unterdeterminanten $\alpha_{11} \dots \alpha_{nn}$ sind.

Um x_i zu bestimmen, multipliciere man die 1. Gleichung mit α_{1i}, die zweite mit $\alpha_{2i}, \dots$ die letzte mit α_{ni} und addiere sämtliche Gleichungen, so erhält man die Gleichung:

$$(a_{11}\,\alpha_{1i} + a_{21}\,\alpha_{2i} \dots + a_{n1}\,\alpha_{ni})\,x_1 + \dots + (a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \dots + a_{ni}\,\alpha_{ni})\,x_i \dots + (a_{1n}\,\alpha_{1i} + a_{2n}\,\alpha_{2i} \dots + a_{nn}\alpha_{ni})\,x_n$$
$$= A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \dots + A_n\,\alpha_{ni}.$$

Die Koefficienten der Unbekannten sind Determinanten, welche nach Satz 5 alle mit Ausnahme der Determinante, welche von den Koefficienten von x_i gebildet wird, verschwinden. Es wird also:

$$(a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \dots + a_{ni}\,\alpha_{ni})\,x_i = A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \dots + A_n\,\alpha_{ni}.$$

$$x_i = \frac{A_1\,\alpha_{1i} + A_2\,\alpha_{2i} \dots + A_n\,\alpha_{ni}}{a_{1i}\,\alpha_{1i} + a_{2i}\,\alpha_{2i} \dots + a_{ni}\,\alpha_{ni}}$$

Der Nenner ist die Determinante der Koefficienten

$$N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Zähler ist eine Determinante, welche sich von der vorigen nur in der iten Kolonne unterscheidet. Man hat nämlich statt der Elemente $a_{1i}\ a_{2i} \dots a_{ni}$ die auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden absoluten Glieder $A_1\ A_2 \dots A_n$ einzusetzen. Der Zähler wird

$$Z = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & A_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & A_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & A_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es ist demnach:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & A_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & A_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & A_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

In Worten ausgesprochen lautet der Satz: Hat man ein System von n Gleichungen 1. Grades mit n Unbekannten, so ist eine zu berechnende Unbekannte gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante der Koefficienten der Unbekannten ist, dessen Zähler auch eine Determinante ist, die man dadurch aus der Nennerdeterminante erhält, daſs man die Reihe der Koefficienten der gesuchten Unbekannten durch die Reihe der absoluten Glieder ersetzt.

Beispiele.

$$\begin{aligned} -5x + 6y + 7z &= 63 \\ 4x - 5y + 6z &= 17 \\ 3x + 4y - 5z &= -2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 6 & 7 \\ 17 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{Z_1}{N} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 36 & 7 \\ 4 & 17 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{N} = \frac{Z_2}{N} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 6 & 36 \\ 4 & -5 & 17 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{N} = \frac{Z_3}{N}$$

$$\begin{aligned} N &= -5 - 4 \,.\, (-58) + 3 \,.\, 71 = 440. \\ Z_1 &= 36 - 17\,(-58) - 2 \,.\, 71 = 880 \\ Z_2 &= -5\,(-73) - 4\,(-166) + 3 \,.\, 97 = 1320 \\ Z_3 &= -5\,(-58) - 4\,(-156) + 3 \,.\, 282 = 1760. \end{aligned}$$

$$x = \frac{880}{440} = 2 \qquad y = \frac{1320}{440} = 3 \qquad z = \frac{1760}{440} = 4.$$

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 15 \\ x + 2y + 4z + 8u + 16v &= 57 \\ x + 3y + 9z + 27u + 81v &= 179 \\ x + 4y + 16z + 64u + 256v &= 453. \\ x + 5y + 25z + 125u + 625v &= 975. \end{aligned}$$

$$x = \frac{Z_1}{N} \qquad y = \frac{Z_2}{N} \qquad z = \frac{Z_3}{N} \qquad u = \frac{Z_4}{N} \qquad v = \frac{Z_5}{N}$$

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 1 & 5 & 19 & 65 \\ 1 & 7 & 37 & 175 \\ 1 & 9 & 61 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 50 \\ 2 & 18 & 110 \\ 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 60 \\ 6 & 84 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 6 \,.\, 24 = 288.$$

Die Umformungen von N ebenso wie die von $Z_1 \,..\, Z_5$ werden hauptsächlich mit Anwendung der Sätze (7) und (2) gemacht.

$$Z_1 = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 57 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 179 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 453 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 975 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 27 & 2 & 6 & 14 \\ 134 & 6 & 24 & 78 \\ 393 & 12 & 60 & 252 \\ 900 & 20 & 120 & 620 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 53 & 6 & 36 \\ 231 & 24 & 168 \\ 630 & 60 & 480 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 19 & 24 \\ 100 & 120 \end{vmatrix} = 1440.$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 57 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 179 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 453 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 975 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 & 3 & 7 & 15 \\ 122 & 5 & 19 & 65 \\ 274 & 7 & 37 & 175 \\ 522 & 9 & 61 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 & 3 & 7 & 15 \\ 80 & 2 & 12 & 50 \\ 152 & 2 & 17 & 110 \\ 248 & 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -78 & -11 & -60 \\ 72 & 6 & 60 \\ 96 & 6 & 84 \end{vmatrix}.$$

$$= -72 \begin{vmatrix} 78 & 11 & 60 \\ 12 & 1 & 10 \\ 16 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -72 \begin{vmatrix} -54 & -50 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1152.$$

$$Z_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 57 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 179 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 453 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 975 & 125 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 42 & 7 & 15 \\ 1 & 122 & 19 & 65 \\ 1 & 274 & 37 & 175 \\ 1 & 522 & 61 & 360 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 & 12 & 50 \\ 152 & 18 & 110 \\ 248 & 25 & 194 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 22 & 35 \\ 88 & 94 \end{vmatrix} = 864.$$

$$Z_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 57 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 179 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 453 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 975 & 625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 42 & 15 \\ 1 & 5 & 122 & 65 \\ 1 & 7 & 274 & 175 \\ 1 & 9 & 522 & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 80 & 50 \\ 2 & 152 & 110 \\ 2 & 248 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 72 & 60 \\ 96 & 84 \end{vmatrix} = 576.$$

$$Z_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 57 \\ 1 & 3 & 8 & 27 & 179 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 453 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 975 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 42 \\ 1 & 5 & 19 & 122 \\ 1 & 7 & 37 & 274 \\ 1 & 9 & 61 & 522 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 50 \\ 2 & 18 & 110 \\ 2 & 24 & 194 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 60 \\ 6 & 84 \end{vmatrix} = 288.$$

$$x = 5 \quad y = 4 \quad z = 3 \quad u = 2 \quad v = 1.$$

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a \\ bx + cy + az &= b \\ cy + ay + bz &= c. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}} = 1. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & c \\ b & b & c \\ c & c & b \end{vmatrix}}{N} = 0. \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{vmatrix}}{N} = 0.$$

$$\begin{aligned} (a+b)\,x + (b+c)\,y + (a+c)\,z &= ab + ac + bc \\ (a+c)\,x + (a+b)\,y + (b+c)\,z &= ab + ac + bc \\ (b+c)\,x + (a+c)\,y + (a+b)\,z &= a^2 + b^2 + a^2. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} ab+ac+bc & b+c & a+c \\ ab+ac+bc & a+b & b+c \\ a^2+b^2+c^2 & a+c & a+b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a+c & a+b & b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-a+b+c}{2}$$

Man sieht die Richtigkeit der Zerlegung des Zählers von x nach dem Multiplikationssatz sofort ein, wenn man die 1. Zeile mit der 3. vertauscht.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+b & ab+ac+bc & a+c \\ a+c & ab+ac+bc & b+c \\ b+c & a^2+b^2+c^2 & a+b \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}}{-2}$$

$$y = \frac{a-b+c}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+b & b+c & ab+ac+bc \\ a+c & a+b & ab+ac+bc \\ a+c & a+c & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}}{-2}$$

$$z = \frac{a+b-c}{2}$$

Homogene lineare Gleichungen.

Verschwinden in dem Systeme linearer Gleichungen die Gröfsen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so wird das System homogen.

Wir haben dann:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= 0. \end{aligned}$$

Sind die Gröfsen a alle von einander unabhängig, so genügen diesem Systeme nur die Werte:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ \ldots \ x_n = 0.$$

Wird jedoch auch die Determinante des Systems $= 0$, so erhalten die Unbekannten den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$.

Setzt man:

$$x_1 = \lambda\alpha_{i1} \qquad x_2 = \lambda\alpha_{i2} \ \ldots \ x_n = \lambda\alpha_{in}$$

wo λ ein beliebiger Koefficient, die Gröfsen α die Unterdeterminanten zu den Elementen einer beliebigen, aber für alle Unbekannten gleichen Zeile sind, so werden sämtliche Gleichungen erfüllt, da

$$a_{k1}\,\alpha_{i1} + a_{k2}\,\alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{kn}\,\alpha_{in} = 0$$

ist nicht nur für diejenigen Gleichungen, in welchen k von i verschieden ist, sondern auch für die Gleichung, in welcher $k = i$ ist, da die Determinante des Systems verschwindet.

Es verhält sich dann:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in}.$$

z. B.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 6x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 7 & -6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5.16 - 7.2. + 3(-22) = 0.$$

Es verhält sich:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : z_3 &= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= -22 : -33 : -44 \\ &= \quad 2 : 3 : 4. \end{aligned}$$

Dividieren wir alle n Gleichungen eines homogenen linearen Systems durch x_n und setzen:

$$\frac{x_1}{x_n} = y_1 \quad \frac{x_2}{x_n} = x_2 \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_{n-1}$$

so entsteht ein System von n linearen nicht homogenen Gleichungen zwischen $n-1$ Unbekannten. Wir können nach vorigem dann folgenden Satz aussprechen: Ein System von n linearen nicht homogenen Gleichungen zwischen $n-1$ Unbekannten kann nur dann durch bestimmte Werte der Unbekannten gleichzeitig erfüllt werden, wenn die Determinante des Systems verschwindet.

Gemeinsame Wurzel zweier Gleichungen.

Resultante.

Sollen zwei algebraische Ausdrücke:

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{und} \\ &b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

einen gemeinsamen Faktor haben, so mufs zwischen den Koefficienten a ... u. b ... eine Gleichung herrschen. Es müssen dann die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 &= 0 \\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 &= 0 \end{aligned}$$

eine gemeinsame Wurzel haben. Multipliciere ich der Reihe nach die erste Gleichung mit x^{m-1}, $x^{m-2} \ldots x$, die zweite mit x^{n-1} $z^{n-2} \ldots x$, so erhalte ich das System von $n+m$ Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_n x^{n+m-1} + a_{n-1} x^{n+m-2} + \ldots + a_1 x^m + a_0 x^{m-1} \qquad = 0 \\ \qquad a_n x^{n+m-2} + \ldots + a_2 x^m + a_1 x^{m-1} + a_0 x^{m-2} \\ \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad a_n x^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad + a_1 x + a_0 = 0 \\ b_m x^{n+m-1} + b_{m-1} x^{n+m-2} + \ldots \qquad = 0 \\ \qquad b_m x^{n+m-2} - \ldots \qquad = 0 \\ \qquad\qquad b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0 = 0 \end{array}$$

Da diese $n+m$ Gleichungen durch einen gemeinschaftlichen Wert von x erfüllt werden müssen, kann ich die $n+m-1$ verschiedenen Potenzen von x als $n+m-1$ Unbekannte betrachten. Es mufs dann die ganze Determinante des Systems gleich Null werden. Diese Determinante heifst die Resultante der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0 &= 0 \\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \ldots + b_1 x + b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ist die Resultante gleich 0, so haben diese beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel. Auch das Auffinden der gemeinsamen Wurzel ist leicht. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, wie man dabei zu verfahren hat.

Aufgabe. Es soll der Bruch:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5} \text{ gehoben werden.}$$

$$\text{Setze} \quad \begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 &= 0 \\ 6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Multipliciere beide Gleichungen mit x^2 und x

$$\begin{array}{lr} 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - & = 0 \\ \qquad 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x & = 0 \\ \qquad\qquad 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 & = 0 \\ 6x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 & = 0 \\ \qquad 6x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x & = 0 \\ \qquad\qquad 6x^3 + 5x^2 + 6x - 5 & = 0 \end{array}$$

Die Resultante wird:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \\ -4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 48 . 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 48 . 4 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Da die Resultante $= 0$ ist, haben die beiden Gleichungen eine gemeinsame Wurzel und der Bruch läſst sich heben. Um die gemeinsame Wurzel zu finden, schreiben wir 4 von den vorigen Gleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} (2x + 3)\,x^3 + 4x^2 - 3x &= 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 4x - 3 &= 0 \\ (6x + 5)\,x^3 + 6x^2 - 5x &= 0 \\ 6x^3 + 5x^2 = 6x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben, muſs die Determinante des Systems $= 0$ sein.

$$\begin{vmatrix} 2x+3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 6x+5 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0. \qquad \begin{vmatrix} 2x+3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung für x geordnet wird:

$$2x \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$ax + b = 0.$$

$$a = 2(-60 + 12 + 60) = 24$$

$$b = + \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -8 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = +(36 - 16 - 32) = -12.$$

$$24x - 12 = 0$$

$$x = + \tfrac{1}{2}.$$

Die gemeinsame Wurzel ist $\frac{1}{2}$; der gegebene Bruch muſs sich also durch $x - \frac{1}{2}$ oder was dasselbe ist, durch $2x - 1$ heben lassen.

In der That wird durch $2x - 1$ gehoben

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 4x - 3}{6x^3 + 5x^2 + 6x - 5} = \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 4x + 5}.$$

Gleiche Wurzeln einer Gleichung n. Grades.

Diskriminante.

Es soll untersucht werden, ob die Gleichung n. Grades

$$fx = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

2 gleiche Wurzeln hat, und diese Wurzel soll bestimmt werden.

Setzt man in der Gleichung statt x $x + dx$, und sucht in der Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze den Coefficienten von dx auf, welchen wir f^1x nennen wollen, so muſs die Gleichung $f^1x = 0$ die Wurzel, welche in $fx = 0$ doppelt vorkommt, wenigstens einmal haben. Sind nämlich die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$. $x_1\ x_2 \ldots x_n$, so ist die Gleichung $fx = 0$ gleichbedeutend mit der Gleichung $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$.

Setzt man nun hierin statt x x + dx, so wird der Koefficient von dx

$$f'x = a\{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}) + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_n) + \ldots\ldots + (x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\}.$$

Die Parenthese ist eine Summe von Produkten zu je $n-1$ Faktoren. Der fehlende nte Faktor ist im ersten Gliede $x-x_n$, im zweiten $x-x_{n-1}\ldots$, im letzten Gliede $x-x_1$. Sollen nun zwei Wurzeln gleich sein, z. B. $x_k = x_i$, so muſs $x-x_i$ in $f'x$ als Faktor vorkommen; die Gleichung $f'x = 0$, hat demnach auch die Wurzel $x = x_i$. Die gegebene Aufgabe ist dadurch auf die frühere Aufgabe zurückgeführt, zu untersuchen, ob die beiden Gleichungen $fx = 0$ und $f'x = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, und letztere zu bestimmen. Die Resultante ber beiden Gleichungen $fx = 0$ und $f'x = 0$ heiſst die Diskriminante der Gleichung $fx = 0$.

Beispiel. Gegeben ist die Gleichung:

$$\begin{aligned} fx &= x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0. \\ &(x+dx)^3 + (x+dx)^2 - 5(x+dx) + 3 \\ f'x &= \quad 3x^2 + 2x - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \hline x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x & = & 0 \\ x^3 + x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 & = & 0 \\ 3x^3 + 2x^2 - 5x & = & 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 & = & 0 \end{array}$$

Die Diskriminante ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ -1 & 10 & -9 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -14 & 3 \\ -1 & 10 & -9 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 11(-32) + 64 + 288 = 0.$$

$$\begin{array}{rcl} (x+1)x^3 - 5x^2 + 3x & = & 0 \\ x^3 + x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ 3x^3 + 2x^2 - 5x & = & 0 \\ 3x^2 + 2x - 5 & = & 0. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}}_{a} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}}_{b} = 0$$

$$a = 25 - 38 + 45 = 32$$

$$b = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 17 & -14 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 6.70 - 17.34 + 3.42 = -32.$$

$$32x - 32 = 0.$$

$$x = 1.$$

Die Gleichung $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ enthält demnach die Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Die dritte Wurzel wird bestimmt aus der Gleichung:

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 - 2x + 1} = x + 3 = 0$$

$$x_3 = -3.$$

Schluſsbemerkung. Aus den hier gemachten Anwendungen der Determinantentheorie erhellt schon die groſse Bedeutung dieser Disciplin; noch gröſsere Anwendung finden die Determinanten aber in der analytischen Geometrie und in der Mechanik, allerdings Gebiete, die über das Pensum unserer Schule hinausgehen.