Ueber die Anziehung eines homogenen Kugelabschnitts.

Im Folgenden werden Potential und Attraktions-Komponenten eines homogenen Kugelabschnitts*), sowie einer unendlich dünnen Schale desselben entwickelt, welche auf einen materiellen Punkt so wirken, daß die Anziehung proportional der Masse und umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung erfolgt.**)

Die Anziehung, welche homogen mit Masse erfüllte Körper auf einen materiellen Punkt ausüben, läßt sich in manchen Fällen dadurch bestimmen, daß man sie in unendlich dünne parallele Scheiben zerlegt, die Anziehung derselben berechnet und schließlich die Wirkungen aller Körperelemente summiert.

Für Körper mit kreisförmigem Querschnitt bietet einen brauchbaren Ausgangspunkt für die Rechnung ein Ausdruck, den E. Heine für das Potential eines Kreises (Borchardt's Journal Band 76 S. 271) aufgestellt hat. Derselbe wird auch für das Folgende die Grundlage sein.

§ 1.

Der Kugelabschnitt sei ein Stück der Kugel, deren Oberfläche in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

bestimmt wird. Die positive x Axe sei nach der gekrümmten Oberfläche des Abschnitts gerichtet und seine ebene Begrenzungsfläche habe von der yz Ebene den Abstand $x = h$. Der angezogene Punkt liege — was sich stets erreichen läßt — in der xy Ebene und habe die Koordinaten a und b. Die Dichtigkeit der den Kugelabschnitt homogen erfüllenden Masse werde als konstant und gleich 1 vorausgesetzt.

*) Auf anderem Wege löste Herr Grube diese Aufgabe in der umfassenderen Abhandlung „Über die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axe senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe“ (Zeitschrift füs Mathematik und Physik, Jahrgang XII).

**) Ist das Attraktionsgesetz ein anderes als das Newton'sche, so kann man ähnlich verfahren wie Herr Züge in seiner Inauguralschrift Halle 1875 „Über die Anziehung eines homogenen Ellipsoids“ S. 16 ff.

Wir zerlegen das Kugelsegment in zur y z Ebene parallele Kreisscheiben von der Dicke dx. Dann sind die Anziehungen, welche sie ausüben, zu summieren für alle Werte von x, welche zwischen den Grenzen h und r liegen.

Das Potential eines Kreises heißt nun nach Heine:

$$U = 2\varrho^2 \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{H^2}{s} - \frac{R^2}{s+\varrho^2}} \cdot \frac{ds}{(s+\varrho^2)\sqrt{s}},$$

wo ϱ den Radius des Kreises, H das Lot, von dem angezogenen Punkt auf die Ebene desselben gefällt, und R die Entfernung des Fußpunktes dieses Lotes von dem Mittelpunkt des Kreises bedeutet. s_0 ist die positive Wurzel der Gleichung

$$1 = \frac{H^2}{s} + \frac{R^2}{s+\varrho^2}.$$

Setzt man für s: $s\varrho^2$, wodurch sich auch s_0 entsprechend ändert, so läßt sich U in die Form bringen:

$$U = 2 \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{\varrho^2 s(s+1) - H^2(s+1) - R^2 s} \,.\, \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für eine Kreisscheibe, die im Abstande x von der y z Ebene aus dem Kugelabschnitt ausgeschnitten wird, ist

$$\varrho^2 = r^2 - x^2,\ H^2 = (x-a)^2,\ R^2 = b^2.$$

Nach Einsetzung dieser Werte ergiebt sich als Potential der Elementarscheibe:

$$U = 2\,dx \int_{s_0}^{\infty} \sqrt{(r^2 - x^2)\ s(s+1) - (x-a)^2\ (s+1) - b^2 s} \,.\, \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

s_0 bedeutet die positive Wurzel der Gleichung:

$$r^2 - x^2 = \frac{(x-a)^2}{s} + \frac{b^2}{s+1}$$

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck ist nach x vom 2. Grade und der Koeffizient von x ist stets negativ. Wir bezeichnen ihn mit:

$$u^2 = m + 2\,nx - p\,x^2.$$

Dann ist:

$$p = (s+1)^2, \qquad n = a(s+1), \qquad m = r^2 s(s+1) - s(a^2+b^2) - a^2$$

und für $s = s_0$ ist $u = o$.

Integriert man nun U zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = r$, so erhält man für das Potential des Kugelabschnitts

1) $$V = 2\int_h^r dx \int_{s_0}^{\infty} u \frac{ds}{s(s+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 2.

Die Reduktion des Doppelintegrals 1) auf ein einfaches bietet insofern einige Schwierigkeiten, als die Integration nach x, die leicht zu bewerkstelligen wäre, nicht ohne weiteres ausgeführt werden kann, da die untere Grenze s_0 von x nicht unabhängig ist. Um die Vertauschung der Integrationsfolge vornehmen zu können, zeichnen wir die Kurve $u = o$,*) (Siehe Fig. 1 und 2, Seite 4 und 5) bezogen auf s als Abscissen- und x als Ordinatenaxe. Dann ist die Integration über das Stück der durch die Kurve begrenzten Fläche zu erstrecken, welches zwischen den Parallelen zur s-Axe $x = h$ und $x = r$ liegt. Dabei kommt es nur darauf an, welchen Verlauf die Kurve für positive s annimmt. Aus $u = 0$ folgt:

$$s = \frac{(x-a)^2 + b^2}{2(r^2 - x^2)} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{(x-a)^2}{r^2 - x^2} + \left(\frac{(x-a)^2 + b^2}{2(r^2 - x^2)} - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Also für $x = \pm r$ ist $s = \infty$. An diesen Stellen erstreckt sich demnach die Kurve ins Unendliche. Schreibt man andererseits die Gleichung der Kurve gemäß den Bezeichnungen auf Seite 2 in der Form:

$$x = \frac{n}{p} \pm \sqrt{\frac{m p + n^2}{p^2}},$$

oder

$$x = \frac{a \pm \sqrt{s\,(r^2 (s+1) - a^2 - b^2)}}{s+1},$$

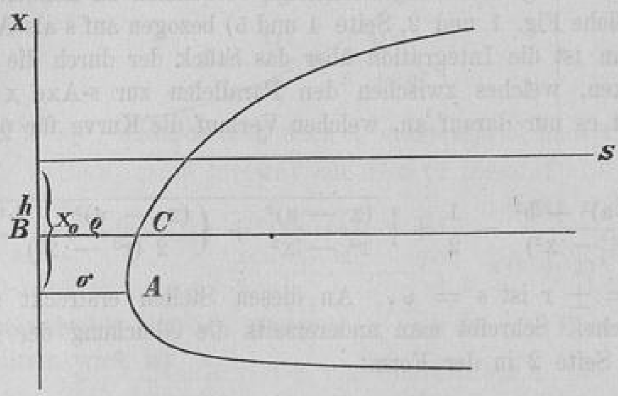
so sieht man, daß es für jeden Wert von s 2 Werte für x giebt, außer wenn $m\,p + n^2$ verschwindet. Dies tritt ein für $s = o$, bez. $s = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{r^2}$. Den letzteren Wert s bezeichnen wir mit σ. Und zwar ist, wenn der angezogene Punkt im Innern oder auf der Begrenzung der Kugel liegt, von welcher der Abschnitt ein Teil ist, das Minimum durch $s = o$, $x = a$ bestimmt. Denn dann ist $r^2 \geqq a^2 + b^2$ und $r^2(s+1) - a^2 - b^2$ würde nur für ein negatives s, bez. für $s = o$ zu o. Liegt der angezogene Punkt außerhalb der vollen Kugel, wo $r^2 < a^2 + b^2$, so ergeben sich erst reelle Werte für x von $s = \sigma$ an. Dann tritt das Minimum ein in $s = \sigma$, $x = \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, welchen Wert wir x_0 bezeichnen.

*) Vergleiche H. Züge a. a. O. S. 11.

Soll nun die Integration in 1) zuerst nach s ausgeführt werden, so ist für ein konstantes x nach s zu integrieren von dem aus $u = o$ resultierenden Wert $s = s_0$ bis $s = \infty$. Soll aber erst nach x summiert werden, so ist für ein konstantes s nach x zu integrieren von $x = h$ bis $x = x_2$, dem größeren der beiden Werte x_1 und x_2, die sich für das bestimmte s aus $u = o$ ergeben und darauf von $s = \varrho$ bis $s = \infty$. Hier ist mit ϱ der positive Wert von s bezeichnet, der sich aus $u = o$ für $x = h$ ergiebt. ϱ ist also die positive Wurzel der Gleichung

$$r^2 - h^2 = \frac{(h-a)^2}{s} + \frac{b^2}{s+1},$$

und zwar ist $\varrho > \sigma$.



(Fig. 1.)

Es ist zu unterscheiden, ob der Punkt $s = \varrho$, $x = h$ der Kurve $u = o$, C, oberhalb oder unterhalb des Minimums A, $s = \sigma$, $x = x_0$, liegt, d. h. ob $h \gtrless \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$ (Fig 1 u. 2.)

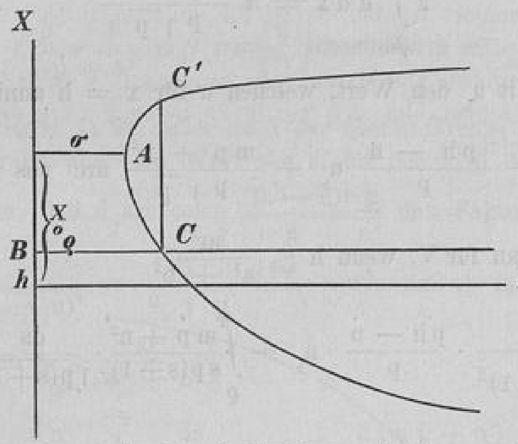
$$\text{I.} \quad h > \frac{ar^2}{a^2 + b^2} \quad \text{(Fig. 1.)}$$

Die Integration ist über das Stück der Kurvenfläche zu erstrecken, welches oberhalb der Geraden B C liegt. Demnach ist

$$\text{2)} \qquad V = 2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}} \int_{h}^{x_2} u\,d\,x$$

Diese Formel gilt auch, wenn $h = \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$. Nur geht dann ϱ in σ über.

II. $h < \dfrac{ar^2}{a^2 + b^2}$ (Fig. 2.)



(Fig. 2.)

Dann tritt zu dem Integral 2) noch das Integral hinzu, welches von der Integration über C A C[1] herrührt, nämlich

$$2\int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}} \int_{x_1}^{x_2} u\,d\,x.$$

Erweitert sich der Kugelabschnitt zur vollen Kugel, so ist $h = -r$, $\varrho = \infty$. Die Integration ist über die ganze Kurvenfläche zu erstrecken. Das Potential heißt dann:

$$V = 2\int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}} \int_{x_1}^{x_2} u\,d\,x\,.$$

Die bisherigen Erörterungen gelten für äußere Lagen des angezogenen Punktes, für innere Lagen ist überall $\sigma = 0$ zu setzen. Sonst ändert sich nichts.

Nun ist

$$2\int u\,d\,x = \frac{p\,x - n}{p}\,u - \frac{m\,p + n^2}{p\sqrt{p}} \text{ arc cos } \frac{p\,x - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}\,.$$

Ist zwischen den Grenzen x_1 und x_2 zu integrieren, so verschwindet der erste Ausdruck auf der rechten Seite. Denn x_1 und x_2 sind die Wurzeln der Gleichung $u = 0$. Sodann ist:

$$p\,x_1 - n = -\sqrt{m\,p + n^2}\,,\ p\,x_2 - n = +\sqrt{m\,p + n^2}$$

Daher ist:

$$\Big|_{x_1}^{x_2} \text{ arc cos } \frac{p\,x - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = -\pi$$

und

$$2\int_{x_1}^{x_2} u\,dx = \pi\,\frac{m\,p + n^2}{p\sqrt{p}}$$

Bezeichnet man noch mit u_h den Wert, welchen u für $x = h$ annimmt, so ist:

$$2\int_{h}^{x_2} u\,dx = -\frac{p\,h - n}{p}\,u_h + \frac{m\,p + n^2}{p\sqrt{p}}\arccos\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}.$$

Hiernach findet man für V, wenn $h \leqq \dfrac{ar^2}{a^2 + b^2}$

3) $$V = -\int_{\varrho}^{\infty}\frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{p\,h - n}{p}\cdot u_h + \int_{\varrho}^{\infty}\frac{m\,p + n^2}{s\,p(s+1)}\cdot\frac{ds}{\sqrt{p(s+1)}}\arccos\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}},$$

oder da

$$\frac{p\,h - n}{p} = \frac{h\,(s+1) - a}{s+1}$$

$$\frac{m\,p + n^2}{p\sqrt{p}} = \frac{r^2\,s\,(s+1) - s\,(a^2 + b^2)}{s+1}$$

$$\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = \frac{h\,(s+1) - a}{\sqrt{r^2\,s\,(s+1) - s\,(a^2 + b^2)}},$$

$$V = -\int_{\varrho}^{\infty}\frac{h\,(s+1) - a}{s\,(s+1)^2\sqrt{s+1}}\cdot u_h\,ds + \int_{\varrho}^{\infty}\frac{r^2(s+1) - a^2 - b^2}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}\arccos\frac{h\,(s+1) - a}{\sqrt{r^2 s(s+1) - s(a^2+b^2)}}\,ds\,.$$

Ist $h < \dfrac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so tritt zu V noch hinzu:

4) $$\pi\int_{\sigma}^{\varrho}\frac{m\,p + n^2}{s\,p\,(s+1)}\cdot\frac{ds}{\sqrt{p\,(s+1)}} = \pi\int_{\sigma}^{\varrho}\frac{r^2\,(s+1) - a^2 - b^2}{(s+1)^2\sqrt{s+1}}\,ds\,.$$

Überall ist $\sigma = 0$, bez. $\sigma = \dfrac{a^2 + b^2 - r^2}{r^2}$ zu nehmen, je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder außerhalb der Vollkugel liegt.

§ 3.

Durch Differentiation der Integrale 3) und 4) nach einer der Koordinaten k des angezogenen Punktes erhält man die Attraktionskomponenten nach der betr. Axe. Da die untere Grenze ϱ von k abhängig ist, so ist zunächst nach ϱ zu differenzieren. Nun wird für $s = \varrho$ stets $u_h = 0$, aber $p\,h - n$ entweder $+\sqrt{m\,p + n^2}$ oder $-\sqrt{m\,p + n^2}$, je nachdem der Punkt $s = \varrho$, $x = h$ der Kurve $u = o$ oberhalb oder unterhalb des Minimums liegt. Demnach wird

$$\arc\cos \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}_{s = \varrho} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \text{jenachdem } h \gtrless \frac{ar^2}{a^2 + b^2}.$$

In dem Zusatzintegral 4) ist außer nach der oberen Grenze ϱ auch nach der unteren σ zu differenzieren. σ ist aber der Wert von s, für den $m\,p + n^2$ verschwindet. Berücksichtigt man ferner, daß $d \arc\cos \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}$ den Faktor

$\frac{1}{\sqrt{m\,p + n^2 - (p\,h - n)^2}} = \frac{1}{u_h \sqrt{p}}$ hat, sowie daß p in Bezug auf k konstant ist, so findet man, wenn $h > \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$

$$\frac{d\,V}{d\,k} = 2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{u_h}{p} \cdot \frac{d\,n}{d\,k} + \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{s\,(s+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} \frac{d\,(m\,p + n^2)}{d\,k} \arc\cos \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}.$$

Wenn $h < \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so tritt noch hinzu

$$\pi \int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{s\,(s + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{p\sqrt{p}} \cdot \frac{d\,(m\,p + n^2)}{d\,k}.$$

Wenn $h = \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so wird $\varrho = \sigma$. Dann verschwindet wieder der Betrag, der von der Differentiation nach der unteren Grenze $\varrho = \sigma$ herrührt. Denn in diesem Falle ist $\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = o$, also der arc cos $= \frac{\pi}{2}$, aber $\frac{m\,p + n^2}{p} = o$. Also lautet der Ausdruck für V ebenso wie im ersten Falle.

Da nun $\frac{d\,n}{d\,a} = s + 1 = \sqrt{p}$, $\frac{d\,n}{d\,b} = o$,

$$\frac{1}{p} \frac{d\,(m\,p + n^2)}{d\,a} = -2\,a\,s, \quad \frac{1}{p} \frac{d\,(m\,p + n^2)}{d\,b} = -2\,b\,s,$$

so ergeben sich für die Komponenten der Anziehung X und Y die Ausdrücke:

$$5)\qquad X = 2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{s\,(s + 1)^2 \sqrt{s + 1}}\, u_h - 2\,a \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s + 1)^2 \sqrt{s + 1}} \arc\cos. \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}$$

$$6)\qquad Y = -2\,b \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s + 1)^2 \sqrt{s + 1}} \arc\cos \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}}.$$

Wenn $h < \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so ist hinzuzufügen:

$$- 2 a \pi \int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{(s+1)^2 \sqrt{s+1}} \text{ bez. } - 2 b \pi \int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{(s+1)^2 \sqrt{s+1}} .$$

Für eine Vollkugel ist $\varrho = \infty$. Dann ergeben sich für die Komponenten die bekannten Werte: bei äußerer Lage des angezogenen Punktes

$$X = - \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi . a}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}, \quad Y = - \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi . b}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}},$$

bei innerer Lage:

$$X = - \frac{4}{3} a \pi, \quad Y = - \frac{4}{3} b \pi .$$

§ 4.

Differenziert man das Potential des Kugelabschnitts (§ 2, 3 u. 4) nach r, so erhält man das Potential einer unendlich dünnen Schale des Segments. Auch hier gilt das im § 3 über die Differentiation nach ϱ und σ gesagte. Von den Größen m, n, p ist nur m von r abhängig und $\frac{dm}{dr} = 2 r s \sqrt{p}$. Man findet

$$7) \qquad V^* = 2 r d r \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1) \sqrt{s+1}} \arccos \frac{p h - n}{\sqrt{m p + n^2}},$$

wozu, wenn $h < \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, hinzutritt:

$$2 \, r \pi dr \int_{\sigma}^{\varrho} \frac{ds}{(s+1) \sqrt{s+1}} .$$

Die Komponenten der Anziehung bestimmen sich demnach folgendermaßen: wenn $h > \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, erhält man:

$$8) \quad X^* = 2 r d r \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1) \sqrt{s+1}} \cdot \frac{1}{u_h} - 2 a r d r \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1) \sqrt{s+1}} \cdot \frac{h (s+1) - a}{r^2 (s+1) - a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{u_h}$$

$$9) \qquad Y^* = - 2 b r d r \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1) \sqrt{s+1}} \cdot \frac{h (s+1) - a}{r^2 (s+1) - a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{u_h} .$$

Ist $h < \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so kommt zu X^* hinzu:

$$\frac{2\, r\, \pi\, d\, r}{(\sigma + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\,\sigma}{d\,a} = - \frac{4\, r^2\, \pi\, dr\, a}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Der entsprechende Zusatz für Y^* lautet

$$- \frac{4\, r^2\, \pi\, dr\, b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn aber $h = \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$, so geht ϱ in σ über. Für $s = \sigma$ wird $\arccos \frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = \frac{\pi}{2}$. Es ist daher zu X^* und Y^* im ersten Falle noch der Betrag hinzuzufügen, der von der Differentiation des Integrals 7) nach der unteren Grenze σ herrührt, also zu X^*

$$- \frac{\pi}{2}\, 2\, r\, d\, r \frac{1}{(\sigma + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\,\sigma}{d\,a} = - \frac{2\, r^2\, \pi\, dr\, .\, a}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{zu } Y^* - \frac{2\, r^2\, \pi\, dr\, b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Alle bei der Anziehung des Kugelabschnitts oder der Schale in Betracht kommenden Integrale sind elliptische, oder lassen sich durch partielle Integration auf solche zurückführen. Betreffs der weiteren Reduktion sei auf Grube (a. a. O.) verwiesen. Bequemer scheint die Reduktion auf σ Funktionen. Die darauf bezüglichen Entwickelungen stimmen in den meisten Fällen mit denen überein, die vom Verf. in seiner Inauguralschrift „über die Anziehung eines homogenen schiefen Kreiscylinders" Jena 1885 angegeben sind — wie denn überhaupt die Anziehung von Körperstumpfen, die von parallelen Kreisen und Flächen 2. Grades begrenzt sind, sich ähnlich wie hier beim Kugelabschnitt behandeln läßt.

§ 5.

Die entwickelten Integrale vereinfachen sich, wenn $h = \frac{ar^2}{a^2 + b^2}$ angenommen wird. Speciell wird

$$\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = \frac{ar^2}{a^2 + b^2} \sqrt{1 - \frac{\sigma}{s}} = \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{\sigma}{s}},$$

$$\text{wo } \sigma = \frac{a - h}{h},$$

$$u^2_h = (r^2 - h^2)\,(s - \sigma) \left(s + \frac{h^2\, \sigma}{r^2 - h^2}\right),$$

$$\frac{h\,(s + 1) - a}{r^2\,(s + 1) - a^2 - b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Am einfachsten gestalten sich die Ausdrücke für X* und Y* (S. 8.)

$$X^* = 2\,r\,dr\ \frac{b^2}{a^2 + b^2} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1)^{\frac{3}{2}}\ u_h} \cdot$$

$$Y^* = -\ 2\,r\,dr\ \frac{ab}{a^2 + b^2} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+1)^{\frac{3}{2}}\ u_h} \cdot$$

Liegt der angezogene Punkt auf dem Rande des Kugelabschnitts, d. h. ist $a^2 + b^2 = r^2$, $h = a$, also $\sigma = o$, so ist $\frac{p\,h - n}{\sqrt{m\,p + n^2}} = \frac{a}{r}$, $u_h = b\,s$ und für X und Y (S. 7.) ergeben sich die von Herrn Grube (a. a. O.) aufgestellten Ausdrücke

$$X = \frac{4}{3}\,b - \frac{4}{3}\,a.\,\text{arc cos}\,\frac{a}{r}$$

$$Y = -\ \frac{4}{3}\,b.\,\text{arc cos}\,\frac{a}{r} \cdot$$

Liegt der angezogene Punkt so, daß $h = \frac{a\,r^2}{a^2 + b^2}$ und $b = o$, also $h = \frac{r^2}{a}$ ist, d. h. daß der Kugelabschnitt den von dem Punkte aus sichtbaren Theil der Vollkugel bildet, so wird $\sigma = \frac{a^2 - r^2}{r^2}$, $u_h^2 = \frac{r^2\,(a^2 - r^2)}{r^2}\,(s - \sigma)\,(s + 1)$

$$\frac{h\,(s+1) - a}{r^2\,(s+1) - b^2 - b^2} = \frac{1}{a}$$

X^* reduziert sich auf das Zusatzintegral $\frac{-\,2\,r^2\,\pi\,dr}{a^2}$. Die Kraft, mit der die volle Kugelschale den Punkt anzieht, wird ausgedrückt durch $-\ \frac{4\,r\,\pi^2\,dr}{a^2}$. Es bestätigt sich also die von Herrn Schellbach (Zeitschr. für d. phys. und chem. Unterricht III Jahrg. S. 76) gemachte Bemerkung, daß der von dem Punkt aus sichtbare Teil der Kugelschale denselben ebenso stark anzieht als der unsichtbare.

C. Ibrügger.