Die Lehrpläne für die höheren Schulen vom 31. März 1882 fordern im Zeichnen „die Elemente der darstellenden Geometrie."

In den Erläuterungen, die noch hinzugefügt sind, lesen wir hierüber: „Den Elementen der darstellenden Geometrie muß, um die Anschauungskraft der Schüler zu üben, geometrische Aufnahme und Darstellung einfacher Modelle vorausgehen. Sind für Linearzeichnen in den Oberklassen vier Stunden verfügbar, so sind die einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie, der Perspektive und Schattenlehre, sowie deren Anwendung auf die Darstellung wirklicher Gegenstände (Maschinen- und Architekturteile) zu üben."

Das ist es, was die neue Lehrordnung von 1882 über diesen Unterrichtsgegenstand sagt. Es ist bedeutend weniger, als die frühere von 1859 bot, vielleicht sollte aber auch, obwohl es nicht ausdrücklich angegeben ist, von dem Leser auf diese letztere Bezug genommen werden. In dem Abschnitt derselben, welcher die Bestimmungen über das Zeichnen enthält, sagt der § 8: „Als Ziel des Zeichenunterrichts auf Realschulen kann an die Abiturienten derselben die Anforderung gestellt werden, daß sie befähigt sind: Im Linearzeichnen von einfachen Gegenständen aus dem Gebiete der Architektur, der Maschinenkunde oder anderer Fächer des praktischen Lebens eine Projektion, geometrisch oder perspektivisch, einschließlich der Schattenkonstruktion zu zeichnen. Diese Forderung setzt selbstverständlich voraus, daß die Realschulen in den oberen Klassen den Schüler anleiten, die graphischen Darstellungen auf geometrische Grundoperationen zurückzuführen, ihn also mit der beschreibenden Geometrie, sowie mit der Lehre von der Konstruktion der Schatten und von der Perspektive vertraut machen und ihm genügende Anleitung zum architektonischen und Maschinenzeichnen geben, ohne jedoch in das Technische dieser Fächer sich tiefer einzulassen." Es sind dies die Ausführungen des Lehrplans für den Unterricht im Zeichnen auf Gymnasien und Realschulen vom 2. Okt. 1863, welche dem Realgymnasium in der That ein bestimmtes handgreifliches Ziel gaben. Man wird nur befremdet sein, daß der Unterrichtsplan einer Realschule I. Ord. (Realgymnasium), wie er in Wiese, Verordn. und Gesetze, 1. Auflage Bd. 1, S. 73 näher ausgeführt ist, in Prima erst im zweiten Jahre die darstellende Geometrie als Lehrgegenstand aufführt. Es sollte also erst im letzten Schuljahre an den grundlegenden Unterricht für das darstellende Zeichnen gegangen werden. Es ist diese Verschiedenheit nur ein Beweis dafür, daß überhaupt über Stellung und Bedeutung des Zeichnens die Anschauungen damals noch viel unsicherer waren, als jetzt. Man glaubte damals noch einen für Gymnasien und Realgymnasien gemeinsam gültigen Lehrplan im Zeichnen aufstellen zu können und fügte nur den vier, auch für das Gymnasium gültigen, Stufen noch eine fünfte, nur für die Realgymnasien geltende, hinzu, in welcher außer anderen Dinge auch „Aufgaben aus der Perspektive und Schattenkonstruktionen mit wissenschaftlicher Begründung" hinzukamen. Daß dies eine nur sehr äußerliche Auffassung des Lehrgegenstandes bedeutete, wird wiederum aus § 8 desselben Lehrplans klar, welcher fast genau das Gegenteil vorschreibt. Dort nämlich lesen wir: „Wenn nach der Tendenz der Realschulen das Linearzeichnen als der für diese Anstalten besonders wichtige Teil des Zeichnens angesehen werden muß, so ist damit keineswegs gesagt, daß das Freihandzeichnen daselbst vernachlässigt werden dürfe; dasselbe muß vielmehr bis zu Ende des Schulkursus mit Ernst und Strenge fortgeführt werden. Eine gewisse Übung und Fertigkeit im Freihandzeichnen muß schon erworben sein, ehe die Schüler das eigentliche Linearzeichnen beginnen können. Dieses kann auf der dritten Stufe mit der Projektionslehre beginnen, während auf der vorletzten die Perspektive als Wissenschaft gelehrt, auf der obersten fortgesetzt und die Schattenkonstruktion hinzugenommen wird." Wiese a. a. O. S. 130. Was also zuerst in die fünfte Stufe verwiesen wurde, soll nach dem zuletzt erwähnten schon z. T. auf der vorletzten, der vierten, und die Projektionslehre schon auf der dritten aufgenommen werden, wo sonst eigentlich außer den Übungen im Freihandzeichnen nur praktische Perspektive geübt werden sollte. Es kann hier nicht unsere Aufgabe sein, diese Verschiedenheiten der Anforderungen des Lehrplans im Zeichnen weiter zu verfolgen. Das Schwanken in der Festsetzung des Zeitpunkts, wo das eigentliche, mathematisch begründete geometrische Zeichnen einzutreten hat, hatte wohl hauptsächlich seinen Grund in der Schwierigkeit, diejenige Klassenstufe mit Sicherheit ausfindig zu machen, wo das mathematische Denken der Schüler hinreichend entwickelt sein würde, um den Anforderungen der darstellenden Geometrie zu entsprechen. Darum sagte damals die Unterrichts- und Prüfungsordnung für Realschulen: Für die oberste Stufe des Zeichenunterrichts muß sich die Realschule I. O. die Aufgabe stellen, die graphischen Darstellungen auf geometrische Grundoperationen zurückzuführen und deshalb in I durch praktische Einübung der geometrischen Projektions- und Schattenkonstruktionslehre, durch mathematisch begründete Perspektive den Kursus des Zeichenunterrichts zu vervollständigen." Wiese a. a. O. S. 126. Daß in der obersten Stufe die mathematische Vorbildung hinreichend sein würde, darüber war ja kein Zweifel. Sollte der betreffende Unterricht früher eintreten, so war das nicht verboten, aber „um zu verhüten, daß die Unterweisung im Linearzeichnen zu einer Zeit eintrete, wo es den Schülern an den nötigen mathematischen Vorkenntnissen noch fehlt, hat der Zeichenlehrer, sofern er das Erforderliche nicht selbst in seinen Unterricht aufnimmt, sich wegen der Anordnung des mathematischen Lehrplans mit dem Direktor und dem betreffenden Lehrer zu verständigen." Wiese a. a. O. S. 130.

So war vieles in das Belieben der Lehrer gestellt. Ja es schien gewissermaßen Absicht zu sein, möglichst wenig Bindendes vorzuschreiben. Denn in den Bemerkungen zu § 8 des Lehrplans für das Zeichnen lesen wir: „In den vorstehenden Bestimmungen sind die allgemeinen Grundzüge einer notwendig zu beachtenden planmäßigen Aufeinanderfolge des Zeichenunterrichts enthalten. Es wird den Lehrern überlassen, sich innerhalb derselben mit Freiheit zu bewegen."

Es ist auch so gekommen, daß diese Freiheit sich im vollsten Maße entwickelt hat. Die neuen Lehrpläne vom Jahre 1882, da sie über Ziel und Methode des Zeichnens auch in Bezug auf den hier uns einzig beschäftigenden Zweig des geometrischen Zeichnens nichts aufstellen, was irgendwie den Charakter des Verpflichtenden hat, haben thatsächlich die freie Verwirklichung der jedem Zeichenlehrer etwa eignen Ansicht nicht im mindesten beeinträchtigt, und so zeichnet man unter dem neuen Regiment genau so wie unter dem alten.

Es liegt aber zwischen der Aufstellung jener früheren Bestimmungen und der Jetztzeit ein volles Vierteljahrhundert, und die methodische Behandlung des Gegenstandes, so sollte man meinen, muß doch in dieser Zeit Fortschritte gemacht haben. Wir werden also, wenn wir jetzt auf die Lehrpläne von 1882 wieder zurückkommen, zu fragen haben, wie die auf die darstellende Geometrie bezüglichen Worte derselben nach den jetzigen Anschauungen zu verstehen sein werden.

Wie bereits oben erwähnt, verlangen die neuen Lehrpläne in der beschreibenden Geometrie nur „die Elemente", ohne näher darauf einzugehen, welche Kapitel dazu gehören sollen; und die Erläuterungen reden nur von den einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie, ebenfalls ohne anzugeben, welche das sind.

Sieht man die kurzen, oben im Wortlaut mitgeteilten Sätze genauer an, so treten sogleich einige Schwierigkeiten auf. Erst bei vierstündigem Unterricht im Linearzeichnen auf den oberen Stufen sollen, so hieß es, „die einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie" außer Perspektive und Schattenlehre behandelt werden. Vierstündiger Unterricht im Linearzeichnen findet auf keiner Unterrichtsstufe des Realgymnasiums statt. Es wären also die einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie auf dem Realgymnasium nicht zu üben? Sollte etwa hier ein besonderes Gewicht auf den Ausdruck „üben" gelegt sein, so daß erst bei vierstündigem Unterricht eine Fertigkeit innerhalb des erwähnten Aufgabengebietes gewonnen werde, während bei zweistündigem (oder vielleicht gar bei einstündigem, denn das Zeichnen braucht auch noch Zeit für andere Ziele) nur eine oberflächliche Bekanntschaft mit den einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie gefordert wird? Es kann dies wohl nicht die Meinung der „Erläuterungen" sein. Aber ließen sich vielleicht Elemente der darstellenden Geometrie denken, bei denen man noch nicht die einfachen Aufgaben derselben zu berühren nötig hat? Dies ist nun allerdings nicht möglich. Es lassen sich die Elemente der darstellenden Geometrie von den einfachen Aufgaben aus derselben deswegen nicht trennen, weil beide eigentlich dasselbe nur in verschiedener Form enthalten. Man hat also hier offenbar eine Vorschrift, welche den Lehrer im Ungewissen läßt, und das hat eben nicht dazu gedient, die sehr bedeutenden Verschiedenheiten in den Zielen, welche sich die einzelnen Anstalten im geometrischen Zeichnen gesteckt haben, gegenseitig auszugleichen. An zahlreichen Realgymnasien wird, obwohl ein vierstündiger Unterricht im Linearzeichnen nicht besteht, die Schattenlehre in erheblichem Umfange in den Unterricht hineingezogen, ja selbst Durchdringungen krummflächiger Körper findet man in den Programmen erwähnt, während an anderen das Ziel des Unterrichts in den Projektionen der regulären Körper gesucht wird, so daß Schattenkonstruktionen an Architekturteilen, Vasen und dergl., so wie Durchdringungen gar nicht mehr durchgenommen werden. Da der Ausdruck „Elemente der darstellenden Geometrie" einer so außerordentlich verschiedenen Deutung fähig ist, so vermag allerdings der eine die Beleuchtungsverhältnisse mit Fug und Recht noch hineinzunehmen, während der andere überhaupt bei den Projektionen begrenzter Flächen und Körper stehen bleibt. Es kann das auch nicht anders sein, so lange nicht der Bezirk der Elemente genau abgegrenzt wird. Ist so einerseits der Ausdruck „Elemente der darstellenden Geometrie" der sicheren und fruchtbaren Behandlung dieses Gegenstandes nicht besonders förderlich gewesen, so ist anderseits durch die Einordnung der darstellenden Geometrie in den Zeichenunterricht der Bedeutung dieses wichtigen Lehrgegenstandes nicht völlig Rechnung getragen. Es dient nämlich die descriptive Geometrie keineswegs bloß den Bedürfnissen des Zeichenunterrichts. Indem sie die Veranschaulichung körperlicher Gegenstände ermöglicht, fördert sie ebensosehr auch den mathematischen Unterricht. Die Stereometrie z. B. fordert sogar gebieterisch die Kenntniß derselben. Nun soll zwar auch das Gymnasium die Stereometrie behandeln jedoch von der darstellenden Geometrie absehen. Es ist das aber nur eine Notlage, die freilich das Gymnasium niemals recht abstellen kann, auch wenn in Zukunft der Zeichenunterricht an demselben mehr betont sein wird. Das Realgymnasium ist besser daran, denn es kann seinen Schülern eine Methode, die körperlichen Gebilde in sachgemäßer Weise zu entwerfen, überliefern, welche durch ihre die Anschauung bildende Kraft besonders ausgezeichnet ist. Daß auch auf dem Realgymnasium oft die Stereometrie noch nicht unter Zuhilfenahme der darstellenden Geometrie betrieben wird, mag wahr sein, sie sollte sich derselben aber stets und in umfangreicher Weise bedienen. Es hängt also die Frage nach der Stellung der beschreibenden Geometrie im Realgymnasium sehr wesentlich auch mit der Art und

Weise zusammen, wie die Stereometrie daselbst zu behandeln ist. Wie der mathematische Unterricht vielfach überhaupt noch, so geht auch der stereometrische Unterricht in einer tief ausgefahrenen Spur. Der seit alters her überlieferte Weg mündet dabei auf der letzten Stufe zumeist in ein Gebiet umfangreicher Berechnungen aus, und die Lehrbücher tragen das Ihre dazu bei, durch die traditionelle Herrschaft, welche einigen davon zugefallen ist, dem stereometrischen Unterricht einen fast verknöcherten Charakter aufzuprägen. Diesen Charakter sehe ich z. B. auch darin, daß man mit Heinze als wesentliche Aufgabe der Stereometrie im engeren Sinne, d. h. der Behandlung der „geschlossenen stereometrischen Gebilde" (vergl. Lucke „Über Heinzes Behandlungsweise der geschlossenen stereometrischen Gebilde", in Hoffmanns Zeitschrift 16. Jahrgang, S. 1) die Berechnung der Volumina angesehen hat. Was für eine andere Luft atmet da doch der Anhang C. F. A. Jacobi's zum 10., 11. und 12. Buch von v. Swindens Elementen der Geometrie. Auch Heinzes systematisch vollendete Behandlungsweise ändert daran nichts, daß man die Volumenberechnung auch für die Stereometrie engeren Sinnes nur als einen Teil und auch nur als den praktisch am meisten verwendbaren anzusehen hat.

Eine Methodik des stereometrischen Unterrichts hier zu geben, liegt mir, obgleich ich das Verlockende dieser Aufgabe wohl fühle, fern. Es würde die Grenzen einer Programmabhandlung auch weit überschreiten, wenn ich auf die dabei in Betracht kommenden Fragen mit einer nur einigermaßen befriedigenden Ausführlichkeit eingehen wollte. Kämen doch namentlich auch die Beziehungen der Stereometrie zur Krystallographie dabei mit zur Erörterung, sowie zur sphärischen Trigonometrie und mathematischen Geographie, so daß es sich um eine entsprechende Ineinandergliederung der Mathematik mit einem Teile der Naturkunde und der Physik handelte, ganz abgesehen von der Erörterung der die eigentliche Stereometrie selbst zusammensetzenden Gebiete. Hier soll mir die Frage nach der Stellung des geometrischen Zeichnens zum Unterricht in der Stereometrie vorläufig nur einen erwünschten Anlaß geben, um einen Punkt zu berühren, der später nicht mehr im Zusammenhange mit dem Übrigen besprochen werden kann, und der doch nicht ganz mit Stillschweigen übergangen werden darf.

Es giebt nämlich Fachkollegen, welche es für außerordentlich förderlich halten, in der Planimetrie Konstruktionen und Beweise an nur gedachten Figuren mit den Schülern vorzunehmen. Es mag ja sein, daß eine besonders gute Generation in einer oder der anderen Klasse derartige Übungen verträgt, in den meisten Fällen jedoch wird uns die Phantasie der Schüler dabei im Stiche lassen, und was das Übelste ist, die verschieden beanlagten Schüler werden an verschiedenen Stationen des gemeinsam zu durchmessenden Weges mit ihren Gedanken zu Ende kommen, und so wird zuletzt der Lehrer nur noch mit wenigen Auserlesenen das Ziel erreichen. Die Geometrie baue sich daher lieber an sauber und möglichst genau entworfenen Figuren auf und übe das Entwerfen der Figuren bei jeder Gelegenheit. In der Figur lebt der Lehrsatz wie die Seele in einem Leibe, und ohne Leib kommt auch diese Seele nicht recht zu sich selbst. In der allmählich entstehenden Figur befruchtet sich die noch unentwickelte Phantasie des Schülers und empfängt aus der sinnlichen Anschauung geistige Anregungen, indem sie das Sichtbare in die mannigfachsten Beziehungen setzt. Daß solche aus der Anschauung und Betrachtung guter Figuren fließenden Bereicherungen der mathematischen Phantasie durch flüchtige und daher falsche Figuren unmöglich gemacht werden, ja daß vielfach durch fehlerhafte Figuren, wie sie gar nicht selten im Klassenunterricht von den Lehrern gelitten werden, falsche Vorstellungen befestigt werden, ist mir ganz unzweifelhaft. Also muß der Schüler von früh auf geübt werden, die Figuren mit Sorgfalt und Sauberkeit auszuführen, damit sie aller Unbestimmtheit entkleidet werden, woran namentlich bloß gedachte Figuren an allen Enden leiden.

Wie es so für den planimetrischen Unterricht unbedingt notwendig erscheint, durch gewissenhaft ausgeführte Figuren fortwährend die mathematische Thätigkeit des Schülers zu unterstützen, so muß für den stereometrischen Unterricht nicht minder die Forderung erhoben werden, die Vorstellungen von den räumlichen Gebilden und ihren Eigenschaften durch eine Zeichnung zu kontrollieren und so das mathematische Denken zu kräftigen. Daß dabei allerdings auch eine Grenze erreicht wird, wo die Möglichkeit der Zeichnung zu Ende ist, muß zugestanden werden, so z. B. wenn es sich um Kugelsysteme handelt. Um aber bei solchen Gegenständen ein hinreichend gekräftigtes Vorstellungsvermögen verwenden zu können, muß vorher viel gezeichnet und dargestellt werden. Da begegnen wir nun der eigentümlichen Schwierigkeit, Körperliches in einer Ebene zu veranschaulichen, was eben auf die besondere Methode der beschreibenden Geometrie führt. Sie ist eine so merkwürdige Erfindung des menschlichen Geistes, wie kaum eine andere innerhalb des Gebietes der Mathematik. Will man eine Vergleichung heranziehen, um sich die Bedeutung derselben zu vergegenwärtigen, so liegt mir nichts näher, als an die menschliche Sprache zu erinnern, welche die von derselben völlig verschiedene Welt der wirklichen Dinge für andere Menschen derartig zum Ausdruck bringen kann, daß der Hörer des Worts nicht bloß den Klang vernimmt, sondern die in die Worte befaßte Erscheinung vor seinem geistigen Auge neu erstehen sieht. So giebt die Zeichnung, wie durch ein Symbol, Kenntnis von der mit ihr in keinem Punkte vergleichbaren Welt der Körper und erlaubt dem Zuschauer diese Welt in sich an der Hand der gesehenen Zeichnung neu zu erbauen und zwar genau so, wie sie in der Vorstellung des die Zeichnung Entwerfenden lebte, oder wie sie in Wirklichkeit ist. Der Schüler, indem er die Elemente der darstellenden Geometrie lernt, lernt ein neues Ausdrucksmittel seiner Gedanken über die Körperwelt, eine neue Sprache kennen, und darin liegt der pädagogische Wert der darstellenden Geometrie. So wie die Empfindungen und Gedanken in Worte kleiden zu können ein Zeichen von Durchbildung ist, so wird es nach anderer Richtung ebenso ein Zeichen von Durchbildung sein, sich in dem Mittel der Veranschaulichung körperlicher Dinge leicht und sicher zu bewegen, es setzt das eine entwickelte Fähigkeit anschauliche Dinge zu kombinieren voraus, also ein entwickeltes Anschauungsvermögen.

Wenn ich so der darstellenden Geometrie eine sehr große Bedeutung zuspreche, so kann ich ihr trotzdem innerhalb des Rahmens der Schulmathematik doch keinen selbständigen Charakter geben, wie ihn etwa die analytische Geometrie, deren Elemente um ihrer selbst willen in der Realprima getrieben werden, hat. Es führt mich dies zu dem ersten Hauptpunkte, den ich in diesem Programm zu behandeln gedachte, zu der Frage über

I. Die allgemeine Stellung der darstellenden Geometrie im Lehrplan des Realgymnasiums.

Soll ich meine Meinung hierüber kurz zum Ausdruck bringen, so würde ich sie so formulieren: Die darstellende Geometrie nimmt nur die Stellung eines Hilfsmittels zu bestimmten einzelnen noch näher anzugebenden Zwecken ein und wird nur soweit behandelt, als es diese Zwecke verlangen. Jeder lediglich um seiner selbst willen in den Lehrplan aufgenommene Lehrgegenstand wird sich mit einer gewissen systematischen Vollständigkeit in den Unterricht einführen und ein abgeschlossenes Ganzes von Vorstellungen und Kenntnissen zu erzeugen suchen, wie beispielsweise die Planimetrie, oder die Lehre von den Gleichungen und andere Lehrstoffe dieser Art. Es wird dabei auch zunächst von einer Berührung mit andern Lehrstoffen abgesehen werden können, wenn später auch das Bedürfnis mit solchen Lehrstoffen, die verwandter Natur sind, ein möglichst inniges Bündnis zu schließen, sich nur um so kräftiger bemerkbar machen wird. Von allen solchen Erwägungen halte man sich fern bei Beurteilung der Stellung, welche die darstellende Geometrie auf dem Realgymnasium beanspruchen darf. Es giebt im Lehrplan der Realgymnasien eine solche Fülle von einzelnen Lehrkreisen, daß es schon zu den seltneren Fällen gehört, wenn ein Schüler nicht gänzlich jedes, auf einen einzelnen Lehrgegenstand gerichtete, besondere Interesse einbüßt. Es darf nichts mehr hinzukommen, was auch nur den Schein vor sich herträgt, einen selbständigen Kreis von Vorstellungen nötig zu machen. Die darstellende Geometrie sei lediglich Hilfswissenschaft für das Zeichnen, für die Stereometrie und für das Verständnis des Atlas, also für die Geographie. Sie darf nur so weit getrieben werden, als es für die, diesen Lehrgegenständen gesteckten, Ziele unumgänglich notwendig ist. Sollte sich dabei eine solche Kenntnis des Darstellungsverfahrens ergeben, daß noch gelegentlich andere, nicht in das oben angegebene eng umgrenzte Gebiet fallende Betrachtungen damit möglich wären, so mag auch zugegriffen werden, wie wenn z. B. den Primanern das Verständnis für die Sonnenuhren geöffnet wird. Zeichnen, Stereometrie und Geographie sind obligatorische Lehrgegenstände und müssen bis zu einem gewissen Grade beherrscht werden. Um diese Herrschaft zu befestigen wird eben die darstellende Geometrie herangezogen werden müssen. Das Verständnis der Sonnenuhren wird nicht gefordert, wenn es auch eine erfreuliche Erweiterung allgemeiner mathematischer Bildung bedeutet, diese in früheren Tagen unentbehrliche Uhrgattung auch einmal auf ihre Grundlagen hin untersuchen zu können.

In den „Lehrproben und Lehrgängen", wo eine Besprechung meiner vorjährigen Programmarbeit abgedruckt war, wurde diese meine frühere These: „Die darstellende Geometrie hört als selbständiger Lehrgegenstand auf zu gelten" beanstandet, vermutlich weil der Rezensent glaubte, ich wolle dieselbe überhaupt in den Winkel drücken. Da im Königreich Sachsen diesem Fache eine sehr große Förderung zu teil wird, so mußte eine solche Absicht dem Besprecher meiner Arbeit doppelt auffallend sein. Daß diese Befürchtung nicht zutrifft, das dürfte aus allem bisher Gesagten deutlich genug hervorgehen. Vielmehr kenne ich kein wirksameres Bildungsmittel für die Raumanschauung und überhaupt für anschauliches Denken, als die darstellende Geometrie. Allerdings kenne ich auch kein schwierigeres Kapitel der gesamten Schulmathematik, als ebendieselbe darstellende Geometrie, namentlich aber keins, wo eine Lücke in den Elementen schädlicher wirkte und einen erfreulichen Weiteraufbau mehr verhinderte. Ich kenne endlich auch keins, bei welchem eine annähernd unausgesetzte Übung nötig ist, um das Fremdartige der Sache völlig zu überwinden. Die Vorzüge dieser Disziplin will ich durchaus nicht einbüßen, aber ich will sie der vorhandenen Zeit und den im Schüler vorauszusetzenden geistigen Kräften entsprechend nur als Hilfswissenschaft verstanden wissen. Es würde also mit ihr ähnlich sein wie mit den Logarithmen. Die Logarithmen nimmt die Schule ebenfalls als eine der merkwürdigsten Entdeckungen in den Kreis ihrer Betrachtungen auf, lehrt aber nur soviel, als von ihren Eigenschaften unumgänglich nötig ist. Die Logarithmentheorie besitzt dadurch, daß sie dem Schüler zum erstenmale eine einheitliche Auffassung aller Zahlen, als der Potenzen einer und derselben Basis, zumutet, und damit eine erhebliche Schwierigkeit für das Verständnis entgegenstellt, eine ganz besonders bildende Kraft, aber sie tritt zugleich auch als eine Art Kraftmaschine auf, deren Handhabung aus Zweckmäßigkeitsgründen gelehrt wird. Beide Gesichtspunkte muß der Lehrer ausnutzen, und ähnlich, wie gesagt, steht es um die darstellende Geometrie.

Meine oben erwähnte These: die darstellende Geometrie hört als selbständiger Lehrgegenstand auf, setzte voraus, daß dieselbe als solcher überhaupt noch behandelt wird. Es gab nun Anstalten, und es giebt auch heute noch solche, wo trotzdem, daß im Zeichenunterricht schon von Untersekunda, ja schon von Obertertia an eine allmählich sich bis zu den Schattenkonstruktionen steigernde Behandlung der darstellenden Geometrie stattgefunden hatte, dennoch in einem Halbjahre des Primanerkursus derselbe

Unterrichtsgegenstand von Anfang an in systematischem Aufbau durchgenommen wurde, in der Art und Weise etwa wie in A. Schmidt Elementen der darstellenden Geometrie. In einem halben Jahre mußte alles fix und fertig abgemacht werden, dann wurde dieser Lehrgegenstand verlassen und von einem andern abgelöst. Zur Beurteilung eines solchen Verfahrens wage ich auszusprechen, daß, ganz abgesehen von dem Beweis der Zusammenhangslosigkeit der Unterrichtsfächer, der dadurch geführt wird, ein solches Verfahren für den Schüler wenig Frucht bringt. Soll im Laufe eines halben Jahres in wöchentlich doch höchstens 3 Stunden das ganze große Gebiet der darstellenden Geometrie durcheilt werden, so kann das nur mit größter Hast geschehen, und die Hauptsache, das Zeichnen, tritt dementsprechend in den Hintergrund, womit allerdings die Seele des Unterrichts verkümmert. Es kommen bei solcher Behandlung der darstellenden Geometrie zahlreiche Beziehungen zur Sprache, welche an sich eines für den Schüler Teilnahme erweckenden Inhalts entbehren, wie die in unerschöpflicher Abwechselung herzustellenden Beziehungen des Punktes, der Graden und Ebene. Der Schüler sieht in dieser systematischen Vollständigkeit keinen Zweck, wie denn überhaupt die Jugend für systematische Vollendung ausnehmend wenig Verständnis besitzt, und findet erst wieder mehr Interesse, wenn die geschlossenen Körper in die Betrachtung eintreten. Aber auch hier muß man sich meiner Ueberzeugung nach hüten, die Durchdringungen mit Vorliebe zu behandeln, da sie für das Realgymnasium weder etwas besonders Bildendes noch auch praktische Bedeutung haben. Wollte man mich hierbei etwa auf die Lösung der Aufgabe hinweisen, einen Würfel durch einen gleich großen hindurchzuschieben, und die entsprechenden beim regulären Tetraeder 2c., so ist meine Ansicht darüber diese: das für den Schüler Wichtige und Interessante ist, die Möglichkeit dieses Vorganges darzuthun. Diese wird aber allein schon durch den richtig gewählten Grundriß geliefert. Eine Figur zu entwerfen, in welcher sich die Gestalt des Durchstichs getreu abgebildet findet, ist nicht notwendig. Es wird alles viel deutlicher dabei durch ein Modell, welches heutzutage unschwer zu beschaffen ist. Die Möglichkeit der Lösung dieser Durchdringungsaufgabe ist unbedingt die Hauptsache und fesselt und beschäftigt den Schüler und sein Überlegungsvermögen, während die zeichnerische Abbildung des Modells eine mehr technische Angelegenheit ist. Was ich von der Behandlung der Durchdringungen überhaupt halte, wird später noch ausführlicher zur Besprechung kommen. Hier an diesem Orte ist es meine Absicht, auf das Irrtümliche hinzuweisen, welches ich in einer auf einen kurzen Zeitraum zusammengedrängten und doch in systematischer Vollständigkeit vorgenommenen Behandlung des ganzen der Schule überhaupt anheimfallenden Gebiets der darstellenden Geometrie in Unter- oder Oberprima finde.

Will man überhaupt eine wirkliche Frucht von der darstellenden Geometrie erhoffen, so muß weit früher im Schulleben mit ihr begonnen werden, — sie darf also nicht, wie die Lehrpläne empfehlen, im stereometrischen Unterricht erst vorbereitet werden, — und, wenn sie einmal angefangen worden ist, so muß sie den Schüler unausgesetzt begleiten, um in ihm die Überzeugung zu erwecken, daß sie eine durchaus notwendige Mitgabe ist. Diese Überzeugung gewinnt aber der Schüler, wenn er sie als diejenige Methode erkennt, durch welche es ihm gelingt, körperliche Dinge für sich und andere deutlich abzubilden. Er muß sie, wie ich schon einmal oben ausführte, als eine Sprache ansehen lernen, in welcher er zu anderen über körperliche Dinge reden kann und in welcher er, wenn auch mit Einfachheit, so doch mit Sauberkeit und Verständnis sich auszudrücken lernen soll, dann wird ihm auch wiederum das Verständnis bildlicher Darstellungen vollkommener erschlossen werden können. Daß er aber dazu gelange, bedarf es natürlich einer gewissen Fertigkeit und einer Herrschaft über diejenigen Grundelemente der darstellenden Geometrie, welche unumgänglich nötig erscheinen.

Dies führt uns auf den zweiten Hauptpunkt, der nunmehr kurz zu behandeln ist:

II. Was hat das Realgymnasium unter den Elementen der darstellenden Geometrie zu verstehen.

Diese Elemente werden nach den Leistungen bestimmt werden müssen, die man später von ihnen erwartet. Sehen wir uns also in den einzelnen namhaft gemachten Fächern, Zeichnen, Stereometrie, Geographie nach den Zielen um, die mit Hilfe der darstellenden Geometrie erreicht werden sollen.

Das Linearzeichnen muß auf dem Realgymnasium mit dem Verständnis der Schattenverhältnisse, des Selbstschattens und des Schlagschattens der einfachsten Körper mit gekrümmten Oberflächen, Cylinder, Kegel, Kugel, so wie mit dem Schattieren in abgestuften Tönen, also mit den Isophoten an Cylinder, Kegel und Kugel abschließen. Diese Forderung ist unter keinen Umständen zu ermäßigen, wenn es ja auch bei der dem Zeichnen zugewiesenen Zeit aller Anstrengung bedarf, um sie zu erfüllen und das Schattieren in abgestuften Tönen an einigen zusammengesetzteren Beispielen zu üben. Alle Voraussetzungen, welche zu diesem Ziele unbedingt nötig sind, haben wir als Elemente anzusehen und auf den Klassenstufen, wo das Verständnis vorausgesetzt werden kann, zu üben. Weiter unten soll darüber etwas mehr ins Einzelne gegangen werden.

Die Stereometrie benutzt nach dem oben Ausgeführten die darstellende Geometrie als wesentliches Hilfsmittel zur Veranschaulichung ihrer Gebilde und zwar, das sei gleich hier betont, namentlich der völlig begrenzten. Es geht also die Anforderung, welche sie an die darstellende Geometrie stellt, nicht über die des Linearzeichnens hinaus. Auch wenn sie bei den mannigfachen Zusammenstellungen von Körpern auf Durchdringungen führt, so ist nicht darauf Gewicht gelegt, dieselben in der allgemeinsten Lage zu veranschaulichen, man wird vielmehr die Zeichenebenen stets so zu legen sich bemühen, daß die Schnitte auf gewisse immer wiederkehrende einfachste Formen beschränkt bleiben. Eine eingehendere Antwort auf die Frage, welche schon im Zeichnen behandelten Elemente auch in der Stereometrie von Bedeutung sein werden, wird die dem Pensum der Stereometrie gewidmete Erörterung später geben. Hier dagegen soll noch ein Wort darüber gesagt werden, ob man beim stereometrischen Zeichnen mit einer Ebene oder mit zweien arbeiten will, d. h. ob man schiefe Parallelprojektion auf eine Ebene, oder Orthogonalprojektion auf zwei senkrecht zu einander stehenden Ebenen zu benutzen gedenkt.

Die Schul-Stereometrie zerfällt, wie bekannt, in zwei Abteilungen, welche oft wie zwei völlig von einander getrennte Gebiete behandelt werden, nämlich in diejenige, deren Inhalt die Gesamtheit der aus der Lage von Punkten, Linien und Ebenen zu einander sich ergebenden Lehrsätze enthält, und diejenige, deren Inhalt die Ausmessung der Flächen- und Kubikinhalte der Körper ausmacht. Bei der ersten Abteilung pflegt man in den Lehrbüchern Figuren zu finden, welche nach den Grundsätzen der schiefen Parallelprojektion entworfen sind. Die Figuren zur zweiten Abteilung scheinen häufig auch nach derselben Methode entworfen zu sein, dürfen aber nicht immer allzugenau geprüft werden, da sie sich von Ungenauigkeiten nicht alle frei halten.

Daß die schiefe Parallelprojektion zur Veranschaulichung einfacher, aus Ebenen, Linien und Punkten zusammengesetzter Gebilde ein vorzügliches Hilfsmittel ist, ist allgemein bekannt, aber es muß dem Schüler einfach und nüchtern gesagt werden, wo die Grenze der Benutzbarkeit für ihn liegt, und warum die in den Lehrbüchern zu bestimmten Sätzen entworfenen Figuren gerade so und nicht anders entworfen sind. So werden Lote von beliebigen Punkten des Raumes auf willkürlich gezogene Linien beliebig gelegener Ebenen schon sehr bald verlangt. Ich nehme z. B. das vorzügliche Lehrbuch der Stereometrie von Ferd. Kommerell, herausgegeben von Prof. Dr. G. Hauck und zwar darin die

Aufgabe 4 im ersten Buche. (Vierte Auflage 1878. Seite 2): Von einem außerhalb einer Ebene gelegenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zu fällen. Hier ist die sichere Zeichnung nur unter gewissen Voraussetzungen möglich. Ebenso werden aber auch Tangenten und Tangentenebenen an Kugeln verlangt, die Abbildung sphärischer Dreiecke und Polygone und Ähnliches. Wir stoßen also auf eine große Fülle von Anforderungen an die Schüler, welche mit der schiefen Projektion sowie durch Anwendung von Grundriß und Aufriß von ihnen nicht geleistet werden können. Hier gilt es also die Anwendung der Zeichenmethode auf das gehörige Gebiet zu beschränken. Dies soll weiter unten näher erörtert werden.

Ich komme zur Geographie. So gewiß das Kartenbild eine in irgend einer Beziehung zutreffende ebene Abbildung eines Kugeloberflächenstückes ist, so gewiß muß dasselbe sachgemäß und nach den Grundsätzen der darstellenden Geometrie entworfen werden. Allerdings ist nicht jeder gewillt, die Kartographie als ein zur darstellenden Geometrie gehöriges Kapitel anzusehen, aber soweit sie sich auf Zentralprojektion stützt, haben wir gewiß ein volles Recht, dies zu thun. Die nicht auf Zentralprojektion sich gründenden Methoden, Landkarten zu entwerfen, sollen aber auch nur in sehr bescheidenem Maße die Schüler beschäftigen. Da haben wir das Ziel, welches die Geographie der darstellenden Geometrie steckt: Verständnis der auf Zentralprojektion gegründeten Kartennetzkonstruktionen. Daß hier mehr geometrische Voraussetzungen zum Grunde liegen, als solche, die der darstellenden Geometrie engeren Sinnes entnommen sind, kommt uns in sofern zu gute, als die Elemente der letzteren, so weit sie im Zeichnen nötig sind, vollkommen hinreichen, um auch die Anforderungen, welche die Geographie stellt, zu bewältigen.

Wer die Gradnetzlinien eines Kartenbildes ohne Verständnis betrachtet und sie nur als eine nun einmal übliche Zugabe ansieht, versteht die Karten nicht und bekommt leicht durchaus irrtümliche Vorstellungen von den in ihnen abgebildeten Ländern. Aus dem Kartenbilde mit seinem Liniennetz heraus muß richtig auf die wirklichen Verhältnisse geschlossen werden können. Deshalb möchte ich auch die Bitte an die Kartographen stellen, die sie bis jetzt meist nicht erfüllen, die benutzte Kartenprojektion auf jeder Karte ausdrücklich anzugeben, dann kann auch der Ungeübtere sich schneller hinein finden. An die Schüler des Realgymnasiums aber tritt die gewiß nicht allzuschwer zu erfüllende Forderung heran, die hauptsächlichsten Typen der Kartenprojektionen womöglich durch eigne Ausführung einiger Gradnetze selbst genauer kennen zu lernen. Es sind dies die orthographischen und stereographischen Projektionen, die Mercatorprojektion und einige andere später besonders aufgeführte.

Hiermit wäre für Zeichnen, Stereometrie und Geographie das jedesmalige Ziel bezeichnet, aus welchem heraus auf die Elemente, mit denen es zu erreichen ist, geschlossen werden kann.

Ehe ich nun darüber etwas mehr ins Einzelne gehe, möchte ich noch mit wenigen Worten einen dritten Punkt berühren, nämlich:

III. Welche Meinung haben andere Schulmänner über „die darstellende Geometrie im Realgymnasium“ geäußert?

Die vorstehende Betrachtung ist nicht die immer in der schulmathematischen Litteratur vertretene. Ich möchte hier an eine Meinungsäußerung des Prof. Dr. Stammer in Düsseldorf, „Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realgymnasien“, erinnern, welche in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Jahrgang 16, 1885 S. 561—577, veröffentlicht ist. Prof. Stammer sieht als die einzige Klasse, in welcher darstellende Geometrie im Realgymnasium getrieben werden kann, nach seinen Erfahrungen die Prima an, und will nur mit Rücksicht auf die

Kürze der Zeit und die beiden in Prima vereinigten Jahrgänge für erforderlich halten, daß bereits im mathematischen Unterricht der Obersekunda die ersten Anfänge der darstellenden Geometrie gelehrt werden. Er will ferner, daß die darstellende Geometrie, da sie auf streng mathematischer Grundlage aufgebaut werden soll und ein Bekanntsein des Lehrers mit der Anschauungsweise der neueren Geometrie voraussetzt, in der Regel nicht vom Zeichenlehrer, sondern vom Mathematiker gegeben werde. Endlich sieht er den Zweck des Unterrichts in der darstellenden Geometrie, als angewandter Geometrie in verschiedenen Richtungen liegend: „Er verschafft zunächst dem zukünftigen Techniker und Architekten ein unentbehrliches Hilfsmittel. Er vervollständigt ferner das mathematische Pensum, indem er sich der Stereometrie und der neueren Geometrie anschließt, den Zusammenhang der mathematischen Disziplinen deutlicher macht und dem Schüler immer und immer wieder zum Bewußtsein bringt, wie man einmal von verschiedenen Anschauungen ausgehend, zu demselben Ergebnis gelangt und das andere Mal, auf derselben Grundlage fußend, die Lösung ganz verschiedenartiger Aufgaben findet. Der Unterricht zwingt den Schüler, sich in räumlichen Anschauungen zu üben und unterstützt zugleich das Anschauungsvermögen. Er bildet die schönste Verwendung der bis dahin gewonnenen Kenntnis der geometrischen Lehren und der bis dahin erlangten Fertigkeit in der Handhabung des Zirkels, Lineals und Dreiecks. Er zwingt, wie kaum eine andere mathematische Disziplin, zum angestrengten Denken und fordert, wie keine andere, die schaffende Thätigkeit. Auch ist nicht zu vergessen, wie sehr die Freude an der wohlgelungenen Zeichnung das Interesse an der Mathematik und die Lust an selbständiger Arbeit zu heben imstande ist. Endlich darf auch die Übung im sorgfältigen Zeichnen und in der Benutzung der Instrumente als eine für das Leben, selbst für den Nichttechniker, wertvolle Mitgabe nicht unterschätzt werden." Daß nach Prof. Stammer in der Pflege der mathematischen Richtung das Realgymnasium einen Ersatz für die Beschäftigung mit der griechischen Sprache finden soll, erwähne ich nur, um meinen sehr verschiedenen Standpunkt dem gegenüber nicht zurückzuhalten und damit gleich anzudeuten, daß ich auch in Bezug auf die Bedeutung der darstellenden Geometrie für die Schule eben anderer Ansicht bin.

Von einer Pflege der mathematischen Richtung kann leider bei dem augenblicklich in Kraft befindlichen Lehrplan auf den Realgymnasien im allgemeinen kaum mehr die Rede sein. Als Ersatz für eine Sprache vermag aber die Mathematik meines Erachtens überhaupt nicht angesehen zu werden. Die Mathematik und die mit ihr verbundene Physik wird deshalb stets ein notwendiger Lehrgegenstand auf einer höheren Lehranstalt bleiben müssen, weil die Ordnung der Welt nach Maß, Zahl und Gewicht eine Unterweisung in dieser Hinsicht für solche junge Leute, die Anspruch auf allgemeine Bildung machen, voraussetzt. Daß das Realgymnasium durch seinen etwas weiter gezogenen mathematisch-physikalischen Interessenkreis mehr im Stande ist, als das Gymnasium, dieser Aufgabe gerecht zu werden, und seinen Schülern eine Vorstellung davon zu verschaffen, daß die wirkliche sichtbare Welt durch Maß, Zahl und Gewicht beherrscht wird, ist ja richtig, doch ist es in diesem Punkt dem Gymnasium im wesentlichen nicht voraus, letzteres erreicht nahezu dasselbe Ziel mit beschränkteren Mitteln. In Bezug auf die vom Prof. Stammer betonten Zwecke des Unterrichts der darstellenden Geometrie möchte ich Folgendes aussprechen: Ich sehe davon ab, daß Techniker und Architekten in einem Kursus der darstellenden Geometrie auf der Schule schon fachmäßig gefördert werden, wenigstens kann sich hiernach nicht das Wieviel der darstellenden Geometrie einrichten. Daß die darstellende Geometrie Stereometrie und neuere Geometrie miteinander verknüpft, ist ja richtig, aber hierin liegt eben der bedenkliche Punkt verborgen, denn es fehlt dem Schüler unserer Lehranstalten noch an der gehörigen „Durchbildung des Raumanschauungsvermögens", wie Fiedler mit Recht hervorhebt. Wir dürfen ihm nicht das bieten, was erst auf späteren Stufen zu bewältigen ist. Das Einzige was von sämtlichen von Stammer erwähnten Stützgründen nach meinem Dafürhalten geeignet ist, nachhaltigen Eindruck zu machen, ist der von ihm bestätigte ganz allgemein anerkannte Gedanke, daß „die eigentliche Aufgabe dieses Unterrichts die wissenschaftliche Entwicklung und Durchbildung des Vermögens der Raumanschauung sei und daß diese Aufgabe nicht wohl durch die Überlieferung einer bloßen Methode der Darstellung und einer Anzahl technisch notwendiger oder brauchbarer Konstruktionen erfüllt werden kann." (Fiedlers Vorrede zu seinem Werke „die darstellende Geometrie" S. VII). Daß gerade auf unseren Schulen die Kürze der Zeit, welche der darstellenden Geometrie zufallen kann, leicht dazu verführt, eine Summe von technischen Hilfsmitteln zum Zweck des Zeichnens zu überliefern, ist gewiß nicht ohne Wahrheit, die Schule muß aber davor vor allen Dingen ihre heranwachsenden Schüler bewahren.

Wenn ich richtig über die Stellung urteile, welche unsere Fachkollegen jetzt nach und nach der Behandlung der darstellenden Geometrie im Realgymnasium gegenüber im allgemeinen einnehmen, so will es mir so erscheinen, und ich führe hierzu noch Direktor Holzmüller und Prof. Fiedler an, als wenn sie es nicht für erfolgreich hielten, einen umfangreichen systematisch abgerundeten Lehrgang der darstellenden Geometrie, wie ihn Prof. Stammer auf S. 570 u. 571 des angeführten Jahrgangs der Hoffmannschen Zeitschrift vorlegt, in der Schule durchzunehmen.

IV. Elemente der darstellenden Geometrie zunächst mit Rücksicht auf den Zeichenunterricht.

Nachdem die Koordinaten eines Punktes in Bezug auf die beiden Bildebenen erklärt sind, nachdem ferner das Niederlegen der Aufrißebene in die Grundebene besprochen worden ist, wird

I. auf die Darstellung eines Punktes übergegangen. Die Aufgaben, die hier zu lösen sind, behandeln die Darstellung eines in der Grundrißebene oder in der Aufrißebene gelegenen Punktes, eines Punktes, der gleichweit von beiden Ebenen entfernt ist, dann eines Punktes, der von den Ebenen verschiedene Entfernungen hat. Es kann auch zur Darstellung eines Punktes, der hinter der Aufrißebene, oder unter der Grundrißebene liegend gedacht wird, weitergegangen werden.

II. Es folgen nun die Darstellungen von Strecken, welche als durch zwei Punkte begrenzte Gebilde aufzufassen sind, und zwar Schritt für Schritt von einer in der Zwischenaxe liegenden Strecke fortschreitend zur Darstellung einer beiden Ebenen parallelen, zu einer nur einer einzigen Ebene parallelen und endlich ganz beliebig gelegenen. Die Strecke, welche einer Bildebene parallel ist, führt zu der Darstellung einer Strecke, deren einer Endpunkt in einer Bildebene liegt. Die Darstellung einer Strecke von beliebiger Lage führt zur Abbildung einer solchen, deren Endpunkte in den beiden Bildebenen liegen.

Diese Darstellungen bilden die Vorübung zur Darstellung eines Lichtstrahls, welcher die beiden Bildebenen durchschneidet, und zur Konstruktion der Schlagschattengrenzen linienförmiger Gegenstände.

III. An die Darstellung von Strecken schließt sich unmittelbar die Darstellung ebener Polygone, zunächst regulärer. Es wird z. B. ein regelmäßiges Achteck, dessen Ebene senkrecht zur Grundebene liegt, zur Aufrißebene aber die verschiedensten Lagen hat, unter der Voraussetzung dargestellt, daß eine bestimmte Diagonale stets senkrecht zur Grundebene bleibt. Die Deutung der entstandenen Figuren muß wiederholt verlangt werden, auch ein Modell des Achtecks in der Luft in eine solche Lage gebracht werden, daß die Projektionen dieser bestimmt ausgewählten entsprechen würden.

Nunmehr wird die Figur der Grundebene parallel gedacht, doch so, daß keine Diagonale eine bestimmte Richtung zur Zwischenaxe hat. Ist so Grundriß und Aufriß in einfachster Lage geübt, so wird von der zuletzt beschriebenen aus weiter gegangen. Die Fläche wird derartig gehoben, daß der linienartige Aufriß zwar seine Lage aber nicht seine Gestalt ändert, es wird also die Polygonebene um eine zur Aufrißebene senkrecht gedachte Gerade gedreht. Für eine neue solche Lage des Achtecks soll der Grundriß gezeichnet werden, indem dazu der Grundriß der vorhergehenden Lage benutzt wird. Den Abschluß bildet eine zu beiden Bildebenen beliebig gelegene Achtecksfläche. Das Achteck kann natürlich durch jedes beliebige regelmäßige oder unregelmäßige Polygon ersetzt werden. Jedesmal wird die allgemeine Lage des Polygons zu der Ebene und die Darstellung eines solchen Polygons aus der einfachsten Lage, nämlich parallel zur Grundebene bezw. Aufrißebene abgeleitet. An die Polygone knüpfe man an, um den Kreis darzustellen, die unregelmäßigen Polygone bedürfen kaum der Behandlung.

IV. An die Darstellung der begrenzten Flächen, Polygon und Kreis, schließt sich nun die Darstellung der Körper.

Ein z. B. achteckiges gerades Prisma in einfachster Lage würde den Anfang machen. Die Grundebene desselben ist dabei parallel zur Grundrißebene gedacht. Es folgt dann etwa die Darstellung einer gerade abgestumpften Pyramide in der einfachsten Stellung, nämlich in der aufrechten. Ein pyramidenförmig abgestumpftes Prisma ebenfalls in aufrechter Stellung oder ein zusammengesetzter Sockel bildet den vorläufigen Abschluß.

Alsdann folgt eine Reihe von Übungen entsprechend der Aufgabe 13 in Holzmüllers „Einführung in das stereometrische Zeichnen": Der Würfel soll in Grundriß und Aufriß gezeichnet werden, jedoch in verschiedenen näher zu bestimmenden Stellungen. Diese Stellungen werden dadurch erreicht, daß der Körper, nachdem er in eine zur Grund- und Aufrißebene fest bestimmte Grundstellung gebracht worden ist, derart geneigt wird, daß sein Aufriß nur die Lage nicht aber die Gestalt ändert. Hieraus ergiebt sich die Forderung, den neuen Grundriß zu entwerfen. Sodann wird der Körper weiter so gedreht, daß dieser neue Grundriß seine Lage aber nicht seine Gestalt ändert, wodurch der Körper in eine ganz allgemeine Lage zu den Bildebenen gebracht ist, und die Aufgabe vorliegt, den dazu gehörigen Aufriß zu bestimmen.

Auf diese Weise würde also z. B. eine gerade abgestumpfte Pyramide, oder ein nicht allzuverwickelter zusammengesetzter Körper, ein einfacheres Denkmal in allgemeinster Lage dargestellt werden, indem es durch zwei Drehungen aus einer ursprünglichen, einfachen Lage herausgeführt wird.

Hiermit ist ein Hauptziel erreicht, das für das Zeichnen von allergrößter Bedeutung ist, nämlich die Darstellung geschlossener Körper und zwar zunächst ebenflächiger.

Bis zu dieser Stelle würde das Zeichnen für den stereometrischen Unterricht insofern vorbereitend gewesen sein, als sich in ihm an diese Darstellung ebenflächiger Körper die Darstellung der komplizierten regulären Körper in verschiedenen Lagen anschließen müßte. Diese haben für den Zeichenunterricht keine Bedeutung und können auch wegen der mannigfachen mathematischen Beziehungen, die zum Entwurf des Grundrisses und Aufrisses beachtet werden müssen, nicht wohl in den Zeichenunterricht hineingezogen werden.

Die vornehmlichste Übung, die sich für die Zeichenstunde an solchen Grund- und Aufrißfiguren ergiebt, ist die, aus der Natur des Aufrisses im Zusammenhang mit dem Grundriß auf die wirkliche Lage des Körpers im Raum wieder zu schließen, überhaupt die für das richtige Sehen so unumgängliche räumliche Anschauung auszubilden. Eine unmittelbar praktische Verwendung finden diese Übungen im weiteren Zeichenunterricht selbst nicht und so ist damit die theoretische darstellende Geometrie vor der Hand abgeschlossen. Dies alles ist in Untersekunda zu erledigen. Was vor allen Dingen, wie man sieht, ganz von der Behandlung ausgeschlossen worden ist, das ist die Ebene als unbegrenztes Raumgebilde. Mit der Ebene aber fallen alle jene zahlreichen und z. T. verwickelten Aufgaben und

Betrachtungen fort, welche durch das Zusammentreten von Ebenen mit Punkten, Geraden und anderen Ebenen sich ergeben.

Die notwendige Folge ist aber damit auch, daß die allgemeine Theorie der Durchdringungen auf der Schule nicht behandelt wird. Diese und namentlich die Durchdringungen krummflächiger Körper gehören der Ingenieurwissenschaft an und müssen einem systematischen Kursus der deskriptiven Geometrie zugewiesen werden. Die Durchdringungen haben an sich für die Ziele des Zeichenunterrichts keine Bedeutung.

Werden aber diese Gebiete der Elemente der deskriptiven Geometrie, welche sich mit unbegrenzten Ebenen befassen, übergangen, so muß man auch auf die ebenen Schnitte von Kugel, Cylinder und Kegel Verzicht leisten und auch die Stereometrie muß von einer graphischen Behandlung der Kegelschnitte absehen, was ihr nur zum Vorteil gereichen kann. Die darauf bezüglichen Zeichnungen, z. B. die eines hyperbolischen Schnittes, verlangen zudem eine solche Sauberkeit der Ausführung, daß die geringe Ausbeute, welche die sehr zeitraubende Arbeit liefert, durchaus nicht lohnt. Es würde hier etwas Ähnliches vorliegen wie im Geographieunterricht das Anfertigen kunstvoller Karten. Für die mathematische Behandlung der Kegelschnitte ist aber die graphische Anfertigung derselben doch eigentlich überflüssig, so daß die Behandlung der Kegelschnitte nach graphischer Methode ein für die Schule sehr entbehrliches Kapitel ausmacht.

V. Ein weiteres Hauptkapitel der im Zeichenunterricht zu behandelnden darstellenden Geometrie ist die Schattenlehre. Sie ist, wenn man will, angewandte darstellende Geometrie und ihre Durchnahme liegt für den Zeichenunterricht so nahe, daß es geradezu Unrecht wäre, wenn man, um in dem systematischen Teil der darstellenden Geometrie ein paar Schritte weiter vorwärts zu kommen, die Schattenlehre beiseite liegen lassen wollte. Selbstverständlich wird auch hierin ein weises Maß gehalten werden müssen, damit die Übungen vollständig verstanden und sauber ausgeführt werden können. Die Schattenlehre darf schon um deswillen nicht übergangen werden, weil ein verständnisvolles Zeichnen nach Gipsmodellen ohne dieselbe ganz und gar unmöglich ist. Auch verlangt ein richtiges Sehen ein Bemerken der Verteilung von Schatten und Licht an den einfachsten runden Körpern, was nahezu von selbst auf die Betrachtung der Beleuchtungsstärke führt, womit das Schattieren mit abgestuften Schattenlinien berührt ist. Von jeder überflüssigen Häufung körperlicher Gestalten zum Zweck der Schattenkonstruktionen ist abzusehen, wogegen die in den geläufigen Kunstformen sich immer wiederholenden Zusammenstellungen der Elementarformen berücksichtigt werden müssen.

Hat sich die Darstellung von Körpern als Lehrpensum der Untersekunda ergeben, so schließt sich in Obersekunda naturgemäß die Schattenlehre an. Hierdurch wird gewissermaßen ein erweiterter Kursus wenigstens eines Teils der darstellenden Geometrie geboten, denn während in Untersekunda überhaupt nur die Darstellung begrenzter Gebilde, nämlich des Punktes, der Strecke, des Vielecks, des Körpers in Betracht kommt, wird jetzt mit der unbegrenzten Geraden, nämlich dem Lichtstrahl, jenes elementare Gebiet überschritten. Daß in Wirklichkeit nicht ganz beliebige gerade Linien, sondern nur solche dargestellt werden, welche gegen beide Tafeln unter einem Winkel von 45° geneigt sind, um die Schattenkonstruktionen hieran anzuschließen, welche immer unter solcher Voraussetzung vollzogen werden, nimmt der neuen Betrachtung nichts von ihrer wesentlichen Allgemeinheit.

Es lernt der Schüler jetzt die Durchstoßpunkte einer unbegrenzten Geraden mit den beiden Tafeln, welche schon in Untersekunda berührt waren, neu auffassen und somit eine Gerade überhaupt darstellen. Mit dieser einzigen Erweiterung, welche dem Schüler auf dieser Stufe, zumal wenn nun noch der stereometrische Unterricht fördernd eingreift, völlig zum Verständnis gebracht werden kann, ist ihm ein hinreichender Teil des Gebiets des Schlagschattens eröffnet. Die Darstellung des Schattens von Strecken und Polygonen von den einfachsten Lagen an bis zu den allgemeinsten, so daß der Schatten zunächst entweder ganz auf eine einzige Tafel, oder auf beide Tafeln zugleich fällt, fesselt die Schüler gewiß längere Zeit, zumal sie die Figuren an den wirklichen Schattenbildern, welche die Gegenstände im Sonnenlichte werfen, nachprüfen können. Ein ganz neues Moment tritt im weiteren Verlauf hinzu, wenn der Schatten eines Kreises entworfen werden soll. Daß die dabei entstehende krumme Linie eine Ellipse ist, muß den Schülern dieser Stufe einfach mitgeteilt werden, eine Begründung ist noch nicht möglich. An die Darstellung des Kreisschattens würde sich unmittelbar der der Kugel schließen. Der Schüler lernt hier den Satz kennen, daß die schräge Parallelprojektion einer Kugel stets eine Ellipse ist. Ist die Lehre vom Schlagschatten auf den Tafeln soweit gediehen, so wird nun der Selbstschatten einer Betrachtung unterzogen und bei ebenflächigen und krummflächigen Körpern die Schatten- und Lichtgrenze aufgesucht.

Jedoch sind hierbei die einfacheren Lagen bei den ebenflächigen Körpern und bei den krummflächigen, d. h. dem Cylinder und dem Kegel, nur die allereinfachsten Lagen zu wählen. Diese letzteren sind aber diejenigen, bei denen der Körper mit einer seiner Grundflächen zur Grundrißebene parallel gerichtet ist. Die komplizierteren Aufgaben, z. B. den Selbstschatten eines umgestürzten Kegels oder eines auf der Seite liegenden Cylinders zu entwerfen, sind durchaus bei Seite zu setzen. Hieran schließt sich der Selbstschatten einer Kugel. Mit dieser Aufgabe hat man das Kapitel der Selbstschatten zu beenden. Für die Konstruktion der Schlagschatten ist nur noch auf einige wenige Körperzusammenstellungen einzugehen und zwar auf solche, bei denen mit den bisher gelernten Grundlagen durchzukommen ist, und welche für den Zeichenunterricht zweckmäßig erscheinen. Hierher rechne ich folgende Aufgaben: Den Schlagschatten und zugleich Selbstschatten bei einer cylindrischen Säule, welche eine cylindrische Deckplatte von größerem Durchmesser trägt; bei einer cylindrischen Säule mit polygonaler Deckplatte; bei einem polygonalen Schaft mit cylindrischer Deckplatte zu entwerfen. Es ist hierbei keine allgemeine Behandlung der Durchschnittsfigur z. B. zweier cylindrischen Flächen, wie sie in den ersteren Aufgaben in der gegebenen cylindrischen Säule und dem schiefen Cylinder, welcher durch die der Deckplatte zugehörigen Randstrahlen ja allerdings gebildet wird, nötig, sondern es läßt sich mit den einfachen Mitteln, welche den Schülern bekannt geworden sind, jeder Punkt der Schattenkurve auf dem Säulenschaft konstruieren. Ebensowenig würde bei der alsdann aufzunehmenden Aufgabe: den Schlagschatten, den eine hohle Halbkugel auf ihre innere Fläche wirft, zu konstruieren, eine Anwendung der Aufgabe, die Durchdringungsfigur zwischen Kugel und Cylinder zu zeichnen, vorliegen. Die Durchdringungen, namentlich krummflächiger Körper, gehören wie gesagt nicht ins Realgymnasium, sondern sind den technischen Hochschulen vorzubehalten. Es ist aber angebracht, wenn die erwähnte Aufgabe in der Obersekunda des Realgymnasiums behandelt wird, dem Schüler zu sagen, daß die allgemeinste Lösung derselben nach den aus den Körperdurchdringungen sich ergebenden Regeln zu behandeln wäre, daß aber diese Behandlung erst nach der Schulzeit möglich ist. Der Zeichnung des Schlagschattens einer Hohlkugel folge noch die Zeichnung des Schlagschattens bei einem oben offenen aufrechtstehenden Halbcylinder und endlich werde als Schluß dieses ganzen Abschnittes der Schlagschatten einer cylindrischen durch einen Kugelquadranten abgeschlossenen Nische ausgeführt. Auch hier wird die Schattenkurve, welche durch die Randstrahlen der Nischendecke auf dem cylindrischen Teil der Wandung entsteht, nicht als Anwendung der Durchdringung zweier Cylinder aufgefaßt, sondern jeder einzelne Punkt der Schattenrandkurve wird selbständig auf einfache Weise als Durchschnittspunkt eines einzelnen Lichtstrahls mit der Cylinderfläche bezw. Kugelfläche gefunden. Es übersteigt unter dieser Voraussetzung diese letzte Aufgabe nicht die Fähigkeit eines Obersekundaners und ist recht geeignet, die Tragweite der darstellenden Geometrie dem Schüler zu beweisen, indem er eine sehr eigentümlich gebogene Schattenlinie unter seinem Griffel entstehen sieht. Allerdings sind die Schwierigkeiten der Aufgabe schon groß genug, um das Nachdenken vollauf anzuspannen.

Weiter zu gehen, halte ich nicht für angezeigt. Es dürfte sich überhaupt herausstellen, daß mit den hier erwähnten Aufgaben ein volles Jahr in der Weise ausgefüllt wird, daß das Linearzeichnen mit den andern ebenfalls in Obersekunda in die Zeichenstunde fallenden Übungen im Freihandzeichnen abwechselt.

Es wird daher in Prima auch immer noch einmal wieder darauf zurückgegriffen werden müssen, und das kann z. B. geschehen, indem die in Obersekunda unter einem ganz bestimmten Winkel einfallend gedachten Lichtstrahlen jetzt ganz willkürlich gewählt werden. In Prima wird dann noch der Beleuchtungsstärke Aufmerksamkeit zugewendet. Es werden die Zonen gleicher Beleuchtung bei einer Kugel und einem Cylinder entworfen, damit beim wirklichen Schattieren Schlagschatten und Halbschatten deutlich hervortreten können.

Damit ist dann aber das Ziel des Linearzeichnens auf dem Realgymnasium, welches nur zwei Zeichenstunden für jede Klasse zur Verfügung hat, vollauf erreicht. Selbstverständlich wird überall die einfachste Behandlungsweise gewählt und selbst da, wo, wie z. B. bei dem Entwurf der Polyeder in der allgemeinsten Lage, die neuere Behandlungsweise an sich vorzuziehen wäre, wird doch der älteren ihr Recht in der Schule gegeben werden müssen, da die geistige Ausbildung der Schüler noch nicht soweit gediehen ist, um den Anforderungen, welche die neueren Methoden an das Anschauungsvermögen stellen, gerecht zu werden.

V. Zum stereometrischen Unterricht.

Zuerst sei ein Wort über die dem stereometrischen Unterrichte zu Grunde zu legenden Lehrbücher mit Rücksicht auf die Behandlung der konstruierenden Stereometrie an dieser Stelle erlaubt. Bekanntlich wird jetzt der konstruierenden Stereometrie als einer die Raumanschauung fördernden und in ganz besonderem Maße erziehungskräftigen Disziplin das Wort geredet und zwar mit vollem Rechte. Daher wird es jeder Lehrer der Stereometrie mit Freuden begrüßen, wenn er in dem an seiner Anstalt eingeführten Lehrbuch möglichst zahlreiche Konstruktionsaufgaben besitzt, andernfalls wird er zur Einführung eines solchen Lehrbuchs drängen. Ich greife irgend eines dieser Art aus der jetzt schon ziemlich großen Fülle guter und brauchbarer Bücher heraus, z. B. dasjenige von Milinowski (1881). In dem Vorwort, welches viel von der Geometrie handelt, wird der gewiß sehr richtige Grundsatz ausgesprochen: „Die geometrischen Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal auch in den Einzelnheiten, wenigstens in den unteren Klassen sorgfältig auszuführen, um den Sinn für elegante geometrische Formen hervorzurufen" (S. VI.) Ich eigne mir die Worte natürlich gern an und füge nur, wie weiter oben schon betont wurde, hinzu, daß in den oberen Klassen dann hoffentlich der Sinn für Sauberkeit soweit gefestigt worden ist, daß das Entwerfen sorgfältiger geometrischer Figuren als etwas Selbstverständliches gilt. Auf die Stereometrie Bezug nehmend, sagt nun aber die Vorrede: „Stereometrische Aufgaben nehmen in höherem Grade als andere mathematische Aufgaben die räumliche Vorstellungskraft des Schülers in Anspruch; sie setzen bei ihm die Fähigkeit voraus, sich geometrische Gebilde auch ohne bildliche Darstellung zur Anschauung bringen zu können, eine Fähigkeit, die, für den Baumeister und Ingenieur unbedingt notwendig, nur durch fortgesetzte Übung zu erreichen ist." Hiernach hat es nahezu den An-schein, als wenn eben „ohne bildliche Darstellung“ konstruiert werden sollte und noch bestärkt wird man durch des Verfassers Befürwortung der Kopfgeometrie auch im planimetrischen Unterricht. Daß dem allerdings nur bis zu einer gewissen Grenze so ist, beweist schon die § 2, IV, c gegebene Aussage: „Man benutzt die Parallelprojektion in der Stereometrie, um durch Bilder die Vorstellung von den räumlichen Gebilden zu unterstützen.“ Also soll auch der Schüler dahin streben, sich diese Unterstützung zu nutze zu machen, denn namentlich im Anfange seiner stereometrischen Bemühungen ist er noch sehr unbeholfen im reinen Denken seiner stereometrischen Gebilde. Er soll also zeichnen und die Zeichnung soll dem gedachten stereometrischen Gebilde entsprechen. Er muß also mit Zirkel und Lineal, soweit möglich auch in den Einzelnheiten die Konstruktionen sorgfältig ausführen. Erhält er dazu die notwendigen Anweisungen? In dem bereits angeführten Paragraphen sind zwei Sätze aus der Theorie der Parallelprojektion angeführt: nämlich 1) das Bild einer Geraden ist auch eine Gerade, und 2) das Bild eines Parallelogrammes ist wieder ein Parallelogramm. Reicht er mit diesem Rüstzeug aus? Wir wollen einmal mit einem denkenden Schüler die Aufgabe, von der ich bereits oben Seite 11 sprach, hier auf Seite 5 des Lehrbuchs (also im 1. Heft der „Stereometrie“), zusammen angreifen. Dieselbe lautet: Von einem Punkte A auf eine Ebene η ein Lot zu fällen. Der Schüler folgt der gedruckten Auflösung: „Man ziehe in der Ebene η eine beliebige Gerade FG.“ Er ist dabei auf die vorhergehende Figur verwiesen, welche die Ebene η in Form eines schiefen Parallelogrammes darstellt. Soll er die Linie FG gerade so anlegen, wie sie in jener Figur gezeichnet ist? Sie ist dort nämlich parallel den beiden seitlichen Parallelogrammseiten. Es soll ja eine „beliebige“ Gerade sein, also lege man sie einmal nicht den Parallelogrammseiten parallel. Ist der Schüler über die Bedeutung des Parallelogrammes aufgeklärt, so stellt dasselbe einen rechteckigen Teil der Ebene η dar, dessen vordere Seitenlinie durchaus gerade vor dem Beschauer von links nach rechts verläuft, so daß die beiden Seitenlinien sich durchaus von dem Beschauer, als Lote zu der vorderen Linie, entfernen. Dadurch bekommt die in dieser durch das Lehrbuch gebotenen Figur hineingetragene Linie FG eine sehr bestimmte Lage zum Beschauer, sie läuft nämlich aus der Tiefe des Raumes gerade auf ihn zu. Das weiß der Schüler, darum wird er, indem er zwei beliebige Randpunkte des die Ebene darstellenden Parallelogrammes miteinander verbindet, erst eine beliebige Gerade FG bekommen, welche nun meinetwegen von links vorn nach rechts hinten verläuft. Nun liest er weiter: „Fälle AE $\perp$ FG.“ Er wird offenbar in die größte Verlegenheit geraten, wie er für den in einer bestimmten Lage zu η befindlichen Punkt A gerade den passenden Fußpunkt E ausfindig machen soll. Die rechten Winkel AEF und AEG erscheinen als spitze oder stumpfe Winkel. Das Geforderte ist nach rein planimetrischen Gesichtspunkten unausführbar, die im Lehrbuch angegebene Figur läßt ihn für die von ihm angelegte Gerade FG völlig im Stich, und so greift er zu der sehr zweifelhaften Auskunft einen beliebigen Punkt E zu wählen, wenn er nicht gar durch die Figur des Lehrbuchs dazu (irrtümlicherweise) veranlaßt wird, den Halbierungspunkt der in seiner eigenen Figur sichtbaren Strecke FG zu nehmen. Nun geht's weiter: „Errichte BE $\perp$ FG“, in der Ebene η nämlich. Ja, diese Linie war in der Figur des Lehrbuchs parallel mit der Vorderkante des Rechtecks η, das läßt sich aber hier nicht ebenso machen. Ebenso wenig kann endlich AB $\perp$ EB konstruiert werden. Es muß alles dem blinden Zufall überlassen bleiben. Und das wäre ja auch ganz gut, wenn nur nicht der Punkt A von vorn herein zur Ebene eine ganz bestimmte Lage hätte.

Was hat es nun für einen Zweck, eine Konstruktionsaufgabe durch eine Figur zu erläutern, welche absolut nicht dazu geeignet ist. Es schien mir einmal gut, diesen empfindlichen Punkt unserer Lehrbücher zu berühren, daß sie nämlich von den Schülern blindes Umhertappen, das Zeichnen von aufs Geratewohl entworfenen Figuren für ganz bestimmt gefaßte Konstruktionsaufgaben durchgehen lassen. Hier für diesen bestimmten Fall der gegebenen Aufgabe mußte gesagt werden, daß die Konstruktion, wenn sie durch eine Figur veranschaulicht werden soll, durch Anwendung einer solchen

Hilfslinie FG auszuführen ist, welche parallel der ursprünglichen Seitenbegrenzung des rechtwinklig gedachten und wie ein Parallelogramm gezeichneten Ebenenabschnitts verläuft. Und auch dann ist das Lot AE nur auf mannigfachen Umwegen, die immer wieder Rücksicht auf das vorhandene Ebenenstück nehmen, sachgemäß dem gegebenen Punkte A entsprechend anzulegen, sonst bekommt man keine Linie AB, welche den Namen Lot verdient, es könnte eben jede beliebige, von A ausgehende und zur Ebene η laufende gerade Linie auch neben jener schon entworfenen den Anspruch darauf erheben, als Lot zu gelten. Gewiß geht der Verfasser des genannten Lehrbuches manchen Schwierigkeiten des Zeichnens aus dem Wege, wenn er sich entschlossen hat „die stereometrischen Übungen zum Teil der Geometrie der Lage zu entnehmen und so durch bloße Lagenbeziehungen der Ebenen und Kugeln gegeneinander die stereometrische Vorstellung zu üben" (S. V des Vorworts). Aber wenn die Aufgabe z. B. geradezu lautet (Aufgabe 26 des Übungsbuches S. 4). „Ein beliebiges Viereck in ein Rechteck zu projicieren", so wäre doch ein Schüler nicht zu tadeln, wenn er die Figur auch zu entwerfen versuchte, um sich das Rechteck anzusehen und seine Gestalt zu prüfen. Ist es da nicht nötig, in einer Ebene, welche sich durchaus nicht gerade vor ihm in vertikaler Lage befindet, einen Kreis zu entwerfen? Wie wird wohl die Figur eines Kreises in Parallelprojektion gestaltet sein? Auch hierfür stellt dem Schüler das Lehrbuch nichts zur Verfügung, und es bleibt ihm nichts übrig, als eine beliebig gestaltete ovale Linie zu entwerfen, und zu glauben, dieselbe stelle einen Kreis hinreichend deutlich in der gewählten Ebene dar.

Ich verlasse das Milinowski'sche Lehrbuch und wende mich zu einem anderen, welches mehr und mehr durch seine ausgezeichneten Eigenschaften Verbreitung gefunden hat. Das bereits oben namhaft gemachte Lehrbuch von Dr. Ferdinand Kommerell in der Umarbeitung des Professor Dr. Guido Hauck spricht sich über das Zeichnen folgendermaßen aus: „Während in der ebenen Geometrie die Figuren in ihrer wahren Gestalt mit Lineal und Zirkel in einer Zeichenebene konstruiert werden können, ist dies bei den räumlichen Gebilden nicht möglich. Daher müssen die Konstruktionen der Stereometrie zunächst mit der Einbildungskraft vollzogen werden, welcher man jedoch durch Zeichnung unterstützend zu Hilfe kommen kann. Diese Zeichnungen bestehen im allgemeinen in Abbildungen der räumlichen Gebilde, wie sich dieselben, aus unendlich großer Entfernung betrachtet, ausnehmen würden."

Ich führte bereits aus, daß das Vollziehen der Konstruktionen mit der Einbildungskraft bei einem Massenunterricht sehr bald im Stich läßt, es kann eben bei Schülern von noch unentwickelter Einbildungskraft kaum zum Ziele führen, da sich oftmals erst an einem vor Augen gebotenen Bilde, entweder an einem Modell oder einer guten Zeichnung das Anschauungsvermögen, die Einbildungskraft bilden soll. Es drängt sich also ganz von selbst die Zeichnung der körperlichen Gebilde auf, da schließlich das Modell zurücktreten muß, auch darum, weil man nicht für jede Konstruktionsaufgabe ein Modell schaffen kann. Wie äußert sich nun hierüber G. Hauck? Sehr charakteristisch ist da eine Stelle in der Vorrede zur vierten Auflage (1878), der zweiten, welche Prof. G. Hauck besorgte. Hier heißt es: „Die wichtigste Neuerung besteht in der Neugestaltung der Figuren. — Wenn man auch wohl nicht gut daran thun dürfte, beim stereometrischen Zeichnen allzusehr auf strenge Richtigkeit zu dringen, insofern dadurch die Leichtigkeit und Ungeniertheit des räumlichen Konstruierens beeinträchtigt wird, und wenn sich auch in gewissen Fällen bloße schematische Figuren nicht wohl umgehen lassen, so scheinen mir doch unrichtige und unmögliche Gefühlsfiguren mit der Würde eines Lehrbuchs schlechterdings unvereinbar zu sein. Es wird auch gewiß dem Schüler das selbständige Entwerfen von Figuren wesentlich erleichtert, wenn sein Auge durch das Lehrbuch an richtige, nach bestimmtem Systeme konsequent durchgeführte Figuren gewöhnt ist. Mit Rücksicht hierauf sind in der vorliegenden vierten Auflage sämtliche Figuren auf Grund genauer Konstruktionen gezeichnet."

Es ist ja allerdings richtig, daß die „Leichtigkeit und Ungeniertheit" der Konstruktion durch streng richtig entworfene Figuren leicht beeinträchtigt wird. Darum vermeide man sie beim ersten

Entwurf einer Konstruktion, bei welchem eine ungefähre Skizze der notwendigen Ebenen, Linien, Punkte wohl hinreichen dürfte, aber zweckmäßig wird es immer sein, dem Schüler Gelegenheit zu geben, einige solche Skizzen wirklich sorgfältig auszuführen, er wird soviel wesentliche und wichtige Überlegungen dabei machen müssen, daß sich die zeitraubende Arbeit reichlich belohnt findet, und vor allen Dingen wird er lernen, daß es überhaupt möglich ist, räumliche Gebilde so darzustellen, daß nicht allein er, sondern jeder, der die Figur betrachtet, das derselben entsprechende Gebilde sich dabei vorstellen kann. Daher kann mit Gefühlsfiguren schlechterdings garnichts angefangen werden. Die Figuren müssen nach objektiven allgemeingültigen Grundsätzen angefertigt werden, wenn es überhaupt möglich ist, und auf dem Realgymnasium ist es möglich. Freilich alle Figuren zu jeder Aufgabe sind auch nicht darstellbar, und so gilt es gehörig zu sondern, auch die Methoden zu sondern, nach denen gezeichnet werden soll. Da trifft, meines Erachtens, G. Hauck durchaus das Richtige, wenn er in seiner Vorrede schon zur vierten Auflage schreibt: „Bei den zur Sphärik gehörigen Figuren wurde mit Rücksicht auf den kreisförmigen Umriß der Kugel Orthogonalperspektive angewendet.“ Er hat mit einer gewissen Peinlichkeit das deskriptive Zeichnen ferngehalten, indem er schreibt (Vorwort zur 3. Auflage): „Bezüglich der Konstruktionsaufgaben im Anhang könnte man darüber streiten, was noch ins Gebiet der Stereometrie und was ins Gebiet der deskriptiven Geometrie gehört. Ich bin von dem Grundsatz ausgegangen, daß das Wesen der deskriptiven Geometrie in den zwei Projektionsebenen besteht und habe daher die Konstruktionen von Polyeder-Elementen in wahrer Größe, die nur eine Projektionsebene erfordern, aufgenommen. Einen Vorgang hierfür bilden die Dreikantskonstruktionen. Bei dieser Gelegenheit mag die Bemerkung Platz finden, daß der gesamte Übungsstoff sich ebensogut auch für die deskriptive Geometrie verwerten läßt.“

Hiernach soll also das Zeichnen in zwei Ebenen, wenn thunlich, grundsätzlich ausgeschlossen werden, um im Gebiete der Stereometrie zu bleiben. Für Gymnasien mag ja das gerechtfertigt erscheinen, für die Realgymnasien braucht man sich eine derartige Beschränkung nicht aufzulegen, sondern der Schüler mag mit einer oder zwei Projektionsebenen arbeiten, je nachdem es der Natur der Aufgabe entspricht und soll den Grundsatz befolgen, daß, wo überhaupt eine Figur entworfen wird, diese richtig und genau ist und daß da, wo eine solche nicht genau angefertigt werden kann, überhaupt nicht gezeichnet werde.

Ein Handbuch, welches diesen Gedanken in durchaus sachgemäßer Weise zur Ausführung bringt, ist die „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ von Direktor Holzmüller. Es begegnet sich dieses in der einen Richtung mit dem Lehrbuch von G. Hauck, daß es zur Parallelperspektive die Voraussetzung macht, die in die Tiefe gehende, zur Breiten- und Höhenrichtung senkrechte Strecke in ein Drittel der wirklichen Länge zu entwerfen und unter einem bestimmten Winkel gegen die horizontale Richtung ablaufen zu lassen. Daß der Winkel von 30° Größe angenehmere Figuren liefert als ein Winkel von 60°, wie ihn G. Hauck wählte, ist eine Sache für sich. In der anderen Beziehung, daß auch Grundriß und Aufriß zur Geltung kommen, übertrifft es jenes Lehrbuch und weist so den Lehrer auf diese an geeigneter Stelle sehr zweckentsprechenden Darstellungsweise. Sehr richtig halte ich die in dem Vorwort ebenfalls zum Ausdruck gekommene Ansicht, daß trotz der Aufnahme vieler Elemente der darstellenden Geometrie von einer systematischen Bearbeitung der Projektionen von Punkten, Kurven, Geraden, Flächen, Körpern, Abstand genommen ist und zwar aus Gründen, die durchaus stichhaltig und vor allen Dingen der Praxis entnommen sind, indem nämlich „zu befürchten steht, daß man aus Zeitmangel nicht einmal bis zu den verwertbaren Dingen“ vordringen wird. Es handelt sich in der That, wie Dir. Holzmüller ebenfalls betont, „nur um eine methodische Auswahl fruchtbarer Übungsaufgaben, die sich auch ohne die breitere Grundlage der darstellenden Geometrie bewältigen lassen, Aufgaben, durch die man unvermerkt in diese Disziplin eingeführt wird.“ In dem einem Punkte nur möchte ich, nach meinen bisherigen Erfahrungen wenigstens, von den in diesem Hilfsbuch ausgesprochenen Ansichten abweichen, daß ich Schattenkonstruktionen nicht ausgeschieden sehen möchte. Natürlich als stereometrisches Kapitel können sie nicht angesehen werden, sondern sind der Zeichenstunde zuzuweisen, und können mit sehr geringen Hilfsmitteln bewältigt werden.

Eine Verwendung der Orthogonalprojektion, die mir für den Unterricht, namentlich während der Behandlung des berechnenden Teils, von größerer Wichtigkeit zu sein scheint, würde sich bieten beim Entwurf der Figuren zu den Berechnungsaufgaben, wie sie sich in den herkömmlichen Aufgabensammlungen finden, und wie sie in ziemlicher Anzahl durchgearbeitet werden müssen, um dem Schüler eine gewisse Schlagfertigkeit im Aufstellen des Ansatzes zu verschaffen. Es ist noch immer keine Seltenheit in Aufgabensammlungen Figuren zu begegnen, welche jeder stereometrischen Anschauung geradezu Hohn sprechen. Wenn z. B. ein grader Kreiskegel abgebildet wird, indem die Basis als vollkommener Kreis erscheint, während die Spitze fern ab vom Mittelpunkt als ein außerhalb des Kreises liegender Punkt auftritt, so kann an einer solchen Figur gar nichts gezeigt werden. Gewöhnt sich dagegen der Schüler von früh an sich zu fragen, nach welcher von beiden Darstellungsweisen, derjenigen vermittelst Parallelperspektive, oder derjenigen vermittelst Aufriß und Grundriß sich die zu einer Berechnungsaufgabe notwendige Figur am besten entwerfen läßt, so wird damit oft schon die wesentlichste Schwierigkeit der Lösung gehoben sein. Es werden dann auch solche Figuren bald verschwinden, wie etwa ein Kreis mit eingeschriebenem Quadrat als Bild für eine Kugel, der ein Würfel einbeschrieben ist, eine Mißfigur, die man nicht selten von im Zeichnen ungeübten Schülern bekommt. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Figuren-Zeichnen bei Gelegenheit der Stereometrie führe ich nun im einzelnen näher aus, wie sich dasselbe mit dem stereometrischen Unterrichte selbst verbindet.

Vorausbemerkt werde, daß im allgemeinen der stereometrische Unterricht in Obersekunda seinen Anfang nimmt. Das Realgymnasium hat den Vorzug, daß die Schüler bereits von Quarta an systematisch im Zeichnen und körperlicher Anschauung geübt werden. Das empirische perspektivische Zeichnen wird hier schon an Modellen vorbereitet und ausgeübt. Später in Sekunda, an manchen Anstalten schon in Obertertia, werden ebenfalls in der Zeichenstunde die allereinfachsten Elemente der darstellenden Geometrie abgehandelt, wobei doch wieder die räumliche Anschauung stark angespannt werden muß. In Obersekunda kommt das Linearzeichnen zu einem vorläufigen Abschluß. So sind die Schüler für die Stereometrie hinlänglich vorbereitet und es bedarf zu einer Belebung der räumlichen Vorstellung in der Regel nicht besonderer Aufgaben, etwa solcher, wie sie der Anfang des Holzmüllerschen Buches bietet, sondern man kann sogleich den theoretischen Teil mit Erfolg in Angriff nehmen. Dabei wird die von Professor G. Hauck und von Direktor Holzmüller anempfohlene Parallelperspektive für die Figuren gleich von vornherein in Anwendung gebracht.

Ein besonders wichtiger Abschnitt, in dem das Zeichnen beim stereometrischen Unterricht in sein Recht tritt, ist das Kapitel von den regulären bezw. halbregulären Körpern. Im Zeichenunterricht, als in Sekunda Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper den Gegenstand der Unterweisung bildeten, wird der Würfel, da er eben nichts anderes als ein Prisma ist, schon vorgenommen sein. Hier in der Stereometrie wird es eine, für den Schüler einen gewissen Reiz in sich schließende Aufgabe sein, die fünf regulären Körper in den drei Hauptlagen zur Grundebene in Grund- und Aufriß darzustellen. Es führt namentlich die unabhängige Abbildung jeder einzelnen dieser Lagen, nämlich derjenigen, bei welcher der betreffende Körper mittelst einer Fläche, einer Kante oder einer Ecke auf der Grundfläche steht, zu mannigfaltigen, das mathematische Denken und zugleich die zeichnerische Thätigkeit in Spannung haltenden Übungen. Ist der Betrachtung der regulären Körper das Kapitel vom Euler'schen Lehrsatz $E + F = K + 2$ vorausgegangen und haben die Schüler die Möglichkeit kennen gelernt, die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten solcher Körper zu bestimmen, deren einzelne körperliche Ecken auf ganz übereinstimmende Weise gebaut sind, so wird der Lehrer hin und wieder Schüler-Generationen treffen, die er auch wenigstens mit einem halbregulären (Archimedischen) Körper bekannt machen kann und das geschieht am sichersten, wenn er ihn im Grundriß und Aufriß entwerfen läßt. Als Beispiel mag der in dem Lehrbuch des Projektionszeichnens nach System Kleyer von J. Vonderlin Teil 2 abgebildete 60-Flächner dienen, welcher sehr gut einem Oberprimaner zugänglich gemacht werden kann. Da Netze der halbregulären Körper nicht sehr verbreitet sind, da diese auch in den Krystallformen nicht vorkommen, sondern nur in der Vorstellung der Mathematiker entstanden sind, so dient lediglich eine sorgfältige Zeichnung nach Aufriß und Grundriß dazu, eine hinreichende Anschauung davon zu verschaffen.

Wenn ich vorhin die unabhängige Zeichnung der Hauptlagen jedes einzelnen der fünf regulären (platonischen) Körper befürwortete, so geschah es, um bei dem Entwurf des jedesmaligen Grundrisses und Aufrisses das mathematische Denken in Thätigkeit zu setzen und die planimetrischen Beziehungen, welche die Dreiecke, Vierecke und Fünfecke, welche jene Körper in mannigfacher Verbindung miteinander zeigen, so recht zur Geltung zu bringen. Neben dieser Übung kann aber eine andere rein zeichnerische herlaufen, nämlich diejenige, die allgemeinste Lage eines jeden der fünf Körper zu den beiden Zeichenebenen im Grundriß und Aufriß zur Anschauung zu bringen, was durch die bekannten beiden Drehungen leicht zustande gebracht werden kann. Nur beachte man, daß es beim Ikosaeder und Dodekaeder überhaupt ziemlicher Mühe und Sorgfalt bedarf, um saubere und richtige Figuren zu erreichen. Es werden, um dieselben herzustellen, auch wieder die Sätze über die Konstruktion regulärer Fünfecke zur Repetition gestellt werden müssen. Denn so sonderbar es klingen mag, es wird doch in den meisten Fällen zutreffen, daß hier sich die erste Gelegenheit für viele Schüler, auch Realgymnasiasten, bietet, ein reguläres Fünfeck aus gegebener Seite zu konstruiren, während früher wohl meist ein solches aus gegebenem umbeschriebenen Kreise entworfen wird.

Die Zeichnungen der regulären Körper sollen zunächst dazu dienen, um dem Schüler zu zeigen, wie mannigfaltig der Anblick sein kann, den uns solche Körper bei den verschiedenen Stellungen zu einer Ebene bieten und denjenigen ausfindig zu machen, der am besten die ganze Eigentümlichkeit des betreffenden Körpers erkennen läßt. Ganz ähnliche Übungen lassen sich an die Kugel, auf welcher Meridiane und Breitenkreise gezeichnet sind, anschließen. Es ist eine hübsche Aufgabe, von der einfachsten Lage ausgehend, die Erdkugel in der allgemeinsten Lage zur Grund- und Aufrißebene zu entwerfen. Will man auch noch einen Wulst hinzufügen, so bietet dies sachlich keine Schwierigkeiten, werden doch immer wieder die bereits in der Zeichenstunde zuerst vorgenommenen und nun bereits zum völligen Eigentum gewordenen Drehungen des darzustellenden Körpers für die neuen Lagen, in die er gebracht wird, benutzt. Hierin stehe ich vollkommen auf Direktor Holzmüllers Standpunkte und spreche nichts anderes aus, als was er durch Aufnahme der Aufgaben 116 und 126 beabsichtigte.

Da das geometrische Zeichnen, nach meiner grundsätzlichen Stellung demselben gegenüber, nur ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung nicht sofort klar vor dem inneren Auge liegender Raumgebilde sein und damit einen Zwang ausüben soll, sich diese Raumgebilde wirklich bis ins Einzelne zu vergegenwärtigen, so tritt eine neue Übung bei demjenigen Gebiet des stereometrischen Klassenpensums ein, wo es sich um Berechnungen von stereometrischen Gebilden handelt. Diese Berechnungen sind nicht zu umgehen, sie sind aber um ihres algebraischen Beigeschmacks willen nicht besonders in Gunst, wenigstens nicht bei denjenigen, welche, wie ich es ebenfalls je länger je mehr thue, den rein geometrischen Betrachtungen den Vorzug geben. Ich beginne frühzeitig mit Berechnungen des Radius der eingeschriebenen und umbeschriebenen Kugel und nehme natürlich außer den geraden, regelmäßigen Pyramiden auch die regulären Körper. Hier stellen sich die Aufgaben ein, welche Dir. Holzmüller in Nr. 113—115 angiebt, jedoch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet. Denn, da es mir überhaupt nur auf die sorgfältige gedankenmäßige Durcharbeitung eines z. B. aus fünfseitiger geraden Pyramide und einbeschriebener Kugel zusammengesetzten körperlichen Gebildes ankommt, und zu gleicher Zeit dem Schüler in der künftigen Figur ein naturgemäßer Anhalt zur Berechnung der in der Aufgabe etwa geforderten Stücke geboten werden soll, so wird die Figur in der einfachsten, der künftigen Berechnung entsprechendsten Lage gedacht, und hieraus ergiebt sich die Darstellung.

Nehme ich als bestimmtes Beispiel, noch einmal die soeben angegebene Aufgabe, den Radius der einer gegebenen geraden, regelmäßigen, fünfseitigen Pyramide einbeschriebenen Kugel zu berechnen, so wird die Pyramide so auf die Grundebene gestellt, daß eine Grundkante zur Zwischenaxe senkrecht steht. Hieraus ergiebt sich die Konstruktion der eingeschriebenen Kugel genau geometrisch und die entstandene Aufrißfigur enthält alles, was zu einem naturgemäßen Ansatz zur Berechnung nötig ist. Eine Figur nach den Grundsätzen der Parallelperspektive zu entwerfen, würde hier große Kraftverschwendung sein. Es wird hier also eine genaue Figur lediglich zu dem Zwecke entworfen, dem noch ungeübten Schüler einen Anhalt für seine Vorstellungen, welche einer Berechnung dienen sollen, zu geben. Will man daran nun anknüpfen und den Schüler auch die regulären und andere Körper zusammen mit ihren ein- und umgeschriebenen Kugeln in der allgemeinsten Lage zu den Zeichenebenen zeichnen lassen, so wird das nur eine nochmalige Anwendung der früher bereits vielfach geübten Grundsätze sein und im allgemeinen nicht gerade besonders empfohlen werden können, wenn es ja auch keinen Schaden stiften wird, wenn es geschieht. Zu den beiden hauptsächlichsten Kugeln tritt, und das ist in jeder Beziehung ein dankbares Kapitel, noch die kantenberührende Kugel hinzu. Die zu einer solchen gehörenden Gesamtfigur bietet insofern noch neue Momente, als sie Schnittfiguren der Kugeloberfläche mit Seitenflächen der betrachteten Körper zeigt. Eine solche Gesamtfigur in der allgemeinsten Lage zu entwerfen, hat ein für den Schüler hinreichendes Interesse eben durch die Gestalt und Lage dieser auftretenden Schnittfiguren, und würde daher eine selbständige Durcharbeitung erfahren können.

Hiermit ist meines Erachtens nun sowohl die Aufgabe der Stereometrie, als mathematischer, selbständig zu behandelnden Disziplin, und das in ihr zur Verwendung kommende geometrische Zeichnen abgeschlossen. Es erübrigt aber noch über zwei Gegenstände ein Wort hinzuzufügen. Diese sind die Linearperspektive und die Theorie der Kegelschnitte. Ich will mit der letzteren beginnen.

Es ist ein sehr erklärliches, auch in gewisser Hinsicht berechtigtes, aber häufig zu weit gehendes Bestreben der für ihre Wissenschaft begeisterten Mathematiklehrer, denselben Gegenstand auf möglichst vielseitiger Basis aufzubauen. Ein klassisches Beispiel hierfür sind die Kegelschnitte. Da ist die rein synthetische Behandlung erstens etwa nach Steiner, dann zweitens unter Anwendung besonderer methodischer Hilfsmittel, wie die harmonische Verwandtschaft, dann drittens die analytisch-geometrische Behandlung, viertens die aus der Parallelprojektion des Kreises auf eine Ebene, fünftens unter Zuhilfenahme des Schnittes einer Ebene mit einem Kreiskegel. Hieraus die vernünftige und den Schüler nicht überlastende Auswahl zu treffen, ist wichtig, denn alles kann man nicht zu gleicher Zeit, auch nicht nacheinander durchnehmen. Freilich ließe sich ja wohl eine derartige Anordnung finden, daß bei gewissen Teilen der Theorie das eine, bei anderen Teilen das andere Hilfsmittel benutzt wird, dann würden die Schüler gewissermaßen einen Überblick über alle Methoden bekommen. Sollen sie das? Wenn es ja auch richtig ist und wohl auch immer deutlicher erkannt wird, daß die Mathematik auf der obersten Stufe recht eigentlich Methodenlehre sein, wenigstens die mathematischen Methoden immer recht fest ins Auge fassen soll, so ist doch eine Häufung überall vom Übel. Seit Dubois-Reymond's berühmter Aufforderung, die Kegelschnitte rüstig auf der Schule zu behandeln, denkt wohl niemand mehr daran, sie wieder aus den Lehrplänen der Realgymnasien zu entfernen, aber damit ist nicht gesagt, daß man womöglich jeder Behandlungsweise, welcher diese Linien fähig sind, auch auf der Schule Rechnung trägt.

Es ist genug, wenn nach den Lehrplänen für die Realgymnasien die Eigenschaften der Kegelschnitte auf analytisch=geometrischem Wege abgeleitet werden. Die Kegelschnitte auch noch auf rein synthetischem Wege zu behandeln, wenigstens systematisch, dafür reicht die Zeit, welche der Schule zu Gebote steht, nicht hin. Es schließt dies aber nicht aus, daß man gelegentlich, so namentlich bei Gelegenheit der Parabel auf die einfachen rein geometrischen Eigenschaften hinweist. Die Kegelschnitte aber, weil diese Linien auf dem Mantel eines stereometrischen Gebildes zur Erscheinung kommen, in einer solchen Ausführlichkeit im stereometrischen Pensum zu behandeln, wie das Lehrbuch von Milinowski, die Geometrie für Gymnasien und Realschulen, II. Teil Stereometrie, es verlangt, wo das 46 Seiten umfassende Lehrbuch volle 15 Seiten den ebenen Kegelschnitten widmet, (andere 7 Seiten behandeln die Lehre vom Maximum und Minimum) würde sich nicht empfehlen. Ich erwähne dies nur hier, weil jenes Lehrbuch auch für Realschulen gearbeitet ist.

Sollte, und das wäre bei einer besonders empfänglichen Schülergeneration durchaus nicht immer von der Hand zu weisen, es dem Lehrer sehr erwünscht sein, die Entstehung der Kegelschnitte auf dem geraden Kreiskegel in sein Pensum hinein zu ziehen und den Zusammenhang der Leitlinien mit den alsdann auftretenden charakteristischen Schnittebenen nachzuweisen, so würde sich ja als eine anziehende Zeichenaufgabe daran schließen, was Direktor Holzmüller in seiner Aufgabe 86 verlangt, nämlich die ebenen Schnitte des Kegels samt diesem im Grundriß und Aufriß korrekt darzustellen und durch Drehungen in die allgemeine Lage zu bringen. Es wäre diese Aufgabe aber auch nur von neuem eine Wiederholung der früher schon häufig ausgeführten und würde selbst insofern nicht einmal eine volle Anschauung von den wirklichen Schnittverhältnissen geben, als die Ellipse, Parabel oder Hyperbel nicht in voller Breite, sondern wieder verkürzt und verengt in den Projektionen auftreten werden. Um die Schnitte in voller Gestalt vor sich zu sehen, würde die Schnittebene in die Zeichenebene herabzuschlagen sein. Die ganze Lösung der Zeichnungsaufgabe würde aber zur tieferen Erkenntnis der Linien selbst nichts hinzuthun. Es reicht daher auch schon vollständig hin, wenn der Lehrer dem Schüler die Übereinstimmung der Orte für Punkte, für welche das Verhältnis der Entfernungen von einem festen Punkt und einer festen Gerade konstant ist, mit den ebenen Schnitten eines Kreiskegels darthun will, diese letzteren an einer zwar ungenauen, aber doch die notwendige Anschauung in hinreichender Zuverlässigkeit bietenden, nach den Grundsätzen der Parallelprojektion entworfenen Figur demonstriert, wobei allerdings die auftretenden Kugelbilder als Kreise gezeichnet werden müssen, was eben eine der vorkommenden Ungenauigkeiten sein wird. Die weiteren Eigenschaften der Kegelschnitte gehören dann völlig in die ebene Geometrie und müssen dort nach den für die Schule geeignetsten Methoden abgeleitet werden, wozu übrigens, das mag hier im Vorbeigehen als aus praktischer Erfahrung sich ergebend erwähnt werden, die auf harmonische Verwandtschaft gegründete von Milinowski nicht gehört. So lehrreich und anziehend das bekannte Schriftchen des genannten Autors ist, so wenig scheint es dem Fassungsvermögen der Schüler im allgemeinen entsprechend zu sein.

Der andere Punkt, auf welchen noch eingegangen werden muß, ist der der Linearperspektive. Wir werden hier noch einmal an den Zeichenunterricht erinnert. Eine sehr wesentliche Aufgabe auch schon des elementaren Zeichenunterrichts ist es, die Schüler mit der Perspektive bekannt zu machen und und sie anzuhalten, Körper zunächst einfach so zu zeichnen, wie das Auge sie sieht. Es beginnt daher der elementare Kursus der Perspektive schon außerordentlich früh, nämlich schon in Quarta, wo von einer mathematischen Erkenntnis der perspektivischen Gesetze nicht die Rede sein kann. Es werden an Drahtmodellen und später an großen Vollkörpermodellen die Gesetze der Perspektive praktisch gelehrt und darnach werden die Zeichnungen nach Körpern, es sind in der Regel nur ebenflächige, meistens nur rechtwinklig geschnittene, angefertigt.

Soll die Linearperspektive als solche, mathematisch begründet, noch einmal einen Unterrichtsgegenstand ausmachen, so bringt sie sachlich nichts Neues, sie würde nur das früher Gelernte, was allerdings zunächst einfach genug war, gesetzmäßig begründen und insofern die Vorstellung bereichern, als nun außer geradlinigen Umrißfiguren auch kreisförmige in Betracht gezogen werden können. Das Ziel des Unterrichts in der Linearpespektive wäre damit etwa in der Ausführung einer perspektivischen Abbildung eines Kreuzgewölbes zu suchen. Hierzu sind zweierlei Vorbedingungen nötig. Einmal muß der Schüler in der darstellenden Geometrie soweit vorgeschritten sein, daß er den Grundriß der perspektivisch darzustellenden Gebilde zu entwerfen vermag, das führt uns mindestens nach Obersekunda, und zweitens setzt die perspektivische Abbildung die Strahlbüschel-Geometrie voraus, was ebenfalls erst an das Ende des geometrischen Pensums hinweist. Die erste Klasse, in welcher Linearperspektive mit Erfolg angefangen werden kann, wäre also Obersekunda. Es wird aber wohl richtiger sein, ebenfalls erst in Prima diesen Unterricht anzusetzen und die Linearperspektive, wenn überhaupt Zeit dazu bleibt, als einen Anhang des stereometrischen Pensums zu betrachten. Der Zeichenunterricht ist nicht imstande, ihn in seine ihm zugemessene Zeit aufzunehmen, er muß also in die mathematischen Lehrstunden gelegt werden. Hieraus ergiebt sich, daß man sich der größten Beschränkung zu befleißigen hat.

VI. Zur Geographie.

In den gewöhnlichen Schulatlanten, z. B. in dem weit verbreiteten Schulatlas von Debes sind folgende Kartennetze benutzt, deren Verständnis dem Schüler mit verhältnismäßig geringer Mühe nahegebracht werden kann.

1. Das durch Kegelprojektion erzeugte Gradnetz. In solche Gradnetze sind die meisten Karten über einzelne Landesteile Europas, Europa selbst und kleinere Teile der anderen Erdteile eingezeichnet. Gerade dieses Gradnetz ist wegen seiner so ausgiebigen Benutzung und seiner leichten Konstruierbarkeit sehr geeignet zur Besprechung, wenn das stereometrische Pensum bis zur Kugel und den Tangenten an dieselbe von einem Punkte außerhalb durchgenommen worden ist. Die Aufgabe, das Gradnetz z. B. Norddeutschlands nach dieser Projektion zu entwerfen, giebt erneute Gelegenheit zum korrekten Zeichnen und zur praktischen Durchführung der Forderung, einen Kegelmantel von bestimmter Form in die Ebene aufzurollen.

2. Das Flamsteedsche Gradnetz. Es ist dies Gradnetz zwar keines, welches besonders viel Anwendung erfährt, aber da das namentlich heutigestags im Mittelpunkt der geographischen Forschung stehende Afrika meist in diese Projektion eingezeichnet wird und die Verschiedenartigkeit dieses Gradnetzes gegen die übrigen so sehr in die Augen springt, so ist es kaum zu umgehen, dasselbe zu erklären, zumal es den augenscheinlich sehr wertvollen Vorzug besitzt, die Verhältnisse der Flächenräume durchaus richtig und naturgetreu darzustellen. Ist die Behandlung des stereometrischen Pensums soweit vorgeschritten, daß die Oberflächenberechnung der Kugelzonen ausgeführt worden ist, so schließt sich daran als eine sehr angemessene Anwendung die Behandlung dieser Eigenschaft des Flamsteedschen Kartennetzes an.

3. Das Bonnesche Kartennetz. In ein solches Netz finden sich gewohnheitsmäßig Asien und Amerika eingezeichnet. Es ist gewissermaßen eine Mischung von 1 und 2 und wird also bei der Erläuterung neue Anschauungen nicht erfordern.

4. Die Mercatorprojektion. Da diese Projektionsart so außerordentlich häufig angewendet wird — im Schulatlas von Debes die Karten Nr. 3—9 und 11—16, — und da sie es gestattet, den zumeist in Betracht kommenden Teil der gesamten Erdoberfläche in einem einzigen Bilde zu vereinigen, so ist sie zu erläutern und zwar schließt sich ihre Besprechung in ganz natürlicher Weise im stereometrischen Unterricht an der Stelle an, wo die Kugel mit dem umbeschriebenen Cylinder in Beziehung

gesetzt wird, eine Beziehung, die eine ganze Zeitlang den Schüler bei Ableitung der Oberflächen der ganzen Kugel und der Kugelzonen beschäftigt. Mercator selbst, dessen dabei als eines der merkwürdigsten Männer des sechzehnten Jahrhunderts wohl kurz Erwähnung geschehen muß, hat seine Projektion als die der Kugeloberfläche auf einen geraden Kreiscylinder angesehen und so dürfte auch diese Behandlung mindestens gleichberechtigt sein mit derjenigen, welche Direktor Holzmüller in seiner „Einführung in das stereometrische Zeichnen" Aufgabe 118 und 119 empfiehlt.

Wenn der Schüler mit der Mercatorprojektion bekannt gemacht worden ist, und wenn er erkannt hat, daß die Höhen der Rechtecke, welche zwischen einem Paar Erdmeridiane liegen, sich zu ihren (gleichen) Grundlinien wie die trigonometrischen Sekanten der geographischen Breite dieser Grundlinien zu Eins verhalten, so vermag er sich ja allerdings ein solches Gradnetz zu konstruieren, aber die wichtigste Eigenschaft desselben darf dann auch nicht unerwähnt bleiben. Sind es doch vor allem die Seekarten, welche sämtlich in dieses Gradnetz eingezeichnet sind. Es muß dem Schüler mitgeteilt werden, daß der Seemann, der nach dem Kompaß steuert, sich zu fragen hat, wohin er von einem bestimmten Ausgangspunkt gelangt, wenn er immer einen bestimmten Kurs hält. Hier ist die Stelle, wo sich bei Besprechung der Mercatorkarte eine ganze Fülle der merkwürdigsten Beziehungen zwischen Wissenschaft und Kulturgeschichte bietet, welche dem reiferen Schüler eine wesentliche Erweiterung des Horizontes bringt. Es kann ihm gezeigt werden, wie das richtige Ausnutzen der Kompaßnadel unter Anwendung und Beachtung der Deklination derselben endlich auf die Entdeckung des für die Seekarten einzig natürlichen Gradnetzes geführt hat. Es wird den Schüler überraschen, zu sehen, daß der Schiffer, wenn er der Magnetnadel folgt, in einer eigentümlichen, spiralartigen Linie vorwärts fährt, welche die Eigenschaft besitzt, sämtliche Meridiane unter gleichen Winkeln zu schneiden. Daß man solche Linien Loxodromen nennt, mag nebenbei erwähnt werden. Die Aufgabe, welche für sichere Seefahrt von unermeßlicher Bedeutung war, lernt er jetzt auf einen einfachen Wortlaut bringen. Sie lautet: Welche Kompaßrichtung muß ein von A nach B bestimmter Dampfer von vornherein einhalten, wenn er, immer in dieser Richtung fahrend, sicher nach B gelangen will. Daß die Mercatorkarte auf diese Frage die einfachste Antwort dadurch giebt, daß man die auf derselben richtig eingetragenen Orte A und B nur mit einem Lineal durch eine gerade Linie zu verbinden braucht, um durch diese Linie die Steuerrichtung zu erfahren, ist die wesentlichste, großartigste Eigenschaft derselben. Die Entdeckung dieser Projektionsart gehört zu den größten Thaten für die Kulturentwicklung des Menschengeschlechts.

Um dem Schüler diese merkwürdige Eigenschaft der Mercatorprojektion darzuthun, würde folgende Betrachtung hinreichen. A, B, C seien die Schnittpunkte einer Loxodrome auf dem Globus mit drei Meridianen, welche auf dem Äquator gleiche Abschnitte bestimmen. Die Breitenkreise, welche durch die Punkte A, B, C gehen, mögen zu α^0, β^0, γ^0 nördlicher Breite gehören ($\alpha < \beta < \gamma$). Man bezeichne noch die Durchschnittspunkte des durch A gehenden Breitenkreises mit den beiden anderen Meridianen durch R und S, und den Durchschnittspunkt des durch B gehenden Breitenkreises mit dem zu C gehörigen Meridian durch U, so entstehen die Dreiecke ABR und BCU, welche, wenn die Meridiane sehr nahe beieinander gelegen gedacht werden, als ebene zu betrachten sind. Da die Winkel BAR und CBU gleich sind, so ist $BR : AR = CU : BU$ oder $BR : g \cdot \cos\alpha = CU : g \cdot \cos\beta$, wobei g der auf dem Äquator gemessene Abstand je zweier Meridiane ist. Wird das Globusstück auf die Mercatorkarte übertragen, so entsteht ein Dreieckspaar $A_1 B_1 R_1$ und $B_1 C_1 U_1$, so daß $A_1 B_1 C_1$ das Bild des Loxodrome ist.

Man hat jetzt $A_1 R_1 = B_1 U_1$ und da die beiden Dreiecke rechtwinklig sind, ist $\operatorname{tg} B_1 A_1 R_1 = \frac{B_1 R_1}{A_1 R_1}$ und $\operatorname{tg} C_1 B_1 U_1 = \frac{C_1 U_1}{B_1 U_1}$. Es ist aber $B_1 R_1 = BR \cdot \sec\alpha$ und $C_1 U_1 = CU \cdot \sec\beta$, also ist

$$\operatorname{tg} B_1 A_1 R_1 : \operatorname{tg} C_1 B_1 U_1 = BR \cdot \sec\alpha : CU \cdot \sec\beta \text{ und}$$

da aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABR und BCU folgt $BR : CU = AR : BU = g \cdot \cos\alpha : g \cdot \cos\beta$, so ergiebt sich $\mathrm{tg}\ B_1 A_1 R_1 : \mathrm{tg}\ C_1 B_1 U_1 = g\ \cos\alpha \cdot \sec\alpha : g\ \cos\beta \cdot \sec\beta = 1 : 1$ also $< B_1 A_1 R_1 = C_1 B_1 U_1$ also $A_1 B_1 C_1$ eine gerade Linie. Gilt dies zwischen drei Punkten des Bildes der Loxodrome, so gilt es damit für alle, das Bild einer Loxodrome des Globus in der Mercatorkarte ist also eine gerade Linie. Hiermit ist die Eigenschaft erläutert und es braucht nur erwähnt zu werden, daß die Erläuterung um so mehr zutrifft, je kleiner die zum Grunde gelegten Dreiecke sein werden.

5. Die stereographische Polar-, Äquatorial- und Horizontalprojektion. Mit diesen Projektionsarten der Erdoberfläche und den daraus sich ergebenden Gradnetzen berühre ich erst die so recht mit dem Linearzeichnen im Zusammenhang stehenden Netze. Es sind die wichtigen zu den Polarkarten, Planigloben und den Karten der Land- und Wasserhalbkugeln benutzten Netze, welche sich durch die angegebenen Projektionsarten ergeben, und welche ganz besonders dazu angethan sind, das Interesse des Schülers zu erwecken. Die Planigloben haben ihn gleich beim Eintritt in der Schule empfangen; diese Bilder gehören zum unverlierbaren Eigentum jedes Schülers und doch sind die Linien ihrer Art nach und nach ihrer eigentümlichen Lage zu einander doch selten erklärt, die Eigenschaften der Karte also kaum verstanden. Denn diese Eigenschaft läßt sich erst begreifen, wenn der Schüler erkannt hat, daß bei allen stereographischen Projektionen nur Kreise oder gerade Linien als Bilder der Meridiane und Breitenkreise auftreten, welche sich gegenseitig stets unter rechten Winkeln schneiden. Hieraus ergiebt sich sogleich, daß die Gestalt des Umrisses zwar nicht im Ganzen aber an jeder kleinen Stelle genau der wirklichen Gestalt der Länder der Erdoberfläche entspricht, der Umriß wird also nicht verzerrt.

Über die Herstellung der Planigloben und der Karte der Land- und Wasserhalbkugeln ist das Einzelne in den vorhandenen Hilfsbüchern in ausreichendster Weise enthalten. Die Aufgabe z. B. des § 30 der „Einführung in das stereometrische Zeichnen" von Dir. Holzmüller liefert das Nötige in schöner Ausführung. Nur auf einen Punkt möchte ich dabei die Aufmerksamkeit lenken. Der Satz, daß Kreise sich in der stereographischen Projektion wieder als Kreise darstellen, wird dort auf den Satz der symmetrischen ebenen Schnitte eines Kegels zurückgeführt. Es geschieht dies auch sonst häufig in den Lehrbüchern, so, um nur eins ganz willkürlich aus der Fülle der vorhandenen herauszugreifen, in Mink's Anfangsgründen der beschreibenden Geometrie. Es kann aber diese Einführung der symmetrischen Schnitte eines Kreiskegels völlig entbehrt werden, selbst ohne auf die Theorie der Polaren einzugehen, wie Milinowski will. Da nämlich bei der stereographischen Horizontalprojektion, wie bei jeder andern stereographischen Projektion die zum Augenpunkt gehörige Gegenfüßlerebene zur Bildebene gemacht wird, so wird der Kegel, welcher einen beliebigen Parallelkreis projizirt, durch seine sämtlichen Mantellinien den Parallelkreis nach dem Prinzip der reciproken Radien verwandeln. Bezeichnen wir die Punkte des Parallelkreises mit $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und ihre Bilder mit P_1', P_2', P_3', so werden sich $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $P_1', P_2', P_3' \ldots$ auf einer Kugelfläche befinden, für welche der Augenpunkt ein Ausgangspunkt zahlreicher Sekanten ist. Diese Hilfskugel schneidet aber die Projektionsebene und der Schnitt mit ihr kann nur ein Kreis sein. Durch diese Betrachtung wird in diesem besonderen Fall die Schwierigkeit, welche vielleicht die Theorie der Wechselschnitte eines Kegels für unsere Schüler hat, beseitigt und es wird alles in das Gebiet des Ähnlichkeitspunktes zweier Kugeln, oder des Ausgangspunktes vieler Sekanten einer einzigen Kugel gerückt, was den Schülern unserer Lehranstalten durchaus geläufig ist. Es ist ja geradezu ein Gegenstand des stereometrischen Pensums, für den planimetrischen Satz: je zwei Paar nicht entsprechende Punkte zweier Kreise, welche auf Ähnlichkeitsstrahlen liegen, bestimmen eine Kreislinie, den entsprechenden stereometrischen Satz zu finden und das führt unmittelbar dazu, daß durch zwei, in Bezug auf einen Ähnlichkeitspunkt zweier Kugeln nicht entsprechend liegende Kreislinien eine dritte Kugel bestimmt ist. Es berührt sich also hier die stereographische Projektion mit einem ganz bestimmten Kapitel des stereometrischen Pensums und es liegt daher nahe, zur Vertiefung dieses Kapitels die

Konstruktion der Plangloben ꝛc. heranzuziehen. In der Stereometrie von Milinowski sind die im Übungsbuch enthaltenen Aufgaben 220—225 hierhergehörig. Doch dürfte die Begründung durch Kreisverwandtschaft mittelst harmonischer Pole für unsere Schüler schwieriger sein. Das Wort „Kreisverwandschaft“ sollte überhaupt den geometrischen Übungen der Schüler fremd bleiben; es ist verfrüht, von diesen und ähnlichen Untersuchungsmethoden auf unseren höheren Lehranstalten schon Gebrauch zu machen, sie sind zu schwer.

6. Die orthographische Äquatorialprojektion. In Atlanten, wie der Schulatlas von Debes findet sich zwar keine Karte, welche nach dieser Projektionsweise entworfen ist, aber in größeren Atlanten begegnet man doch häufig einer Mondkarte, welche hierher gehört. Die Mondkarte führt uns das Bild des Mondes so vor, wie wir ihn thatsächlich vor uns sehen. Die Konstruktion des Mondgradnetzes in dieser Projektion ist leicht und schnell zu entwerfen und hat auch früher schon im Zeichenunterrichte seine Stelle gehabt.

Die voranstehenden Darstellungsarten einer Kugeloberfläche auf einer Ebene sind diejenigen, die allein ein Anrecht haben, im Realgymnasium durchgesprochen zu werden. Die Anstalten, welche bis jetzt Kartenprojektionen als einen obligatorischen Teil des mathematischen Unterrichts in ihren Lehrplan aufgenommen haben, sind zwar wenig zahlreich, aber sie verfolgen ein durchaus naturgemäßes Ziel und sorgen in entsprechender Weise dafür, daß dem Schüler durch Behandlung der Kartenprojektionen ein an den übrigen Unterricht sich anschließendes Kapitel über Centralprojektion geboten wird.

VII. Übersicht über die Lehrpensen der einzelnen Klassen im körperlichen Linearzeichnen.

1. Quarta und Tertia. Im Zeichnen: Empirische Perspektive.
2. Untersekunda. Im Zeichnen: Darstellende Geometrie des Punktes, der Strecke, der begrenzten Fläche und des Körpers.
3. Obersekunda. Im Zeichnen: Darstellende Geometrie des Lichtstrahls und Schattenlehre. In Mathematik: Stereometrische Figuren nach der schiefen Parallelprojektion; Konstruktionen der körperlichen dreiseitigen Ecke.
4. Unterprima. Im Zeichnen: Abschluß der Schattenlehre, die Isophoten und Anwendung derselben. In Mathematik: Darstellung der regulären Körper und der zu Berechnungsaufgaben notwendigen Körperzusammenstellungen (Pyramiden mit eingeschriebener Kugel u. s. f.); Kartenprojektionen.
5. Oberprima. Im Zeichnen: Anwendung der Isophoten. In Mathematik: Freie Perspektive auf mathematischer Grundlage bis zur Zeichnung eines Kreuzgewölbes.

Anhang.

Da ich der Überzeugung bin, daß sich eine Bereicherung des mathematischen Unterrichts leicht durch Herstellung geeigneten Lesestoffes für die oberen Klassen bewirken läßt und daß wir Fachmänner die Verpflichtung haben, für diese Bereicherung zu sorgen, damit nicht in dem mathematischen Unterricht der Schüler nur auf die Bekanntschaft mit dem System der sogenannten Schulmathematik beschränkt bleibe, sondern auch eine Vorstellung davon bekomme, daß die Mathematik wirklich eine Macht ist, welche auf die Kultur der Völker in hervorragender Weise eingewirkt hat, so benutze ich auch dieses Schulprogramm, um einen solchen Lesestoff an das im Vorhergehenden Behandelte anzuschließen.

Entnommen ist dieser Stoff der Stereotomie von Leroy und zwar der von E. F. Kauffmann gegebenen Übersetzung dieses Werkes. Der dritte Abschnitt desselben handelt von den Sonnenuhren in einer den Schülern verständlichen Weise, wenn freilich an einigen Stellen der Lehrer nicht zu entbehren ist.

Einen geschichtlichen Überblick über die Uhren und insbesondere die Sonnenuhren zu geben, würde hier zu weit führen, es gehört aber ein solcher doch wesentlich dazu und darf von dem Lehrer nicht unterdrückt werden.

Über Sonnenuhren.

§ 1.

Die Gnomonik lehrt auf eine gegebene, ebene oder krumme Fläche, welche das Zifferblatt genannt wird, ein System von Linien so zeichnen, daß jede derselben, zu allen Zeiten des Jahres, immer wieder um dieselbe Tagesstunde von dem Sonnenschatten eines Stiftes oder Stieles bedeckt wird. Sie ist also eine Anwendung der allgemeinen Schattenlehre. — Der Stift oder Stiel ist eine auf dem Zifferblatte befestigte cylindrische oder prismatische Stange.

§ 2.

In der Gnomonik werden folgende Annahmen gemacht: 1. Die Sonne beschreibt jeden Tag einen auf der Achse des Himmelspoles senkrechten Kreis, dessen mit jedem Tage sich ändernder Mittelpunkt beständig auf dieser Achse bleibt. 2. Die Bewegung der Sonne ist gleichförmig in demselben Parallelkreis, d. h. sie durchläuft in demselben in gleichen Zeiten gleiche Bögen. 3. Jede Gerade, von einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche nach dem Himmelspole gezogen, fällt mit der Achse der Pole zusammen, weil die irdischen Entfernungen im Vergleiche mit dem Abstande der Sonne von der Erde sehr klein sind. Aus demselben Grunde werden auch die Sonnenstrahlen, welche auf die verschiedenen Punkte eines Körpers fallen, zu einer und derselben Zeit als parallel unter sich angenommen.

§ 3.

Ist der Stift vertikal auf dem Zifferblatt, so heißt er ein Gnomon. Von diesem Instrumente hat die Kunst, Sonnenuhren zu konstruieren, ihren Namen, obgleich es nur dazu dienen kann, die Mittagsstunde anzugeben, indem man mittelst eines Gnomons auf einer Horizontalebene die Mittagslinie des Orts mit einer für dergleichen Beobachtungen hinlänglichen Genauigkeit bestimmen kann.

Man beschreibt zu diesem Zwecke einen oder mehrere Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Fußpunkt des Gnomons ist. Nun bezeichnet man die Punkte, wo die Kreislinien von der Schattenspitze des vertikalen Stiftes zu verschiedenen Zeiten des Morgens getroffen werden; und ebenso auch diejenigen Punkte, in welcher jene Schattenspitze dieselben Kreislinien nachmittags wieder trifft. Verbindet man hierauf durch Gerade diejenigen dieser Punkte, welche einem und demselben Kreise angehören, so erhält man parallele Sehnen, deren Mitten offenbar mit dem Fußpunkte des Gnomons in einer geraden Linie liegen müssen und somit den Durchschnitt der Meridianebene mit der Horizontalebene d. h. die Mittagslinie des Orts bestimmen.

§ 4.

Es sei OP eine gerade, nach dem Nordpol, (als dem einzigen auf unserer Halbkugel sichtbaren Pole), gerichtete Linie. Man denke sich durch diese Gerade 12 Ebenen oder 24 Stundenebenen (Halbebenen) gelegt, welche unter sich gleiche Winkel, also jeden zu 15 Grad, bilden, und wähle die erste derselben so, daß sie mit dem Meridian des Orts zusammenfalle. Diese Ebenen teilen offenbar jeden der Tagkreise, welche die Sonne in den verschiedenen Zeiten des Jahres durchläuft, in 24 gleiche Teile, und die Sonne wird daher immer wieder zu derselben Tagesstunde dieselbe Stundenebene passieren. Deshalb wird auch der von dem Stifte OP geworfene Schatten das ganze Jahr hindurch zu derselben Tagesstunde immer wieder derselbe sein, weil er bestimmt wird durch den Durchschnitt eben jener Stundenebene mit der Fläche des Zifferblattes, wie beschaffen letzteres auch sein mag.

§ 5.

Ist nun das Zifferblatt eine auf der Achse OP im Punkte O senkrecht stehende Ebene, so braucht man nur in dieser Ebene mit einem beliebigen Halbmesser aus dem Fußpunkt O der Achse, als einem Mittelpunkte, einen Kreis zu beschreiben und diesen von dem Punkte aus, der in der Meridianebene liegt, in 24 gleiche Teile zu teilen, so sind die nach den verschiedenen Teilpunkten gezogenen Halbmesser die Durchschnitte der Stundenebenen und folglich die vom Stifte OP geworfenen Schatten. So hätte man denn eine Äquatorialsonnenuhr, so genannt, weil ihre Ebene mit der des Himmelsäquators parallel ist oder vielmehr mit ihr zusammenfällt. Diese Sonnenuhr wäre in der einen Jahreshälfte auf der einen und in der andern Jahreshälfte auf der entgegengesetzten Seite beleuchtet. Da es aber sehr schwer wäre, die Sonnenuhr genau in der hier vorausgesetzten Lage zu erhalten, so führt man sie lieber auf einer unveränderlich festen Fläche, z. B. auf einer horizontalen Tafel von Marmor, einer Mauer oder einem Pfeiler aus, wobei man folgende Verfahren befolgt.

Konstruktion einer Horizontalsonnenuhr. Fig. 1.

§ 6.

Nachdem man durch den Punkt A, in welchem der Stift befestigt werden soll, eine Linie in der Richtung gegen den Pol gezogen, dessen Lage in Beziehung auf den Horizont für jeden Ort der Erde bekannt ist, denke man sich eine auf dieser Geraden in dem Endpunkte O derselben senkrechte Ebene und klappe sie samt dem Punkt O, in welchem sie den Stift schneidet, in die Ebene des Zifferblattes auf. Hierauf beschreibe man aus dem aufgeklappten Punkte O, das sei in der Figur M, als einem Mittelpunkte, mit beliebigem Halbmesser einen Kreis, welcher den Äquator der Sonnenuhr abgeben wird. Diesen Äquator teile man in 24 gleiche Teile durch die Halbmesser Mb, Mc, Md..., deren erster dem Meridian des Ortes entspreche und suche alsdann die Punkte B, C, D..., in welchen die Verlängerungen jener Halbmesser die Schnittlinie des Zifferblattes mit der zur Polachse senkrechten Ebene treffen. Nun braucht man nur noch diese Punkte mit dem Durchschnittspunkte A des Stiftes AO und des Zifferblattes zu verbinden, um die Durchschnittspunkte des letzteren mit den Stundenebenen, d. h. die Schattenlinien zu erhalten, welche der Stift in den verschiedenen Stunden des Tages auf das Zifferblatt wirft.

§ 7.

Es soll nun die Kurve gefunden werden, welche der Schatten des Endpunktes O des Stiftes täglich beschreibt. Der Sonnenstrahl SO, welcher durch diesen Punkt geht, beschreibt an einem und demselben Tage den Doppelmantel einer Kegelfläche, die ihre Spitze in O und zur Basis den Parallelkreis hat, den die Sonne um diese Zeit durchläuft. Da aber dieser Parallelkreis stets senkrecht auf dem Stifte ist und seinen Mittelpunkt in dieser Geraden hat, so folgt, daß der Sonnenstrahl einen Umdrehungskegel um AO beschreibt, indem er mit letzterer Linie einen Winkel bildet, welcher dem Complement der Sonnendeklination gleich*) und wie diese von einem Tage zum andern veränderlich ist. Die Tageskurve dieses Strahls auf der Sonnenuhr ist also ein Kegelschnitt, welcher in unseren Klimaten

*) Das Komplement der Sonnendeklination ist jedesmal der Winkel zwischen dem durch O gehenden Sonnenstrahl und der Weltachse OP.

stets eine Hyperbel sein wird; denn da die Sonne nie 24 Stunden über dem Horizont bleibt, so muß dessen Ebene die beiden Mäntel des Doppel-Kegels schneiden und damit also einen hyperbolischen Schnitt erzeugen.

§ 8.

Angenommen nun, man wolle die Schattenkurve für den Tag des Sommersolstitiums konstruieren. Man ziehe in der Ebene des Dreiecks OAB eine Gerade OV, welche mit OB einen Winkel von 23° 27′ bilde, so stellt diese Gerade die Richtung des Sonnenstrahls um Mittag dar, und es ist also der Punkt V, in welchem sie die Mittagslinie AB trifft, die Schattengrenze des Stiftes um diese Stunde. Für einen anderen Zeitpunkt desselben Tages, z. B. für 2 Uhr, macht der Sonnenstrahl noch immer mit dem Stift einen Winkel gleich AOV, aber er befindet sich jetzt in der Stundenebene, welche durch AO und AD geht. Diese zwei Geraden bilden mit dem Durchschnitte OD derselben Stundenebene und des Äquators ein in O rechtwinkliges Dreieck. Klappt man dieses in die Meridianebene auf, indem man AD′ = AD nimmt, so erhält man AO′D′ als Aufklappung.*) In dieser wird der fragliche Sonnenstrahl die Lage O′V erhalten und der Durchschnitt dieser verlängerten Geraden mit AD′ giebt die Schattengrenze S′ des Stiftes, die man sofort durch einen Kreisbogen in den Punkt S auf AD zurückführen muß. Wendet man dieselbe Konstruktion auf andere Stundenlinien an, so erhält man eine Reihe von Punkten α, β, γ..., welche, durch einen stetigen Zug vereinigt, die Kurve darstellen, die der Schatten des Punktes O am Tage des Sommersolstitium durchläuft.

§ 9.

Für einen andern Tag des Jahres macht man den Winkel BO′E gleich der Deklination der Sonne an diesem Tage, und verfährt ganz auf dieselbe Art, wie vorhin, wodurch man alsdann die zugehörige Hyperbel als die von der Spitze O des Stiftes beschriebene Schattenkurve erhält. Man sieht alsdann, daß diese Hyperbeln sich immer mehr öffnen, je mehr die Deklination abnimmt, und an dem Tage des Äquinoktiums, wo die Sonne in der Ebene des Äquators bleibt, bleibt auch der Schatten des Punktes O beständig in den Geraden BD, welche letztere deshalb die Äquinoktiallinie heißt. Nach diesem Zeitpunkte kehren die Hyperbeln ihre Konkavität nach der entgegengesetzten Seite und ist endlich im Wintersolstitium die Deklination der Sonne gleich BO′U = BO′V geworden, so beschreibt der Schatten des Punktes O die Kurve UR, welche der zweite Hyperbelast zu VS ist. Denn da die beiden Sonnenstrahlen O′V*) und O′U gleiche Winkel mit dem Stifte AO′P bilden, so beschreiben sie bei ihrer Umdrehung um denselben innerhalb 24 Stunden die beiden entgegengesetzten Mäntel eines und desselben Kegels, welcher von der Ebene der Sonnenuhr in den beiden Ästen einer und derselben Hyperbel geschnitten wird. Die Beziehung wiederholt sich für alle gleichen Deklinationen der Sonne vor und nach dem Äquinoktium.

Alle diese Hyperbeln heißen auch Deklinationskurven. Zeichnet man sie von Monat zu Monat z. B. auf die Sonnenuhr, so kann man auf letzterer nicht nur die Tagesstunde, sondern auch die Jahreszeit, in welcher man sich befindet, ablesen.

§ 10.

Es ist interessant, die Schattenlinie zu suchen, welche für eine gegebene Deklination, z. B. für BOV dem Auf- und Untergange der Sonne entspricht. In diesem Tageszeitpunkte ist der Sonnenstrahl SO horizontal und schneidet die Ebene der Sonnenuhr in unendlicher Entfernung. Es müssen also dieser

*) Die Meridianebene ist durch Drehung um AB in die Zeichenebene gelegt, wodurch die Dreiecke AO′B, AO′D′ u. s. f. entstehen.

Strahl und der horizontale Grundschnitt der ihm entsprechenden Stundenebene parallel mit der Asymptote der Hyperbel VS sein.

Wollte man sich also die Mühe nehmen, diese Asymptote zu suchen, was wohl möglich ist, da man die reelle Achse UV der Hyperbel und die Koordinaten eines Punktes der Kurve kennt und hieraus die imaginäre Achse vermittelst des Ausdrucks $b = \frac{ay}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$ sich leicht graphisch darstellen läßt, so brauchte man nur durch A eine Parallele mit dieser Asymptote zu ziehen. Aber es ist einfacher, die Schattenlinie des Untergangs zu suchen und aus ihr die Asymptote abzuleiten, indem man durch die Mitte von UV eine Parallele zu jener Schattenlinie zieht.

Im Augenblick des Sonnenuntergangs müßte nämlich AD'*) mit O'V parallel sein. Man ziehe daher aus A eine Parallele mit O'V, und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnitt X' mit BO'. Hierauf beschreibe man aus A als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser AX', rechts von AB, die Stundenlinie für den Untergang der Sonne. Die für den Sonnenaufgang liegt links von AB symmetrisch mit der vorigen.

§ 10.

Um zu untersuchen, welche Stunde auf der Sonnenuhr der Schattenlinie des Untergangs entspricht, darf man nur den Halbmesser MX ziehen, welcher in dem Äquator dieser Schattenlinie entspricht, und so kann man also graphisch die Aufgabe lösen: Zu finden, um welche Stunde die Sonne an einem gegebenen Tage des Jahres auf- oder untergeht; denn man braucht nur die nämlichen Konstruktionen für andere Deklinationen der Sonne zu wiederholen.

§ 11.

Vertikale, nicht deklinierende Sonnenuhr (Mittagsuhr). Fig. 2.

Man bezeichnet mit diesem Namen eine Sonnenuhr, welche auf einer senkrecht auf dem Meridiane des Orts stehenden Vertikalebene gezeichnet ist. Ist P der Punkt, in welchem der Stift befestigt werden soll, so ziehe man die Vertikale PB; diese ist offenbar die Mittagslinie der Uhr. Man klappe nun den Stift um BP in die Ebene der Sonnenuhr um, indem man den Winkel PBO' gleich dem Komplement der geographischen Breite des Ortes macht. Hierauf ziehe man senkrecht PO' in O' die Gerade O'B, welche, wenn man das Dreieck PO'B in die Meridianebene hebt, in der Ebene des Äquators liegt. Der Durchschnitt der Äquatorebene mit der Ebene der Sonnenuhr, d. h. die Äquinoktiallinie ist also die Horizontallinie EBQ. Dreht man nun den Äquator um EBQ und klappt ihn auf die Sonnenuhr auf, so fällt O' nach O und beschreibt man um letzteren Punkt einen beliebigen Kreis, teilt diesen in 24 gleiche Teile und zieht die Radien OB', OC', OD'..., so bestimmen diese, wenn man sie bis zu ihren Durchschnitten B, C, D.. mit der Äquinoktiallinie verlängert, die Stundenlinien PB, PC, PD...

---

*) Dies ist ein Schattenstrich, nachdem er in die Meridianebene und durch neue Drehung in die Horizontalebene gelegt ist. Vergl. § 8.

Fig. 1.

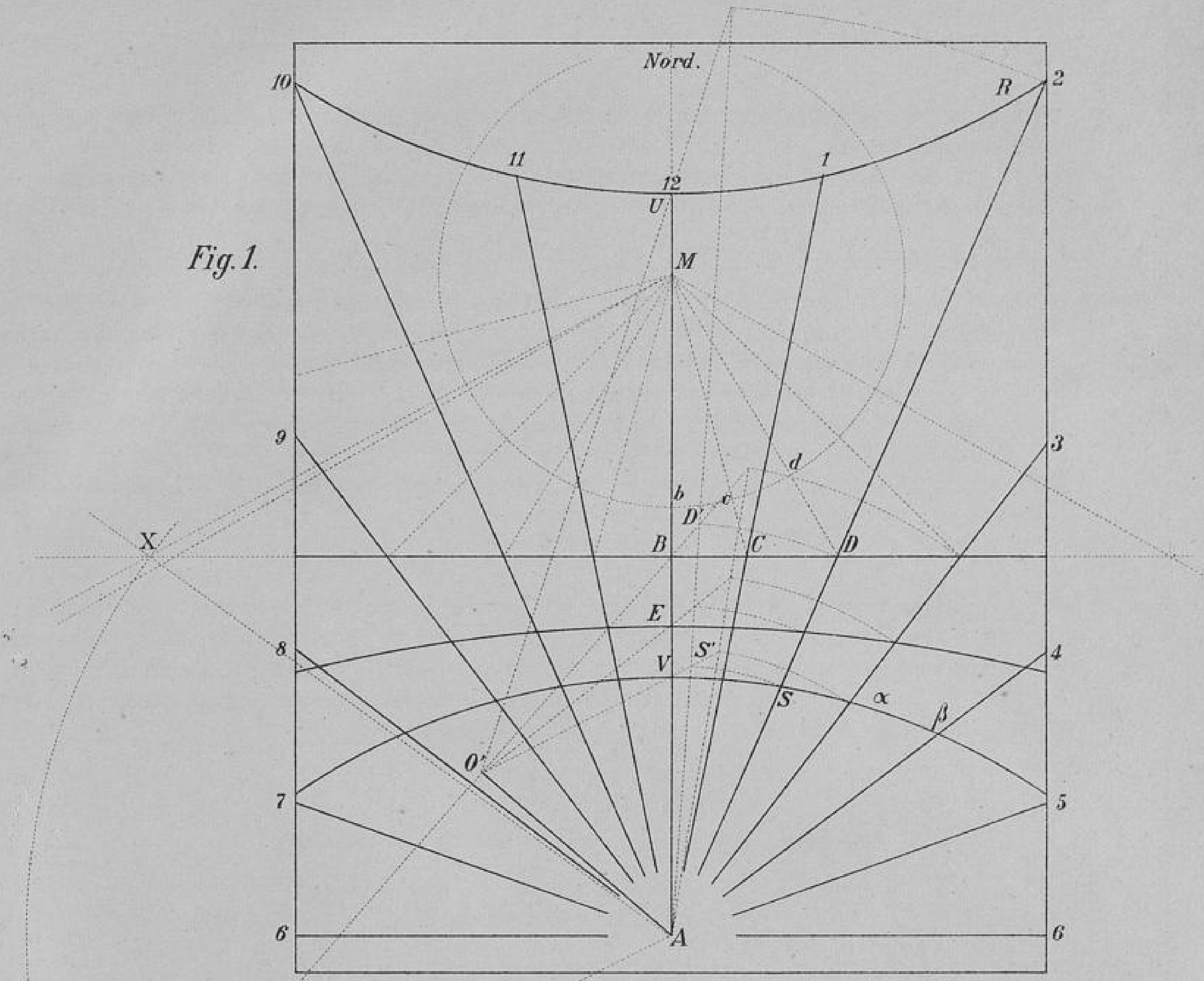
Nord.
10
R
2
11
12
1
U
M
9
3
d
b
c
D'
X
B
C
D
E
8
4
V
S'
S
α
β
O'
7
5
6
A
6
X'

Fig. 2.

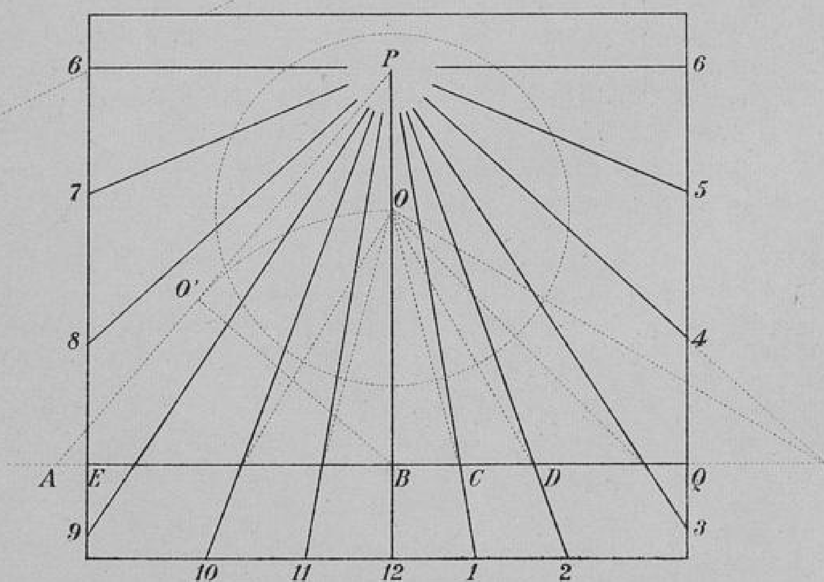
6
P
6
7
5
O
O'
8
4
A
E
B
C
D
Q
9
3
10
11
12
1
2

Fig. 1.

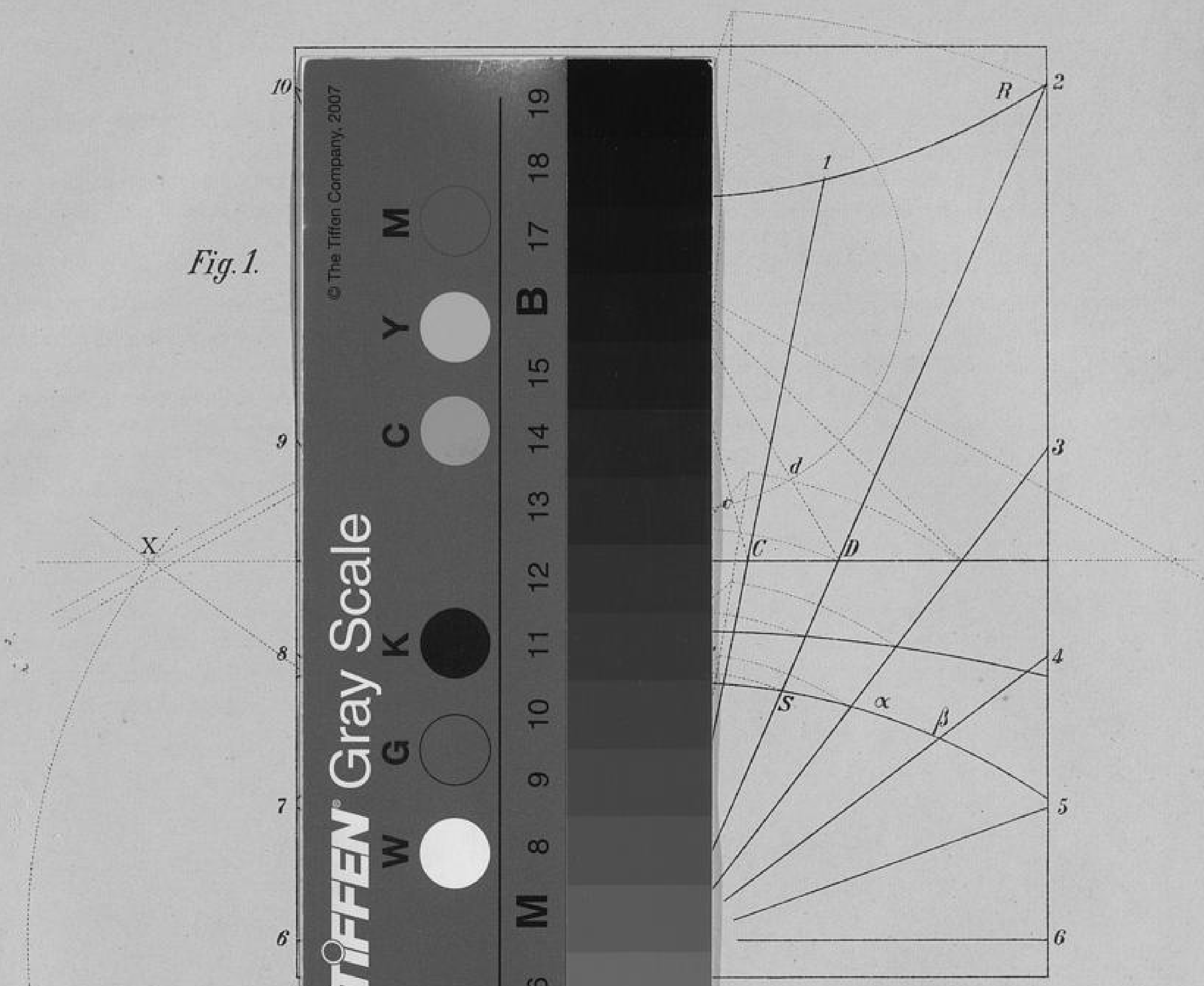

Fig. 2.