I.

Rede zur Schulfeier

des Geburtstages Sr. Maj. des Kaisers Wilhelm II.

vom

Oberlehrer Dr. A. Sommer.

II.

Mathematische Lesestoffe

für die Prima der Realgymnasien

von

Professor Dr. P. Kramer,
Inspektor des Realgymnasiums.

Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasiums der Franckeschen Stiftungen 1889.

Halle a. S.,
Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.
1889.

1889. Progr. Nr. 250.

Rede zur Schulfeier

des

Geburtstags Sr. Majestät des Kaisers Wilhelm II.

vom

Oberlehrer Dr. Sommer.

Liebe Schüler! Heute stehen wir uns gegenüber nicht wie alle Tage. Zwar wollen Sie auch heute lernen, auch heute sich erheben und begeistern lassen; doch gar anders, wie alle Tage. Die Wände unserer Lehrzimmer, die unsere sorgfältige Aussaat auf Ihren Geistesboden vor den Stürmen draußen, vor Frost und Hitze bewahren sollen, heute fallen sie; heute sind wir nicht in erster Linie Lehrer und Schüler; heute sind wir vornehmlich Preußen und Deutsche; in Gemeinschaft mit allen, allen, soweit immer die deutsche Zunge klingt, vereinigen sich heute und morgen unsere Herzen im hellsten Festesjubel: denn wir feiern Kaisers Geburtstag; unser geliebter Kaiser und König Wilhelm II. vollendet morgen sein 30. Lebensjahr; morgen zum erstenmale gemeinsam feiert der junge Herrscher seinen Geburtstag mit seinem Volke.

Auf Ihre Jubelstimmung würde es gewiß wie ein Reif fallen, wollte ich heute der sonst wohl gepflegten Sitte nachgeben und vor Ihnen zur Feier des Tages ein wissenschaftliches Thema behandeln. Das sei ferne! Versenken wollen wir uns vielmehr in die gottbegnadete Persönlichkeit unsers jungen, teuren Herrschers; seine Erziehungs-, seine Werdezeit, den Bildungsgang seines Charakters wollen wir uns vergegenwärtigen, um uns mit aufrichtiger Freude und tiefstem Herzensdanke des großen Gnadengeschenkes unseres Gottes an sein deutsches Volk bewußt zu werden; um unsere Liebe, unser Vertrauen und unsere Treue zu unserm Herrscher in unsere Herzen felsenfest zu gründen, damit die zukünftigen Stürme uns ohne Wanken finden. Kurz unser Thema sei: „Der Erziehungs- und Bildungsgang unsers Kaisers Wilhelm II. fürs Vaterland eine Quelle der Freude, des Trostes, der Hoffnung und des Dankes."

Es war am 27. Januar 1859, als unser hochseliger Kaiser Wilhelm, damals Prinzregent, aus dem Ministerium in der Wilhemsstraße nach dem kronprinzlichen Palais eilte; auf dessen Rampe traf er den alten Papa Wrangel, in die jubelnde Volksmenge rufend: „Es geht alles gut, Kinder, es ist ein tüchtiger derber Rekrut, wie man's nur verlangen kann!" Niemand anders meinte er, als unsern jetzigen Kaiser, der dem damaligen Kronprinzen Friedrich Wilhelm soeben als erster Sohn geboren war.

Die hocherfreuten fürstlichen Eltern waren sich des voll bewußt, daß es nun galt, einen Thronerben zu erziehen; denn ernst ist das Erziehungsprogramm, von dem wir aus dem Munde des Kronprinzen zweimal hören. Auf die Glückwünsche der Abordnung des Landtags erwidert er: „Wenn Gott meinem Sohn das Leben erhält, so wird es meine schönste Aufgabe sein, denselben in den Gesinnungen und Gefühlen zu erziehen, welche mich an das Vaterland ketten;“ den fürstlichen Paten aber dankt er am Tauftage im Mai für ihre Teilnahme mit dem Wunsche: „Möge es uns gelingen, unter Gottes Beistand unsern Sohn zur Ehre und zum Wohle des teuern Vaterlands zu erziehen!“ Also mit dem vollen Bewußtsein einer großen geschichtlichen Verantwortung haben die erlauchten Eltern die Erziehung des jungen Prinzen Friedrich Wilhelm Viktor Albert, kurz Fritz, später Wilhelm gerufen, begonnen und vollendet, so daß man wohl sagen konnte: die Rücksicht auf das Wohl und Wehe ihres geliebten Kindes bestimmte fast einzig und allein die Ordnung des kronprinzlichen Hauses; des jungen Prinzen prächtiges Gedeihen bildete fortwährend die Hauptquelle der elterlichen Freuden. Viel Tröstliches und auch Ergötzliches drang schon aus der Kinderstube ins Land. Ich erinnere nur an eins, an jene Audienz Berliner Bürger beim Kronprinzen, denen, um ihnen eine Freude zu bereiten, auch der einjährige Prinz Wilhelm gebracht wurde. Fest hielt dieser die ihm von einem Bürger entgegen gehaltene glänzende Uhr, bis sie der Kronprinz den zarten Fingern mit den Worten entwandte: „Da sehen Sie: was ein Hohenzoller einmal festhält, das läßt er so leicht nicht wieder los.“ So klein der Vorgang ist, so trefflich doch gewährt er Einblick in den Geist, der das Kind von früh an umweht; daß die treffliche Saat gut aufgegangen, vernahm ja jüngst jeder Vaterlandsfreund mit hoher Freude aus der Frankfurter Rede unsers jungen Kaisers Wilhelm, in der er an die Adresse jenseit des Belt und der Vogesen mit aller Entschiedenheit erklärt, daß an eine Herausgabe des von den Vätern Ererbten, des mit vollem Rechte Erworbenen nun und nimmer zu denken sei.

Um alle guten Keime in dem jungen Prinzen gleichmäßig zur Entfaltung zu bringen, wurde jede Sorgfalt aufgeboten. Die pädagogische Meisterschaft des feingeistigen fürstlichen Vaters ist zu bewundern, wenn er die mancherlei Unlust-Gefühle und Antipathieen seines Kindes dadurch ohne Schwierigkeiten dauernd beseitigt, daß er gegen jedes derselben ein in der kleinen Seele entdecktes reges Lustgefühl ausspielt, so daß selten die Autorität ihren Sieg Gewaltmitteln verdanken mußte. Von früh an wird der Prinz angehalten, wahr zu sein im Empfinden, im Reden, im Thun; geradezu überraschend ist seiner Umgebung seine Liebe für das Rechte, Gute; wie bei ihm die herbeigeführte Einsicht in sein unrechtes Thun allein schon hinreicht, das gethane Unrecht mit allen Kräften aus der Welt zu schaffen. Den entscheidendsten Einfluß aber auf die Kindererziehung hat ja das Familienleben. Nun ist unzählige Male geschildert worden, daß das kronprinzliche Familienleben ein herrliches Bild des innigsten Glücks und des tiefsten häuslichen Friedens geboten; Poesie und Kunst haben ja in edlem Wetteifer dieses Bild fernen Geschlechtern erhalten; war's da ein Wunder, wenn das Gemüt unsers kleinen Prinzen zu einer holden Innigkeit und Sinnigkeit sich entfaltete?

Dem thatkräftigen und thatfrischen Geschlechte der Hohenzollern war stets die Freude an körperlichen Bewegungen eigen; auch der zum Knaben herangewachsene Prinz Wilhelm verstand bald im Verein mit seinem jüngern Bruder Heinrich mit ganz besonderem Geschick zu turnen, schwimmen, exerzieren, fechten, und zu schießen. Oft wird im Park zum Schloß Friedrichskron in Potsdam vom Prinzen Wilhelm selbst eine kleine Schanze mitten im Turnplatz mit Blockhaus, Zugbrücke und Geschützen errichtet; Potsdamer Kadetten werden herbeigeholt, um jene unter dem Sturmmarsch der Waisenhaus-Kapelle zu nehmen. Dabei zeigt sich stets als einer der tapfersten und kühnsten Prinz Wilhelm.

Die Geistesschärfe des Prinzen wurde frühe durch einen sorgfältigen Unterricht geweckt und gepflegt. Sehr charakteristisch für den kleinen Schüler ist — und auch darin ist er für Sie alle, liebe Schüler, und für die ganze deutsche Jugend ein treffliches Vorbild zur Nacheiferung geworden —, daß er jeder Anforderung mit einem ganz besondern Fleiß und Eifer nachkommt; die sprichwörtlich gewordene Hohenzollernsche Pflichttreue und Gewissenhaftigkeit bricht hervor und macht gerade hierdurch den kleinen Schüler zum Liebling seines unvergeßlichen Großvaters, des großen Kaisers Wilhelm. Lust und Liebe sind die Fittiche zu großen Thaten; hier bei unserm kleinen Schüler zunächst zu tüchtigen Leistungen; daher kann sehr bald bei ihm der Elementarunterricht durch einen wissenschaftlichen in all den Fächern ersetzt werden, in welchen Sie in unserer Anstalt unterwiesen werden. Seine ungewöhnliche Begabung im Zeichnen wurde später durch den Besuch der Zeichenklasse des Kunstgewerbe-Museums gepflegt; eine hervorstechende deklamatorische und mimische Begabung durfte der Prinz durch Theaterspielen mit Altersgenossen weiter ausbilden; seine spätere Neigung zu Chemie, Physik und Litteratur verstanden die berühmtesten Kräfte der Berliner Universität zu nähren und zu vertiefen. — So entwickelten sich schon frühzeitig alle Kräfte des Thronerben gleichmäßig; der Knabe verspricht ein Mann mit festem, klaren energischen Willen, tiefem Gemüt und tüchtigem Wissen zu werden, ein Mann, zu dem vorbildlich ein ganzes Land freudig und hoffnungsvoll aufsehen darf.

Wir sind in der Darstellung der geistigen Entwickelung des Prinzen Wilhelm seinen Lebensereignissen vorausgeeilt: Da ist zunächst eins, das sein Herz mächtig und freudig schlagen ließ, seinen Gesichtskreis mit einem Schlag erweiterte. Dem Herkommen des preußischen Königshauses gemäß werden die Prinzen mit Vollendung ihres 10. Lebensjahres als Sekonde-Lieutenant ins Heer aufgenommen. Am 27. Januar 1869 überreichte der königliche Großvater seinem geliebten Enkel mit herzlichen Worten das Patent eines Sekonde-Lieutenants beim 1. Garderegiment zu Fuß nebst Band und Stern des schwarzen Adlerordens. Im folgenden Mai bei der großen Kirchenparade in Potsdam marschierte der kleine Offizier zum erstenmale mit dem Regimente am König vorbei. Nach dem Parademarsch stellt dieser seinen Enkel dem Offiziercorps vor, bei dem sich auch General von Werder, der älteste und einzige Offizier befand, der mit dem Regiment vor 56 Jahren bei Groß-Görschen die Feuertaufe empfing. Auf diesen deutend sprach der König zu seinem Enkel die denkwürdigen Worte: „Du, Prinz Friedrich Wilhelm, hast an diesem Tage zum erstenmale den Degen im Regimente gezogen. An den ältesten Offizier desselben gedenkend, wünsche ich Dir, daß Du Deinen Degen bis in ein spätes Alter in und mit dem Regimente tragen mögest und daß es auch Dir einst vergönnt sei, nach einer so langen Dienstzeit wie die des Generals von Werder, auf ein neues glänzendes Kapitel in der Geschichte dieses Regiments zurückblicken zu können, wie dies dem General 1866 beschieden gewesen ist." — Des Prinzen heißester Wunsch war erfüllt; er war jetzt ein Glied jenes Heeres, speciell jenes Regiments, dessen Wunder der Tapferkeit, dessen Siege auf den böhmischen Schlachtfeldern schon das kleine siebenjährige Herz bewegt hatten. — Wie mag nun aber erst ein Jahr darauf die Begeisterung des jungen Soldaten, sein Thatendrang, seine Liebe zum deutschen Vaterland entflammt sein, als gegen den nach dem Rhein lüsternen Erbfeind ganz Deutschland wie ein Mann sich erhob, die deutschen Heere im heißen Ringen Sieg auf Sieg gewannen, der Erbfeind endlich kraftlos auf Gnade und Ungnade sich ergab, aus der Asche sagenumwobener Zeiten unter dem Zujauchzen aller deutschen Volksstämme ein geeintes deutsches Kaiserreich entstieg! Und die ruhmgekrönten Sieger? sie waren sein geliebter Großvater und sein teurer Vater; und er? er war ein zukünftiger Erbe einer hehr strahlenden Kaiserkrone geworden! Im heißen Verlangen, auch einst ein solcher Held und würdig des neuen Erbes zu werden, übte und studierte Prinz Wilhelm nun mit verdoppeltem Eifer; dreizehnjährig wurde er von der Prüfungskommission des Joachimsthalschen

Gymnasiums zu Berlin, um seinen Wissensstand festzustellen, geprüft und für Obertertia als reif befunden. Den Anforderungen der Oberklassen entsprechend wurde allmählich sein Unterricht erweitert; auch ein die Konfirmation vorbereitender Religionsunterricht trat hinzu; diese selbst wurde am fünfzehnjährigen Prinzen in der Friedenskirche zu Potsdam vollzogen. Zum erstenmale hört das Land ein eigenes Bekenntnis des Prinzen; denn der Sitte des Königshauses gemäß sprach dieser öffentlich und laut sein selbstverfaßtes Glaubensbekenntnis. In kindlichem Glauben gelobte er, gottergeben zu bleiben sein Leben lang, auf Gott den Herrn seine Hoffnung zu setzen und ihm stets für seine Gnade zu danken. Am Schluß fügt er mit fester, gehobener Stimme hinzu: „Ich weiß, schwere Aufgaben warten meiner im Leben; doch dies soll meinen Mut stählen, nicht unterdrücken. Ich will die Zeit meiner Jugend benutzen, um diesen Aufgaben gewachsen zu sein; ich will meine Aufmerksamkeit dem Wohle des Staates, wie dem Ausbau der christlichen Kirche zuwenden.“ Das waren nicht nur Worte eines angehenden Jünglings, das waren Bekenntnisse eines bereits gereiften, ernst vorschauenden Gemüts. Deutschland schöpfte schon damals mit Recht Freude, Zukunfts-Trost und Zukunfts-Hoffnung aus ihnen; und wie sollten wir uns heute nicht erst recht freuen und der Zukunft hoffnungsvoll entgegen sehen, die wir aus der halbjährigen Regierung unsers jungen Kaisers nun genugsam wissen, daß jenes Wort ein Hohenzollernwort war, das nicht bloß gesprochen, sondern in allen seinen Teilen genau ausgeführt worden ist und somit — des trösten wir uns — auch fernerhin gehalten werden wird.

An die Konfirmation schließt sich unmittelbar ein sehr wichtiger Abschnitt in der Erziehung des Prinzen Wilhelm an. Während bisher die preußischen Thronerben in der Zurückgezogenheit und ausschließlichen Hofluft erzogen worden waren, sollte jetzt eine Ausnahme gemacht werden, eine Ausnahme, die alle Vaterlandsfreunde mit freudigster Zustimmung begrüßten. Ich habe schon einmal Veranlassung gehabt, meine lebhafte Bewunderung über die tiefe pädagogische Einsicht des Vaters unsers Prinzen, des Kronprinzen Friedrich Wilhelm auszusprechen; an dieser Stelle bietet sich mir eine zweite Gelegenheit. Es handelt sich um den in höhern Kreisen Aufsehen erregenden Beschluß der kronprinzlichen Eltern, ihre beiden Söhne, die Prinzen Wilhelm und Heinrich, einer öffentlichen Schule zur Weiterbildung, einem Landesgymnasium außerhalb Berlins mit der Vorschrift zu übergeben, daß ihre Söhne ohne jedweden Unterschied allen Pflichten der übrigen Schüler sich zu unterziehen hätten. Die Gründe zu diesem Beschluß traten offenbar schon weit früher in den Festen und Spielen hervor, welche in Bornstedt bei Potsdam die kronprinzlichen Gutsherrschaften den Landkindern im Verein mit ihren eigenen gaben: die prinzlichen Kinder sollten durch einen natürlichen und ungezwungenen Verkehr mit anderen Ständen vor jener Einseitigkeit bewahrt werden, die mit einer so hohen Stellung leicht verbunden ist. Aus den Kindern waren nun angehende Jünglinge geworden; denen gegenüber konzentrieren sich jene Gründe des im Wohl und Wehe seiner Söhne aufgehenden Kronprinzen in dem Wort, das Goethe dem Herzog Alphons im Tasso in den Mund legt:

Ein edler Mensch kann einem engen Kreise
Nicht seine Bildung danken. Vaterland
Und Welt muß auf ihn wirken. Ruhm und Tadel
Muß er ertragen lernen. Sich und andre
Wird er gezwungen recht zu kennen. Ihn
Wiegt nicht die Einsamkeit mehr schmeichelnd ein.
Es will der Feind — es darf der Freund nicht schonen:
Dann übt der Jüngling streitend seine Kräfte,
Fühlt, was er ist, und fühlt sich bald ein Mann.

Die Wahl fiel auf das Gymnasium zu Cassel, dessen Direktor auf eine Anfrage dem Kronprinzen freimütig und so recht aus dessen Herzen antwortete: „Er betrachte den Wunsch der hohen Eltern als einen Befehl, erwarte aber von den beiden künftigen Zöglingen seiner Anstalt die strikte Übernahme derselben Pflichten und Respektierung derselben Ordnung und Zucht, wie von jedem andern Schüler; er könne keine Unterschiede zulassen." Eine Aufnahme-Prüfung stellte bei dem fünfzehnjährigen Prinzen Wilhelm die Reife für Obersekunda fest.

Für ihn beginnt nun eine Zeit reich an Arbeit von früh bis abends, außer Sonn- und Festtags, mit wenigen Freistunden zur Erholung, dafür aber eine Zeit reichsten innern Ertrags, eine Zeit, deren noch jetzt unser Kaiser mit besonderer Vorliebe sich erinnert.

Ungern versage ich mir, Sie, liebe Schüler, breiter einzuführen in die Ihnen gewiß sehr sympathische dreijährige Casseler Schulzeit des Prinzen; ich zweifle nicht, daß Sie gespannt beobachtend mich begleiten würden bald in das Klassenzimmer, in welchem der hohe Schüler bescheiden auf der Schulbank einen Platz einnimmt wie jeder andere; bald in sein Arbeitszimmer im Fürstenhause und in sein kleines, aber gewählt ausgestattetes physikalisches Kabinett; in den Unterrichtspausen würden Sie ihn im Schulhof lebhaft hin- und hergehend, mit jedem Klassengenossen plaudernd, gar häufig sein Brötchen gegen das bevorzugte Schwarzbrot eines seiner Mitschüler austauschen sehen; im Winter fänden Sie ihn, so oft es anging, auf dem Eis, im Sommer in der Militärschwimmanstalt. Sie würden sich erfreuen an seinem Fleiße, seiner Aufmerksamkeit, seinem strengen Pflichtgefühl, an seiner Wahrheitsliebe, seiner Sinnigkeit, seinem kameradschaftlichen Sinn, an seiner Liebenswürdigkeit und Freundlichkeit und an seinem Mut. Mit empfänglichem Geiste hineingestellt in eine öffentliche Schule mit ihrer Summe von Intelligenz, mit ihren Ordnungen und Gesetzen; hineingestellt in ein Gemeinwesen, in welchem es galt, sich eine Stellung, einen Platz zu erringen, den Geburt und Rang nicht verleihen kann; hineingesetzt in eine total neue Welt, in der er nicht nur sich zurecht zu finden, sondern unter dem beobachtenden Auge des Landes sich auszuzeichnen hatte; verpflanzt aus dem Hofleben mitten ins Volk, dessen Denken, Empfinden und Leben ihn zum erstenmal voll umfing; wie sollte es nicht selbstverständlich sein, daß der energische Prinz sich aufs herrlichste und weit reicher entwickelte, als in nicht öffentlicher Unterweisung? Wie wär's anders denkbar, als daß von der gleichmäßigen Ausbildung aller seiner Kräfte alle Augenzeugen nur mit höchstem Lobe und stets mit großen Hoffnungen für die Zukunft berichten? Lassen wir wenigstens einen der Beobachter und Beurteiler und zwar gleich den berechtigtsten erzählen! Herr Geh. Rat Wiese schreibt in seinen „Memoiren über die Schulzeit Kaiser Wilhelms II": Ich trat Punkt 7 Uhr in die Unter-Prima, in der ich den Prinzen schon auf seinem Platze fand, obwohl er im Sommer auf Wilhelmshöhe wohnte; er zeigte sich in seinem Wesen bescheiden und anspruchslos; in der Thukydides-Stunde ging er auf die Auseinandersetzung der schwierigsten Stellen sehr gut ein und hatte sichtlich Freude an dem schließlichen Resultat; über das Geographische und die Sagengeschichte gab er gute Antworten; er zeigte eine Vorliebe für Horaz, von dem er freiwillig mehrere Oden übersetzt und auswendig gelernt hatte; das größte Interesse widmete er der Geschichte; von den prüfenden Fragen verfehlte er keine. Der Direktor rühmte mir sein williges Eingehen in alle Ordnungen der Schule und seinen unbefangenen Verkehr mit seinen Mitschülern, wobei er jedoch eine unziemliche Vertraulichkeit, die sich bisweilen an ihn zu drängen suchte, mit gutem Takte fernzuhalten wußte. Auch sein Fleiß wurde von den Lehrern lobend anerkannt; vielleicht keiner seiner Mitschüler stand in so strenger Gewöhnung an eine genaue und gewissenhafte Einteilung und Verwendung der Zeit. Die Hohenzollerntugend der Pflichttreue war ein Schmuck seiner Jugend. — Soviel aus jenen schlichten, nunmehr aber historisch bedeutsam gewordenen Memoiren. —

Ein wichtiger Lebensabschnitt des Prinzen strebte seinem Ende zu. Durchaus auf der wissenschaftlichen Höhe eines preußischen Gymnasial-Abiturienten stehend, machte er in der letzten Woche des Januar 1877 mit 17 seiner Mitschüler das Abiturienten-Examen. In der Entlassungsfeier empfing er aus der Hand des Direktors der Anstalt unter warmen Worten desselben das Reifezeugnis und eine der Denkmünzen, die aus einer Stiftung an die 3 fleißigsten Primaner jährlich verteilt wurden und zwar wegen seines „gleichmäßigen und andauernden Fleißes." Hocherfreut dankte der Prinz mit den Worten: „Ich kann Ihnen gar nicht sagen, wie sehr mich diese Medaille freut; denn ich weiß, daß ich sie verdient habe; ich habe redlich meine Pflicht erfüllt und gethan, was in meinen Kräften stand." Froh und dankbar gab der nun fürs Studium der Rechtskunde und Staatswissenschaften Reife — denn dafür hatte er sich in seiner vita entschieden — seinen Lehrern, Mitabiturienten und den Behördenspitzen von Cassel einen Abschiedsschmaus. Noch in derselben Nacht, der letzten seines 18. Lebensjahres, eilte der Prinz nach Berlin, denn am folgenden Tage, den 27. Januar 1877 fand die Feier seiner Großjährigkeit statt; der kaiserliche Großvater schmückte seinen vielversprechenden Enkel mit der Kette des Schwarzen Adlerordens.

Wir sind nun wieder an einem neuen und letzten Abschnitt in der Erziehung und Ausbildung des Prinzen Wilhelm angelangt; er umfaßt die nächsten 11 Jahre. Den hoffnungsvollen Stand seiner allgemeinen Bildung haben wir kennen gelernt. Es gilt nun, auf diesem soliden Grunde das Gebäude der für einen zukünftigen Thronerben als notwendig erachteten Spezialstudien zu erheben. Als oberster Heerführer und Kriegsherr ist aber theoretische wie praktische Einsicht ins gesamte Militär- und Kriegswesen; als Regent eingehende Kenntnis der ganzen Staats-Verwaltung und der Staats-Wissenschaften unerläßlich.

Wie ernst nahm es Prinz Wilhelm mit diesem neuen Programm seiner Aufgaben! Er gönnt sich nach seiner Rückkehr aus Cassel keine Ferien; gleich nach seinem Geburtstage führt der kaiserliche Großvater ihn als Premierlieutenant zum praktischen und regelmäßigen Dienst seinem Garderegiment zu. Indem er ihn seinem neuen Vorgesetzten, dem Prinzen August v. Württemberg vorstellt, hören wir hochbedeutsame Worte aus dem Munde des greisen Kaisers, die in ihrer Einfachheit und ergreifenden Schlichtheit stets eines neuen und tiefen Eindrucks sicher sind; zugleich sind sie, wie so viele Aussprüche unsers unvergeßlichen Kaisers Wilhelm, dazu angethan, seine herrliche Heldengestalt in ihrer ganzen liebenswürdigen Bescheidenheit und Dankbarkeit in unserem Herzen lebendig zu erhalten. Zum Enkel sich wendend spricht er: „Aus der Geschichte weißt Du, wie alle Könige Preußens, neben ihren andern Regentenpflichten stets eins ihrer Hauptaugenmerke auf das Heer gerichtet haben. Schon der große Kurfürst hat durch persönlichen Heldenmut seinen Scharen ein unübertroffenes Beispiel gegeben. Friedrich I. wußte sehr wohl, daß, als er sich die Krone auf das Haupt setzte, er diesen kühnen Schritt zu verteidigen genötigt sein könne. Er wußte aber auch, daß seine erprobten Truppen ihm dies ermöglichen würden. Friedrich Wilhelm I. hat in der Garnison, welche Du nun beziehst, und die man gern die Wiege der preuß. Armee nennt, den festen Grund zu ihrer Organisation durch die strenge Disziplin gelegt, welche er Offizieren und Soldaten einprägte, ohne welche keine Armee bestehen kann, und dieser — sein — Geist lebt noch heute in ihr fort. Friedrich der Große übernahm mit seinem angeborenen Feldherrntalente diese festgegliederten Truppen als Kern seiner Armee, mit der er die Kriege führte und die Schlachten schlug, die ihn unsterblich gemacht. Friedrich Wilhelm II. mußte zuerst einer veränderten Kriegsart begegnen, welcher gegenüber das Heer doch nicht ohne Lorbeern aus dem Kampfe hervorging. Mein königlicher Vater begegnete dem gleichen Feinde, und ein schweres Geschick traf Vaterland und Heer. Aber das Alte, Unhaltbare beseitigend, reorganisierte er die Armee und gründete sie auf Vaterlandsliebe und Ehrgefühl. So erreichte er mit ihr Erfolge, welche auf ewige Zeiten in den Annalen der preußischen Geschichte verzeichnet stehen. Mein schwergeprüfter Bruder, König Friedrich Wilhelm IV., sah mit Genugthuung auf seine Armee, die in schweren schmerzlichen Tagen fest zu ihm stand, die er zeitgemäß fortbildete, und die neue Lorbeern pflücken konnte. So fand ich die Armee. Wenn es je eine Regierung von erst kurzer Dauer gegeben, deren Geschicke sichtlich durch die Vorsehung gnädig gelenkt wurden, so ist es die der letzten Jahre. Und wieder ist es die Armee, die durch ihren unerschütterlichen Mut und ihre Ausdauer Preußen auf die Höhe gestellt hat, auf der es nun steht. Das Gardecorps, welchem du schon angehörst, und mit ihm das Regiment, in welches Du jetzt eintrittst, haben in hervorragender Weise zu diesen ruhmreichen Erfolgen beigetragen. Die Zeichen, die ich auf meiner Brust trage, sind der öffentliche Ausdruck meiner unauslöschlichen Dankbarkeit und meiner nie endenden Anerkennung für die Hingebung, mit welcher die Armee Sieg auf Sieg erfochten hat. Deine Jugend ist in diese Zeit gefallen, und Du hast in Deinem Vater ein ehrendes Vorbild der Kriegs- und Schlachtenleitung. Es werden Dir aber in den Dienstverhältnissen, in welche Du nun trittst, manche dem Anscheine nach unbedeutende Dinge entgegentreten, die Dir vielleicht auffallen können. Aber du wirst auch lernen, daß im Dienste nichts klein ist, und daß jeder Stein, der zum Aufbau einer Armee gehört, richtig geformt sein muß, wenn der Bau gelingen und fest sein soll. Nun gehe und thue Deine Schuldigkeit, wie sie Dir gelehrt werden wird. Gott sei mit Dir!" —

Kurze Zeit darauf führte Kaiser Wilhelm seinen Enkel den Lehrern der Kriegsakademie zu, welche berufen waren, ihn in den verschiedenen Fächern der Kriegswissenschaften zu unterrichten. So begann mithin für Prinz Wilhelm ein arbeitsreiches Leben. Hatte er mit streng militärischer Pünktlichkeit seinen Dienst, wie jeder preußische Lieutenant gethan, dann lag er mit allem Eifer den Kriegswissenschaften, der Befestigunskunde, den militärischen Aufnahmen, der Waffenkenntnis, der Taktik ob, so daß er schon nach einem Jahre eine Prüfung in den militärischen Wissenschaften in Gegenwart seines Vaters vorzüglich bestehen konnte. Im praktischen Dienste war ihm, ganz im Sinne seines kaiserlichen Großvaters, nichts zu klein und gering; selbst Rekruten bildete er aus und führte sie dann mit Stolz dem Anerkennung spendenden Kriegsherrn vor. Je länger, desto mehr lernte er nach echter Hohenzollernart die Armee als das Fundament der staatlichen Größe schätzen und so wurde er Soldat mit Leib und Seele, und seine allmählich in weiteren Kreisen bekannt werdenden hervorstechenden militärischen Talente erregten allgemeine Freude und Bewunderung. Im Dienste war er streng, aber gerecht; in Ausdauer und Bedürfnislosigkeit war er für alle ein Muster; seine gelegentlichen Ansprachen verraten die besondere Begabung, sich auf den Ton der Mannschaft zu stimmen und diese zur Begeisterung fortzureißen. Außerhalb des Dienstes war er gegen dieselbe voll Leutseligkeit, ja hinreißender Liebenswürdigkeit.

Nach beendeter Dienstzeit beim 1. Garderegiment zu Fuß wurde der zweiundzwanzigjährige Prinz zum Major ernannt. Er trat nun, um auch den Kavalleriedienst kennen zu lernen, in das Gardehusarenregiment zu Potsdam ein, in welchem er voll Eifers für die Aufgaben und den Dienst der Reiterei alle Offiziersämter bis zum Regimentskommandeur durchlief. Er schied im vorigen Jahre aus diesem Wirkungskreis, da ihm gerade an seinem Geburtstage ahnungslos die letzte Auszeichnung seines hochverehrten Großvaters, die Ernennung zum Generalmajor und Kommandeur der 2. Garde-Infanterie-Brigade zu teil wurde.

Dieser elfjährige militärische Dienst des Prinzen wurde aber im Interesse der oben gedachten übrigen Aufgaben seiner Ausbildung einige Male unterbrochen. Bereits $^1/_2$ Jahr nach seiner Rückkehr aus Cassel, also Michaelis 1877, bezog er auf 2 Jahre dieselbe Universität, die schon sein Vater besucht hatte. Die alma mater zu Bonn hatte das Glück und die Ehre, die fleißigen Studien des Prinzen nach einem vom Kultusminister entworfenen Plane zu leiten und zu fördern; wir sehen ihn nicht nur rechts- und staatswissenschaftliche Collegia regelmäßig besuchen; auch Philosophie, Geschichte, Litteratur, Kunstgeschichte, Physik und Chemie sind in den Kreis seiner Studien hereingezogen. Doch so hingenommen er auch von dem Reiz derselben ist; dem mannigfach bildenden Umgang mit Altersgenossen, auf welchen, wie wir oben sahen, die kronprinzlichen Eltern besonderes Gewicht legten, entzieht er sich nicht; nach gethaner Arbeit läßt er als Gast bei den Borussen das studentische Leben voll auf sich wirken und ist, doch maßvoll und vornehm, ein Fröhlicher mit den Fröhlichen.

Seine praktische staatswirtschaftliche Ausbildung begann im Jahre 1882. Zunächst der Potsdamer Regierung zugeteilt, führt ihn der Oberpräsident Achenbach in die verschiedenen Zweige der Verwaltung ein. Häufig wohnte er auch den Sitzungen des Bezirksverwaltungsgerichts bei; seine lebhafte Beteiligung an den Verhandlungen über die mannigfachsten Gegenstände aus der bürgerlichen Rechtssphäre bewies, wie rasch er sich eine genaue Kenntnis der Gesetze und Verordnungen erworben hatte. Es folgten darauf zweijährige praktische Studien in den verschiedenen Ministerien, durch welche er unter Leitung der Minister eine gediegene Einsicht besonders in die Geschäfte des auswärtigen Amts und des Finanzministeriums gewann. So wurde Prinz Wilhelm mit allen Zweigen des Staatslebens innig vertraut. Er lernte aber auch die Tüchtigkeit der Leiter desselben schätzen. Hier ist die Stelle, der gegenseitigen, schon frühen Sympathieen zwischen dem gewaltigen Kanzler des deutschen Reichs Fürst Bismarck und dem energischen, begabten, für alles Hohe begeisterten Prinz Wilhelm zu gedenken, Sympathieen, die heute dem darüber glücklichen deutschen Volke eine Quelle des Trostes und bester Hoffnungen für die Zukunft sind. Die zunächst warme Zuneigung des alten erprobten Dieners fürs vielversprechende Enkelkind des Hauses, für dessen Glanz er sein Leben eingesetzt, entfaltete sich später zu einer väterlichen und doch wiederum von Ehrfurcht getragenen Liebe für den erwachsenen Prinzen, den er von lebhaftem Interesse für alle öffentlichen Angelegenheiten, den er vor allem allmählich von einer verwandten, das ganze Sein durchdringenden, thatlustigen Sehnsucht ergriffen wußte, das deutsche Vaterland einig, machtvoll, glanzvoll zu sehen; ja, wie mochte den Kanzler eines Tages die Offenbarung beglückt haben, daß der Geist des alten Großvaters, in und mit welchem Deutschlands Macht und Herrlichkeit zu einem Wunder für alle civilisierten Völker geworden war, in dem Enkel in allen Zügen verjüngt wieder auflebte! Wir hören diese Freude, aber auch seine Ruhe und sein Zukunftsvertrauen förmlich ansteckend durch, wenn der Kanzler am letzten 24. September als Gutsherr in Schönhausen vor den Erntefestfeiernden in seiner kurzen markigen Weise im Trinkspruch auf seinen jungen Herrn und Kaiser sagt: „Schweren Verlust hat Alldeutschland durch den Tod seiner beiden Kaiser erlitten; aber Sonnenschein ist wieder eingekehrt, denn mit Stolz können wir auf unsern Kaiser Wilhelm II. blicken, der nicht nur ein tapferer Soldat vom Scheitel bis zur Sohle, sondern auch ein Hort des Friedens ist."

Ich sprach oben von gegenseitigen Sympathieen, und das mit Fug und Recht. Schon frühe teilt Prinz Wilhelm das Staunen der civilisierten Welt vor dem starken Förderer der preußischen Monarchie, vor dem klugen und unermüdlichen Mitbegründer des deutschen Reichs, vor dem mächtigen, ausschlaggebenden Leiter der europäischen Politik, vor dem redegewandten, sieghaften Kämpen in der Volksvertretung; mit ganz Deutschland endlich verehrt er die Einfachheit, Religiosität und Gemütstiefe des Fürsten und hat von der goldnen Kette so vieler sympathischen Züge, mit welcher der Schloßherr von Varzin und Friedrichsruh unsere Herzen umschlungen, auch sein Herz mit umschlingen lassen. Diese innige Stellung zum Reichskanzler hören wir durchweg heraus, wenn am 1. April des vorigen Jahres, also in der schon fast hoffnungslosen Leidenszeit seines kaiserlichen Vaters, nunmehr Kronprinz

Wilhelm des Kanzlers Geburtstag in und mit den Worten feiert: „Eure Durchlaucht! Unter den 40 Jahren, welche Sie soeben erwähnten, ist wohl keins so ernst und schwerwiegend gewesen, als das jetzige. Der Kaiser Wilhelm ist heimgegangen, dem Sie 27 Jahre treu gedient! Mit Begeisterung jubelt das Volk unserm jetzigen hohen Herrn zu, der Mitbegründer der Größe unsers Vaterlandes ist. Eure Durchlaucht werden ihm, wie wir alle, mit derselben altdeutschen Mannestreue dienen, wie dem Dahingeschiedenen. Um mich eines militärischen Bildes zu bedienen, so sehe ich unsere jetzige Lage an wie ein Regiment, das zum Sturm schreitet. Der Regiments-Kommandeur ist gefallen; der nächste im Kommando reitet, obwohl schwer getroffen, noch kühn voran. Da richten sich die Blicke auf die Fahne, die der Träger hoch emporschwenkt. So halten Eure Durchlaucht das Reichspanier empor. Möge es, das ist unser innigster Herzenswunsch, Ihnen noch lange vergönnt sein, in Gemeinschaft mit unserm geliebten und verehrten Kaiser das Reichspanier hochzuhalten. Gott segne und schütze dasselbe und Eure Durchlaucht!" Ganz Deutschland machte damals so recht von Herzen diesen Wunsch zu seinem eigenen. Wir erweitern ihn heute dahin: Möge es nie den finsteren, Zwietracht und Sturm säenden Mächten gelingen, dieses herrliche gegenseitige Verhältnis zwischen dem Kanzler und seinem jungen Kaiser, diese eine Quelle von Deutschlands Trost und froher Hoffnung für die Zukunft zu trüben, oder gar zu zerstören!

Ich bin am Ende.

Liebe Schüler! Als wir im vorigen Jahre das Schwerste erlebten, das ein Land, das seine Bewohner, die mit allen Fasern ihrer Herzen an ihren unvergleichlichen Heldenfürsten hängen, erleben kann; als kurz hintereinander Preußen zwei seiner größten Könige, Deutschland seine zwei ersten Kaiser verlor; als dazu im Osten und im Westen am vaterländischen Himmel finster drohende Gewitterwolken sich auftürmten; als sogar mitten unter uns im Verborgenen schleichende Mächte heimtückisch zum Schlage ausholten: da ergriff uns alle bittere, schwere, zagende Sorge, in der wir das junge, herrliche deutsche Reich, die sauer errungene Wohlfahrt seiner Bewohner, ja alles, was jeder hoch und teuer hält, schon schwer gefährdet sahen. Heute rufen wir, wie von einem Alp befreit, mit Fürst Bismarck froh aus: „Sonnenschein ist wieder eingekehrt!" Die Sturmwolken sind wieder verschwunden, die innern finstern Mächte liegen, wenn auch knurrend, wieder in ihren Höhlen; die Wohlfahrt des Landes wird von der Landesvertretung heute herrlicher, denn je aufgerollt. Wem verdanken wir das alles? In erster Linie der Gnade Gottes, dem jeder heute inbrünstig danken wolle. Dann aber vor allem unserm jungen, herrlichen Kaiser Wilhelm II., der als tüchtiger Soldat vom Scheitel bis zur Sohle weise und achtunggebietend die Wehrkraft des Landes vermehrte und verjüngte; der als Hort des Friedens nicht ruhte und rastete, bis er treue Bundesgenossen geworben und den Feinden durch imponierende Machtfülle, Aufrichtigkeit und Liebenswürdigkeit die Krallen umgebogen. — Auch der Zukunft dürfen wir uns durch ihn getrösten und heute von Herzen froh Kaisers Geburtstag feiern. Der vor Ihnen entrollte Entwickelungs- und Bildungsgang unsers Kaisers, vor allem die durch sein ganzes Leben sich hindurchziehende Pflichttreue und Gewissenhaftigkeit, sein rastloser Fleiß, seine Wahrhaftigkeit, sein echt christliches Wohlwollen, sein Hochhalten der Tradition seines ruhmreichen Hauses, seine Anhänglichkeit an bewährte Diener geben uns heute unsern Frohmut und den unerschütterlichen Glauben, es werde dem jungen Monarchen vollauf gelingen, die hohen Aufgaben, die er bei der Thronbesteigung in seiner Ansprache „An mein Volk" so herrlich und reich sich gestellt, zu seinem Ruhm und zum Heil des deutschen Vaterlandes zu erfüllen.

Drum auf, lassen Sie uns heute an seinem Geburtstage Seiner Majestät unserm Kaiser und König Wilhelm durch ein erneutes Gelübde unserer Treue danken, einer Treue, die in guten und bösen Tagen fest zu ihm steht; lassen Sie uns seinen Herzenswunsch für die Zukunft erfüllen, den ich in seinen eigenen ergreifenden Worten gebe: „Ein treuer Fürst eines treuen Volks, beide gleich stark in der Hingebung fürs Vaterland!" Besonders mögen Sie, liebe Schüler, als Teil des zukünftigen deutschen Volks, Ihre Treue jetzt darin bethätigen, daß Sie dem Fleiße und der strengen Pflichttreue nacheifern, die Sie heute vorbildlich kennen gelernt haben, damit Sie die Zukunft als Männer finde, fähig und würdig, unser höchstes irdisches Gut, das Vaterland, zu verteidigen, und daß Sie frühzeitig all Ihr Wollen und Thun stellen lernen unter jene preußische Devise, durch welche schon viele Tausende sich und äußere Feinde besiegt haben: „Mit Gott für König und Vaterland!" Besiegeln Sie Ihre heutigen Gelübde, indem Sie sich erheben und begeistert mit mir ausrufen: Unser erhabner und geliebter Kaiser und König Wilhelm II. lebe hoch! und nochmals hoch, und abermals hoch!

Mathematische Lesestoffe

für die

Prima der Realgymnasien

von

Professor Dr. P. Kramer,
Inspektor des Realgymnasiums.

Für jede Lehranstalt ist die Aufstellung des Lehrplans, d. h. Auswahl und Abgrenzung der zu behandelnden Lehrstoffe, wohl die wichtigste Angelegenheit. Die Realgymnasien haben sie noch lange nicht zu einem befriedigenden Abschluß gebracht, es ist vielmehr unbestritten, daß der augenblickliche Gesamtlehrplan dieser Schulgattung noch kein endgültiger ist. Die Zeit der Versuche ist noch immer für sie nicht abgelaufen. Aber auch für einzelne Fächer müssen wir dasselbe sagen, so namentlich für die Mathematik.

Der mathematische Lehrplan krankt auch nach der Einführung der neuen Unterrichts-Ordnungen von 1882 an so klaffenden Schäden, daß der geistige Gewinn, den die Schüler durch den Unterricht in der Mathematik davontragen könnten, bei sehr vielen außerordentlich beeinträchtigt wird.

Diese Wahrheit ergiebt sich eigentlich ganz von selbst, wenn man bedenkt, daß die Lehrstoffe, welche in Unter- und Oberprima zu den bis Obersekunda behandelten hinzutreten, so neu und umfangreich sind, daß an eine Vertiefung der Kenntnisse und an ein Fortbilden derselben zu freudigem Können nicht, oder nur in besonders günstigen Fällen zu denken ist.

Ich gehe im Nachfolgenden auf einzelne Punkte noch im besonderen ein, um zuletzt Vorschläge zur Abhilfe des hier unbedingt vorhandenen Notstandes zu machen, allerdings nur im Fluge.

I.

Es ist ein von mir schwer empfundener Übelstand, daß in Prima der Realgymnasien so viele neue mathematische Lehrgegenstände auftreten.

In den zwei Jahren, welche der Prima zugewiesen sind, sollen behandelt werden: Analytische Geometrie der Ebene und Kegelschnitte, sphärische Trigonometrie mit Anwendung auf Astronomie, kubische Gleichungen, Kombinationslehre mit Wahrscheinlichkeitsrechnung, niedere Analysis, Kettenbrüche, (Determinanten), beschreibende Geometrie und Körperberechnung; hierzu kommt noch die Wiederholung des früher Erlernten. Wer wollte für analytische Geometrie, niedere Analysis, beschreibende Geometrie nebst Stereometrie weniger als je ein halbes Jahr rechnen? Die kubischen Gleichungen vielleicht zusammen mit sphärischer Trigonometrie nehmen ebenfalls ein halbes Jahr in Anspruch. Der Rest muß an passenden Stellen eingeschoben werden. So ist es nicht anders möglich, als daß jedes halbe Jahr ein neuer umfangreicher Lehrgegenstand den Primanern geboten wird. Aber nicht nur umfangreich ist er, nein jedesmal ist es nötig, gewissermaßen ganz von vorn anzufangen, denn

II.

Daß für einen großen Teil der namhaft gemachten Lehrstoffe nur ein sehr loser Zusammenhang mit den in den früheren Klassen behandelten besteht, ebenso daß die Grundlagen derselben für die Schüler oft nicht unerhebliche Schwierigkeiten bieten, ist für den Fachmann völlig klar.

Die Koordinatengeometrie kann ja schon in dem Kapitel über die trigonometrischen Funktionen und bei der Anwendung der Algebra auf Geometrie gestreift sein, das ist wohl richtig. Für die analytische Geometrie ist aber das Wichtigste die Deutung der Gleichungen in geometrischem Sinne und das Übertragen der geometrischen Eigenschaften in ein Gleichungsbild, ferner die Verallgemeinerung der an bestimmten Fällen gefundenen Gleichungen für alle möglichen Fälle.[1]

Diese eigentlichen Grundideeen der analytischen Geometrie sind für die Schüler völlig neu und außerordentlich schwierig, wogegen sie mit einigen Formeln und deren mechanischer Verwendung leicht vertraut gemacht werden können. Die Erörterung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades habe ich dabei noch gar nicht einmal im Sinne.

Die niedere Analysis bleibt Stückwerk ohne die Konvergenzbetrachtung. Es giebt aber nach meinen Erfahrungen keinen schwierigeren, undankbareren, rätselhafteren Gegenstand für die Schüler als die Konvergenz der niederen Reihen. Ja selbst wenn man die allgemeinen Erörterungen ganz fortläßt und alles nur an ganz bestimmten Beispielen vornimmt, so ist der Gewinn im Vergleich zu der Mühe und zu der darauf verwendeten Zeit ganz unverhältnismäßig gering.

Die niedere Analysis ist ein sehr entbehrliches Kapitel, zumal wenn man bedenkt, daß durch die Konvergenz doch erst die Brauchbarkeit der Reihen festgestellt wird, ein *wirklicher* Gebrauch aber in der Schule eigentlich gar nicht vorkommt.[2]

Die darstellende Geometrie wird zwar im Zeichenunterrichte, sobald derselbe richtig betrieben wird, bereits in den Mittelklassen begonnen, aber mehr anschaulich begründet. Soll sie im Sinne der Lehrpläne von 1882 gelehrt werden, so ist ein systematischer Aufbau nötig, und dann treten die Schwierigkeiten, welche der Anschauung hier zugemutet werden, und zwar gerade in den Elementen, sehr bald äußerst empfindlich hervor. Es wird, zumal wenn bei sorgfältigem Unterricht das Zeichnen, wie nicht anders möglich, einen immer breiteren Raum beansprucht, die zur Verfügung stehende Zeit gerade abgelaufen sein, wenn sich bei dem Schüler eine gewisse Sicherheit in den Elementen eingestellt hat. Das nächste Halbjahr erfordert aber einen neuen Lehrstoff und so fehlt die Fortsetzung der Übungen und damit fällt das Meiste des Erlernten bald wieder der Vergessenheit anheim.

---

1) Ein Beispiel hierfür, welches für angehende Lehrer besonders zu empfehlen und die ganze Schwierigkeit ins rechte Licht zu stellen geeignet ist, ist der Nachweis, daß dieselbe Gleichung der geraden Linie, welche z. B. in Gandtners Elementen der analytischen Geometrie nur für eine bestimmte und zwar die einfachste Lage des laufenden Punktes auf der Linie abgeleitet ist, für alle möglichen Lagen dieses Punktes immer wiederkehrt. Hierauf lassen sich die Lehrbücher für gewöhnlich gar nicht ein.

2) Man führe mir nicht die Berechnung der Logarithmen an, das ist nur ein dürftiger Notbehelf.

Das waren die Hauptgegenstände. Bei der Körperberechnung, der Kombinationslehre, sphärischen Trigonometrie und Lehre von den Gleichungen dritten Grades sind allerdings größere Schwierigkeiten in den Elementen nicht vorhanden, eine Anknüpfung an frühere Lehrstoffe ist aber nur einigermaßen bei der sphärischen Trigonometrie, wogegen die Anwendung auf die Astronomie wieder eine Fülle neuer Begriffe nötig macht, in sehr geringem Maße noch bei der Lehre von den kubischen und binomischen Gleichungen möglich.

Ist so eine große Menge zusammenhangslosen Lehrstoffes vorhanden, so kommt noch ein anderer Übelstand hinzu, der geradezu verhängnisvoll wirkt, nämlich:

III.

Eine Anwendung des in Prima Erlernten und somit eine Vertiefung ist entweder überhaupt oder aus Mangel an Zeit nicht möglich.

Für die analytische Geometrie und die Lehre von den Kegelschnitten, die niedere Analysis und beschreibende Geometrie ist schon, wenn man den Lehrstoff außerordentlich beschränkt, für die Sicherung der notwendigsten Elemente so viel Zeit erforderlich, daß an eine einigermaßen freie Beherrschung des auf denselben sich erbauenden übrigen Lehrstoffs gar nicht zu denken ist, das ist einfach Thatsache.

Dagegen wird vielleicht angeführt werden, daß ja gerade die Erlernung der Elemente das Ziel des Unterrichts in der Prima sei.

Ich müßte dies für einen sehr verhängnisvollen Irrtum halten.

Der Schüler kann an der Ableitung der niederen unendlichen Reihen nur eine gemischte Freude gewinnen, zumal wir hier kaum in der Lage sind ihm zu zeigen, was für einen Zweck denn diese große Arbeit für ihn hat. Es ist ein reiner Bau in die Luft.

Nicht viel besser ist es mit der Ableitung der Eigenschaften der Kegelschnitte nach analytisch-geometrischer Behandlungsweise. Das rechnerische Beiwerk erstickt die Gedanken dabei fast völlig. **Überhaupt wird in Prima viel zu viel gerechnet.** Die Entwickelung der Kettenbrüche findet in den diophantischen Gleichungen einen mehr als kümmerlichen Abschluß.

Und nun gar, wenn nach den ersten Schritten in alle diese Lehrstoffe hinein das Lösen der einzelnen Aufgaben hinzutritt! Der Geist der Übungssätze von Plötz steigt da drohend empor.

Der Blick ins Ganze wird nicht geübt, eine Freude an einem Ganzen, welches der Schüler beherrschen kann, wird nicht gewonnen, es fehlt eben an einem Ganzen, in welches sich der Schüler gern hineinarbeitet, weil es begränzt genug ist, um übersehen und bewältigt zu werden.

Endlos spinnt sich z. B. bei der analyt. Geometrie die Reihe der Eigenschaften des Punktes, der Linie, des Kreises, der Parabel, Ellipse 2c. 2c. hin, kein Absehn, kein Ruhepunkt eingestreut. Übungsaufgaben werden zur neuen Sorge, denn sie erscheinen meist als neue Lehrsätze in den Lücken derjenigen des Lehrbuchs. Mühsam sucht der Lehrer hervorragende Eigenschaften anzuknüpfen an andere Gebiete, wie z. B. die Eigenschaft der Ellipse, daß die Tangente den Winkel der Brennstrahlen halbiert, an die optische Reflexion.

Ähnlich ist es bei allen Hauptlehrgegenständen der Mathematik in der Prima der Realgymnasien.

IV.

Wie ist da Abhilfe zu schaffen?

Auf den höheren Stufen unserer Realgymnasien müssen wir endlich dahin kommen, die bloße **Übungsaufgabe** von der **Verwendung** des Erlernten zu unterscheiden. Was dem mathematischen

Unterricht bis Prima wie ein Hemmschuh anhaftet, ist überhaupt die Aufgabenatomistik, in welcher fast die gesamte Selbstthätigkeit des Schülers sich verliert. Ich glaube, der Schüler sehnt sich auf der obersten Stufe aus dem Sandhaufen lose aneinander gereihter „Aufgaben" nach zusammenhängendem mathematischen Stoffe, der nicht in der Form eines Lehrbuchs auftritt.

Hierin finde ich Anhalt für folgende Vorschläge zur Abhilfe des Notstandes, in welchem sich der mathematische Unterricht im Realgymnasium befindet:

1) Es muß die Geometrie viel mehr bevorzugt werden;

2) Es müssen künftig folgende Lehrstoffe fortfallen: Die niedere Analysis (unendliche Reihen), die Lehre von den Kettenbrüchen, von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung, (von den Determinanten); als selbständiger Lehrgegenstand hört auf die darstellende Geometrie;

3) Es müssen zusammenhängende mathematische Lesestoffe beschafft werden;

4) Es ist auf jede systematische Vollständigkeit in irgend einem der in Prima zu lehrenden mathematischen Stoffe zu verzichten;

5) Es ist der engste Anschluß an die Physik zu suchen.

Über die vier erstgenannten Punkte mögen noch einige Bemerkungen erlaubt sein.

Zu 1) Die Geometrie muß jetzt im wesentlichen in Obersekunda abgeschlossen sein, so daß in Prima nichts mehr hinzukommt. Dies ist ein Übelstand, der nicht laut genug verurteilt werden kann. Wird der Lehrstoff, wie oben angegeben, beschränkt, so werden in Prima erst die schönen geometrischen Schlußaufgaben, nämlich die Kreis- und Kugelberührungsaufgaben, der Schnitt von Kreisen unter vorgeschriebenen Winkeln, die Malfattische Aufgabe, überhaupt geometrische Methodenlehre, etwa nach Petersen, als Vertiefung des bis Sekunda Gelernten, zur Behandlung kommen, desgleichen eine synthetische Behandlung der Kegelschnitte nach dem Vorbilde von Steiner oder nach Milinowski.

Zu 2) Hier breche ich mit einer alten Überlieferung. Doch bin ich sicher, daß, wenn auch jetzt viel Widerspruch laut werden wird, in nicht zu langer Zeit derselbe von selbst verstummt. Zu den Gleichungen des dritten Grades wünsche ich aber die des vierten hinzu, um die Vieleckslehre besser zum Abschluß zu bringen.

Zu 3) Wie ich mir diese Lesestoffe denke, davon liegt diesem Jahresbericht eine Probe bei. Es ist die Hälfte der von Poinsot in den Heften der polytechnischen Schule zu Paris veröffentlichten wahrhaft klassischen Abhandlung über Vielecke und Vielflache. Die Übersetzung ist frei, jedoch sinngetreu.

Mathematische Meister haben sich über leichtere Stoffe so oft und so schön ausgesprochen, daß es eine einfache Notwendigkeit ist, diese Schätze für die Schule zu heben und damit den Unterricht zu befruchten. Zugleich kann hierdurch ein Weg eröffnet werden, um die hauptsächlichsten geschichtlichen Thatsachen den Schülern näher zu bringen und berühmte Mathematiker und Physiker ihnen bekannt zu machen. Die Abhandlungen, welche zu Lesestoffen gewählt werden, müssen sich als natürliche Erweiterungen des Schullehrstoffs unmittelbar an denselben anschließen und eine angemessene Kürze haben.

Erfahrung in der Behandlung solcher Stoffe in der Klasse fehlt mir nicht, ich habe sie seit mehreren Jahren gesammelt und werde seiner Zeit darüber Mitteilungen machen können.

Zu 4) Ein beschränktes Gebiet gründlich durchforschen ist besser, als ein großes Land flüchtig. Wir wollen auch in der Mathematik nicht totes Wissen, sondern lebendiges Können.

Lesestoffprobe für die Prima der Reallehranstalten.

Über die Vielecke

von

Louis Poinsot.

Einleitung.

Die sternförmigen Vielecke haben von Alters her die Aufmerksamkeit der Mathematiker gefesselt. Der der menschlichen Natur tief eingewurzelte Zug zum Wunderbaren sah in der verschränkten Figur des Drudenfußes, welcher nichts anderes ist als ein Sternfünfeck, ein geheimnisvolles Zeichen einer höheren Geisterwelt, und so bemächtigte sich im Mittelalter auch die Astrologie jener geometrischen Figuren, die dem Auge durch das Ineinandergreifen zahlreicher Linien eine fortwährende Beschäftigung gewähren. Man sagt, daß das Pentagramm, jener Drudenfuß, der Schule der Pythagoräer bereits als Bundes- und Erkennungszeichen gedient habe. Die Kenntnis der Eigenschaften der Sternvielecke war indes im Altertum wohl noch beschränkt genug und ging auch im Mittelalter noch nicht über den Satz hinaus, daß es auch Sternvielecke giebt, bei welchen die Summe der inneren Winkel 180 Grad nicht übersteigt. Erst mit Johann Kepler[1] tritt ein bedeutender Fortschritt ein, der namentlich dadurch dauerndes Interesse erregt, daß er die enge Verwandtschaft der Lehre von den Sternvielecken mit der der algebraischen Gleichungen erkennt, eine Beziehung, die in den großartigen Entdeckungen von Carl Friedrich Gauß[2] ihren Abschluß findet.

Die Abhandlung des französischen Mathematikers Louis Poinsot,[3] von welcher die erste Hälfte im Nachfolgenden wiedergegeben ist, behandelt diese merkwürdigen Figuren im Zusammenhange. Sie gewährt durch die Vollständigkeit, mit der sie die Sternvielecke erörtert, einen hohen Genuß und bildet in der Geschichte dieser anziehenden geometrischen Gebilde einen wichtigen Ruhepunkt.

I. Die ausspringenden Vielecke und die Sternvielecke.

1. Sind die Punkte $A, B, C \dots M$ in der Ebene gegeben und verbindet man sie untereinander durch einen geschlossenen Linienzug, so heißt jede auf solche Weise gebildete Figur ein m Eck. In jedem der Punkte treffen nur 2 Seiten des m Ecks zusammen und bilden dort immer einen Winkel desselben. Da aber die beiden Seiten im ganzen zwei Winkel einschließen, welche sich zu $4R$ ergänzen, so hat man, um die m Winkel des Vielecks sicher zu erkennen, Folgendes zu beachten. Man verlängere irgend eine Seite des m Ecks, z. B. AB über B bis A, derart, daß die Strecke AA, dem Umfange des Vielecks gleich werde, und unterscheide alsdann an dieser Strecke die linke und rechte Seite etwa durch verschiedene Farben, indem z. B. die rechte Seite weiß, die linke schwarz gefärbt wird. Bricht

1) Geb. 1571 zu Magstadt bei Weil in Württemberg, gest. 1630 zu Regensburg.

2) Geb. 1777 zu Braunschweig, gest. 1855 zu Göttingen.

3) Geboren am 3. Januar 1777 zu Paris, war er 1809—1816 Professor der Mathematik an der polytechnischen Hochschule daselbst. Später war er Professor am Lyceum Bonaparte, Mitglied des Reichsoberschulrats und Senator. Er starb am 5. Dezember 1859 in Paris.

man nun diese Grade im Punkte B, so daß der Rest BA_1 durch den nächsten Punkt C geht, bricht ebenso BA_1 in C so, daß der neue Rest CA_1 durch den Punkt D geht, und fährt so fort, so erhält man das ursprüngliche Vieleck wieder. Jetzt wird man nun mit leichter Mühe die Winkel zwischen weißen Schenkeln von denen zwischen schwarzen unterscheiden können. Die Winkel des Vielecks sind dann entweder die m ersteren oder die m letzteren. Um alle Unbestimmtheit auszuschließen, werden diejenigen gleichfarbigen Winkel, deren Summe den kleinsten Wert hat, die Winkel des Vielecks genannt. Setzt man diese Summe gleich S, so ist die Summe der anderen Winkel gleich $4mR - S$.

Außenwinkel des Vielecks werden diejenigen Winkel genannt, welche jedesmal von einer Seite und der Verlängerung der ihr anliegenden über den gemeinsamen Endpunkt hinaus gebildet werden. Jeder ist der Ergänzungswinkel eines der inneren Winkel zu zwei Rechten und zwar eine wirkliche Ergänzung, wenn der Innenwinkel kleiner als $2\,R$, dagegen eine abzügliche, wenn derselbe größer als $2\,R$ ist.

2. Hieraus ergiebt sich, daß die Summe aller Winkel, der Innenwinkel sowohl wie der Außenwinkel, eines Vielecks ebenso vielmal $2\,R$ beträgt, als dasselbe Seiten hat.

3. Besitzt das Vieleck Winkel, welche $2\,R$ übersteigen, so nennt man solche Winkel einspringende Winkel, im Gegensatz zu Winkeln unter $2\,R$, welche ausspringende Winkel heißen.

4. Man hat ehedem ausspringende Vielecke solche Vielecke genannt, deren Umrißlinie von einer Graden nur in zwei Punkten geschnitten wird. Unsere Erklärung dagegen soll lauten: Ein ausspringendes Vieleck ist ein solches, welches nur ausspringende Winkel besitzt. Diese Erklärung ist zunächst anschaulicher, als die andere, welche immer zahlreiche Versuche erfordert, bis man sich wirklich überzeugt hat, daß die in Rede stehende Figur ein ausspringendes Vieleck ist; dann aber ist sie auch treffender. Denn das Ausspringen der Figuren hat nichts mit der Art und Weise zu thun, wie eine Grade deren Umfang schneidet, ob in zwei, vier oder mehr Punkten, wohl aber hängt die Art der Innenwinkel damit eng zusammen.

5. Man wird dies bald erkennen, wenn man von einer Ecke oder einem beliebigen Punkte der Ebene aus gleichlaufende Linien zu den Vielecksseiten legt. Auf diese Weise erhält man eine Anzahl Winkel, von denen jeder einen Schenkel mit dem nächstfolgenden gemeinsam hat, und welche alle in demselben Sinne durchlaufen werden.

Wenn nun die Grade, welche bei Erzeugung des Vielecks (vergl. Nr. 1) sich nach und nach auf alle Seiten desselben legt, den Winkelraum von $4\,R$ nur einmal beschreibt, so kann der Umriß des Vielecks von einer graden Linie nur in zwei Punkten geschnitten werden. Muß dagegen die bewegliche Grade, wenn sie den Umriß der Figur beschreiben soll, diesen Winkelraum zwei, drei- und mehrmal durchlaufen, so kann eine grade Linie den Umriß der betreffenden Figur auch in mehr als zwei Punkten schneiden, ohne daß das Vieleck aufhörte ein ausspringendes zu sein.[1]

6. Diese allgemeinen Betrachtungen finden selbstverständlich auch Anwendung auf die gewöhnlichen Vielecke, welche in den Elementen der Raumlehre behandelt werden. Diese sind aber keinesweges die einzigen. Vielmehr giebt es für ein und dieselbe Seitenzahl verschiedene Arten von Vielecken, welche sehr verschiedene Eigenschaften besitzen.

So wird man sehen, daß das Dreieck nicht das einzige Vieleck ist, bei welchem die Summe der Innenwinkel $2\,R$ beträgt, sondern, daß es unzählig viele Vielecke mit ungerader Seitenanzahl giebt,

1) Siehe Anhang § 1.

welchen diese Winkeleigenschaft zukommt. Ebenso giebt es auch unzählig viele Vielecke mit grader Seitenanzahl, bei welchen, wie beim Viereck, die Summe der Innenwinkel $4R$ beträgt. Auch sind diese ungewöhnlichen Vielecke weder in dem Sinne unregelmäßig, daß sie einspringende und ausspringende Winkel gleichzeitig hätten, noch sind sie zusammengesetzt aus übereinandergelegten Figuren, sondern es sind ganz ebenso einfache Vielecke, wie die oben zuerst erwähnten gewöhnlichen.

Um im Nachfolgenden übersichtlicher zu sein, mögen nur ausspringende **regelmäßige** Vielecke in Betracht kommen, solche also, deren Winkel sämtlich einander gleich sind, und welche einem Kreise um- und einbeschrieben werden können.

Man überzeugt sich leicht, daß bei solchen Vielecken die Winkelsumme ebensogroß ist, wie bei unregelmäßigen Vielecken derselben Ordnung und Art.

Die Ordnung richtet sich nach der Anzahl der Seiten, die Art dagegen wird nur durch die Summe der Winkel bestimmt, so daß man, wenn sich diese Summe ändert, von einer Art zu einer andern übergeht.

7. **Es giebt soviel Arten von Vielecken einer bestimmten Ordnung m, als es zu m teilerfremde Zahlen von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ giebt.**

Liegen nämlich[1] die m Punkte in gleichen Abständen von einander entfernt auf einer Kreislinie, so wird man, wenn man vom ersten Punkt aus, immer p Schritte in ihrer Reihe vorwärts geht und die dadurch getroffenen Punkte besonders auszeichnet, den ersten Punkt zum zweitenmale nach einer gewissen Anzahl von Umläufen durch die Kreislinie wieder erreichen.

Hat man x mal den ganzen Kreis zurückgelegt und dabei y mal p Schritte gemacht, so besteht die Gleichung $yp = xm$. Will man für y und dementsprechend auch für x die kleinsten ganzzahligen Werte finden, so muß man zwei Fälle unterscheiden: 1) p und m sind teilerfremd. In diesem Falle wird die Gleichung durch $y = m$ und $x = p$ gelöst, d. h. man muß m mal p Schritte machen, um zu dem ersten Punkte wieder zurückzugelangen. Hieraus folgt, daß dabei alle Punkte, wenn auch in veränderter Reihenfolge, getroffen werden müssen, denn man erhält durch die fortlaufende Verbindung der getroffenen Punkte wieder ein m Eck. 2) m und p haben einen gemeinsamen Teiler. Ist in diesem Falle $p = ar$ und $m = cr$, so liefert obige Gleichung $yar = xcr$ oder $ya = cx$, woraus sich, da nunmehr a und c teilerfremd sind, $y = c$ und $x = a$ ergiebt. Man wird also nur immer c mal p Schritte zu machen haben, um von neuem den ersten Punkt zu erreichen. Da c kleiner ist als m, so werden nicht sämtliche Punkte getroffen werden, es entsteht also durch die fortlaufende Verbindungslinie aller getroffenen Punkte kein m Eck.

Es giebt also hiernach zunächst so viele m Ecke, als es teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis m giebt.

Wird irgend eines von diesen herausgegriffen, z. B. dasjenige, welches durch Zurücklegung von jedesmal p Schritten durch die Punktreihe entstanden ist, so ist die letzte Ecke dieses Vielecks von der ersten um $m-p$ Schritte entfernt. Würde man, anstatt p Schritte in der natürlichen Reihenfolge der Punkte vorwärts, $m-p$ Schritte in derselben Richtung jedesmal fortgehen, so würde genau dasselbe Vieleck wie vorhin entstehen, nur mit dem Unterschiede, daß die Endpunkte desselben nunmehr in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen worden sind.

Wird von diesem Unterschiede abgesehen, so fallen die beiden soeben besprochenen Vielecke völlig in eins zusammen. Ist nun p teilerfremd zu m, so ist auch $m-p$ teilerfremd zu m und es

1) Hierzu ist Dienger, Über die Sternpolygone und Sternpolyeder. Grunerts Archiv Bd. 13, S. 434 ff. benutzt.

gehört also nur ein Vieleck zu den beiden Zahlen p und $m-p$. Diese bilden aber in der Zahlenreihe von 1 bis m ein Paar symmetrischer Zahlen und es giebt, da sämtliche teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis m in Paare symmetrischer Zahlen geordnet werden können, nur so viel verschiedene m Ecke, als es teilerfremde Zahlen zu m von 1 bis $\frac{m-1}{2}$ giebt.

Schreitet man, um aus m Punkten einer Kreislinie ein m Eck zu bilden, immer um p Schritte weiter fort, so ist die Summe der inneren Winkel des auf diese Weise entstehenden Vielecks immer gleich $(m-2p)\ 2\ R$.

Es ist nämlich die Summe aller Innen- und Außenwinkel gleich $2m\ R$.

Läßt man nun durch eine grade Linie, welche sich um die Endpunkte der Reihe nach dreht,[1] das Vieleck wieder entstehen, so durchläuft sie den Winkelraum von $4\ R$ so oft mal, als die Zahl p angiebt[2]. Die Summe aller Außenwinkel beträgt also $p \cdot 4\ R$. Die Summe aller Innenwinkel beträgt daher $(m-2p)\ 2\ R$.

Man beachte auch, daß dieser Beweis nicht voraussetzt, daß das Vieleck regelmäßig, sondern nur, daß es ausspringend ist. Die Summe der Innenwinkel eines ausspringenden Vielecks hängt also von der Größe der zu m teilerfremden Zahl p ab, und ist verschieden für die verschiedenen Arten von Vielecken derselben Ordnung.

8. Sind $a\ b\ c \ldots$ die Grundfaktoren von m, so daß $m = a^p \cdot b^q \cdot c^r \ldots$ ist, so ist die Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen, welche kleiner als m sind, gleich

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

Da also die Anzahl der verschiedenen Vielecke der Ordnung m die Hälfte dieser Anzahl beträgt, so ist dieselbe gleich

$$\frac{m}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$ [3]

9. Ist m selbst eine Grundzahl, so ist die Anzahl der ausspringenden m Ecke gleich $\frac{m-1}{2}$.

Nach dem Vorhergehenden ist leicht einzusehen, daß es nur eine Art von Dreiecken giebt, aber zwei Arten von Fünfecken. Diese beiden Fünfecke entstehen, indem man durch die fünf Punkte entweder immer um einen Schritt, oder jedesmal um zwei Schritte fortschreitet. Bei der ersten Art von Fünfecken ist die Summe der Innenwinkel gleich $(5-2.1)\ 2\ R$ oder gleich $6\ R$, bei der zweiten Art gleich $(5-2.2)\ 2\ R$ oder gleich $2\ R$, wie beim Dreieck. Ebenso sieht man, daß es drei Arten von Siebenecken giebt. Bei der ersten Art, dem gewöhnlichen Siebeneck, ist die Summe der Innenwinkel gleich $10\ R$, bei der zweiten Art gleich $6\ R$, bei der dritten gleich $2\ R$. Auf dieselbe Weise findet man, daß es fünf Elfecke giebt, und zwar ist die Summe der Innenwinkel bei der ersten Art gleich $18\ R$, bei der zweiten $14\ R$, bei der dritten $10\ R$, bei der vierten $6\ R$, bei der fünften $2\ R$, wie beim Dreieck.

10. Ist m eine ungerade Zahl, so sind $\frac{m-1}{2}$ und m stets teilerfremd zu einander und es giebt daher bei m Ecken von ungerader Seitenzahl immer eine Art, bei welcher die Summe der Innenwinkel $2\ R$ beträgt, indem $2\ R\left(m-2\ \frac{(m-1)}{2}\right) = 2\ R$ ist.

---

1) Vergl. hierzu Nr. 1. 2) Vergl. Nr. 7 Beweis. 3) S. Anhang § 2.

11. Was die Vielecke mit grader Seitenanzahl betrifft, so giebt es nur eine einzige Art ausspringender Vierecke und ebenso auch nur eine einzige Art ausspringender Sechsecke. Dagegen giebt es mehrere Arten von solchen Achtecken, Zehnecken, u. s. f. Aber bei keinem derselben kann die Summe der Innenwinkel ein ungerades Vielfaches von $2\,R$ sein.

Ist nämlich m das Doppelte einer graden Zahl, oder überhaupt in höherem Sinne grade, so ist $\frac{m}{2} - 1$ stets teilerfremd zu m. Es giebt also immer ein Vieleck von doppeltgrader Seitenzahl, bei welchem die Summe der Innenwinkel gleich $2\,R\left(m - 2\left(\frac{m}{2} - 1\right)\right)$ oder gleich $4\,R$ ist.

12. Ist m einfach grade, so ist $\frac{m}{2} - 2$ teilerfremd zu m und die solchen Zahlen entsprechende Art von m Ecken hat zur Summe der Innenwinkel $2\,R\left(m - 2\left(\frac{m}{2} - 2\right)\right)$ oder $8\,R$, wie es sich beim Sechseck verhält.

13. Es giebt also in jeder Ordnung von Vielecken mit ungerader Seitenzahl, also bei Vielecken mit 3, 5, 7, 9, 11, 13.. Seiten eine Art, bei welcher die Winkelsumme $2\,R$ beträgt.

Bei jeder Ordnung von Vielecken mit doppeltgrader Seitenzahl, also bei 4, 8, 12, 16 . . . Ecken, giebt es jedesmal eine Art, bei welcher die Summe der Innenwinkel $4\,R$ beträgt.

Endlich giebt es bei jeder Ordnung von Vielecken mit einfach grader Seitenzahl, also bei 6, 10, 14, 18 . . . Ecken eine Art, bei der die Summe der Innenwinkel $8\,R$ ausmacht.

Es ist diese Art für die drei Gruppen von Ordnungen jedesmal diejenige mit der kleinsten Winkelsumme, und zwar stimmen diese Winkelsummen überein mit den Summen der Innenwinkel beim Dreieck, Viereck und Sechseck, also bei den drei Vielecken, welche allein nur auf eine einzige Art vorhanden sind.

14. Obgleich alle diese Sätze sehr einfach sind, so sind sie doch um ihrer Neuheit[1] und ihrer Verbindung mit schwierigeren Theorien willen erwähnungswert. Es mögen nun noch einige Erläuterungen und weitere neue Betrachtungen daran geknüpft werden.

II. Anwendungen.

15. Bei den im ersten Abschnitt besprochenen Sternvielecken liegen die Winkel jedesmal da, wo zwei Seiten mit ihren Endpunkten zusammentreffen. Die Winkel, welche von nicht aneinanderstoßenden Seiten gebildet werden, dürfen also bei der Bestimmung der Winkelsumme nicht mit in Rechnung gebracht werden, ebensowenig wie man bei den gewöhnlichen Vielecken solche Winkel mit einrechnet, welche durch Verlängerung nicht benachbarter Seiten entstehen würden.

Es besteht daher ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Sternvielecken und den gewöhnlichen Vielecken darin, daß bei ersteren getrennte Seiten sich gegenseitig durchschneiden, während bei den letzteren solche Seiten erst verlängert werden müssen, ehe sie zum Durchschnitt gelangen. Werden ferner bei gewöhnlichen Vielecken getrennte Seiten zum Durchschnitt gebracht, so ist jede Seite selbst gleich dem Unterschied der Abschnitte, welche auf ihr durch den Schnittpunkt entstehen, während bei den Sternvielecken jede Seite gleich der Summe der entstehenden Abschnitte ist. Indessen sind alle diese Unterschiede mehr scheinbar als wirklich und verschwinden auch bei der rechnerischen Behandlung solcher Vielecke voll-

1) Die Abhandlung ist 1801 veröffentlicht.

ständig. Man findet nämlich, wenn man die Seite eines regelmäßigen Vielecks berechnen will, eine Gleichung von einem bestimmten Grade, welche nur wirkliche Wurzeln besitzt, und man erhält so die Seiten aller verschiedenen Arten von Vielecken derjenigen Ordnung, mit welcher man sich gerade beschäftigt. So ist es z. B. nicht möglich, die Seite eines einem Kreise umbeschriebenen gewöhnlichen regelmäßigen Siebenecks allein für sich zu finden, man findet zu gleicher Zeit auch die Seite des regelmäßigen Siebenecks der zweiten und dritten Art. Oder umgekehrt, wenn aus der Seite des regelmäßigen Siebenecks der Radius des umbeschriebenen Kreises berechnet werden soll, so würde man drei verschiedene Kreise finden, welche den drei Siebenecksarten entsprechen, die man mittelst der gegebenen Seite konstruieren kann. Ähnlich ist es auch bei den anderen Vielecken.

Man kann von den verschiedenen Vielecken einer bestimmten Ordnung auch sagen, daß jedes von ihnen aus dem gewöhnlichen Vieleck derselben Ordnung entsteht, indem man die Seite verlängert und jede mit der zweitnächsten oder mit der drittnächsten u. s. f. zum Durchschnitt bringt. Dieses Verfahren führt aber nicht immer zum Ziele, denn die Seiten eines Vielecks geben nicht immer, wenn man sie in der angegebenen Weise zum Durchschnitt bringt, ein neues Vieleck derselben Ordnung. Läßt man z. B. bei einem Sechseck jede Seite sich mit der zweitnächsten schneiden, so entsteht allerdings dem äußeren Anblick nach ein Sternsechseck, in der That hat man aber nur eine aus zwei übereinandergelegten Dreiecken zusammengesetzte Figur, deren Umriß nicht in einem einzigen Zuge zurückgelegt werden kann.

16. Denkt man sich die Seiten eines gewöhnlichen Vielecks beweglich aneinandergefügt, so läßt sich die eine Art aus der andern derselben Ordnung dadurch ableiten, daß man alle Seiten in der Ebene des Vielecks gehörig dreht.[1] So wird man z. B. ein gewöhnliches Siebeneck, bei welchem die Summe der Innenwinkel 10 R beträgt, in ein Siebeneck der zweiten Art überführen können, bei dem die Summe der Innenwinkel nur 6 R beträgt. Hatte man bei dem ersten Siebeneck die Außenseite schwarz, die Innenseite weiß gefärbt, so daß also die Innenwinkel zwischen weißen Schenkeln liegen, so wird man die Innenwinkel des neuentstandenen Siebenecks ebenfalls zwischen weißen Schenkeln liegen sehen. Das Siebeneck zweiter Art kann man nun auch auf dieselbe Weise in ein Siebeneck der dritten Art verwandeln, bei welchem die Summe der Innenwinkel nur noch 2 R beträgt. Weiter kann man nicht gehen, da es keine gradlinige Figur giebt, bei welcher die Summe der Innenwinkel weniger als 2 R ausmacht.

17. Es wurde oben gezeigt, daß, wenn p teilerfremd zu m ist und man durch die m Punkte A, B, $C, \ldots M$ immer um p Schritte weitergeht, man notwendig nach und nach alle Punkte treffen muß, ehe man zum Anfangspunkt zurückgelangt. Hiervon gilt auch die Umkehrung: Die Zahl p ist teilerfremd zu m, wenn man vom ersten Punkt ausgehend nicht eher zu ihm zurückkehrt, als bis alle Punkte der Punktreihe A, B, $C \ldots M$ derart durchlaufen sind, daß immer p Schritte bis zum nächsten Ruhepunkt zurückgelegt werden. Wenn man also eine Anzahl Punkte auf einer Kreislinie durch gleichgroße Zwischenräume trennt, so wird man eine Art geometrischer Erklärung einer Grundzahl erhalten. Die Anzahl der Punkte wird nämlich eine Grundzahl sein, wenn man bei jeder nur möglichen Art sie zu durchlaufen, erst, nachdem jeder Punkt einmal getroffen worden ist, zum ersten Punkt zurückgelangt.

18. Bei dieser Gelegenheit mag eine für die Mechanik wichtige Aufgabe gelöst werden.

---

1) Dabei muß an einer Ecke die Verbindung der dort zusammenstoßenden Seiten zunächst gelöst, nach der Bewegung der Seiten aber wieder geschlossen werden.

Es handelt sich bei derselben darum, einen biegsamen Faden durch eine beliebige Menge von Punkten so zu ziehen, daß die beiden Fadenenden zuletzt in einem und demselben Punkte zusammentreffen, und daß die Gesamtlänge des Fadens gleich der Summe aller möglichen Abstände zwischen je zwei Punkten der Punktreihe wird. Die Lösung ist nur möglich, wenn die Punkte in ungerader Anzahl vorhanden sind. Sind sie in grader Anzahl vorhanden, so kann man ebenfalls einen Faden hindurchziehen, welcher immer je zwei Punkte verbindet, aber man muß ihn in diesem Falle zweimal von Punkt zu Punkt führen, wenn die Enden in demselben Punkte zusammentreffen sollen. Es ist dann die Gesamtlänge des Fadens gleich der doppelten Summe aller möglichen gegenseitigen Abstände aller Punkte.

19. Um größerer Anschaulichkeit willen denken wir die Punkte in einer Ebene gegeben. Die Anzahl der gegenseitigen Abstände ist dann ebensogroß, als wenn die Punkte im Raume lägen, auch ist die Ordnung, in welcher die Punkte zu je zweien zusammenzunehmen sind, durchaus dieselbe. Man setze eine bestimmte Reihenfolge fest, so daß A der erste, B der zweite Punkt ist, u. s. f. Ist die Anzahl m der Punkte eine Grundzahl, so sind die Zahlen $1, 2 \ldots \frac{m-1}{2}$ teilerfremd zu m. Verbindet man nun die Punkte derart, daß man von A anfangend immer von jedem den unmittelbar darauffolgenden erreicht, so wird man sie alle durchlaufen müssen, ehe man zu A zurückgelangt, und man hat m gegenseitige Abstände, nämlich AB, BC, CD . . vor sich. Geht man von A anfangend immer zum zweitnächsten fort, so durchläuft man ebenfalls alle Punkte und erhält von neuem m gegenseitige Abstände, nämlich AC, CE u. s. f., ehe man zu A zurückgelangt. Fährt man so fort, indem man von A aus immer zum drittnächsten u. s. w., viertnächsten u. s. w. fortgeht, so erhält man zuletzt $m \cdot \frac{m-1}{2}$ verschiedene Strecken, und die beiden Fadenenden treffen im Punkte A, dem Ausgangspunkte zusammen, der Faden läßt sich schließen und die Aufgabe ist gelöst.

20. Ist m ungerade, aber keine Grundzahl, so ist zunächst klar, daß man wieder, wie bei dem vorhergehenden Fall, gerade Linien hat, welche die Punkte von A anfangend der Reihe nach verbinden, ferner andere, welche man erhält, wenn man von A aus immer zum zweitnächsten, drittnächsten u. s. f. weitergeht. Hierdurch erhält man alle möglichen gegenseitigen Verbindungen, welche sich in einem fortlaufenden Zuge ausführen lassen.

Bei allen solchen Verbindungslinien, bei denen es sich darum handelt, immer soviel Schritte vorwärtszugehen, als eine zu m teilerfremde Zahl angiebt, kann man auch auf dieselbe Weise verfahren wie beim vorigen Fall (19).

Sobald es sich aber um Schritte handelt, deren Größe durch eine zu m nicht teilerfremde Zahl bestimmt wird, ist es nicht möglich, auf die vorhin angegebene Weise den Faden weiter zu ziehen, man durchläuft dann nicht alle m Punkte.

Ist zum Beispiel g eine Zahl, welche mit m den größten gemeinsamen Teiler r besitzt, und wollte man immer g Schritte von A aus weiter gehen, so würde man nur $\frac{m}{r}$ Punkte aus den m vorhandenen treffen, und um auch die übrigen abzumachen, müßte man auf einen neuen Anfangspunkt übergehen um von ihm aus eine andere Gruppe von $\frac{m}{r}$ Punkten zu treffen, u. s. f.

Man bedarf also hier eines anderen Weges, um sämtliche Abstände aller Punkte in einem Zuge zu durchlaufen.

Für irgend eine ungerade Anzahl von Punkten führt der folgende zum Ziele.

Vom Punkte A geht man einen Schritt bis B, dann 2 Schritte bis D, dann 3 Schritte bis G und so weiter fort, indem man also Abschnitte der Kreislinie zurücklegt, welche wie die Glieder der arithmetischen Reihe $1, 2, 3 \ldots \frac{m-1}{2}$ wachsen. Auf diese Weise hat man einen der Abstände zwischen zwei benachbarten Punkten, nämlich AB; einen der m Abstände zwischen einem Punkt und seinem zweitnächsten, nämlich BD; einen der Abstände zwischen einem Punkte und seinem drittnächsten, nämlich DG u. s. f., endlich einen der m Abstände zwischen einem Punkte und seinem $\frac{m-1}{2}$ nächsten benutzt. Mit dem Endpunkt der ganzen Streckenkette ist man zu einem Punkt x der Gruppe gelangt, dessen Abstand vom Anfangspunkt teilerfremd zu m ist. Seine Entfernung von A beträgt nämlich $1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{m-1}{2}$ oder $\frac{m^2-1}{8}$ Schritte. Nun ist m^2-1 oder $(m-1)(m+1)$ augenscheinlich teilerfremd zu m und also auch $\frac{m^2-1}{8}$. Es ist also auch der Rest $m - \frac{m^2-1}{8}$ teilerfremd zu m.

Geht man nun von dem Punkte x in derselben Weise weiter, wie vorhin vom Punkt A aus, so wird man, da entsprechende Punkte der dann vorhandenen beiden Reihen immer um gleichviel von einander entfernt sind, niemals Verbindungslinien in der zweiten Reihe entwerfen, welche schon einmal früher entworfen waren, man wird also $\frac{m-1}{2}$ neue Verbindungslinien erzeugt haben, und dadurch zu einem Endpunkt y gelangt sein, welcher zu x so liegt, wie x zu A. So geht das weiter fort, indem man neue Endpunkte $z \ldots$ aufsucht. Da nun die Entfernung der Punkte $A, x, y, z \ldots$ von einander jedesmal dieselbe zu m teilerfremde Zahl ist, so folgt, daß erst nach m maliger Wiederholung desselben Verfahrens ein Endpunkt erreicht wird, welcher mit dem ursprünglichen Anfangspunkt A zusammenfällt. Man wird also auf solche Weise alle $m . \frac{m-1}{2}$ gegenseitigen Abstände der gegebenen Punkte in ununterbrochenem Zuge durchlaufen, ohne irgend einen davon mehr als einmal benutzt zu haben.

21) Ist m eine grade Zahl, so sieht man bald, daß das eben Gesagte für diesen Fall nicht gilt.[1] Es läßt sich aber auch unmittelbar beweisen, daß die Lösung der Aufgabe für diesen Fall überhaupt nicht möglich ist. Denn wenn wirklich ein und derselbe geschlossene Faden auf alle mögliche Weise zwischen den in grader Anzahl vorhandenen Punkten hinliefe, so würde an jedem Punkte eine ungerade Anzahl von Fadenstrecken endigen. Da nun alle diese Strecken zu einem und demselben Faden gehören, so muß je eine als Verlängerung einer andern aufgefaßt werden. Die zweite von der ersten, die vierte von der dritten u. s. f. Die letzte bliebe also übrig und wäre die Verlängerung von keiner Strecke. Es hätte also der Faden an jedem Punkte ein Ende. Sind daher 2 m Punkte da, so hätte der Faden 2 m Enden und es wären also mindestens m verschiedene nicht geschlossene Fäden vorhanden, was gegen die Voraussetzung wäre.

22. Man kann aber auch bei einer graden Anzahl von Punkten alle gegenseitigen Entfernungen, mit Ausnahme derjenigen m Entfernungen, durch welche jeder der 2 m Punkte mit seinem gegenüber-

1) Siehe Anhang § 3.

liegenden (d. h. durch m Schritte von ihm getrennten) verbunden ist, in einem Zuge durchlaufen. Wäre es erlaubt, diese letzteren zweimal zu durchlaufen, so würde man alle Entfernungen in einem zusammenhängenden Zuge durchlaufen können. Dies wäre auch möglich, wenn gestattet wäre, überhaupt jede Entfernung zweimal zu durchlaufen.

23. Die Möglichkeit einen Faden zwischen einer graden Anzahl von Punkten so zu ziehen, daß jede Entfernung zweimal berücksichtigt wird, läßt sich darthun, auch ohne daß man die Ausführung selbst anzugeben vermag. Der Beweis würde nach dem Vorbilde von Nr. 21 zu führen sein und ist unschwer zu finden.

24. Um noch eine Anwendung auf die verschiedenen Arten von Vielecken zu machen, denken wir uns, es wären mehrere Punkte durch einen geschlossenen Faden, längs welchem sie hingleiten könnten, verbunden. Wir wollen z. B. fünf bewegliche Punkte annehmen und voraussetzen, daß durch den Faden ein gewöhnliches Fünfeck gebildet werde. Werden die fünf Punkte durch fünf gleiche Kräfte angegriffen, deren Richtungen den Winkelraum von 4 Rechten in fünf gleiche Teile teilen, so wird der Faden zuletzt ein regelmäßiges Fünfeck bilden und seine Spannung wird überall eine gleichförmige sein.

Nun wird der Faden aber auch ein regelmäßiges Fünfeck der zweiten Art bilden können. In diesem Falle wird die Spannung nicht dieselbe sein wie im ersten, sondern kleiner und zwar im Verhältnis der Sekante des Winkels von $R/_5$ zu der eines Winkels von $3\,R/_5$ Größe. Es kann also der Faden auf zwei verschiedene Arten benutzt werden, um die Wirkung derselben Kräfte aufzuheben. Ist der Widerstand des Fadens nicht mehr hinreichend, wenn er ein gewöhnliches Fünfeck bildet, so kann er noch hinreichen, wenn er nach einem Fünfeck zweiter Art angeordnet wird.

25. Auch bei jeder anderen Anzahl von Punkten giebt es mehrere Werte für die Spannung des Fadens, der sie alle verbindet, mit Ausnahme der Fälle, wo 3, 4 oder 6 Punkte gegeben sind, denn in diesen Fällen giebt es nur eine einzige regelmäßige Figur mit soviel Ecken.

Wenn dagegen der Faden sämtliche Punkte auf alle mögliche Weise verbindet, so kann er nur auf eine einzige Weise durch dieselben gegebenen Kräfte gespannt werden. Die Spannung wird in der ganzen Ausdehnung des Fadens gleichgroß sein, wie es bei dem gewöhnlichen Seilvieleck der Fall ist.

Anhang.

§ 1. Für regelmäßige ausspringende Vielecke reicht folgende Betrachtung hin. Es schneide eine Grade dasselbe so, daß sie durch einen Punkt des von allen m Seiten eingeschlossenen Flächenstücks geht. Alsdann bilde man von diesem Punkt aus den Umfang des Vielecks auf der umbeschriebenen Kreislinie ab. Ist man dabei nach p Umläufen um die Kreislinie wieder zum Anfangspunkt zurückgekehrt, so wird die Kreislinie durch die Abbilder der Vielecksseiten p fach belegt erscheinen, also eine p fache Kreislinie sein. Die Grade schneidet dieselbe also in $2\,p$ Punkten, von denen immer p in einen einzigen zusammenfallen. Diese Punkte sind die sämtlichen Abbilder der Schnittpunkte der Graden mit den Seiten des Vielecks. Es kann also der Umfang der p Art eines m Eck in höchstens $2\,p$ Punkten von einer Graden geschnitten werden.

Daß die Anzahl der Schnittpunkte eine grade Zahl sein muß, folgt daraus, daß jedesmal einem Eintrittspunkt in das Vieleck auch ein Austrittspunkt auf der Graden zugeordnet sein muß.

Es kann also ein 11 Eck höchstens in 10 Punkten von einer Graden geschnitten werden, aber auch in 8, 6, 4, 2 Punkten.

Schnittpunkte auf Verlängerungen von Seiten werden hierbei nicht mitgerechnet.

§ 2. Es soll hier ein bestimmtes Beispiel zum Grunde gelegt werde.

m sei gleich $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Es soll die Anzahl aller zu 30 teilerfremden Zahlen, welche zugleich kleiner als 30 sind, gefunden werden.

1. Zuerst wird die Anzahl derjenigen Zahlen unter ihnen bestimmt, welche durch 2 teilbar sind. Es sind $^{30}/_2$ Zahlen, nämlich alle Vielfachen von 2, also $1 \cdot 2 \cdot$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 2 \cdots\cdot {}^{30}/_2 \cdot 2$. Die Anzahl der Zahlen, welche nicht durch 2 teilbar sind, ist also $30 - {}^{30}/_2 = 30\,(1 - {}^1/_2)$. Diese Anzahl sei der erste Rest.

2. Von diesen $30\,(1 - {}^1/_2)$ Zahlen ist eine gewisse Anzahl durch 3 teilbar. Diese Anzahl wird folgendermaßen bestimmt.

Unter den 30 Zahlen von 1 bis 30 sind überhaupt $^{30}/_3$ Zahlen durch 3 teilbar, nämlich alle Vielfachen von 3, also $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $\cdots\cdot {}^{30}/_3 \cdot 3$. Von diesen sind alle diejenigen nicht durch 2 teilbar, bei welchen der erste Faktor nicht durch 2 teilbar ist. Solcher Faktoren giebt es $^{30}/_3$, nämlich alle Zahlen von 1 bis $^{30}/_3$. Nach Nr. 1 ist aber, da $^{30}/_3$ durch 2 teilbar ist, die Anzahl aller Zahlen von 1 bis $^{30}/_3$, welche nicht durch 2 teilbar sind, $^{30}/_3\,(1 - {}^1/_2)$. Diese Anzahl Zahlen ist daher wohl durch 3, aber nicht durch 2 teilbar und muß daher von dem ersten Reste der 30 Zahlen von $30\,(1 - {}^1/_2)$ abgezogen werden. Es bleiben also dann noch $30\,(1 - {}^1/_2) - {}^{30}/_3\,(1 - {}^1/_2)$ oder $30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)$ Zahlen übrig, welche weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Diese Anzahl sei der zweite Rest.

3. Von diesen $30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)$ Zahlen ist eine gewisse Anzahl durch 5 teilbar, welche folgendermaßen bestimmt wird.

Unter den 30 Zahlen von 1 bis 30 sind überhaupt $^{30}/_5$ Zahlen, die durch 5 teilbar sind, nämlich alle Vielfachen von 5, also $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5 \cdots {}^{30}/_5 \cdot 5$. Von diesen sind alle diejenigen nicht durch 2 und 3 teilbar, deren erster Faktor nicht durch 2 und 3 teilbar ist. Solcher Faktoren giebt es im ganzen $^{30}/_5$, nämlich alle Zahlen von 1 bis $^{30}/_5$. Nun ist $^{30}/_5$ durch 2 und 3 teilbar, also läßt sich nach Nr. 1 und Nr. 2, die Anzahl der Zahlen von 1 bis $^{30}/_5$ bestimmen, welche weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind. Diese Anzahl ist $^{30}/_5\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)$. Diese Anzahl ist also wohl durch 5, aber nicht durch 2 und 3 teilbar und muß daher von dem zweiten Reste abgezogen werden.

Es bleiben dann noch $30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3) - {}^{30}/_5\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3) = 30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)\,(1 - {}^1/_5)$. Diese Anzahl ist der dritte Rest.

Der dritte Rest giebt die Anzahl der Zahlen, welche weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind. Es sind die 8 Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Ganz in derselben Weise wird der Beweis für die allgemeine Formel geführt.

§ 3. Ist m eine grade Zahl, also gleich $2r$, so entspricht dem Vorgang bei Nr. 20 das Fortschreiten um $1, 2, 3 \cdots \frac{m}{2}$ Schritte oder um $\frac{r\,(r+1)}{2}$ Schritte, diese Zahl ist aber nicht teilerfremd zu $2r$ oder m und führt also nicht zum Ziel. Will man nun bis zu derjenigen Zahl fortschreiten, welche dem $\frac{m-1}{2}$ von vorhin entspricht, so wäre diese $\frac{2r-2}{2}$ oder $r-1$, aber auch hier werden wir nach $1 + 2 + \cdots + r - 1$ Schritten oder $\frac{r\,(r-1)}{2}$ eine Zahl treffen, welche nicht teilerfremd zu $2r$ oder m ist.

m sei gleich 30 = teilerfremden Zahlen, welche zugleich
kleiner als 30 sind, gefun

1. Zuerst wird die estimmt, welche durch 2 teilbar sind.
Es sind $^{30}/_2$ Zahlen, näm $2 \cdot 2,\ 3 \cdot 2,\ 4 \cdot 2 \cdots\ ^{30}/_2 \cdot 2$. Die
Anzahl der Zahlen, welch $- {}^{30}/_2 = 30\,(1 - {}^1/_2)$. Diese Anzahl
sei der **erste Rest**.

2. Von diesen 30 (1 urch 3 teilbar. Diese Anzahl wird
folgendermaßen bestimmt.

Unter den 30 Zah Zahlen durch 3 teilbar, nämlich alle
Vielfachen von 3, also 1 alle diejenigen nicht durch 2 teilbar,
bei welchen der erste Fak Faktoren giebt es $^{30}/_3$, nämlich alle
Zahlen von 1 bis $^{30}/_3$. bar ist, die Anzahl aller Zahlen von
1 bis $^{30}/_3$, welche nicht du Anzahl Zahlen ist daher wohl durch
3, aber nicht durch 2 teil este der 30 Zahlen von $30\,(1 - {}^1/_2)$
abgezogen werden. Es bl $(1 - {}^1/_2)$ oder $30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)$
Zahlen übrig, welche weder ese Anzahl sei der **zweite Rest**.

3. Von diesen 30 (1 zahl durch 5 teilbar, welche folgen-
dermaßen bestimmt wird.

Unter den 30 Zahlen en, die durch 5 teilbar sind, nämlich
alle Vielfachen von 5, also n sind alle diejenigen nicht durch 2
und 3 teilbar, deren erste ist. Solcher Faktoren giebt es im
ganzen $^{30}/_5$, nämlich alle urch 2 und 3 teilbar, also läßt sich
nach Nr. 1 und Nr. 2, di estimmen, welche weder durch 2 noch
durch 3 teilbar sind. Dies Anzahl ist also wohl durch 5, aber
nicht durch 2 und 3 teilba abgezogen werden.

Es bleiben dann noch $^1/_3) = 30\,(1 - {}^1/_2)\,(1 - {}^1/_3)\,(1 - {}^1/_5)$.
Diese Anzahl ist der **dritt**

Der dritte Rest gie durch 2 noch durch 3 noch durch 5
teilbar sind. Es sind die 9.

Ganz in derselben e Formel geführt.

§ 3. Ist m eine dem Vorgang bei Nr. 20 das Fort-
schreiten um 1, 2, 3 ⋯ diese Zahl ist aber nicht teilerfremd
zu $2r$ oder m und führt bis zu derjenigen Zahl fortschreiten,
welche dem $\frac{m-1}{2}$ von v oder $r - 1$, aber auch hier werden
wir nach $1 + 2 + \cdots + r$ treffen, welche nicht teilerfremd zu
$2r$ oder m ist.