Die antike und die auf ihr beruhende mittelalterliche Naturwissenschaft fragt in ihren Untersuchungen über die Erscheinungen in der Natur nach den Ursachen der Dinge oder deren Zustände. Bei dieser Art der Fragestellung waren ihre Resultate gering. Die moderne Naturwissenschaft dagegen beginnt seit Galilei mit der Frage nach den Ursachen der Veränderung der Dinge oder deren Zustände. Dieser Entwickelung der Naturwissenschaft geht nun eine entsprechende Entwickelung von antiker Mathematik zu moderner Mathematik parallel. Die antike Geometrie und die antike Algebra betrachtet ihre Gebilde als fest und unveränderlich. Wenn nun die Mathematik die gesetzmäßigen Beziehungen, die zwischen den Veränderungen der Eigenschaften der Dinge oder deren Zustände stattfinden, quantitativ verfolgen wollte, so mußte sie sich den fundamentalen Auffassungen moderner Naturwissenschaft anpassen; sie mußte in ihre abstrakten Betrachtungen das Element der Veränderlichkeit einführen. Diesen Schritt haben Leibniz und Newton getan. So entstand jenseits der Elementarmathematik die höhere Mathematik, die die Grundlage moderner Naturwissenschaft und Technik bildet. An dieser Entwickelung aber hat die Schul-Mathematik keinen Anteil genommen. Der mathematische Schulunterricht hat seit langer Zeit eine abgeschlossene Gestalt erhalten, die keine Vorstellungen von den Forschungen des 18. Jahrhunderts gibt. Aber nicht allein diese tiefer liegenden Gedankengänge, die mehr philosophischen Charakter haben, sind es, die den neueren Reformvorschlägen über Schulmathematik zu Grunde liegen, sondern es sind vor allem rein praktische Erwägungen über Bedeutung und Ziel der Mathematik, die zu dem Ruf nach einer Reform führten. Der mathematische Unterricht soll nicht allein ein tiefes Eindringen und Beherrschen der abstrakten mathematischen Theorien und eine klare Einsicht in den Aufbau seines Systems anstreben; er soll zeigen, daß wir erst mit seiner Hilfe nicht nur die Natur, sondern auch unsere wirtschaftlichen, politischen und Verkehrsverhältnisse, d. h. unsere ganze moderne Kultur recht verstehen.

Aus allen diesen Gedanken heraus sind nun die Reformvorschläge entstanden, die in der Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran im Jahre 1905 gemacht wurden.

Lernen wir diese in ihren Hauptzügen kennen:

Die Schul-Mathematik bedarf nur der Anpassung an die modernen Aufgaben des Lebens, die ihr durch den Druck der Tradition erschwert wird. Diese Anpassung hat in erster Linie darin zu bestehen, daß der Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gang der geistigen Entwickelung des Schülers folgt, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anknüpft und den Zusammenhang mit dem übrigen Bildungsstoff zum Bewußtsein bringt. Daher ist auf die angewandte Mathematik mehr Nachdruck zu legen als auf die reine Mathematik. Ferner soll nach den Meraner Beschlüssen im mathem. Unterricht durch Entlastung des Lehrpensums von einseitigen oder praktisch wertlosen Spezialkenntnissen Raum geschaffen werden für die Erziehung zum funktionalen Denken, zu dem auch die Elemente der Differential- und Integralrechnung gehören, und es soll der mathem. Unterricht die Fähigkeit zur mathem. Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt, also insbesondere das Anschauungsvermögen entwickeln und pflegen.

Zwei Sonder-Aufgaben sind es also vornehmlich, die die Reform-Mathematik sich stellt:

1) Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens,

2) Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens.

Das Schwergewicht der Reform-Bewegung liegt auf der Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens, viel weniger auf der Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens; denn letztere Forderung ist eine alte Forderung auf dem Gebiete der Schul-Mathematik, der auch schon längst wohl überall Rechnung getragen wird; verschieden nur sind die Wege, die dieses Ziel der Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens zu erreichen suchen, besonders aber der Umfang desjenigen Gebiets, das für die Stärkung des Anschauungsvermögens so förderlich ist, des Gebiets der darstellenden Geometrie. Die Forderung, zur ersten systematischen Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens beim Anfangsunterricht in Geometrie die geometrischen Grundbegriffe im Anschluß an die Betrachtung, Beschreibung und Vergleichung einfacher geometrischer Körper zu entwickeln unter steter Benutzung von Beispielen aus der nächsten Umgebung, ebenso die Forderung, beim Beginn des geometrischen Unterrichts zu zeichnen, zu messen und zu schätzen, also den Gebrauch des geometrischen Handwerkzeugs kennen zu lernen, wird wohl überall erfüllt. Leider findet diese räumliche Betätigung bald eine lange Unterbrechung, da sich die geometrische Betrachtung $2^1/_2$ Jahr lang oder noch mehr auf die Ebene beschränkt. Dieser Nachteil in der Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens läßt sich aber einigermaßen dadurch wieder gut machen, daß man im Planiemetrie-Unterricht der beiden Tertien fortgesetzt stereometrische Beziehungen an einfachen geometrischen Körpern heranzieht; so läßt sich z. B. der Pythagoräische Satz in vielseitiger Weise anwenden; auch bei der Ähnlichkeitslehre ist die Grundlegung der perspektivischen Lage ähnlicher Figuren der Entwickelung des räumlichen Anschauungsvermögens nur dienlich.

Die weitere Entwickelung des räumlichen Anschauungsvermögens fällt der Stereometrie und dem Linearzeichnen zu. Die Stereometrie, zu der „die Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde“ gehört, ist obligatorisch, das Linearzeichnen fakultativ; welche Menge von pädagogischen Betrachtungen läßt sich nicht bei dieser Gegenüberstellung zweier innerlich zusammengehöriger Gebiete anstellen! Eine gleichmäßige Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens verlangt, daß die darstellende Geometrie schon von Unter-Sekunda an in organischer Weise mit dem Stereometrie-Unterricht verbunden wird, wie es schon seit vielen Jahren am Realgymnasium Halberstadt üblich ist. Daher ist der zur Zeit bestehende Zustand des gleichzeitigen fakultativen Linearzeichnens auf die Dauer als unhaltbar zu bezeichnen. Die zu dieser organischen Verbindung nötige Zeit kann hauptsächlich dadurch gewonnen werden, daß man komplizierte stereometrische Berechnungen wegläßt. Was nun Umfang, Inhalt und Methode des Unterrichts in der darstellenden Geometrie, so weit diese integrierender Bestandteil des Stereometrie-Unterrichts sein soll, betrifft, so dürfte das in den „Grundzügen der darstellenden Geometrie von W. Gercken“ Gebotene für die Schule notwendig, aber auch hinreichend sein. Daher sind zu den Elementen der darstellenden Geometrie, „um die allgemeine Ausbildung der Schüler auch nach der künstlerischen Auffassungsfähigkeit zu ermöglichen“, die Zentralprojektion und die einfachsten Grundzüge der Schattenlehre zu rechnen. In Bezug auf die Klassenverteilung dieses Pensums der darstellenden Geometrie würde sich empfehlen, die Elemente der schrägen und orthogonalen Parallelprojektion, der Darstellung ebener Körperschnitte und der Abwickelung mit dem mathem. Unterricht der beiden Sekunden, die der Zentralprojektion und der Schattenlehre mit dem mathem. Unterricht der Primen zu verbinden. Während es sich aber in den beiden Sekunden nur um eine methodische Auswahl fruchtbarer Übungsarbeiten handeln kann, ist ein systematisches Betreiben der darstellenden Geometrie als Abschluß nur in den Primen nötig und auch möglich.

Nach diesen kurzen Bemerkungen über die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens wollen wir nun in das Hauptgebiet der Reformbestrebungen, in das Gebiet der Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens, eintreten. Bei der in diesem Sinn gewünschten Reformierung des mathem. Unterrichts sind es zwei Fragen, die in den Vordergrund treten:

1. Ist es Pflicht der Schule, die geistigen Errungenschaften der Mathematik in dem oben geschilderten modernen Sinn vorzubereiten?
2. Ist die Schule imstande, diese Reform, die ohne Zweifel wegen ihrer Vertiefung an die geistige Fähigkeit der Schüler höhere Anforderungen stellt, durchzuführen, ohne diese zu sehr zu belasten?

Bei der Beantwortung der ersten Frage muß man sich über das Wesen der Mathematik klar sein.

Die geistige Gymnastik, die die seit langer Zeit bestehende mathem. Unterrichts-Methode bietet, genügt nicht mehr den Anforderungen der modernen Kultur. Erst die Kenntnis des Funktionsbegriffs und des Begriffs der graphischen Darstellung geben ein anschauliches Bild aller Vorgänge auf dem Gebiet der Naturwissenschaften, der Statistik und der Geographie. Tritt zu dieser Kenntnis noch eine Ausbildung in den Elementen der Differential- und Integralrechnung, so ist eine Sicherheit in der Auffassung vieler naturwissenschaftlicher Probleme und eine Sicherheit in der Durchführung mathematischer Aufgaben für den Schüler gewährleistet. Diese Ausbildung ist durchaus keine Fachausbildung, vorausgesetzt natürlich, daß man sich nur auf das Einfachste, und was die Differential- und Integralrechnung anbetrifft, auf eine propädeutische Behandlung derselben beschränkt; sie ist vielmehr ein tiefliegendes Bedürfnis, das durch die Entwickelung unserer modernen Kultur bedingt ist, und das von großer Bedeutung für unser ganzes Wirtschaftsleben ist; und die Elemente dieser geistigen Tätigkeit als eine Forderung der allgemeinen Bildung zu betrachten und demnach dem Verständnis der gebildeten Allgemeinheit näher zu bringen, dürfte eine Aufgabe nur der höheren Schule sein.

Die zweite Frage, ob diese Reform der Mathematik in der Schule auch durchführbar ist, steht und fällt mit der Frage, ob der zur Zeit behandelte mathematische Lehrstoff eine Einschränkung erfahren kann, und ob die neue Methode nicht zu hohe Anforderungen an die geistige Tätigkeit der Schüler stellt.

Zur Behandlung der Frage, ob der zur Zeit behandelte mathematische Lehrstoff eine Einschränkung erfahren kann, vergegenwärtige man sich den Umfang des zur Zeit behandelten Lehrstoffs. Dabei wird man, was die Geometrie anbetrifft, finden, daß der Lehrstoff oft in übermäßiger Breite dargeboten wird. Dadurch entsteht für den Schüler die Gefahr, daß er den Überblick verliert. Beschränkt man dagegen den verbindlichen Lehrstoff nur auf die zum Aufbau des Systems unerläßlichen Sätze, so macht man es dem Schüler leicht, das ganze Gebiet zu überblicken. Die Umkehrbarkeit der Sätze läßt sich in vielen Fällen durch den einfachen Hinweis auf die Eindeutigkeit der Konstruktion erledigen, und dadurch wird oft das indirekte Beweisverfahren seines schwerfälligen Gewandes entkleidet. Auch läßt sich, was das Allgemeine des Unterrichts in der Unterstufe anbelangt, eine absolute Strenge in der Beweisführung nicht verlangen. Die Jugend läßt sich eben nicht in das starre Gerüst des logischen Denkens einspannen. Das Interesse wird leichter gewonnen, wenn man von sinnfälligen Dingen ausgeht und erst allmählich zu abstrakten Formulierungen übergeht. So enthält schon die Methode in Quarta, die Kongruenzsätze aus der Eindeutigkeit von Konstruktionen abzuleiten, eine wesentliche Vereinfachung. Früher hielt man es nicht für wissenschaftlich, aus einer eindeutigen Konstruktion einen Lehrsatz abzuleiten; man forderte den Euklidischen Beweis, um die logische Strenge einzuhalten, obwohl in der projektiven Geometrie, deren Wissenschaftlichkeit wohl niemand anzweifelt, keine Bedenken herrschen, Lehrsätze aus eindeutigen Konstruktionen abzuleiten. Es wäre daher erwünscht, wenn endlich einmal aus den Lehrbüchern die starre euklidische Form wenigstens für die unteren Klassen verschwinden würde, damit insbesondere jüngere Fachkollegen, die sich eine Methode durch Praxis noch nicht errungen haben, abgehalten werden, einen Weg zu beschreiten, der theoretisch schon längst verlassen ist. Die geringen Erfolge, über die in früheren Jahren hauptsächlich in Bezug auf die Unterstufe geklagt wurde, ließen schon längst den Ruf nach einer Reform und nach einer völligen Beseitigung der Euklidischen Form erklingen. Die Folge war, daß man das System vernachlässigte und an der Hand einer Aufgabensammlung von Dreieckskonstruktionen zu einer Übertreibung gelangte, die schließlich den Ausspruch eines Fachgelehrten hervorrief: „Konstruktion von Dreiecken aus möglichst unzweckmäßigen Stücken". Diese geometrischen Konstruktionen, die in den gebräuchlichsten Lehrbüchern in der übertriebenen Form noch vielfach vorkommen, und auf die im Unterricht viel Zeit und Kraft verwendet wird, haben geringen Wert; ihr Nutzen liegt nur auf dem Gebiet der formalen Bildung. Durch die Beseitigung der übertriebenen Form dieser geometrischen Konstruktionen läßt sich der geometrische Lehrstoff der drei unteren Klassen einschränken.

Auch in Stereometrie in Unter-Sekunda kann manches vereinfacht werden. Es ist nicht nötig, auf die Beweise einzelner Formeln für die Oberfläche und Volumen soviel Nachdruck zu legen. Es genügt, alle Erklärungen, die zum stereometrischen Verständnis nötig sind, nur bei der betreffenden Aufgabe und im Anschluß an die konkrete Figur zu geben. Geschieht dies nicht, so besteht die Gefahr, daß die Stereometrie in Ober-Sekunda nicht mehr die nötige Teilnahme findet, und daß sie diesem Unterricht zu sehr vorgreift.

In der Arithmetik beschränke man sich bei den Klammerausdrücken auf einfache Aufgaben. Verwickelte Ausdrücke mit allen möglichen Arten von Klammern sind gesundheitsschädlich für die Augen und sinnverwirrend; sie sind ohne jede praktische

Bedeutung. Auch die Divisionen komplizierter Polynome durch Polynome sind zu verwerfen. Man beschränke sich auf die ganzen Funktionen bis zum 4. Grad mit einfachen Koefficienten. In den meisten Fällen kommt man mit der Faktorenzerlegung aus. Einfacher lassen sich solche Divisionsaufgaben durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten lösen. In der Potenz- und Wurzellehre beschränke man sich auf einfache Aufgaben unter vielfacher Benutzung von Zahlenwerten. Auch können ganze Teile der Arithmetik rein handwerksmäßig betrieben werden, ohne daß dadurch das Ansehen des Unterrichts leidet, wie z. B. das Wurzelausziehen und die Logarithmenlehre in Unter-Sekunda. Auch in der Algebra läßt sich viel Zeit gewinnen, indem man Gleichungen wegläßt, die nur durch Kunstgriffe gelöst werden können. In Tertia löse man nur Gleichungen mit Zahlenwerten und in Unter-Sekunda neben diesen nur die einfachsten Buchstabengleichungen; insbesondere gewinnt man Zeit, wenn man bei den Textaufgaben alle Scherz-, Rätsel- und Vierfüßler-Aufgaben wegläßt, die heute noch viele Seiten mancher Aufgabensammlungen ausfüllen.

Was nun die Einschränkung des Lehrstoffes, hauptsächlich aber die des Übungsmaterials in den drei oberen Klassen anbetrifft, so braucht man nur einmal die gebräuchlichsten Aufgabensammlungen in die Hand zn nehmen, um zu erkennen, daß hier eine Übertreibung, vielleicht auch eine Überbietung vorhanden ist, die ebenso zu bewerten ist wie die übertriebene Form der Dreiecks-Konstruktionen auf der Unterstufe. Mustert man nun diese Aufgabensammlungen durch, so müßte man über die Leistungsfähigkeit des mathematischen Unterrichts, auch wenn man von den vielen ausgetüftelten Aufgaben absieht, seine Bewunderung ausdrücken. Gewiß, eine Aufgabensammlung muß viel bieten, damit der Lehrer seine Auswahl treffen kann; aber trotzdem sind die Aufgaben viel zu weitgehend, so daß leicht der Verdacht entstehen kann, daß es sich hier nicht um Schulmathematik, sondern um Fachausbildung handelt. Daher, glaube ich, kann in Ober-Sekunda auf dem Gebiet der Dreiecks-Berechnungen, der schwierigen quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, die in Wirklichkeit, z. B. bei den Kegelschnittsaufgaben, doch nie vorkommen, auf dem Gebiet der symmetrischen Gleichungen, hauptsächlich aber auf dem Gebiet der stereometrischen, rechnerischen Aufgaben eine Kürzung eintreten.

Für das Pensum der Prima könnte, gemäß den Meraner Vorschlägen, eine Einschränkung im Gebiet der analytischen Umformungen, auch im Gebiet der Sphärik, sofern diese sich auf das System der Ekliptik ausdehnt, und im Gebiet der Algebra erfolgen. Im Allgemeinen aber wird das Lehrgebiet der Prima dasselbe bleiben; die für die Reform nötige Vereinfachung liegt, wie ich später zeigen werde, in der neuen Methode selbst. Eines Gebietes noch möchte ich gedenken, das wegen seiner Singularität, die es im gesamten Unterricht der Prima einnimmt, nicht so sehr die Behandlung verdient, die sich in den Schulbüchern vorfindet. Es ist dies das Gebiet der Wahrscheinlichkeitslehre. Man beschränke sich, da es nun einmal in den Lehrplänen vorgeschrieben ist, auf einige Beispiele.

An Stelle des Auszuscheidenden soll nun neben der bereits behandelten „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens" hauptsächlich die Erziehung zum funktionalen Denken treten. Daß diese Einführung ohne Änderung der Lehrpläne geschehen kann, beweist ein Hinweis in den methodischen Bemerkungen zu den Lehrplänen 1901, wonach den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, im mathematischen Unterricht erschlossen werden soll. Der Funktionsbegriff soll nun nach den Meraner Beschlüssen die Seele des ganzen mathematischen Unterrichts sein. Um ihn gruppiert sich der ganze Lehrstoff in allen Jahrgängen und bringt alles in einen planvollen Zusammenhang. Neben diesem mehr inneren Wert, den die Einführung des Funktionsbegriffs für die Mathematik hat, ist auch seine sachliche Bedeutung zu erwähnen. Die graphischen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten ziehen sich durch alle Berufszweige hindurch; hierher gehören Luftdruckkurven, Thermographkurven, graphische Eisenbahnfahrpläne, graphische Kurszettel etc. Die Ausbildung des funktionalen Denkens ist daher für alle gebildeten Kreise ein großes Bedürfnis, und da ist es Aufgabe der Schule, durch einen zweckdienlichen und zeitgemäßen Unterricht diesem Bedürfnisse abzuhelfen. Ganz besonders aber kann die Schule für ihre eigenen Zwecke selbst von der Ausbildung zum funktionalen Denken und von der graphischen Darstellung den ergiebigsten Gebrauch machen. Mathematische Gesetze, deren Verstehen dem Schüler viele Schwierigkeiten bereitet, werden in ihrer graphischen Darstellung vom Schüler leichter behalten und auch leichter erkannt. Kurven, die die Funktionen 2^x, $(\frac{1}{2})^x$, 10^x, $\log x$, $y = x^2$ etc. darstellen, gehören hierher. Auch die Anwendung der graphischen Darstellung von Gesetzen aus der Wärmelehre, der Mechanik, der Elektrizität geben eine klare Vorstellung von diesen Gesetzen.

Sehen wir nun zu, wie die Erziehung zum funktionalen Denken in den einzelnen Jahrgängen der Mathematik wohl am besten gefördert werden kann. Man beginne schon in Quarta mit der Behandlung des Abhängigkeitsverhältnisses von Winkeln in den verschiedenen Dreiecken. Gleichungen wie $\alpha = 90 - \beta$, $\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$ etc. dienen unter Benutzung von numerischen Werten zur Einführung in das Verständnis dieses Abhängigkeitsverhältnisses. Man vermeide aber hier und noch in Unter-Tertia den Gebrauch des Wortes Funktion. In der Arithmetik der Unter-Tertia beginne man an fertigen graphischen Darstellungen, z. B. an Fieberkurven, barographischen Kurven etc., den Begriff der rechtwinkeligen Coordinaten zu erläutern und einige Übungen in der Darstellung tabellarischer Übersichten zu gewinnen. Darauf lehre man nach der von Borel vorgeschlagenen Art, einfache arithmetische Ausdrücke für verschiedene numerische Werte auszuwerten, und setze diese Übungen unter fortwährender Steigerung der Schwierigkeiten in den folgenden Klassen fort. So liefert das Einüben des Wurzelausziehens in Unter-Tertia die beste Gelegenheit, von den rationalen Funktionen zu den irrationalen überzugehen, und anstatt die Wurzeln aus willkürlich gegebenen Zahlen ausziehen zu lassen, verwende man zur Auswertung, auch unter Anwendung des Pythagoräischen Satzes, Ausdrücke von der Form $y = \sqrt{a^2 \pm x^2}$, $y = \sqrt{m \pm nx}$. Auch in der Geometrie der Unter-Tertia bietet sich reichlich Gelegenheit, geometrische Größen in ihrem Abhängigkeitsverhältnis zu betrachten. Ganz besonders aber bietet sich bei den Dreieckskonstruktionen Gelegenheit zu untersuchen, wie die Änderung einzelner Größen, stets unter Benutzung von Zahlenwerten, die Figur gestaltlich beeinflußt. Auf diese Weise bahnen sich in den zwei unteren Klassen der Mathematik die funktionalen Auffassungen in unbewußter Weise an; Aufgabe der Ober-Tertia und der folgenden Klassen ist es, diese Auffassung zur Stufe des Bewußtseins allmählich emporzuheben. In Ober-Tertia läßt sich dann im Anschluß an die geometrische

Proportionalitätslehre oder an die Ähnlichkeitslehre der Beweis erbringen, daß die Funktion $y = mx$ und $y = mx + n$ in ihrer geometrischen Deutung eine Gerade darstellt. Die geometrische Darstellung der Wurzel einer Gleichung ersten Grades oder zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten läßt den Schüler deutlich erkennen, welch' innige Beziehung zwischen Geometrie und Algebra besteht, und wenn auch die graphische Lösung von Gleichungen ersten Grades, vielleicht auch die der Gleichungen zweiten Grades keinen großen praktischen Wert besitzt, so sollte sie doch in einigen Beispielen durchgenommen werden, um den Schülern das Bild der linearen und quadratischen Funktionen geläufig zu machen und um ein lückenloses Vorwärtsschreiten in der Erziehung zum funktionalen Denken zu sichern. In Ober-Tertia, vielleicht auch schon in Unter-Tertia können nach dem Kursbuch graphische Fahrpläne ohne große Schwierigkeit hergestellt werden, und diese Art der Darstellung wird bei den Schülern ohne Zweifel großes Interesse hervorrufen. Fragen nach Ort und Zeit von Zugbegegnungen und Überholungen und Fragen nach der Geschwindigkeit der Züge schließen sich leicht an die graphischen Pläne an. Auch andere Bewegungsaufgaben können zuerst graphisch und im Anschluß an die Zeichnung rechnerisch gelöst werden. Graphische Darstellungen der Quadratzahlen, der Wurzeln 2. Grades durch die Funktionen $y = x^2$, bezw. $x = \sqrt{y}$, ebenso Exponentialfunktionen wie $y = 2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, die die entsprechenden arithmetischen Gesetze durch ein leicht verständliches Bild ersetzen, gehören ihrem Wesen nach in das Pensum der Ober-Tertia. Dieses aber würde dadurch zu sehr belastet werden. Andererseits ist zu beachten, daß durch eine zu starke Betonung graphischer Darstellungen die Ausprägung des Zahlensinnes, der doch immerhin das Fundament der Arithmetik sein soll, leiden würde. Daher würde es sich empfehlen, alle diese Funktionen als Wiederholungen, wie sie in den Lehrplänen für Unter-Sekunda vorgeschrieben sind, graphisch darzustellen. Zu diesen Funktionen würde noch zum besseren Verständnis der Logarithmen die Funktion $y = 10^x$ und $x = log\, y$ und deren graphische Darstellung hinzutreten.

Die Behandlung der Funktionen zweiten Grades, bezw. der quadratischen Gleichungen soll wie die der Funktionen 1. Grades in Ober-Tertia wegen der in der Mathematik verlangten Genauigkeit und wegen der Ausbildung des Zahlensinnes in der Hauptsache auf arithmetischer Grundlage erfolgen; ihre graphische Darstellung ist aber wegen des Verständnisses und wegen des erwünschten lückenlosen Aufbaues in der Erziehung zum funktionalen Denken trotzdem nötig. Ihre Darstellung kann auf zwei Arten erfolgen, entweder dadurch, daß durch Aufsuchen der quadratischen Ergänzung der tiefste Punkt der Parabel gesucht wird, wodurch sich die andern Punkte der Parabel als symmetrisch zur Achse der Parabel erweisen, oder dadurch daß die Funktion $y = x^2 + px + q$ in die zwei Funktionen $y = x^2$ und $y = -px - q$ zerlegt wird, sodaß die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als die Abscissen der Schnittpunkte der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = -px - q$ erscheinen. Benutzt man bei dieser letzten Methode eine für alle Fälle einmal genau gezeichnete Parabel $y = x^2$, so lassen sich beim Gebrauch von durchsichtigem Millimeterpapier sofort die Lösungen, wenigstens in angenähertem Werte, ablesen. Die geometrische Diskussion der Diskriminante der quadratischen Gleichung läßt dann deutlich erkennen, wann man reelle Lösungen erhält oder nicht. In Ober-Sekunda würden einige ganze Funktionen 3. und 4. Grades zu behandeln sein, ebenso die einfachsten rationalen Funktionen $y = \frac{a}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ und die irrationalen Funktionen $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{a^2 \pm x^2}$ und deren graphische Darstellungen. Die Durchnahme dieser Funktionen und der Funktion $y = a^x$ würde auf Grund des in den unteren Klassen gewonnenen Verständnisses für funktionale Betrachtungen nicht mehr so viel Zeit in Anspruch nehmen. Die Anwendungsfähigkeit dieser Funktionen und ihrer graphischen Darstellungen liegt im Gebiet der Zinseszins- und Rentenrechnung und im Gebiet des physikalischen Pensums der Ober-Sekunda (Mariotte'sches Gesetz, Dampfspannung, isothermer Process, Ohm'sches und Joule'sches Gesetz). Will man bereits in Ober-Sekunda dem reichlichen Pensum der Prima vorarbeiten, so kann dies dadurch geschehen, daß man Kurven, wie z. B. die Hyperbel $y = \frac{1}{1 + x}$ und ihre approximativen Kurven $y = 1 - x$, $y = 1 - x + x^2$ etc. darstellt.

Durch diese jahrelang dauernde Erziehung zum funktionalen Denken und zur graphischen Darstellung von Funktionen ist ganz besonders für eine Disziplin in der Mathematik der Prima die beste Grundlage geschaffen, nämlich für die analytische Geometrie; und ich glaube, daß das geringe Verständnis, das wohl ein Teil der Schüler bei ihrer Einführung in die analytische Geometrie entgegenbringt, auf die bei diesem Uebergang herrschende Diskontinuität des mathematischen Unterrichts zurückzuführen ist. Dieser große Vorteil, der durch die Erziehung zum funktionalen Denken für das Verständnis der analytischen Geometrie gewonnen werden würde, dürfte ganz besonders von Bedeutung für die Frage nach der Reform des mathematischen Unterrichts im Sinne der Meraner Pläne sein. Durch ihn würde auch das Prima-Pensum entlastet sein, und es wäre so ein Teil derjenigen Zeit geschaffen, die für den letzten Ausbau der Erziehung zum funktionalen Denken, für die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung, nötig ist.

Ist der Unterricht in der bisher besprochenen Weise in das Zeichen des Funktionsbegriffs gestellt, so treten ganz von selbst die Gedankengänge der Differential- und Integralrechnung als die Erweiterung von Problemen auf, die der Schüler bereits früher an besonderen Funktionen kennen gelernt hat. Bei dem Wort Differential- und Integralrechnung mag ein mancher Nicht-Mathematiker, vielleicht auch mancher Mathematiker ein Gruseln bekommen, wenn er hört, daß diese hohe Universitätsweisheit schon den Primanern gegeben werden soll. Ja, wenn die Elemente der Differential- und Integralrechnung einfach dem Prima-Pensum aufgeladen werden sollten, ohne vorherige systematische Erziehung zum funktionalen Denken in den vorhergehenden Klassen, so könnte der ohnedies schon reichlich beladene Wagen der Prima eine solche Belastung nicht aushalten. Ganz anders aber würde die Sache sich verhalten, wenn die Reformierung des mathematischen Unterrichts im vorgeschlagenen Sinn schon in den unteren Klassen beginnt. Sehen wir nun, in welcher Weise der mathematische Unterricht zur Zeit in der Prima betrieben wird: Überall, in Arithmetik, Geometrie, der analytischen Geometrie findet sich eine gewisse Scheu vor dem Funktionsbegriff; aber trotzdem kann man die Bildung von Grenzwerten z. B. bei der Herleitung der Tangentengleichung, in der Stereometrie, bei den Reihen und bei den Maxima und Minima nicht umgehen. Man bildet hier Differentialquotienten von Funktionen, ebenso wie man bei der Berechnung der Volumina, Schwerpunkts- und Trägheitsmomente Integrationen durch Reihensummierungen ausführt; man vermeidet aber dabei nur die Benennung „Differentiation und Integration" und den eigentlichen Algorithmus der Differential- und Integralrechnung. „Man führt alle Grenzübergänge und Reihensummierungen bei jedem Beispiel von neuem durch und scheut sich, die allgemeine Methode herauszuarbeiten. Durch Umgehung des Funktionsbegriffs erschwert man sich die Arbeit noch. So bleibt alles für den Schüler schwer verständlich und noch schwerer anzuwenden. Das ganze Verfahren aber ist unmathematisch, eben weil es beim Speziellen verweilt und weil es sich von der allgemeinen Methode abwendet; es widerspicht dem Grundprinzip der Mathematik wie jeder Wissenschaft, dem Prinzip der Ökonomie des Denkens". (Götting: Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Realanstalten). In welcher Weise eine Vereinfachung der Methode eintritt, möge man durch den Vergleich der Lösungen folgender einfachen Aufgabe nach alter und neuer Methode ersehen:

Aufgabe: Welches unter den einem Kreise einbeschriebenen Rechtecken hat den größten Umfang?

Alte Methode: (ohne verbindenden Text)

Nennen wir die Seiten x und y, so ist

$$U = 2x + 2y$$
$$U = 2x + 2\sqrt{4r^2 - x^2}$$

Man setzt:

$$2x + 2\sqrt{4r^2 - x^2} = 2x_1 + 2\sqrt{4r^2 - x_1{}^2};$$
$$\sqrt{4r^2 - x^2} - \sqrt{4r^2 - x_1{}^2} = x_1 - x.$$

Erweitert man die linke Seite mit der Summme der beiden Wurzeln, so erhält man:

$$\frac{(4r^2 - x^2) - (4r^2 - x_1{}^2)}{\sqrt{4r^2 - x^2} + \sqrt{4r^2 - x_1{}^2}} = x_1 - x$$

Durch Division mit $x_1 - x$ erhält man:

$$\frac{x_1 + x}{\sqrt{4r^2 - x^2} + \sqrt{4r^2 - x_1{}^2}} = 1.$$

Setzt man nun $x_1 = x$, so ist

$$\frac{2x}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = 1 \text{ oder}$$

$$x^2 = 4r^2 - x^2$$

$$2x^2 = 4r^2$$

$$x = r\sqrt{2}$$

Neue Methode: (ohne verbindenden Text)

Nennen wir die Seiten x und y, so ist

$$U = 2x + 2y$$

$$U = 2x + 2\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$\frac{dU}{dx} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

Da $\frac{dU}{dx} = 0$ zu setzen ist, so ist

$$1 - \frac{x}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \text{ oder}$$

$$4r^2 - x^2 = x^2$$

$$2x^2 = 4r^2$$

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ebenso würde eine Vereinfachung der Methode in der Behandlung der Reihenlehre und der analytischen Geometrie eintreten. Die bisherige Behandlungsweise der unendlichen Reihen wird wohl bei den Schülern für ein gutes Verständnis nicht geeignet sein, da ihr die Anschaulichkeit fehlt. Klarer dagegen kann das Wesen der Reihen erfaßt werden, wenn man den Gedanken der allmählichen Annäherung einer Funktion durch Polynome vermittels graphischer Darstellung einführt. Hat man durch graphische Behandlung einer oder zweier einfacher Funktionen z. B. $y = \frac{1}{1+x}$ und ihrer nächsten Schmiegungskurven $y = 1 - x$ $y = 1 - x + x^2$ etc. die Möglichkeit der Entwickelung einer Funktion in eine Potenzreihe dargetan, so läßt sich unter der Annahme, daß eine Funktion in einer Reihe entwickelt werden kann, die allgemeine Maclaurin'sche Reihe ableiten; auf Grund dieser allgemeinen Reihe lassen sich dann die im Prima-Pensum üblichen Reihen entwickeln, und der Schritt jener Annahme läßt sich dann jedesmal durch die graphische Darstellung der gegebenen Funktion und ihrer Schmiegungskurven rechtfertigen. Es ist dabei nicht nötig, in einem Jahrgang alle diese graphischen Darstellungen für die üblichen Reihen durchzuführen. Dazu würde die Zeit nicht ausreichen; es genügt die Darstellung einer einzigen dieser Funktionen, und in Bezug auf die andern beschränke man sich darauf, ihre graphischen Darstellungen zu zeigen, die man bereits in früheren Jahrgängen der Prima gewonnen hat, oder, was sehr zu empfehlen wäre, sie durch Diapositive, die man durch Zeichnen auf Gelatineplatten mittels Tusche hergestellt hat, mit Hilfe des Projektionsapparates zu zeigen.

Wie nun die Lehre von den Maxima und Minima und die Reihenlehre auf Grund der Einführung der Elemente der Differentialrechnung eine Vereinfachung der Methode bedeutet und ein tieferes mathematisches Verständnis hervorruft, so tritt dies auch in der analytischen Geometrie ein. Tangentengleichungen und viele andere analytisch-geometrische Fragen lassen sich viel einfacher durch Anwendung der Elemente der Differentialrechnung behandeln.

Es erübrigt noch, die Vereinfachung zu erwähnen, die die Einführung der Elemente der Integralrechnung in den Schulbetrieb gewährt. Während man im allgemeinen, wenigstens bei den Realanstalten, geneigt zu sein scheint, die Elemente der Differentialrechnung einzuführen, ist man über die Einführung der Integralrechnung noch im unklaren, ganz besonders aber darüber, ob man vom bestimmten Integral ausgehen oder ob man die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung einführen soll. Die Schwierigkeit wird darin gesucht, daß „die noch offene Kardinalfrage die ist, ob die Identität des als Summe definierten und des durch Umkehrung der Differentiation über das unbestimmte Integral hinweg definierten bestimmten Integrals nachgewiesen wird“. (Lietzmann, Stoff und Methode des mathem. Unterrichts). Doch glaube ich, daß diese Schwierigkeit, die sich der Einführung in dieses Gebiet entgegenstellt, dadurch gehoben werden kann, daß man den Weg der Anschauung wählt. Hat man zunächst unter Hinweis auf die Umkehrung der elementaren Rechnungsarten auch die Umkehrung der Differentialrechnung an einigen Beispielen durchgenommen, wobei eine Erklärung des Wortes „Integral“ noch nicht einzutreten braucht, so stelle man eine Funktion, z. B. $y = 3x^2 - x^3$ und deren Abteilung $y' = 6x - 3x^2$ für das

Interwall $x = 0$ bis $x = 3$ und etwas darüber hinaus auf Millimeterpapier graphisch dar. Ein Ausmessen der Fläche zwischen der Kurve y' und der Abscisse vom Werte $x = 0$ bis $x = 2$ oder ein Berechnen des entsprechenden Parabelsegmentes nach der Formel $F = \frac{2}{3}\, g.\, h$ ergibt dann den Wert der Ordinate der $y =$ Kurve für $x = 2$. Ebenso läßt sich die Identität des Wertes der Fläche zwischen der Kurve y' und der Abscisse von $x = 0$ bis zu einem beliebigen x und des Wertes der diesem x entsprechenden Ordinate der $y =$ Kurve und schließlich auch diese Identität für ein beliebiges Interwall x_1 / x_2 feststellen, wobei im letzteren Falle der $y =$ Wert sich als Differenz der entsprechenden Werte von y_2 und y_1 ergibt. Will man nun diese auf empirische Weise gewonnene Identität begründen, so gehe man von der Gleichung

$$dy = f'(x) \,.\, dx \qquad \mathrm{I}$$

aus. Führt man die Summation aller dy für das Interwall $x = 0$ bis zu einem beliebigen x aus, so ergibt sich aus der Figur, daß

$$\int dy = y$$

ist. Folglich muß die Summation aller $f'(x)\, dx$ wegen der Beziehung I die Gleichung

$$\int dy = \int f'(x)\, dx \qquad \text{oder}$$

$$y = \int f'(x)\, dx$$

ergeben, deren linke Seite ein Linien-Integral und deren rechte Seite ein Flächen-Integral darstellt. Diese Betrachtungen lassen sich noch weiter ausdehnen in dem Sinn, daß das Integral als Funktion der oberen Grenze aufzufassen ist und schließlich auch für das Interwall $x = a$ bis $x = b$, wodurch sich die Gleichung ergibt

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Um nun noch die Bedeutung der additiven Konstanten, durch die sich die Integralwerte unterscheiden, zu erörtern, stelle man sich für unser Beispiel die Kurven

$$y = 3\,x^2 - x^3 + C$$

vor, wobei C die Werte $\pm\, 1$, $\pm\, 2$ etc. besitze, also die Kurven, die parallel mit der ursprünglichen Kurve $y = 3x^2 - x^3$ nach oben oder unten verschoben sind. Der Schüler kann dann sofort erkennen, daß alle diese Kurven dieselbe abgeleitete Kurve $f'(x)$ besitzen, daß aber umgekehrt zur Kurve $f'(x)$ unendlich viele Kurven $f(x)$ gehören, deren Lagen von gewissen Anfangsbedingungen abhängen; soll z. B. für $x = 0$ die Ordinate $y = 0$ sein, so ergibt sich aus

$$y = \int (6x - 3x^2)\, dx,$$

daß

$$y = 3x^2 - x^3$$

sein muß.

Auf diese so besprochene Weise läßt sich das scheinbar so schwierige Gebiet der Einführung in die Elemente der Integralrechnung in einer für die Zwecke der Schule ausreichenden Weise erledigen.

Was nun die Bedeutung der Integralrechnung für die Schule betrifft, so bietet diese Rechnungsart nicht nur ein Mittel, um Flächen- und Rauminhalte abzuleiten, sondern auch ein Mittel, um in einer ganz allgemeinen Methode einen Schluß von der Gesetzmäßigkeit der kleinsten Teile auf die Gesamtheit zu machen. Wird nach Einübung der Elemente der Integralrechnung eine Anwendung auf Quadratur und Kubatur der bereits in früheren Jahrgängen durchgenommenen Flächen- und Raumberechnungen der einfachen geometrischen Körper gemacht, so ist auch zugleich der in den Lehrplänen vorgeschriebenen Forderung der Ergänzungen und Zusammenfassungen auf dem Gebiet der Geometrie und Stereometrie Rechnung getragen.

Diese neue Methode hat gegenüber dem bisher üblichen Verfahren, z. B. den Inhalt der Kugel als Differenz zwischen Zylinder und Kegel zu berechnen, den Vorzug der Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit.

Einen großen Vorteil von der Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung hat ganz besonders die Physik. Die schwerfälligen Bestimmungen von Weglängen, der Krümmung der Bahn eines Punktes, von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten würden bei Anwendung der Differential- und Integralrechnung sehr vereinfacht werden. Im physikalischen Unterricht kommt man ohne die Grundbegriffe dieser Disziplin fast gar nicht aus. Auch kann ein scheinbar so einfacher Begriff wie der der Geschwindigkeit ohne die Vorstellung der Differential-Rechnung nicht erfaßt werden; zu dem kommt noch, daß die Ermittelung der Geschwindigkeit nach Richtung und Größe mit dem Tangentenproblem der analytischen Geometrie übereinstimmt. Aus diesem inneren Zusammenhang, in dem die Elemente der Differentialrechnung in den verschiedenen Disziplinen stehen, ergibt sich auch, in welcher Klasse und auf welcher Grundlage die Einführung der Elemente wohl am zweckdienlichsten erfolgen kann. Die Unter-Prima wäre die Klasse, in der die Elemente der Differentialrechnung einzusetzen hätten, und die Grundlage könnte in dreierlei Weise geschaffen werden, auf rein arithmetischer Grundlage, auf der Grundlage der analytischen Geometrie und der Mechanik. Auf diese Weise würden drei verschiedene Disziplinen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt gestellt und für ein gutes Verständnis der Elemente der Differentialrechnung und später der Integralrechnung gesorgt werden, und der Einwand, daß die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung zu schwierig wäre, würde dann wegfallen. Die größte Schwierigkeit aber, die sich dieser Einführung entgegenstellt, wäre vorhanden, wenn die beiden Primen, wie es zur Zeit am Realgymnasium Halberstadt der Fall ist, kombiniert sind. Es wäre als pädagogisches Kunststück zu betrachten, diese Reform der Mathematik bei kombinierter Prima unter Aussicht auf Erfolg durchzuführen.

Natürlich bedarf diese neue Methode des mathematischen Unterrichts einer Einübung an Beispielen. Diese müssen aber nach der formalen Seite soweit durchgearbeitet werden, daß sichere Kenntnis entsteht. Man muß sich aber hüten, der Differential- und Integralrechnung einen vorwiegend formalen Charakter zu geben; es kann sich nur um propädeutische Behandlung der Differential- und Integralrechnung handeln. Dieser Formalismus aber würde eintreten, wenn man die neue Lehrart systematisch, nach dem Vorbild der Hochschulen, betreiben wollte. Daher ist es geboten, zu beachten, daß das, was in einigen neueren, für die Schule besonders verfaßten Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung auf einigen Seiten steht, in 2 Jahren verarbeitet werden muß. Die einzelnen Abschnitte der Differential- und Integralrechnung müssen eben da eingeschaltet werden, wo sie sich an die Lehraufgabe in natürlicher Weise anschließen; dadurch wird alles, was jetzt getrennt erscheint,in Zusammenhang gebracht. Der ganze Lehrstoff wird leichter und übersichtlicher, und trotz der Einübung der neuen Methode wird die Gesamtarbeit des Schülers geringer. Zu wünschen wäre nur noch, daß auch bald von amtlicher Seite aus neben den Anregungen in Bezug auf die Reform des mathem. Unterrichts auch Anordnungen wenigstens für die Realanstalten erfolgen, die aber nur von solcher Art sein können, daß sie dem Lehrer genügende Lehrfreiheit lassen. Alsdann möge überall ein fröhliches Wagen einsetzen.

Litteratur:

F. Klein: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des Mathem. Unterrichts an den höheren Schulen.

A. Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichts-Kommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte.

Klein und Schimmack: Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen. I.

Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen in den Provinzen des Königreichs Preußen: 76. Band (Westfalen); 77. Band (Posen).

W. Schmidt: Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffs Platz im mathematischen Unterricht? (Programm-Beilage des Realgymnasiums Düren, 1906).

sich an die Lehraufgabe in n
wird alles, was jetzt getrennt
Der ganze Lehrstoff wird l
der Einübung der neuen M
Schülers geringer. Zu wüns
von amtlicher Seite aus neb
Reform des mathem. Unter
für die Realanstalten erfolge
können, daß sie dem Le
Alsdann möge überall ein f

L

F. Klein: Über eine ze
Unterrichts an

A. Gutzmer: Die Tätig
Gesellscha

Klein und Schimmack

Verhandlungen der
den Provinzen des

W. Schmidt: Wie gev
Funktion
Unterrich
gymnasi

sich an die Lehraufgabe in natürlicher Weise angeschlossen; dadurch wird alles, was jetzt getrennt erscheint, in Zusammenhang gebracht. Der ganze Lehrstoff wird leichter und übersichtlicher, und trotz der Einführung der neuen Methode wird die Gesamtarbeit des Schülers geringer. Zu wünschen wäre nur noch, daß auch bald von amtlicher Seite aus neben den Anregungen in Bezug auf die Reform des mathem. Unterrichts auch Anordnungen, wenigstens für die Realgymnasien erfolgen, die aber nur von solcher Art sein können, daß sie dem Lehrer genügende Freiheit lassen. Alsdann möge überall ein fröhliches Wirken einsetzen.

Litteratur:

F. Klein: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des Mathem. Unterrichts an den höheren Schulen. [illegible]

A. Gutzmer: Die Tätigkeit der Unterrichts-Kommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte.

Klein und Schimmack: Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen. I.

Verhandlungen der Direktoren-Versammlungen in den Provinzen des Königreichs Preußen: 76. Band (Westfalen); 77. Band (Posen).

W. Schmidt: Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffs Platz im mathematischen Unterricht? (Programm-Beilage des Realgymnasiums Düren, 1906).