Lesestoffprobe für die Prima der Reallehranstalten.

Über die Vielecke

von

Louis Poinsot.

Einleitung.

Die sternförmigen Vielecke haben von Alters her die Aufmerksamkeit der Mathematiker gefesselt. Der der menschlichen Natur tief eingewurzelte Zug zum Wunderbaren sah in der verschränkten Figur des Drudenfußes, welcher nichts anderes ist als ein Sternfünfeck, ein geheimnisvolles Zeichen einer höheren Geisterwelt, und so bemächtigte sich im Mittelalter auch die Astrologie jener geometrischen Figuren, die dem Auge durch das Ineinandergreifen zahlreicher Linien eine fortwährende Beschäftigung gewähren. Man sagt, daß das Pentagramm, jener Drudenfuß, der Schule der Pythagoräer bereits als Bundes- und Erkennungszeichen gedient habe. Die Kenntnis der Eigenschaften der Sternvielecke war indes im Altertum wohl noch beschränkt genug und ging auch im Mittelalter noch nicht über den Satz hinaus, daß es auch Sternvielecke giebt, bei welchen die Summe der inneren Winkel 180 Grad nicht übersteigt. Erst mit Johann Kepler[1] tritt ein bedeutender Fortschritt ein, der namentlich dadurch dauerndes Interesse erregt, daß er die enge Verwandtschaft der Lehre von den Sternvielecken mit der der algebraischen Gleichungen erkennt, eine Beziehung, die in den großartigen Entdeckungen von Carl Friedrich Gauß[2] ihren Abschluß findet.

Die Abhandlung des französischen Mathematikers Louis Poinsot,[3] von welcher die erste Hälfte im Nachfolgenden wiedergegeben ist, behandelt diese merkwürdigen Figuren im Zusammenhange. Sie gewährt durch die Vollständigkeit, mit der sie die Sternvielecke erörtert, einen hohen Genuß und bildet in der Geschichte dieser anziehenden geometrischen Gebilde einen wichtigen Ruhepunkt.

I. Die ausspringenden Vielecke und die Sternvielecke.

1. Sind die Punkte $A, B, C \ldots M$ in der Ebene gegeben und verbindet man sie untereinander durch einen geschlossenen Linienzug, so heißt jede auf solche Weise gebildete Figur ein m Eck. In jedem der Punkte treffen nur 2 Seiten des m Ecks zusammen und bilden dort immer einen Winkel desselben. Da aber die beiden Seiten im ganzen zwei Winkel einschließen, welche sich zu $4R$ ergänzen, so hat man, um die m Winkel des Vielecks sicher zu erkennen, Folgendes zu beachten. Man verlängere irgend eine Seite des m Ecks, z. B. AB über B bis A, derart, daß die Strecke AA, dem Umfange des Vielecks gleich werde, und unterscheide alsdann an dieser Strecke die linke und rechte Seite etwa durch verschiedene Farben, indem z. B. die rechte Seite weiß, die linke schwarz gefärbt wird. Bricht

---

1) Geb. 1571 zu Magstadt bei Weil in Württemberg, gest. 1630 zu Regensburg.

2) Geb. 1777 zu Braunschweig, gest. 1855 zu Göttingen.

3) Geboren am 3. Januar 1777 zu Paris, war er 1809—1816 Professor der Mathematik an der polytechnischen Hochschule daselbst. Später war er Professor am Lyceum Bonaparte, Mitglied des Reichsoberschulrats und Senator. Er starb am 5. Dezember 1859 in Paris.

man nun diese Grade im Punkte B, so daß der Rest BA_1 durch den nächsten Punkt C geht, bricht ebenso BA_1 in C so, daß der neue Rest CA_1 durch den Punkt D geht, und fährt so fort, so erhält man das ursprüngliche Vieleck wieder. Jetzt wird man nun mit leichter Mühe die Winkel zwischen weißen Schenkeln von denen zwischen schwarzen unterscheiden können. Die Winkel des Vielecks sind dann entweder die m ersteren oder die m letzteren. Um alle Unbestimmtheit auszuschließen, werden diejenigen gleichfarbigen Winkel, deren Summe den kleinsten Wert hat, die Winkel des Vielecks genannt. Setzt man diese Summe gleich S, so ist die Summe der anderen Winkel gleich $4mR - S$.

Außenwinkel des Vielecks werden diejenigen Winkel genannt, welche jedesmal von einer Seite und der Verlängerung der ihr anliegenden über den gemeinsamen Endpunkt hinaus gebildet werden. Jeder ist der Ergänzungswinkel eines der inneren Winkel zu zwei Rechten und zwar eine wirkliche Ergänzung, wenn der Innenwinkel kleiner als $2R$, dagegen eine abzügliche, wenn derselbe größer als $2R$ ist.

2. Hieraus ergiebt sich, daß die Summe aller Winkel, der Innenwinkel sowohl wie der Außenwinkel, eines Vielecks ebenso vielmal $2R$ beträgt, als dasselbe Seiten hat.

3. Besitzt das Vieleck Winkel, welche $2R$ übersteigen, so nennt man solche Winkel einspringende Winkel, im Gegensatz zu Winkeln unter $2R$, welche ausspringende Winkel heißen.

4. Man hat ehedem ausspringende Vielecke solche Vielecke genannt, deren Umrißlinie von einer Graden nur in zwei Punkten geschnitten wird. Unsere Erklärung dagegen soll lauten: Ein ausspringendes Vieleck ist ein solches, welches nur ausspringende Winkel besitzt. Diese Erklärung ist zunächst anschaulicher, als die andere, welche immer zahlreiche Versuche erfordert, bis man sich wirklich überzeugt hat, daß die in Rede stehende Figur ein ausspringendes Vieleck ist; dann aber ist sie auch treffender. Denn das Ausspringen der Figuren hat nichts mit der Art und Weise zu thun, wie eine Grade deren Umfang schneidet, ob in zwei, vier oder mehr Punkten, wohl aber hängt die Art der Innenwinkel damit eng zusammen.

5. Man wird dies bald erkennen, wenn man von einer Ecke oder einem beliebigen Punkte der Ebene aus gleichlaufende Linien zu den Vielecksseiten legt. Auf diese Weise erhält man eine Anzahl Winkel, von denen jeder einen Schenkel mit dem nächstfolgenden gemeinsam hat, und welche alle in demselben Sinne durchlaufen werden.

Wenn nun die Grade, welche bei Erzeugung des Vielecks (vergl. Nr. 1) sich nach und nach auf alle Seiten desselben legt, den Winkelraum von $4R$ nur einmal beschreibt, so kann der Umriß des Vielecks von einer graden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden. Muß dagegen die bewegliche Grade, wenn sie den Umriß der Figur beschreiben soll, diesen Winkelraum zwei, drei- und mehrmal durchlaufen, so kann eine grade Linie den Umriß der betreffenden Figur auch in mehr als zwei Punkten schneiden, ohne daß das Vieleck aufhörte ein ausspringendes zu sein.[1]

6. Diese allgemeinen Betrachtungen finden selbstverständlich auch Anwendung auf die gewöhnlichen Vielecke, welche in den Elementen der Raumlehre behandelt werden. Diese sind aber keineswegs die einzigen. Vielmehr giebt es für ein und dieselbe Seitenzahl verschiedene Arten von Vielecken, welche sehr verschiedene Eigenschaften besitzen.

So wird man sehen, daß das Dreieck nicht das einzige Vieleck ist, bei welchem die Summe der Innenwinkel $2R$ beträgt, sondern, daß es unzählig viele Vielecke mit ungerader Seitenanzahl giebt,

1) Siehe Anhang § 1.

welchen diese Winkeleigenschaft zukommt. Ebenso giebt es auch unzählig viele Vielecke mit grader Seitenanzahl, bei welchen, wie beim Viereck, die Summe der Innenwinkel $4R$ beträgt. Auch sind diese ungewöhnlichen Vielecke weder in dem Sinne unregelmäßig, daß sie einspringende und ausspringende Winkel gleichzeitig hätten, noch sind sie zusammengesetzt aus übereinandergelegten Figuren, sondern es sind ganz ebenso einfache Vielecke, wie die oben zuerst erwähnten gewöhnlichen.

Um im Nachfolgenden übersichtlicher zu sein, mögen nur ausspringende regelmäßige Vielecke in Betracht kommen, solche also, deren Winkel sämtlich einander gleich sind, und welche einem Kreise um- und einbeschrieben werden können.

Man überzeugt sich leicht, daß bei solchen Vielecken die Winkelsumme ebensogroß ist, wie bei unregelmäßigen Vielecken derselben Ordnung und Art.

Die Ordnung richtet sich nach der Anzahl der Seiten, die Art dagegen wird nur durch die Summe der Winkel bestimmt, so daß man, wenn sich diese Summe ändert, von einer Art zu einer andern übergeht.

7. **Es giebt soviel Arten von Vielecken einer bestimmten Ordnung m, als es zu m teilerfremde Zahlen von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ giebt.**

Liegen nämlich[1] die m Punkte in gleichen Abständen von einander entfernt auf einer Kreislinie, so wird man, wenn man vom ersten Punkt aus, immer p Schritte in ihrer Reihe vorwärts geht und die dadurch getroffenen Punkte besonders auszeichnet, den ersten Punkt zum zweitenmale nach einer gewissen Anzahl von Umläufen durch die Kreislinie wieder erreichen.

Hat man x mal den ganzen Kreis zurückgelegt und dabei y mal p Schritte gemacht, so besteht die Gleichung $yp = xm$. Will man für y und dementsprechend auch für x die kleinsten ganzzahligen Werte finden, so muß man zwei Fälle unterscheiden: 1) p und m sind teilerfremd. In diesem Falle wird die Gleichung durch $y = m$ und $x = p$ gelöst, d. h. man muß m mal p Schritte machen, um zu dem ersten Punkte wieder zurückzugelangen. Hieraus folgt, daß dabei alle Punkte, wenn auch in veränderter Reihenfolge, getroffen werden müssen, denn man erhält durch die fortlaufende Verbindung der getroffenen Punkte wieder ein m Eck. 2) m und p haben einen gemeinsamen Teiler. Ist in diesem Falle $p = ar$ und $m = cr$, so liefert obige Gleichung $yar = xcr$ oder $ya = cx$, woraus sich, da nunmehr a und c teilerfremd sind, $y = c$ und $x = a$ ergiebt. Man wird also nur immer c mal p Schritte zu machen haben, um von neuem den ersten Punkt zu erreichen. Da c kleiner ist als m, so werden nicht sämtliche Punkte getroffen werden, es entsteht also durch die fortlaufende Verbindungslinie aller getroffenen Punkte kein m Eck.

Es giebt also hiernach zunächst so viele m Ecke, als es teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis m giebt.

Wird irgend eines von diesen herausgegriffen, z. B. dasjenige, welches durch Zurücklegung von jedesmal p Schritten durch die Punktreihe entstanden ist, so ist die letzte Ecke dieses Vielecks von der ersten um $m-p$ Schritte entfernt. Würde man, anstatt p Schritte in der natürlichen Reihenfolge der Punkte vorwärts, $m-p$ Schritte in derselben Richtung jedesmal fortgehen, so würde genau dasselbe Vieleck wie vorhin entstehen, nur mit dem Unterschiede, daß die Endpunkte desselben nunmehr in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen worden sind.

Wird von diesem Unterschiede abgesehen, so fallen die beiden soeben besprochenen Vielecke völlig in eins zusammen. Ist nun p teilerfremd zu m, so ist auch $m-p$ teilerfremd zu m und es

---

1) Hierzu ist Dienger, Über die Sternpolygone und Sternpolyeder. Grunerts Archiv Bd. 13, S. 434 ff. benutzt.

gehört also nur ein Vieleck zu den beiden Zahlen p und $m-p$. Diese bilden aber in der Zahlenreihe von 1 bis m ein Paar symmetrischer Zahlen und es giebt, da sämtliche teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis m in Paare symmetrischer Zahlen geordnet werden können, nur so viel verschiedene m Ecke, als es teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ giebt.

Schreitet man, um aus m Punkten einer Kreislinie ein m Eck zu bilden, immer um p Schritte weiter fort, so ist die Summe der inneren Winkel des auf diese Weise entstehenden Vielecks immer gleich $(m-2p)\ 2\ R$.

Es ist nämlich die Summe aller Innen- und Außenwinkel gleich $2m\ R$.

Läßt man nun durch eine grade Linie, welche sich um die Endpunkte der Reihe nach dreht,[1] das Vieleck wieder entstehen, so durchläuft sie den Winkelraum von $4\ R$ so oft mal, als die Zahl p angiebt[2]. Die Summe aller Außenwinkel beträgt also $p \cdot 4\ R$. Die Summe aller Innenwinkel beträgt daher $(m-2p)\ 2\ R$.

Man beachte auch, daß dieser Beweis nicht voraussetzt, daß das Vieleck regelmäßig, sondern nur, daß es ausspringend ist. Die Summe der Innenwinkel eines ausspringenden Vielecks hängt also von der Größe der zu m teilerfremden Zahl p ab, und ist verschieden für die verschiedenen Arten von Vielecken derselben Ordnung.

8. Sind $a\ b\ c \ldots$ die Grundfaktoren von m, so daß $m = a^p . b^q . c^r . \ldots$ ist, so ist die Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen, welche kleiner als m sind, gleich

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

Da also die Anzahl der verschiedenen Vielecke der Ordnung m die Hälfte dieser Anzahl beträgt, so ist dieselbe gleich

$$\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$ [3]

9. Ist m selbst eine Grundzahl, so ist die Anzahl der ausspringenden m Ecke gleich $\frac{m-1}{2}$.

Nach dem Vorhergehenden ist leicht einzusehen, daß es nur eine Art von Dreiecken giebt, aber zwei Arten von Fünfecken. Diese beiden Fünfecke entstehen, indem man durch die fünf Punkte entweder immer um einen Schritt, oder jedesmal um zwei Schritte fortschreitet. Bei der ersten Art von Fünfecken ist die Summe der Innenwinkel gleich $(5-2.1)\ 2\ R$ oder gleich $6\ R$, bei der zweiten Art gleich $(5-2.2)\ 2\ R$ oder gleich $2\ R$, wie beim Dreieck. Ebenso sieht man, daß es drei Arten von Siebenecken giebt. Bei der ersten Art, dem gewöhnlichen Siebeneck, ist die Summe der Innenwinkel gleich $10\ R$, bei der zweiten Art gleich $6\ R$, bei der dritten gleich $2\ R$. Auf dieselbe Weise findet man, daß es fünf Elfecke giebt, und zwar ist die Summe der Innenwinkel bei der ersten Art gleich $18\ R$, bei der zweiten $14\ R$, bei der dritten $10\ R$, bei der vierten $6\ R$, bei der fünften $2\ R$, wie beim Dreieck.

10. Ist m eine ungerade Zahl, so sind $\frac{m-1}{2}$ und m stets teilerfremd zu einander und es giebt daher bei m Ecken von ungerader Seitenzahl immer eine Art, bei welcher die Summe der Innenwinkel $2\ R$ beträgt, indem $2\ R\left(m-2\ \frac{(m-1)}{2}\right) = 2\ R$ ist.

---

1) Vergl. hierzu Nr. 1. 2) Vergl. Nr. 7 Beweis. 3) S. Anhang § 2.

11. Was die Vielecke mit grader Seitenanzahl betrifft, so giebt es nur eine einzige Art ausspringender Vierecke und ebenso auch nur eine einzige Art ausspringender Sechsecke. Dagegen giebt es mehrere Arten von solchen Achtecken, Zehnecken, u. s. f. Aber bei keinem derselben kann die Summe der Innenwinkel ein ungerades Vielfaches von $2\,R$ sein.

Ist nämlich m das Doppelte einer graden Zahl, oder überhaupt in höherem Sinne grade, so ist $\frac{m}{2} - 1$ stets teilerfremd zu m. Es giebt also immer ein Vieleck von doppeltgrader Seitenzahl, bei welchem die Summe der Innenwinkel gleich $2\,R\left(m - 2\left(\frac{m}{2} - 1\right)\right)$ oder gleich $4\,R$ ist.

12. Ist m einfach grade, so ist $\frac{m}{2} - 2$ teilerfremd zu m und die solchen Zahlen entsprechende Art von m Ecken hat zur Summe der Innenwinkel $2\,R\left(m - 2\left(\frac{m}{2} - 2\right)\right)$ oder $8\,R$, wie es sich beim Sechseck verhält.

13. Es giebt also in jeder Ordnung von Vielecken mit ungerader Seitenzahl, also bei Vielecken mit 3, 5, 7, 9, 11, 13.. Seiten eine Art, bei welcher die Winkelsumme $2\,R$ beträgt.

Bei jeder Ordnung von Vielecken mit doppeltgrader Seitenzahl, also bei 4, 8, 12, 16 ... Ecken, giebt es jedesmal eine Art, bei welcher die Summe der Innenwinkel $4\,R$ beträgt.

Endlich giebt es bei jeder Ordnung von Vielecken mit einfach grader Seitenzahl, also bei 6, 10, 14, 18 ... Ecken eine Art, bei der die Summe der Innenwinkel $8\,R$ ausmacht.

Es ist diese Art für die drei Gruppen von Ordnungen jedesmal diejenige mit der kleinsten Winkelsumme, und zwar stimmen diese Winkelsummen überein mit den Summen der Innenwinkel beim Dreieck, Viereck und Sechseck, also bei den drei Vielecken, welche allein nur auf eine einzige Art vorhanden sind.

14. Obgleich alle diese Sätze sehr einfach sind, so sind sie doch um ihrer Neuheit[1] und ihrer Verbindung mit schwierigeren Theorien willen erwähnungswert. Es mögen nun noch einige Erläuterungen und weitere neue Betrachtungen daran geknüpft werden.

II. Anwendungen.

15. Bei den im ersten Abschnitt besprochenen Sternvielecken liegen die Winkel jedesmal da, wo zwei Seiten mit ihren Endpunkten zusammentreffen. Die Winkel, welche von nicht aneinanderstoßenden Seiten gebildet werden, dürfen also bei der Bestimmung der Winkelsumme nicht mit in Rechnung gebracht werden, ebensowenig wie man bei den gewöhnlichen Vielecken solche Winkel mit einrechnet, welche durch Verlängerung nicht benachbarter Seiten entstehen würden.

Es besteht daher ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Sternvielecken und den gewöhnlichen Vielecken darin, daß bei ersteren getrennte Seiten sich gegenseitig durchschneiden, während bei den letzteren solche Seiten erst verlängert werden müssen, ehe sie zum Durchschnitt gelangen. Werden ferner bei gewöhnlichen Vielecken getrennte Seiten zum Durchschnitt gebracht, so ist jede Seite selbst gleich dem Unterschied der Abschnitte, welche auf ihr durch den Schnittpunkt entstehen, während bei den Sternvielecken jede Seite gleich der Summe der entstehenden Abschnitte ist. Indessen sind alle diese Unterschiede mehr scheinbar als wirklich und verschwinden auch bei der rechnerischen Behandlung solcher Vielecke voll-

1) Die Abhandlung ist 1801 veröffentlicht.

ständig. Man findet nämlich, wenn man die Seite eines regelmäßigen Vielecks berechnen will, eine Gleichung von einem bestimmten Grade, welche nur wirkliche Wurzeln besitzt, und man erhält so die Seiten aller verschiedenen Arten von Vielecken derjenigen Ordnung, mit welcher man sich gerade beschäftigt. So ist es z. B. nicht möglich, die Seite eines einem Kreise umbeschriebenen gewöhnlichen regelmäßigen Siebenecks allein für sich zu finden, man findet zu gleicher Zeit auch die Seite des regelmäßigen Siebenecks der zweiten und dritten Art. Oder umgekehrt, wenn aus der Seite des regelmäßigen Siebenecks der Radius des umbeschriebenen Kreises berechnet werden soll, so würde man drei verschiedene Kreise finden, welche den drei Siebenecksarten entsprechen, die man mittelst der gegebenen Seite konstruieren kann. Ähnlich ist es auch bei den anderen Vielecken.

Man kann von den verschiedenen Vielecken einer bestimmten Ordnung auch sagen, daß jedes von ihnen aus dem gewöhnlichen Vieleck derselben Ordnung entsteht, indem man die Seite verlängert und jede mit der zweitnächsten oder mit der drittnächsten u. s. f. zum Durchschnitt bringt. Dieses Verfahren führt aber nicht immer zum Ziele, denn die Seiten eines Vielecks geben nicht immer, wenn man sie in der angegebenen Weise zum Durchschnitt bringt, ein neues Vieleck derselben Ordnung. Läßt man z. B. bei einem Sechseck jede Seite sich mit der zweitnächsten schneiden, so entsteht allerdings dem äußeren Anblick nach ein Sternsechseck, in der That hat man aber nur eine aus zwei übereinandergelegten Dreiecken zusammengesetzte Figur, deren Umriß nicht in einem einzigen Zuge zurückgelegt werden kann.

16. Denkt man sich die Seiten eines gewöhnlichen Vielecks beweglich aneinandergefügt, so läßt sich die eine Art aus der andern derselben Ordnung dadurch ableiten, daß man alle Seiten in der Ebene des Vielecks gehörig dreht.[1] So wird man z. B. ein gewöhnliches Siebeneck, bei welchem die Summe der Innenwinkel $10\,R$ beträgt, in ein Siebeneck der zweiten Art überführen können, bei dem die Summe der Innenwinkel nur $6\,R$ beträgt. Hatte man bei dem ersten Siebeneck die Außenseite schwarz, die Innenseite weiß gefärbt, so daß also die Innenwinkel zwischen weißen Schenkeln liegen, so wird man die Innenwinkel des neuentstandenen Siebenecks ebenfalls zwischen weißen Schenkeln liegen sehen. Das Siebeneck zweiter Art kann man nun auch auf dieselbe Weise in ein Siebeneck der dritten Art verwandeln, bei welchem die Summe der Innenwinkel nur noch $2\,R$ beträgt. Weiter kann man nicht gehen, da es keine gradlinige Figur giebt, bei welcher die Summe der Innenwinkel weniger als $2\,R$ ausmacht.

17. Es wurde oben gezeigt, daß, wenn p teilerfremd zu m ist und man durch die m Punkte $A, B, C, \ldots M$ immer um p Schritte weitergeht, man notwendig nach und nach alle Punkte treffen muß, ehe man zum Anfangspunkt zurückgelangt. Hiervon gilt auch die Umkehrung: Die Zahl p ist teilerfremd zu m, wenn man vom ersten Punkt ausgehend nicht eher zu ihm zurückkehrt, als bis alle Punkte der Punktreihe $A, B, C \ldots M$ derart durchlaufen sind, daß immer p Schritte bis zum nächsten Ruhepunkt zurückgelegt werden. Wenn man also eine Anzahl Punkte auf einer Kreislinie durch gleichgroße Zwischenräume trennt, so wird man eine Art geometrischer Erklärung einer Grundzahl erhalten. Die Anzahl der Punkte wird nämlich eine Grundzahl sein, wenn man bei jeder nur möglichen Art sie zu durchlaufen, erst, nachdem jeder Punkt einmal getroffen worden ist, zum ersten Punkt zurückgelangt.

18. Bei dieser Gelegenheit mag eine für die Mechanik wichtige Aufgabe gelöst werden.

---

1) Dabei muß an einer Ecke die Verbindung der dort zusammenstoßenden Seiten zunächst gelöst, nach der Bewegung der Seiten aber wieder geschlossen werden.

Es handelt sich bei derselben darum, einen biegsamen Faden durch eine beliebige Menge von Punkten so zu ziehen, daß die beiden Fadenenden zuletzt in einem und demselben Punkte zusammentreffen, und daß die Gesamtlänge des Fadens gleich der Summe aller möglichen Abstände zwischen je zwei Punkten der Punktreihe wird. Die Lösung ist nur möglich, wenn die Punkte in ungerader Anzahl vorhanden sind. Sind sie in grader Anzahl vorhanden, so kann man ebenfalls einen Faden hindurchziehen, welcher immer je zwei Punkte verbindet, aber man muß ihn in diesem Falle zweimal von Punkt zu Punkt führen, wenn die Enden in demselben Punkte zusammentreffen sollen. Es ist dann die Gesamtlänge des Fadens gleich der doppelten Summe aller möglichen gegenseitigen Abstände aller Punkte.

19. Um größerer Anschaulichkeit willen denken wir die Punkte in einer Ebene gegeben. Die Anzahl der gegenseitigen Abstände ist dann ebensogroß, als wenn die Punkte im Raume lägen, auch ist die Ordnung, in welcher die Punkte zu je zweien zusammenzunehmen sind, durchaus dieselbe. Man setze eine bestimmte Reihenfolge fest, so daß A der erste, B der zweite Punkt ist, u. s. f. Ist die Anzahl m der Punkte eine Grundzahl, so sind die Zahlen $1, 2 \ldots \frac{m-1}{2}$ teilerfremd zu m. Verbindet man nun die Punkte derart, daß man von A anfangend immer von jedem den unmittelbar darauffolgenden erreicht, so wird man sie alle durchlaufen müssen, ehe man zu A zurückgelangt, und man hat m gegenseitige Abstände, nämlich AB, BC, $CD \ldots$ vor sich. Geht man von A anfangend immer zum zweitnächsten fort, so durchläuft man ebenfalls alle Punkte und erhält von neuem m gegenseitige Abstände, nämlich AC, CE u. s. f., ehe man zu A zurückgelangt. Fährt man so fort, indem man von A aus immer zum drittnächsten u. s. w., viertnächsten u. s. w. fortgeht, so erhält man zuletzt $m \cdot \frac{m-1}{2}$ verschiedene Strecken, und die beiden Fadenenden treffen im Punkte A, dem Ausgangspunkte zusammen, der Faden läßt sich schließen und die Aufgabe ist gelöst.

20. Ist m ungerade, aber keine Grundzahl, so ist zunächst klar, daß man wieder, wie bei dem vorhergehenden Fall, gerade Linien hat, welche die Punkte von A anfangend der Reihe nach verbinden, ferner andere, welche man erhält, wenn man von A aus immer zum zweitnächsten, drittnächsten u. s. f. weitergeht. Hierdurch erhält man alle möglichen gegenseitigen Verbindungen, welche sich in einem fortlaufenden Zuge ausführen lassen.

Bei allen solchen Verbindungslinien, bei denen es sich darum handelt, immer soviel Schritte vorwärtszugehen, als eine zu m teilerfremde Zahl angiebt, kann man auch auf dieselbe Weise verfahren wie beim vorigen Fall (19).

Sobald es sich aber um Schritte handelt, deren Größe durch eine zu m nicht teilerfremde Zahl bestimmt wird, ist es nicht möglich, auf die vorhin angegebene Weise den Faden weiter zu ziehen, man durchläuft dann nicht alle m Punkte.

Ist zum Beispiel g eine Zahl, welche mit m den größten gemeinsamen Teiler r besitzt, und wollte man immer g Schritte von A aus weiter gehen, so würde man nur $\frac{m}{r}$ Punkte aus den m vorhandenen treffen, und um auch die übrigen abzumachen, müßte man auf einen neuen Anfangspunkt übergehen um von ihm aus eine andere Gruppe von $\frac{m}{r}$ Punkten zu treffen, u. s. f.

Man bedarf also hier eines anderen Weges, um sämtliche Abstände aller Punkte in einem Zuge zu durchlaufen.

Für irgend eine ungerade Anzahl von Punkten führt der folgende zum Ziele.

Vom Punkte A geht man einen Schritt bis B, dann 2 Schritte bis D, dann 3 Schritte bis G und so weiter fort, indem man also Abschnitte der Kreislinie zurücklegt, welche wie die Glieder der arithmetischen Reihe 1, 2, 3 ... $\frac{m-1}{2}$ wachsen. Auf diese Weise hat man einen der Abstände zwischen zwei benachbarten Punkten, nämlich AB; einen der m Abstände zwischen einem Punkt und seinem zweitnächsten, nämlich BD; einen der Abstände zwischen einem Punkte und seinem drittnächsten, nämlich DG u. s. f., endlich einen der m Abstände zwischen einem Punkte und seinem $\frac{m-1}{2}$ nächsten benutzt. Mit dem Endpunkt der ganzen Streckenkette ist man zu einem Punkt x der Gruppe gelangt, dessen Abstand vom Anfangspunkt teilerfremd zu m ist. Seine Entfernung von A beträgt nämlich $1+2+3+\ldots+\frac{m-1}{2}$ oder $\frac{m^2-1}{8}$ Schritte. Nun ist m^2-1 oder $(m-1)(m+1)$ augenscheinlich teilerfremd zu m und also auch $\frac{m^2-1}{8}$. Es ist also auch der Rest $m-\frac{m^2-1}{8}$ teilerfremd zu m.

Geht man nun von dem Punkte x in derselben Weise weiter, wie vorhin vom Punkt A aus, so wird man, da entsprechende Punkte der dann vorhandenen beiden Reihen immer um gleichviel von einander entfernt sind, niemals Verbindungslinien in der zweiten Reihe entwerfen, welche schon einmal früher entworfen waren, man wird also $\frac{m-1}{2}$ neue Verbindungslinien erzeugt haben, und dadurch zu einem Endpunkt y gelangt sein, welcher zu x so liegt, wie x zu A. So geht das weiter fort, indem man neue Endpunkte z... aufsucht. Da nun die Entfernung der Punkte A, x, y, z.. von einander jedesmal dieselbe zu m teilerfremde Zahl ist, so folgt, daß erst nach $m$maliger Wiederholung desselben Verfahrens ein Endpunkt erreicht wird, welcher mit dem ursprünglichen Anfangspunkt A zusammenfällt. Man wird also auf solche Weise alle $m.\frac{m-1}{2}$ gegenseitigen Abstände der gegebenen Punkte in ununterbrochenem Zuge durchlaufen, ohne irgend einen davon mehr als einmal benutzt zu haben.

21) Ist m eine grade Zahl, so sieht man bald, daß das eben Gesagte für diesen Fall nicht gilt.[1] Es läßt sich aber auch unmittelbar beweisen, daß die Lösung der Aufgabe für diesen Fall überhaupt nicht möglich ist. Denn wenn wirklich ein und derselbe geschlossene Faden auf alle mögliche Weise zwischen den in grader Anzahl vorhandenen Punkten hinliefe, so würde an jedem Punkte eine ungerade Anzahl von Fadenstrecken endigen. Da nun alle diese Strecken zu einem und demselben Faden gehören, so muß je eine als Verlängerung einer andern aufgefaßt werden. Die zweite von der ersten, die vierte von der dritten u. s. f. Die letzte bliebe also übrig und wäre die Verlängerung von keiner Strecke. Es hätte also der Faden an jedem Punkte ein Ende. Sind daher 2 m Punkte da, so hätte der Faden 2 m Enden und es wären also mindestens m verschiedene nicht geschlossene Fäden vorhanden, was gegen die Voraussetzung wäre.

22. Man kann aber auch bei einer graden Anzahl von Punkten alle gegenseitigen Entfernungen, mit Ausnahme derjenigen m Entfernungen, durch welche jeder der 2 m Punkte mit seinem gegenüber-

---

1) Siehe Anhang § 3.

liegenden (d. h. durch m Schritte von ihm getrennten) verbunden ist, in einem Zuge durchlaufen. Wäre es erlaubt, diese letzteren zweimal zu durchlaufen, so würde man alle Entfernungen in einem zusammenhängenden Zuge durchlaufen können. Dies wäre auch möglich, wenn gestattet wäre, überhaupt jede Entfernung zweimal zu durchlaufen.

23. Die Möglichkeit einen Faden zwischen einer graden Anzahl von Punkten so zu ziehen, daß jede Entfernung zweimal berücksichtigt wird, läßt sich darthun, auch ohne daß man die Ausführung selbst anzugeben vermag. Der Beweis würde nach dem Vorbilde von Nr. 21 zu führen sein und ist unschwer zu finden.

24. Um noch eine Anwendung auf die verschiedenen Arten von Vielecken zu machen, denken wir uns, es wären mehrere Punkte durch einen geschlossenen Faden, längs welchem sie hingleiten könnten, verbunden. Wir wollen z. B. fünf bewegliche Punkte annehmen und voraussetzen, daß durch den Faden ein gewöhnliches Fünfeck gebildet werde. Werden die fünf Punkte durch fünf gleiche Kräfte angegriffen, deren Richtungen den Winkelraum von 4 Rechten in fünf gleiche Teile teilen, so wird der Faden zuletzt ein regelmäßiges Fünfeck bilden und seine Spannung wird überall eine gleichförmige sein.

Nun wird der Faden aber auch ein regelmäßiges Fünfeck der zweiten Art bilden können. In diesem Falle wird die Spannung nicht dieselbe sein wie im ersten, sondern kleiner und zwar im Verhältnis der Sekante des Winkels von $R/_5$ zu der eines Winkels von $3\,R/_5$ Größe. Es kann also der Faden auf zwei verschiedene Arten benutzt werden, um die Wirkung derselben Kräfte aufzuheben. Ist der Widerstand des Fadens nicht mehr hinreichend, wenn er ein gewöhnliches Fünfeck bildet, so kann er noch hinreichen, wenn er nach einem Fünfeck zweiter Art angeordnet wird.

25. Auch bei jeder anderen Anzahl von Punkten giebt es mehrere Werte für die Spannung des Fadens, der sie alle verbindet, mit Ausnahme der Fälle, wo 3, 4 oder 6 Punkte gegeben sind, denn in diesen Fällen giebt es nur eine einzige regelmäßige Figur mit soviel Ecken.

Wenn dagegen der Faden sämtliche Punkte auf alle mögliche Weise verbindet, so kann er nur auf eine einzige Weise durch dieselben gegebenen Kräfte gespannt werden. Die Spannung wird in der ganzen Ausdehnung des Fadens gleichgroß sein, wie es bei dem gewöhnlichen Seilvieleck der Fall ist.

Anhang.

§ 1. Für regelmäßige ausspringende Vielecke reicht folgende Betrachtung hin. Es schneide eine Grade dasselbe so, daß sie durch einen Punkt des von allen m Seiten eingeschlossenen Flächenstücks geht. Alsdann bilde man von diesem Punkt aus den Umfang des Vielecks auf der umbeschriebenen Kreislinie ab. Ist man dabei nach p Umläufen um die Kreislinie wieder zum Anfangspunkt zurückgekehrt, so wird die Kreislinie durch die Abbilder der Vielecksseiten p fach belegt erscheinen, also eine p fache Kreislinie sein. Die Grade schneidet dieselbe also in $2\,p$ Punkten, von denen immer p in einen einzigen zusammenfallen. Diese Punkte sind die sämtlichen Abbilder der Schnittpunkte der Graden mit den Seiten des Vielecks. Es kann also der Umfang der p Art eines m Eck in höchstens $2\,p$ Punkten von einer Graden geschnitten werden.

Daß die Anzahl der Schnittpunkte eine grade Zahl sein muß, folgt daraus, daß jedesmal einem Eintrittspunkt in das Vieleck auch ein Austrittspunkt auf der Graden zugeordnet sein muß.

Es kann also ein 11 Eck höchstens in 10 Punkten von einer Graden geschnitten werden, aber auch in 8, 6, 4, 2 Punkten.

Schnittpunkte auf Verlängerungen von Seiten werden hierbei nicht mitgerechnet.

§ 2. Es soll hier ein bestimmtes Beispiel zum Grunde gelegt werde.

m sei gleich $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Es soll die Anzahl aller zu 30 teilerfremden Zahlen, welche zugleich kleiner als 30 sind, gefunden werden.

1. Zuerst wird die Anzahl derjenigen Zahlen unter ihnen bestimmt, welche durch 2 teilbar sind. Es sind $^{30}/_2$ Zahlen, nämlich alle Vielfachen von 2, also $1 \cdot 2 \cdot$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 2 \cdots\cdot {}^{30}/_2 \cdot 2$. Die Anzahl der Zahlen, welche nicht durch 2 teilbar sind, ist also $30 - {}^{30}/_2 = 30\,(1 - {}^1/_2)$. Diese Anzahl sei der **erste Rest**.

2. Von diesen $30\,(1 - {}^1/_2)$ Zahlen ist eine gewisse Anzahl durch 3 teilbar. Diese Anzahl wird folgendermaßen bestimmt.

Unter den 30 Zahlen von 1 bis 30 sind überhaupt $^{30}/_3$ Zahlen durch 3 teilbar, nämlich alle Vielfachen von 3, also $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $\cdots\cdot {}^{30}/_3 \cdot 3$. Von diesen sind alle diejenigen nicht durch 2 teilbar, bei welchen der erste Faktor nicht durch 2 teilbar ist. Solcher Faktoren giebt es $^{30}/_3$, nämlich alle Zahlen von 1 bis $^{30}/_3$. Nach Nr. 1 ist aber, da $^{30}/_3$ durch 2 teilbar ist, die Anzahl aller Zahlen von 1 bis $^{30}/_3$, welche nicht durch 2 teilbar sind, $^{30}/_3\,(1 - {}^1/_2)$. Diese Anzahl Zahlen ist daher wohl durch 3, aber nicht durch 2 teilbar und muß daher von dem ersten Reste der 30 Zahlen von $30\,(1 - {}^1/_2)$ abgezogen werden. Es bleiben also dann noch $30\,(1 - {}^1/_2) - {}^{30}/_3\,(1 - {}^1/_2)$ oder $30\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3)$ Zahlen übrig, welche weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Diese Anzahl sei der **zweite Rest**.

3. Von diesen $30\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3)$ Zahlen ist eine gewisse Anzahl durch 5 teilbar, welche folgendermaßen bestimmt wird.

Unter den 30 Zahlen von 1 bis 30 sind überhaupt $^{30}/_5$ Zahlen, die durch 5 teilbar sind, nämlich alle Vielfachen von 5, also $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5 \cdots {}^{30}/_5 \cdot 5$. Von diesen sind alle diejenigen nicht durch 2 und 3 teilbar, deren erster Faktor nicht durch 2 und 3 teilbar ist. Solcher Faktoren giebt es im ganzen $^{30}/_5$, nämlich alle Zahlen von 1 bis $^{30}/_5$. Nun ist $^{30}/_5$ durch 2 und 3 teilbar, also läßt sich nach Nr. 1 und Nr. 2, die Anzahl der Zahlen von 1 bis $^{30}/_5$ bestimmen, welche weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Diese Anzahl ist $^{30}/_5\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3)$. Diese Anzahl ist also wohl durch 5, aber nicht durch 2 und 3 teilbar und muß daher von dem zweiten Reste abgezogen werden.

Es bleiben dann noch $30\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3) - {}^{30}/_5\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3) = 30\,(1 - {}^1/_2)(1 - {}^1/_3)(1 - {}^1/_5)$. Diese Anzahl ist der **dritte Rest**.

Der dritte Rest giebt die Anzahl der Zahlen, welche weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind. Es sind die 8 Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Ganz in derselben Weise wird der Beweis für die allgemeine Formel geführt.

§ 3. Ist m eine grade Zahl, also gleich $2r$, so entspricht dem Vorgang bei Nr. 20 das Fortschreiten um $1, 2, 3 \cdots \frac{m}{2}$ Schritte oder um $\frac{r\,(r+1)}{2}$ Schritte, diese Zahl ist aber nicht teilerfremd zu $2r$ oder m und führt also nicht zum Ziel. Will man nun bis zu derjenigen Zahl fortschreiten, welche dem $\frac{m-1}{2}$ von vorhin entspricht, so wäre diese $\frac{2r-2}{2}$ oder $r-1$, aber auch hier werden wir nach $1 + 2 + \cdots + r-1$ Schritten oder $\frac{r\,(r-1)}{2}$ eine Zahl treffen, welche nicht teilerfremd zu $2r$ oder m ist.

---

m sei gleich 30 = … teilerfremden Zahlen, welche zugleich
kleiner als 30 sind, gefun…

1. Zuerst wird die … bestimmt, welche durch 2 teilbar sind.
Es sind $^{30}/_{2}$ Zahlen, näm… $2 \cdot 2,\ 3 \cdot 2,\ 4 \cdot 2 \cdots\ ^{30}/_{2} \cdot 2$. Die
Anzahl der Zahlen, welch… $-\ ^{30}/_{2} = 30\,(1 - {}^{1}/_{2})$. Diese Anzahl
sei der erste Rest.

2. Von diesen $30\,(1$… urch 3 teilbar. Diese Anzahl wird
folgendermaßen bestimmt.

Unter den 30 Zah… Zahlen durch 3 teilbar, nämlich alle
Vielfachen von 3, also $1 \cdot$… alle diejenigen nicht durch 2 teilbar,
bei welchen der erste Fakt… Faktoren giebt es $^{30}/_{3}$, nämlich alle
Zahlen von 1 bis $^{30}/_{3}$. … bar ist, die Anzahl aller Zahlen von
1 bis $^{30}/_{3}$, welche nicht du… Anzahl Zahlen ist daher wohl durch
3, aber nicht durch 2 teil… este der 30 Zahlen von $30\,(1 - {}^{1}/_{2})$
abgezogen werden. Es bl… $(1 - {}^{1}/_{2})$ oder $30\,(1 - {}^{1}/_{2})\,(1 - {}^{1}/_{3})$
Zahlen übrig, welche weder… ese Anzahl sei der zweite Rest.

3. Von diesen $30\,(1-$… zahl durch 5 teilbar, welche folgen-
dermaßen bestimmt wird.

Unter den 30 Zahlen… en, die durch 5 teilbar sind, nämlich
alle Vielfachen von 5, also… n sind alle diejenigen nicht durch 2
und 3 teilbar, deren erste… ist. Solcher Faktoren giebt es im
ganzen $^{30}/_{5}$, nämlich alle… urch 2 und 3 teilbar, also läßt sich
nach Nr. 1 und Nr. 2, di… stimmen, welche weder durch 2 noch
durch 3 teilbar sind. Dies… Anzahl ist also wohl durch 5, aber
nicht durch 2 und 3 teilbar… abgezogen werden.

Es bleiben dann noch… ${}^{1}/_{3}) = 30\,(1 - {}^{1}/_{2})\,(1 - {}^{1}/_{3})\,(1 - {}^{1}/_{5})$.
Diese Anzahl ist der dritt…

Der dritte Rest gie… durch 2 noch durch 3 noch durch 5
teilbar sind. Es sind die 8… 9.

Ganz in derselben A… e Formel geführt.

§ 3. Ist m eine… dem Vorgang bei Nr. 20 das Fort-
schreiten um $1,\ 2,\ 3 \cdots$ … diese Zahl ist aber nicht teilerfremd
zu $2r$ oder m und führt… bis zu derjenigen Zahl fortschreiten,
welche dem $\frac{m-1}{2}$ von v… oder $r-1$, aber auch hier werden
wir nach $1 + 2 + \cdots + r$… treffen, welche nicht teilerfremd zu
$2r$ oder m ist.