

Beitrag

zur

Projektion der regulären Polyeder.

Vorbemerkungen.

Die graphische Darstellung der regulären Polyeder bildet naturgemäß den Abschluß der elementaren Projektionslehre, insofern diese sich nur soweit mit der Darstellung geometrischer Gebilde befaßt, als letztere nicht durch Berührung, Schnitt oder Durchdringung zu einander in Beziehung stehen.

Wenn nun trotz der verhältnismäßig tiefen Stufe, auf der die regulären Körper theoretisch stehen, ihre graphische Behandlung in der Schule so selten, in den Lehrbüchern meist unvollständig oder gar übergangen ist, so hat das seinen Grund einmal in der etwas abweisenden Gestaltung einiger jener Körper, die sich so wenig an die vorausgegangenen Formen (Prismen, Pyramiden) anschließen wollen; demnächst aber ist die bisherige Behandlungsweise, die vornehmlich auf dem Auf- und Abklappen der Flächen beruht, eine ziemlich umständliche und dazu eine solche, die wenig im Stande ist, das Interesse genügend wach zu erhalten, weil sie nur eine Häufung früherer Aufgaben darstellt, ohne das Charakteristische, das die Regelmäßigkeit der Körper der Projektion verleiht, zu beachten und auszubenten.

Nur in den bedeutenderen Werken über Projektionslehre (G. Schreiber's geom. Port-Folio, Weisshaupt, Delabar etc.) findet man verschiedene Ansichten der regulären Polyeder als Originalansichten entwickelt; dagegen beschränken sich viele recht brauchbare Werke auf die Behandlung des Vier-, Sechs- und Achtecks oder geben von dem Zwölfs- und Zwanzigflächner doch nur je eine Originalansicht.

Wenngleich nun die Entwicklung der Projektionen im einzelnen bei den verschiedenen Autoren sehr verschieden ist, so ist mir bis jetzt kein Werk zu Gesicht gekommen, das die meist auf umständlichem und unfreiem Wege ermittelten Größen in Beziehung zu einander gesetzt hätte, um dadurch event. eine Abkürzung des Verfahrens herbeizuführen.

Wenn nun schon der Umstand, daß ich das Resultat meiner Untersuchungen in keinem Werke verzeichnet fand, mir die Annahme nahe legte, daß man bisher jenen Untersuchungen fern geblieben war, so wurde ich in meiner Annahme dadurch bestärkt, daß ich in einem Werke, das im Vorjahre in Weimar erschienen ist, eine beiläufige aber falsche Notiz über ein hierhergehöriges Verhältnis fand. Zudem zeigen die nach allgemeinen Projektionsregeln entstandenen Projektionen in ganz bedeutenden Werken augenscheinlich auffällige Verstöße gegen die Genauigkeit, die nicht wären unentdeckt geblieben, wenn man die im Nachfolgenden entwickelten Gesetze gekannt und auf die Arbeit prüfend angewandt hätte.

Obgleich sich meine Untersuchungen vornehmlich auf die bisher mit einer gewissen Scheu vernachlässigten beiden meistflächigen Polyeder erstrecken, so ist doch der Vollständigkeit halber eine entsprechende Behandlung auch den drei anderen zuteil geworden.

I. Vorbereitender Teil.

Damit die Hauptaufgabe nicht allzu oft durch Unteraufgaben oder durch Verwandlungen unterbrochen werde, sei es gestattet, auf eine Anzahl von Wahrheiten hinzuweisen, die, wenn sie auch alle bekannt sein sollten, dennoch mehr oder weniger der Vergegenwärtigung bedürfen.

Eine Bekanntschaft mit den regulären Polyedern nach Form, Zahl und Größe der daran vorkommenden geometrischen Gebilde setze ich voraus; ebenso nehme ich eine Bekanntschaft mit den Elementen der Projektionslehre an.

Beim Vierflächner finden wir keine Gegenflächen*), auch keine Gegenecken, wohl aber Gegenkanten; dieselben kreuzen sich rechtwinklig. Jeder Ecke liegt eine Fläche so gegenüber, daß das Lot aus jener Ecke auf die Ebene der Gegenfläche, diese Fläche im Mittelpunkte trifft.

Der Würfel (Sechseflächner) hat Gegenflächen, Gegenecken und parallele Gegenkanten. Die Gegenflächen des Würfels sind in demselben Sinne gelegen, d. h. so, daß die Lote aus den Ecken einer Fläche auf die Ebene der Gegenfläche letztere in den Ecken treffen.

Der Achtfächner hat Gegenflächen, Gegenecken und parallele Gegenkanten. Die Gegenflächen des Achtfächners liegen in entgegengesetztem Sinne, d. h. so, daß die Lote aus den Ecken einer Fläche auf die Ebene der Gegenfläche in die Halbierungslinien der Centriwinkel dieser Gegenfläche treffen.

Was bis jetzt vom Achtfächner gesagt ist, gilt auch vom Zwölfs- und Zwanzigflächner.

Beim Achtfächner sind 3 ebene Durchschnitte möglich, die die Oberfläche des Körpers nur in Kanten treffen; sie sind quadratisch.

Beim Zwanzigflächner sind 12 solcher Durchschnitte möglich; sie bilden regelmäßige Fünfecke. Die 10 Ecken des Zwölffächners, die nicht zu vorausbestimmten Gegenflächen gehören, bestimmen 2 in entgegengesetztem Sinne gelegene reguläre Fünfecke, die parallel zu den gedachten Gegenflächen liegen und zur Seite die Diagonale der Polyederfläche haben.

Da bei den beiden zuletzt genannten Körpern das reguläre Fünfeck Verwendung findet, so seien hier einige Verhältnisse angeführt, die jener Fläche eigen sind und bei der graphischen Behandlung des Zwölfs- und Zwanzigflächners gegenwärtig sein müssen.

Mit jeder Fünfeckseite läuft eine Diagonale parallel, welche den Abstand jener Seite von der Gegenecke stetig teilt. — Je 2 sich schneidende Diagonalen des Fünfecks teilen sich gegenseitig stetig. — Der größere Abschnitt (Major) der stetig geteilten Diagonale ist der Seite gleich.

Da das rechtwinklige Dreieck in der Projektionslehre ausgedehnte Anwendung findet, so erlaube ich mir, diejenigen rechtwinkligen Dreiecke im voraus zu behandeln, die bei der Projektion der regulären Polyeder in Verwendung kommen, und auf deren Seitenverhältnis die nachfolgende graphische Behandlung jener Körper vornehmlich beruht.

Nr. 1. Das gleichschenklige Dreieck, von dem der Schenkel gleich dem Radius und die Basis gleich der Viereckseite**) oder der Schenkel gleich der Viereckseite und die Basis gleich dem Durchmesser eines Kreises ist, ist ein rechtwinkliges.

Aus diesem bekannten Satze folgen die Gleichungen: $\sqrt{r^2 + r^2} = s_4$ und $\sqrt{s_4^2 + s_4^2} = 2r$.

*) Unter Gegenflächen (Gegenkanten) sind solche Flächen (Kanten) des Polyeders gemeint, deren Mittelpunkte mit dem Mittelpunkte des Körpers in einer Geraden liegen. Diese Gerade steht senkrecht zu den Gegenflächen (Gegenkanten). Gegenecken (die Ecken als Punkte aufgefaßt) liegen mit dem Mittelpunkte des Polyeders in einer Geraden.

**) Es ist immer die Seite des einbeschriebenen regulären Polygons gemeint.

Nr. 2. Das Dreieck, dessen Seiten einzeln gleich dem Radius, der Viereckseite ($r\sqrt{2}$) und der Dreieckseite ($r\sqrt{3}$) sind, ist ein rechtwinkliges*).

Es genügt zum Beweise die Anführung der Gleichung: $\sqrt{r^2 + 2r^2} = r\sqrt{3}$.

Nr. 3. Das Dreieck, dessen Seiten einzeln gleich dem Radius, der Zehneckseite ($\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$) und der Fünfeckseite ($\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$) eines Kreises sind, ist ein rechtwinkliges ($\sqrt{r^2 + s_{10}^2} = s_5$).

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{3r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{\frac{5r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\sqrt{5}} \\ &= \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Dem Dreiecke Nr. 3 ist dasjenige ähnlich, dessen Seiten einzeln gleich sind dem Radius, der Fünfeckdiagonale und der Summe von Radius und Zehneckseite, oder in Buchstaben:

$$\sqrt{r^2 + (r + s_{10})^2} = d_5 \text{ (Diagonale des Fünfecks).}$$

Nr. 4. Das Dreieck, dessen Seiten einzeln gleich der Zehneckseite, der Dreieckseite und der Summe von Radius und Zehneckseite eines Kreises sind, ist ein rechtwinkliges ($\sqrt{(r + s_{10})^2 + s_{10}^2} = s_3$).

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\left[r + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2} \\ &= \sqrt{r^2 + 2\frac{r^2}{2}(\sqrt{5}-1) + \frac{2r^2}{4}(6-2\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{r^2 + r^2\sqrt{5} - r^2 + 3r^2 - r^2\sqrt{5}} \\ &= r\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dem Dreiecke Nr. 4 ist dasjenige ähnlich, das als Seiten hat den Major der stetig getheilten Dreieckseite, den Radius und den Minor des stetig getheilten Radius.

Nr. 5. Das Dreieck, dessen Seiten einzeln gleich der Höhe des Bestimmungsdreiecks vom regulären Sechseck, der Viereckseite und der Summe aus der halben Sechseckseite und der Zehneckseite eines Kreises sind, ist ein rechtwinkliges ($\sqrt{\left(\frac{r}{2} + s_{10}\right)^2 + \varrho_6^2} = s_4$).

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\left[\frac{r}{2} + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \frac{3r^2}{4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{r}{2}\sqrt{5}\right)^2 + \frac{3r^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}r^2 + \frac{3}{4}r^2} \\ &= r\sqrt{2}. \end{aligned}$$

*) Zum Zwecke des Beweises wurde hier wie bei den folgenden Sätzen angenommen, daß die beiden kleineren Seiten rechtwinklig zu einander ständen. Daraufhin wurde der Wert der zugehörigen Hypotenuse (x) ermittelt, welcher übereinstimmen mußte mit der 3. im Satze angeführten Seite.

Nr. 6. Das Dreieck, dessen Seiten einzeln gleich der Fünfeckseite, dem Durchmesser und der Summe von Radius und Zehneckseite sind, ist ein rechtwinkliges ($\sqrt{s_5^2 + (r + s_{10})^2} = 2r$).

In der nachfolgenden Gleichung ist gesetzt: $s_5 = \sqrt{r^2 + s_{10}^2}$ und ferner $r + s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^2} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5}) + \frac{r^2}{4}(6+2\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{3r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\sqrt{5} + \frac{3r^2}{2} + \frac{r^2}{2}\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{3r^2}{2} + \frac{3r^2}{2}} \\ &= \sqrt{4r^2} = 2r. \end{aligned}$$

Nr. 7. Das Dreieck, gebildet aus der Zehneckseite, der Diagonale des Fünfecks und dem Durchmesser desselben Kreises, ist ein rechtwinkliges.

Nr. 8. Das Dreieck, gebildet aus dem Radius, der Dreieckseite und dem Durchmesser desselben Kreises, ist ein rechtwinkliges.

Zum Nachweis der beiden Sätze Nr. 7 und 8 bedarf es nur des Hinweises darauf, daß die Bogen sowohl der Zehneckseite und der Fünfecksdiagonale als auch des Radius und der Dreieckseite zusammen der halben Kreisperipherie gleichkommen.

Bei der graphischen Darstellung des Zwölfs- und Zwanzigflächners wird es mehrfach, und zwar unter verschiedenen Umständen nötig, eine Strecke stetig zu teilen. Deshalb nehme ich Veranlassung, fünf Konstruktionen des „goldenen Schnittes“ vorzuführen, unter denen vergleichshalber die beiden gebräuchlichen sich befinden. Die drei anderen, die weniger oder gar nicht bekannt sein dürften, sind unter Umständen den beiden vorangestellten vorzuziehen; diese Umstände treten für die 3. und 4. Konstruktion bei der graphischen Darstellung der beiden meistflächigen regulären Polyeder ein.

Die Konstruktionen 1 und 2 (Taf. I) sind bekannt und erläutern sich nach der Figur selbst. Beide gründen sich auf das rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten sich verhalten wie 1 : 2, und sind deshalb wesentlich nicht verschieden. Bei beiden Konstruktionen wird das Halbieren der Strecke und die Bildung des rechten Winkels nötig, Aufgaben, die konstruktiv umständlich sind, und deren Wegfall ein Vorzug der Konstruktionen 3 und 4 ist.

Konstruktion 3. Hier und in den beiden folgenden Konstruktionen sind die gestrichelten Linien nur zur Beweisführung verlangt.

Man beschreibe mit der stetig zu teilenden Strecke AB Bogen um ihre Endpunkte auf derselben Seite der Strecke; die Bogen müssen mindestens $\frac{1}{3}$ des Kreisumfangs ausmachen. Um ihren Schnittpunkt C beschreibe man mit demselben Radius einen Bogen, der die beiden ersten Bogen außerhalb der Strecke, und zwar in D und F schneidet. Diese Schnittpunkte verbinde man mit den Endpunkten der Strecke so, daß die Verbindungslinien sich schneiden; letzteres geschehe in O . Nun verlängere man OB über B hinaus um OB . Der Endpunkt der Verlängerung soll G heißen. Der sodann um G und durch O beschriebene Kreisbogen teilt AB in X stetig.

Zum Zwecke des Beweises sei auf folgendes aufmerksam gemacht. Der letztgenannte Bogen (XO) schneidet BC in Y und geht durch D . Punkt Z liegt in AC und auf der Verlängerung von DY . Die Bogen XO und OY sind gleich, darum auch die Winkel ZDA und XDA . Somit ist $AZ = AX = CY$; also sind alle Seiten des gleichseitigen Dreiecks ABC gleich geteilt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CZY und BDY folgt die Proportion $CY : YB = YB : CB$. Daraus folgt $AX : XB = XB : AB$.

Konstruktion 4. Man beschreibe die 3 ersten Bogen von Konstruktion 3, ziehe $F_1 B$, diese schneidet den Bogen $A C$ in M . Der sodann um D und durch M beschriebene Kreisbogen teilt $A B$ in X stetig.

Zum Zwecke des Beweises bilde man das rechtwinklige Dreieck $D X N$, in dessen Kathete $X N$ der Punkt B liegt, so folgt die Wahrheit aus dem Vergleiche dieses Dreiecks mit dem Dreieck Nr. 5 $\left(\sqrt{\left(\frac{r}{2}\sqrt{5}\right)^2 + \frac{3r^2}{4}} = r\sqrt{2}\right)$.

Konstruktion 5. Man verlängere die Strecke $A B$ um sie selbst durch einen Halbkreis mit $A B$ um B . Sodann ziehe man $D B$ unter 45° zu $A B$ (ist hier durch Halbierung des rechten Winkels $A B F$ geschehen*). Ferner schneide man $D B$ durch einen Kreisbogen um C (den Endpunkt der Verlängerung von $A B$), dessen Radius gleich der Sehne von $\frac{2}{3}$ des Halbkreisbogens ($r\sqrt{3}$) ist. Von dem auf diese Weise auf $D B$ erhaltenen Punkte E aus fälle man das Lot auf $A B$; dies teilt $A B$ in X stetig.

Zum Zwecke des Beweises ziehe man $E C$ und vergleiche das Dreieck $E C X$ mit dem Dreieck Nr. 4 $\left(\sqrt{\left[r + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2} = r\sqrt{3}\right)$.

Die Konstruktionen sind, ohne der Vollständigkeit zu schaden, mit dem geringsten Grade von Umständlichkeit ausgeführt, wozu besonders die möglichst lange Beibehaltung desselben Radius und die Vereinigung mehrerer Bogen zu einem gehört.

Stehen uns alle Hilfsmittel des technischen Zeichnens zu Gebote, und handelt es sich lediglich um ein möglichst genaues Resultat, so werden selbstverständlich nur die Schnittpunkte der Linien in Kreuzform dargestellt das Halbieren beruht auf Probieren, und der rechte Winkel wird mit dem Winkellineal oder bei rechteckförmigem Brett mit der Reißschiene gezeichnet. Auch die Winkel von 45° und 30° oder 60° sind leicht darstellbar.

Über den Vorzug der einzelnen Konstruktionen entscheiden in jedem Falle der Zusammenhang der zu teilenden Strecke mit anderen Gebilden und die zu Gebote stehenden Mittel. Ist z. B. der Radius eines sechsgetheilten Kreises stetig zu teilen, so verdient Konstr. 4 den Vorzug, ihr folgt Konstr. 3. Sind aber zugleich auf Grund der Sechstheilung zwei Dreiecke eingezeichnet, so ist Konstr. 3 unstreitig die praktischste, weil sie nur einen Bogen benötigt. Konstr. 4 dient auch vortrefflich, um einen Radius um seinen Major direkt zu verlängern (Fig. 12, 14, 15). Konstruktion 5 wird bei der Achtheilung des Kreises mit Vorteil verwendet.

Im allgemeinen aber dürfte der Konstr. 4 in der Praxis der Vorrang gebühren, weil sie nur Lineal und Zirkel verlangt, dabei zugleich jeder umständlichen Halbierung und der Herstellung des rechten Winkels entbehrt und der wenigsten Konstruktionslinien (5) bedarf.

Hat man das Winkellineal für 30° -Winkel, so ist Konstr. 3 am ehesten ausgeführt, wenn man bedenkt, daß Dreieck $A O B$ den Basismwinkel von 30° hat. Für das Gedächtnis dürfte sich die Konstruktion 3 in ihrem Kerne am meisten empfehlen. Daß O der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks $A B C$ ist, mag nicht unbeachtet bleiben.

Es erübrigt noch, einiger Sätze aus der Projektionslehre zu erwähnen, die gegenwärtig sein müssen, um die Entwicklungen im nachfolgenden Teile zu verstehen. Sie beziehen sich alle auf die orthogonale Projektion.

Flächen und Strecken, die parallel mit der Projektionsebene liegen, erscheinen in der Projektion unverändert. — Parallele Strecken und Strecken von gleicher Neigung zur Projektionsebene projizieren sich proportional, desgl. die Teile derselben Strecke oder paralleler Strecken. — Rechtwinklig gegen die Projektionsebene gerichtete Strecken oder Flächen erscheinen in der Projektion als Punkte resp. Linien. — Ist eine Kante eines Polyeders rechtwinklig zur Projektionsebene gerichtet, so sind es auch die beiden Flächen, die in dieser Kante zusammenstoßen, sowie deren Gegenflächen.

*) Zieht man $G A$ und schneidet diese Linie mit einem Kreisbogen um G durch B , so liegt die durch diesen Schnittpunkt und B bestimmte Gerade ebenfalls unter 45° zu $A B$.

Die Projektion einer Strecke ist gleich der einen Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Strecke selbst ist, und dessen andere Kathete gleich der Differenz der Abstände ist, unter denen die Endpunkte jener Strecke zur Projektionsebene stehen. Da diese Abstände, bezogen auf die Horizontalebene, Höhen genannt werden, und die Höhen des Aufrisses mit den wirklichen Höhen übereinstimmen, so ist die Höhendifferenz der Endpunkte eines Streckenaufnisses gefunden, wenn man aus der wirklichen Strecke als der Hypotenuse und dem Grundrisse dieser als einer Kathete ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert hat.

II. Ausführlicher Teil.

Bevor die Aufgaben der Tafeln II und III einzeln zur Besprechung gelangen, sei im allgemeinen auf folgendes verwiesen.

Von jedem der 5 regulären Polyeder sind zunächst drei orthogonale Originalprojektionen entworfen: die Flächen-, die Ecken- und die Kantenan- s i c h t. Die Flächenansicht entsteht, wenn die durch den Mittelpunkt des Polyeders und den Mittelpunkt einer der Projektionsebene abgewandten Polyederfläche gehende Gerade senkrecht zur Projektionsebene steht. Die Eckenansicht tritt ein, wenn die durch den Mittelpunkt des Polyeders und eine der Projektionsebene abgewandte Ecke gehende Gerade senkrecht zur Projektionsebene steht. Die Kantenan- s i c h t entsteht, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen wie eben an Stelle der Ecke der Mittelpunkt einer Kante tritt.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß in der Flächenansicht die gedachte Polyederfläche unverändert bleibt, daß sowohl bei der Flächen- als auch bei der Eckenansicht die Flächen centrale Lage erhalten, und daß in der Kantenan- s i c h t sich die gedachte Kante in wirklicher Größe zeigt und die Figur sich als doppelt-symmetrisch erweist.

Bei der Eckenansicht des Vierflächners (Fig. 1) sind 3 Flächen sichtbar, eine ist verdeckt; bei der Flächenansicht ist es umgekehrt (Fig. 2); bei der Kantenan- s i c h t sind 2 Fl. sichtbar, 2 Fl. verdeckt (Fig. 3).

Bei der Flächenansicht des Würfels (Fig. 4) ist 1 Fl. sichtbar, 1 Fl. verdeckt, und 4 Fl. stehen senkrecht zur Projektionsebene (erscheinen als Strecken, Umrißlinien des Risses); bei der Eckenansicht (Fig. 5) sind 3 Fl. sichtbar, 3 Fl. verdeckt; bei der Kantenan- s i c h t (Fig. 6) sind 2 Fl. sichtbar, 2 Fl. verdeckt und 2 Fl. stehen senkrecht zur Projektionsebene (Langlinien des Umrisses).

Bei der Eckenansicht des Achtflächners (Fig. 7) sind 4 Fl. sichtbar, 4 Fl. verdeckt; bei der Flächenansicht (Fig. 8) sind 4 Fl. sichtbar, 4 Fl. verdeckt; bei der Kantenan- s i c h t (Fig. 9) sind 2 Fl. sichtbar, 2 Fl. verdeckt, und 4 Fl. stehen senkrecht zur Projektionsebene (Umrißlinien).

In der Flächenansicht des Zwölfflächners (Fig. 10) sind 6 Fl. sichtbar, 6 Fl. verdeckt; in der Eckenansicht (Fig. 11) sind 6 Fl. sichtbar, 6 Fl. verdeckt; in der Kantenan- s i c h t (Fig. 12) sind 4 Fl. sichtbar, 4 Fl. verdeckt, und 4 Fl. stehen senkrecht zur Projektionsebene (Langseiten des sechseckigen Umrisses).

Bei der Eckenansicht des Zwanzigflächners (Fig. 13) sind 10 Fl. sichtbar, 10 Fl. verdeckt; ebenso ist es bei der Flächenansicht (Fig. 14); bei der Kantenan- s i c h t (Fig. 15) sind 8 Fl. sichtbar, 8 Fl. verdeckt, und 4 Fl. stehen senkrecht zur Projektionsebene (kurze Seiten des sechseckigen Umrisses).

Die Originalprojektionen sind sämtlich als Grundrisse angenommen worden, deren Lage zur Projektionsachse nur in soweit ausgewählt wurde, als der jedem Grundrisse beigegebene Aufriß möglichst vor einem Zusammenfallen der Linien geschützt werden sollte.

Das Verfahren zur Ermittlung der Aufrisse ist ganz unabhängig von der Lage des Grundrisses zur Projektionsachse und bedarf keiner Hilfsprojektion, noch einer Hilfskonstruktion. Nur in einigen Fällen (Fig. 1, 2, 5 u. 8) ist eine Viereckseite des den Grundriß umschließenden Kreises zu ermitteln, um die Höhen

des Aufrisses zu haben; im übrigen sind alle zu den Aufrissen nötigen Höhen direkt aus dem Grundrisse abzugreifen.

Zur Herstellung der Grundrisse bedarf es außer der Konstruktion regulärer Polygone nur zweimal (Fig. 6 u. 9) der Ermittlung der Viereckseite und viermal (Fig. 11, 12, 14 u. 15) des goldenen Schnittes, der aber hier jedesmal am besten mit Anwendung der Konstruktion 4 (Taf. I) also mit Hilfe der Viereckseite und des Sextanten ausgeführt wird. Es bedarf hier nur eines Sextanten, weil die Aufgabe in allen genannten Fällen sich so gestaltet, daß der Radius (resp. die Sechseckseite), ohne vorher geteilt zu sein, um seinen Major verlängert werden muß.

Für den Sechseck-, Achteck-, Zwölfeck- und Zwanzigflächner hat es Bedeutung, darauf aufmerksam zu machen, daß der der Projektionsebene zugekehrte (verdeckte) Teil der Oberfläche dieselbe Gestalt und Größe hat wie der abgewandte (sichtbare) Teil. In den Grundrissen bekommen beide Teile gleiche Lage um den Mittelpunkt und liegen entweder in entgegengesetztem Sinne oder sie decken sich; letzteres kommt außer bei Fig. 4 und 7 bei allen Kantenansichten vor.

In den Projektionen sind nur kleine lateinische Buchstaben verwandt. Es bedeutet der (nur im Texte vorkommende) Buchstabe ohne Beizeichen den Punkt des Körpers, also den Originalpunkt. Die Buchstaben mit einem Beistriche bezeichnen die Grundrisse und die mit zwei Beistrichen die Aufrisse der Originalpunkte. So ist z. B. $a b$ die Kante des Körpers, $a' b'$ deren Grundriß und $a'' b''$ deren Aufriß.

Die in den Grundrissen mit Buchstaben bezeichneten Punkte, deren Aufrisse nicht angegeben sind, haben nur planimetrische Bedeutung.

Der Vierflächner (Tetraeder).

A. Seitenansicht (Fig. 1). B. Flächenansicht (Fig. 2).

1. Grundrisse. Beide Grundrisse bedürfen keiner Erläuterung. Ein Unterschied derselben besteht nur in der Ausführung.

2. Aufrisse. Die Aufrisse haben gleiche Höhe. $a d$ (wirkliche Kante des Körpers) ist gleich $a b$; $a b = a' b'$ (s_3^*). Die Höhe von $a d$ ($a'' d''$) ist somit $= \sqrt{a' b'^2 - a' d'^2} = \sqrt{s_3^2 - r^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 2 gleich s_4 . Somit ist $H = s_4$; d. h. $a d$ ($a'' d''$) steigt (resp. fällt) um s_4 , oder d (d') liegt um s_4 höher oder tiefer als a (a'). s_4 wird, wenn die Hilfsmittel des technischen Zeichnens zu Gebote stehen, am einfachsten durch die senkrecht resp. wagerecht gehenden Radien ermittelt.

C. Kantenansicht (Fig. 3).

1. Grundriß. Da die beiden sichtbaren Dreiecke $a b c$ und $a d e$ gleiche Neigung zur Projektionsebene haben, so ist $b d$ parallel zur Projektionsebene. Demnach $b' d' = b d = a c = a' c'$. Da ferner die Kanten $a c$, $c b$, $a d$ und $c d$ gleich und gleich geneigt zur Projektionsebene sind, so ist $a' b' = c' b' = a' d' = c' d'$; somit ist der Umriß des Grundrisses ein Quadrat.

2. Aufriß. $a d = a c = a' c'$ ($2 r$). Somit fällt $a d$ ($a'' d''$) um $\sqrt{a' c'^2 - a' d'^2} = \sqrt{4 r^2 - s_4^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 1 um s_4 . Demnach ist $H = s_4$.

Bei entsprechender Drehung des Grundrisses (Fig. 3) wird der Aufriß eine Kantenansicht.

*) Es ist immer die Seite des regulären einbeschriebenen Polygons des kleinsten im Grundrisse vorhandenen Kreises gemeint.

Der Sechsfächner oder Würfel (Hexaeder).

A. Flächenansicht (Fig. 4).

Dieselbe bietet nichts neues. $\mathbf{H} = \mathbf{s}_4$, weil die Verbindungsanten der oberen Ecken mit den unteren senkrecht stehen.

B. Eckenansicht (Fig. 5).

1. Grundriß. Sämtliche Kanten sind zur Projektionsebene gleich geneigt, haben daher gleiche Projektionen. Somit ist der Grundriß ein reguläres Sechseck.

2. Aufriß. $a e = b d = b' d'$. Demnach fällt $a e$ ($a'' e''$) um $\sqrt{b' d'^2 - a' e'^2} = \sqrt{s_4^2 - r^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 2 um s_4 . Es fällt somit $a b$ ($a'' b''$) um $\frac{s_4}{2}$, $b c$ ($b'' c''$) um $\frac{s_4}{2}$ und $e g$ ($e'' g''$) um $\frac{s_4}{2}$. Somit ist $\mathbf{H} = \frac{s_4}{2} + \frac{s_4}{2} + \frac{s_4}{2}$.

C. Kantenansicht (Fig. 6).

1. Grundriß. Da die beiden sichtbaren Flächen gleiche Neigung zur Projektionsebene haben, so ist $e e$ parallel zur Projektionsebene, also $e' e' = e e$. Es verhält sich $e e$, die Diagonale der Würfelkante, zur Würfelkante wie diese zur Hälfte jener Diagonale $= \sqrt{2} : 1$. Somit ist $b' e'$ ($b' e'$) $= \sqrt{\frac{a' b'^2}{2}}$ oder gleich s_4 , wenn $a' b'$ ($a b$) Durchmesser ist.

2. Aufriß. $b e = a b = a' b'$. Demnach fällt $b e$ ($b'' e''$) um $\sqrt{a' b'^2 - b' e'^2} = \sqrt{4 r^2 + s_4^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 1 um s_4 . Um ebensoviel fällt $e d$ ($e'' d''$). Somit ist $\mathbf{H} = \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_4$.

Bei entsprechender Drehung des Grundrisses wird der Aufriß in Fig. 4 u. 5 eine Kanten-, in Fig. 6 eine Kanten-, Ecken- oder Flächenansicht.

Der Achtfächner (Oktaeder).

A. Eckenansicht (Fig. 7).

1. Grundriß. Dieser bedarf keiner Erläuterung; die Viereckseite des Kreises ist gleich der Kante des Körpers.

2. Aufriß. $a b = b d = b' d'$. Demnach fällt $a b$ ($a'' b''$) um $\sqrt{b' d'^2 - a' b'^2} = \sqrt{s_4^2 - r^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 1 um r . Um ebensoviel fällt $b e$ ($b'' e''$). Somit ist $\mathbf{H} = \mathbf{r} + \mathbf{r}$.

B. Flächenansicht (Fig. 8).

1. Grundriß. Dieser wird bestimmt durch die beiden gleichseitigen Dreiecke, welche in entgegengesetztem Sinne um denselben Mittelpunkt liegen. Demnach ist der Grundriß ein reguläres Sechseck.

2. Aufriß. $b d = a b = a' b'$. Demnach fällt $b d$ ($b'' d''$) um $\sqrt{a' b'^2 - b' d'^2} = \sqrt{s_4^2 - r^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 2 um s_4 . Somit ist $\mathbf{H} = \mathbf{s}_4$.

C. Kantenansicht (Fig. 9).

1. Grundriß. Da die beiden sichtbaren Flächen gleiche Neigung zur Projektionsebene haben, so ist $e e$ parallel zur Projektionsebene, also $e' e' = e e$. Es verhält sich $e e$, die Eckenachse des Körpers, zur Kante, wie diese zur Hälfte jener Eckenachse $= \sqrt{2} : 1$. Somit ist $m' e'$ ($m' e'$) $= \sqrt{\frac{a' b'^2}{2}}$ oder gleich s_4 , wenn $a' b'$ ($a b$) Durchmesser ist.

2. Aufriß. $a e = a b = a' b'$. Demnach fällt $a e$ ($a'' e''$) um $\sqrt{a' b'^2 - a' e'^2} = \sqrt{4 r^2 - s_4^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 8 um r . Um ebensoviel fällt $e d$ ($e'' d''$). Somit ist $\mathbf{H} = \mathbf{r} + \mathbf{r}$.

Bei entsprechender Drehung des Grundrisses wird der Aufriß in Fig. 7 eine Ecken- oder eine Kantenansicht, in Fig. 8 eine Kanten- und in Fig. 9 eine Ecken-, Kanten- oder Flächenansicht.

Der Zwölfflächner (Dodekaeder).

A. Flächenansicht (Fig. 10).

1. Grundriß. Die beiden inneren Fünfecke des Risses haben denselben Mittelpunkt und liegen, wie am Körper selbst, in entgegengesetztem Sinne. Die Verbindungslinien zwischen den Ecken dieser Fünfecke und den Ecken des Umfassungszehnecks liegen radial und sind einander gleich; folglich ist der Umriß des Grundrisses ein reguläres Zehneck. Es ist daher zur Konstruktion nur das Verhältnis der Radien des inneren Fünf- und des äußeren Zehnecks zu ermitteln.

$a b = a' b'$; $c d = c' d'$. $a' b'$ ist Fünfeckseite des kleinen Kreises, und $c' d'$ ist Fünfeckseite des großen Kreises, zugleich auch Fünfecksdiagonale des kleinen Kreises. Da sich nun die Radien verhalten wie die Fünfeckseiten, so folgt: $o' d' : o' b' = o' b' : o' d' - o' b'$; d. h. $o' d'$ ist in b' stetig geteilt, und es verhält sich $R : r = r : R - r$.

Da die Zehneckseite gleich ist dem Major des stetig geteilten Radius, so wird es für die Praxis am einfachsten sein, nach der auf dem Wege des Probierens vollendeten Darstellung des äußeren Zehnecks, die Zehneckseite vom Mittelpunkte aus auf dem Radius abzutragen, um einen Punkt der inneren Kreisperipherie zu erlangen. Ist aber der innere Kreis der erste, so verlängert man dessen Radius um die leicht abzugreifende Zehneckseite des inneren Kreises.

2. Aufriß. $b d = a b = a' b'$. Demnach fällt $b d$ ($b' d'$) um $\sqrt{a' b'^2 - b' d'^2} = \sqrt{s_2^2 - s_{10}^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 3 um r .

$d e = a b = a' b'$. Demnach fällt $d e$ ($d' e'$) um $\sqrt{a' b'^2 - d' e'^2} = \sqrt{s_2^2 - r^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 3 um s_{10} .

$e f$ ($e' f'$) fällt wie $b d$ um r . Somit ist $H = r + s_{10} + r$.

B. Eckenansicht (Fig. 10.)

1. Grundriß. $c b = c' b'$. Demnach ist die Fünfecksdiagonale die Dreieckseite des inneren Kreises. Aus der Übereinstimmung der oberen und unteren Hälfte der Oberfläche erhellt, daß die fraglichen 12 Punkte des Grundrisses in einer Kreislinie um a' liegen.

e ist der Schnittpunkt der Diagonalen $c' m'$ und $b' d'$; somit ist $b' e = a' c'$. Da nun $a' c' = a' b'$, so ist $b' e = a' b'$; und da der Winkel $b' a' e = 60^\circ$, so ist das Dreieck $a' b' e$ ein gleichseitiges und $a' e = a' b'$. Der Schnittpunkt e der Diagonalen $c' m'$ und $b' d'$ liegt somit in der Peripherie des inneren Kreises.

Nach Maßgabe der Proportion $m' e : e' c = e' c' : m' e$ würde man somit die Sechseckseiten des inneren Kreises über beide Endpunkte hinaus um den Major des stetig geteilten Radius ($r = s_6$) zu verlängern haben, wodurch die 12 äußeren Punkte ermittelt wären.

Doch würde hiermit das Verhältnis der Radien noch nicht gefunden sein.

Ich verbinde daher d' mit a' , falle von a' das Lot auf $b' e'$; dessen Fußpunkt f' liegt in der Mitte von $e' b'$. Hierdurch entsteht ein Dreieck, das mit dem Dreieck Nr. 5 übereinstimmt. Demnach ist $a' d' = s_4$. Es ist also der Radius des äußeren Kreises gleich der Viereckseite des inneren oder: $R = s_4$.

2. Aufriß. $a d = b e = b' c'$. Demnach fällt $a d$ ($a' d'$) um $\sqrt{b' c'^2 - a' d'^2} = \sqrt{s_3^2 - s_4^2}$; d. i. nach Dreieck Nr. 2 um r .

Da v' , der Schnittpunkt der Diagonalen $a' d'$ und $b' e'$, mit e' gleich hoch liegt, so fällt $a c$ ($a' c'$) um den Minor von r , und $c d$ ($c' d'$) um den Major von r . Da nun der Körper von g (g'') bis o (o'') ebenfalls um den Major und Minor von r fällt, so handelt es sich nur noch um den Fall von $d g$ ($d' g''$).

Auch vom Zwanzigflächner ist zu sagen, daß bei entsprechender Drehung der Grundrisse die Aufrisse von Fig. 13 und 14 Kantenansichten werden, der von Fig. 15 aber in eine Ecken-, Flächen- oder Kantenansicht übergeht.

Am Schlusse meiner Arbeit angelangt, sei es mir gestattet, mit einigen Worten auf das Wesen und die Bedeutung des dargelegten Verfahrens zurückzuweisen.

Das Wesen des Verfahrens besteht darin, daß alle zur Herstellung sowohl des Grundrisses als auch des Aufrisses nötigen Größen nach dem Radius eines ersten Kreises bestimmt werden.

Die Bedeutung des Verfahrens liegt darin, daß dasselbe, gegenüber den bisher gebräuchlichen Verfahrensweisen, ein einheitliches und einfaches genannt werden kann, daß es ferner bei großer Kürze ein möglichst genaues Resultat sichert, und daß endlich jede Schranke der Lage des ersten Kreises zur Achse fällt und jeder charakteristische Riß als Originalprojektion gleich nahe liegt.

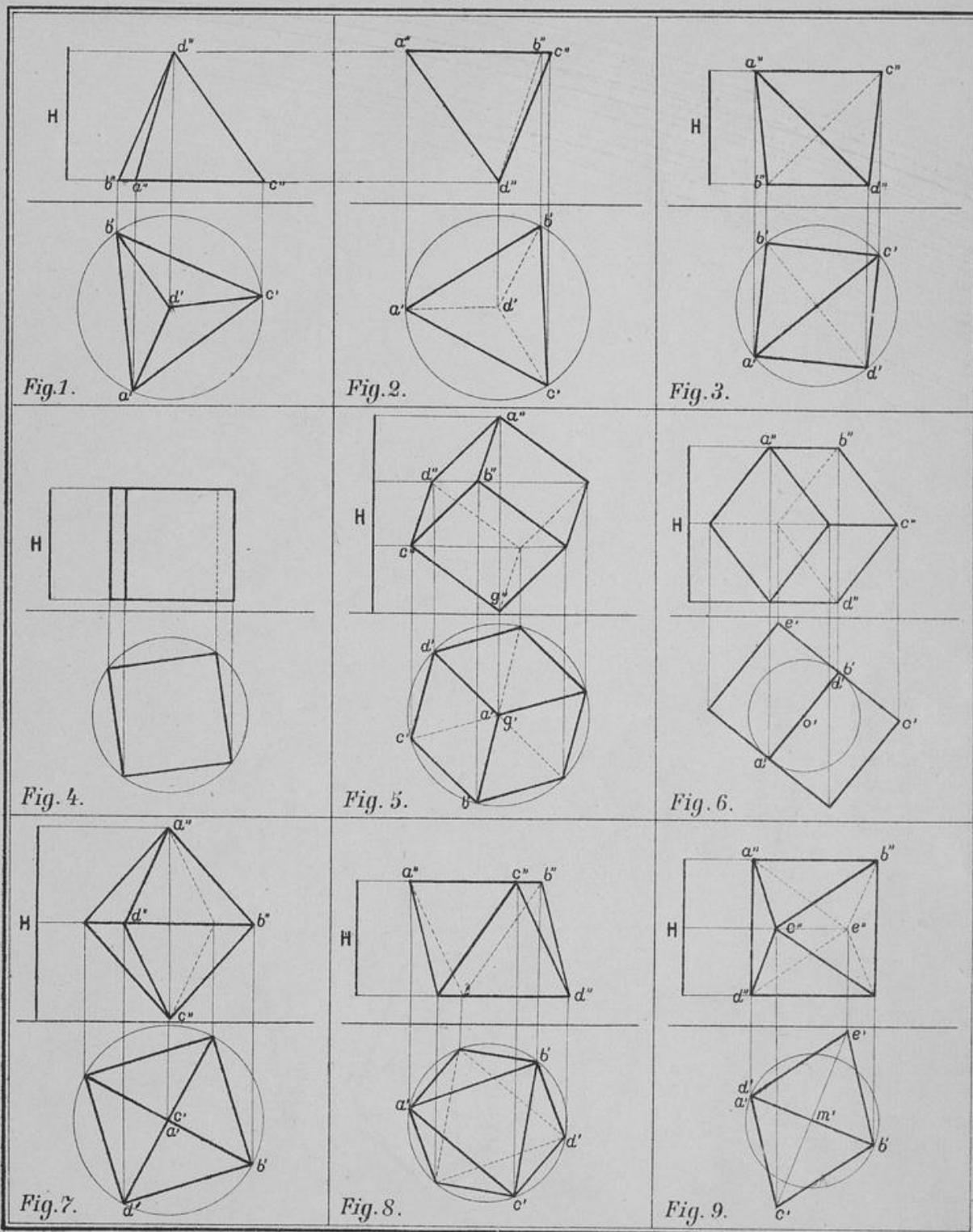
Diese Vorteile sind besonders da wertvoll, wo die Projektionen eines regulären Polyeders die Unterlage für Aufgaben aus höheren Abschnitten der Projektionslehre bilden.

[Faint, mostly illegible text and mathematical formulas follow, including a section header 'U. Hauptaufgabe' and various equations.]

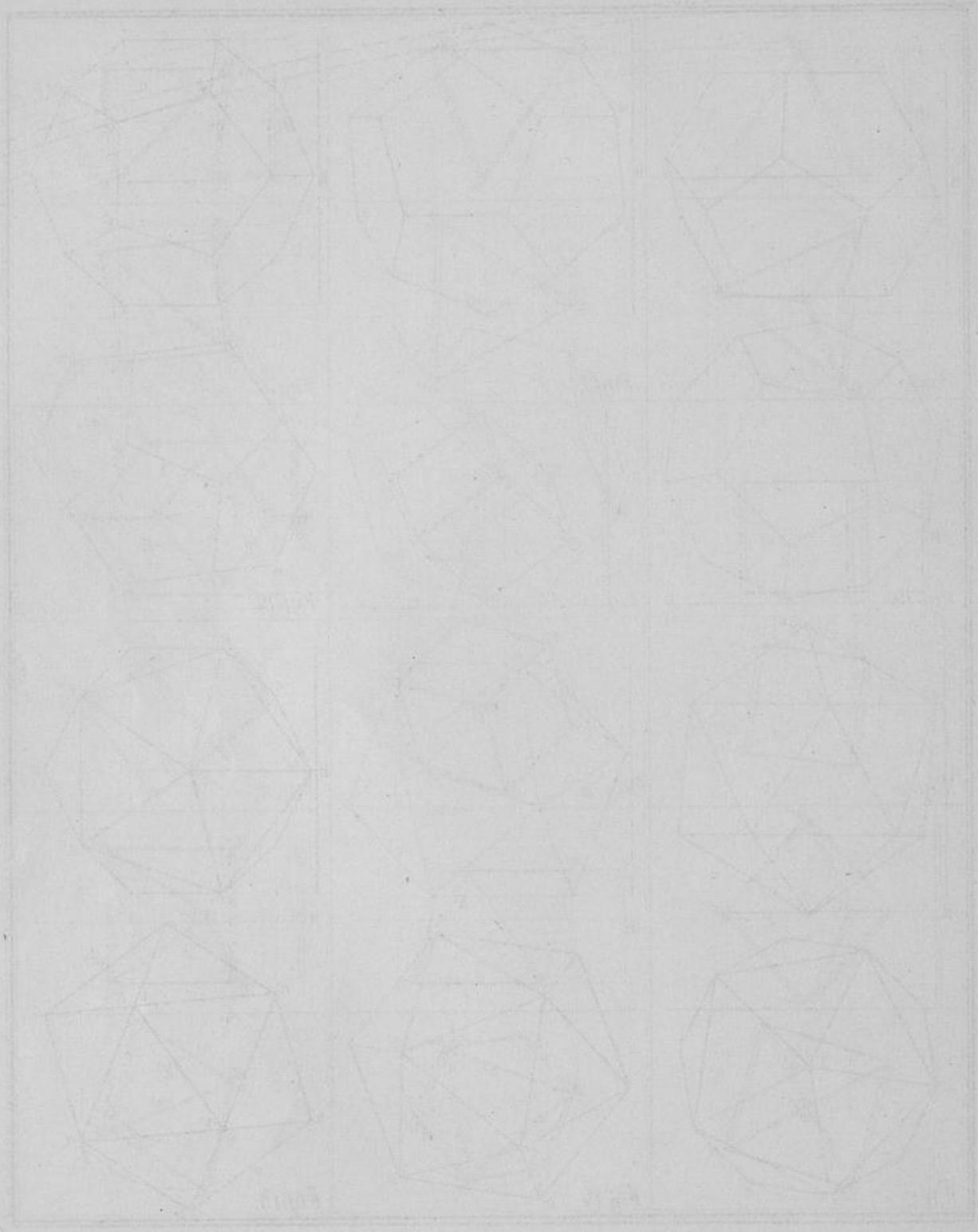
Table 1

The table contains several columns of diagrams and text. The diagrams are arranged in a grid-like fashion, with some rows containing multiple diagrams. The diagrams appear to be technical drawings or geometric constructions, possibly related to architecture or engineering. The text is too faint to read but likely provides labels or descriptions for the diagrams.

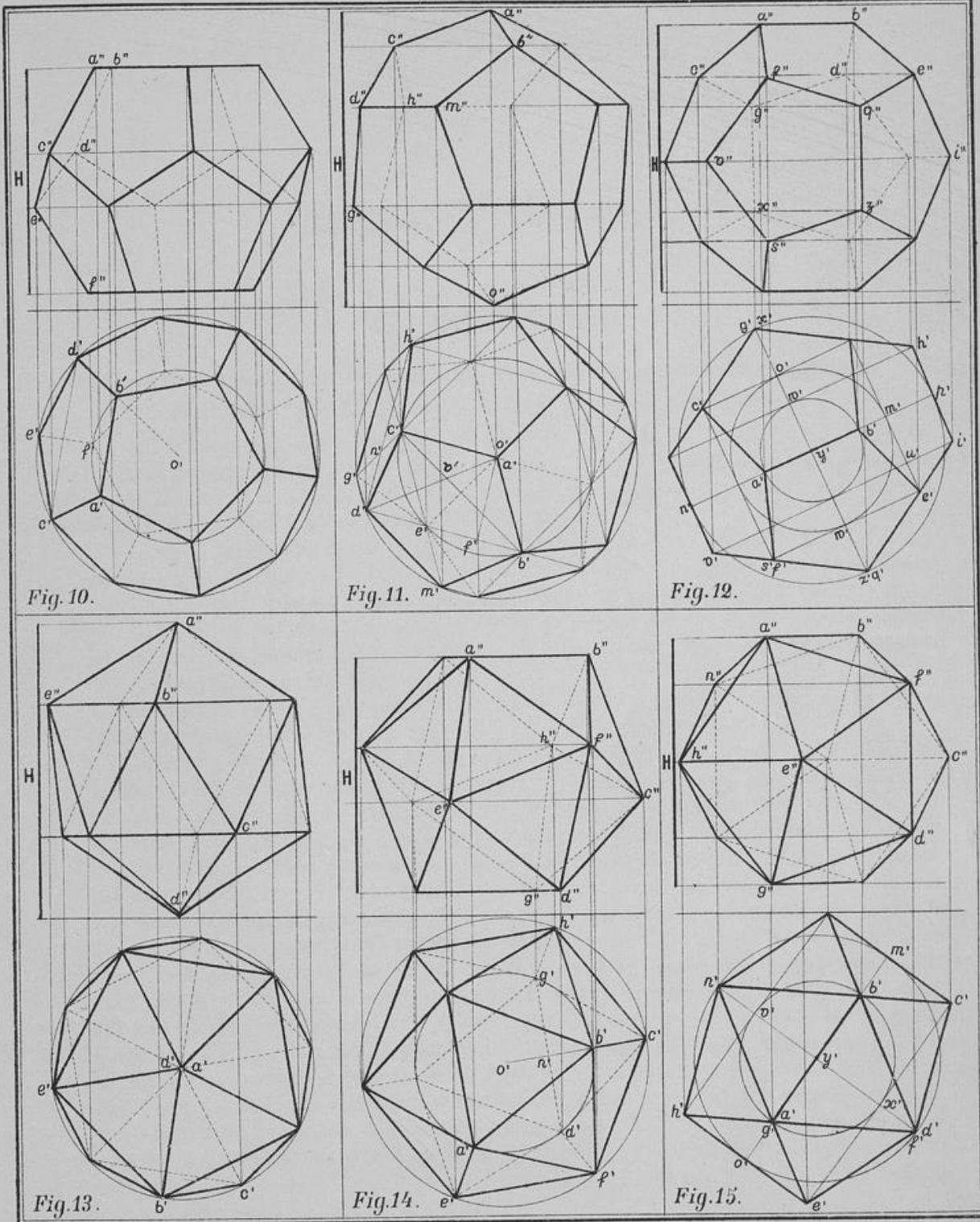
Tafel II.



Druck v. F. Unverzagt, Elberfeld.



Tafel III.



Druck v. F. Unverzagt, Elberfeld.

