# Vorrede.

Hat man aus einem Puncte in der Ebene eines gegebenen Dreiecks auf die Seiten desselben Senkrechte gefällt, und die positive und negative Richtung derselben bestimmt, so lässt sich für die 3 Senkrechten mit Leichtigkeit eine Gleichung ersten Grades bestimmen, welche §. 5 näher betrachtet werden wird. Tritt nun hierzu noch die Bedingung, dass die Entfernungssumme eine constante Grösse sein soll, so ergiebt sich aus beiden Gleichungen eine Gleichung ersten Grades mit 2 unbekannten Grössen, wodurch bekanntlich ausgedrückt wird, dass alle Puncte mit gleicher Entfernungssumme in einer Graden liegen. Da aber bei Veränderung der Constanten die neue Gleichung von der vorigen sich nur um eine constante Grösse unterscheidet, so wird durch dieselbe eine der früheren Graden parallele Linie ausgedrückt, vorausgesetzt dass man die Bestimmung für die Positivität und Negativität der Senkrechten festhält. Aendert man die Bestimmung über Positivität und Negativität der Senkrechten, was scheinbar 7mal, in Wirklichkeit aber nur 3mal geschehen kann, so ändert sich die Lage der Graden und ihrer Parallelen. Die Hauptlinie eines jeden dieser 4 Complexe paralleler Linien ist aber offenbar diejenige, deren Entfernungssumme $= 0$ ist. Diese 4 Linien sollen kurz Nulllinien genannt werden, und ihre Betrachtung ist Zweck des Programms.

# Vorbemerkung.

Das zu betrachtende Dreieck soll ABC heissen, der Flächeninhalt desselben $\Delta$, die Seiten in absteigender Grösse a, b, c, die Höhen bezüglich $h_1, h_2, h_3$, der Mittelpunct und Radius des umschriebenen Kreises M und r, die Mittelpuncte und Radien des innern und der äussern zu a, b, c gehörenden Berührungskreise $O_{(1, 2, 3)}$ und $\varrho_{(1, 2, 3)}$, $MO_{(1, 2, 3)}$ oder die Excentricitäten der Berührungskreise $e_{(1, 2, 3)}$, die Durchschnittspuncte der äusseren resp. inneren Halbirungslinien von $\measuredangle$ A, B, C mit den Gegenseiten $U_{(1)}$, $V_{(1)}$, $W_{(1)}$ und mit der Peripherie des umschriebenen Kreises $K_{(1)}$, $L_{(1)}$, $N_{(1)}$, die Puncte, welche durch Darstellung der Ausdrücke $b \mp a$, $c \mp a$, $a \mp b$, $c \mp b$, $a \mp c$, $b \mp c$ entstanden sind, indem man die nachstehende Seite auf der voranstehenden oder ihrer Verlängerung über den gemeinsamen Endpunct von diesem aus abgeschlagen hat, resp. $D_{(1)}$, $E_{(1)}$, $F_{(1)}$, $G_{(1)}$, $H_{(1)}$, $J_{(1)}$.

# Einleitung.

§. 1. Hat man in einer graden Linie 3 Puncte, durch welche Parallelen bis zu einer zweiten Graden gezogen sind, und bezeichnet man das Product aus der Entfernung zweier Puncte und aus der Parallelen durch den dritten Punct als „Moment" dieses Punctes, so ist das Moment des inneren Punctes gleich der Summe der Momente der beiden äusseren, vorausgesetzt dass man die auf der einen Seite der zweiten Graden befindlichen Parallelen positiv und die auf der andern Seite befindlichen negativ nimmt.

Die Richtigkeit ergiebt sich mit Leichtigkeit aus der Aehnlichkeit derjenigen Dreiecke, welche entstehen, wenn man durch den Fusspunct einer der 3 Parallelen eine zu der ersten Graden parallele Linie legt, welche die beiden andern Parallelen schneidet.

Anm. Da die Gleichung durch das grösste gemeinsame Mass der Entfernungen der 3 Puncte dividirt werden kann, so dürfen an Stelle der Entfernungen ihre Verhältnisszahlen gesetzt werden.

Hieraus ergiebt sich, wenn $S'$, $S''$, $S'''$ die aus A, B, C auf eine beliebige Grade gefällten Senkrechten, und d vor dem eingeklammerten Buchstaben eines in der Vorbemerkung genannten Punctes die Entfernung dieses Punctes von der beliebig angenommenen Graden bezeichnet:

$$1. \quad \begin{aligned} &\alpha)\ d(U_1) = \frac{2\Delta}{b+c}\left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right),\ d(V_1) = \frac{2\Delta}{a+c}\left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3}\right),\ d(W_1) = \frac{2\Delta}{a+b}\left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2}\right) \\ &\beta)\ d(U) = \frac{2\Delta}{b-c}\left(\frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right),\ d(V) = \frac{2\Delta}{a-c}\left(\frac{S'}{h_1} - \frac{S'''}{h_3}\right),\ d(W) = \frac{2\Delta}{a-b}\left(\frac{S'}{h_1} - \frac{S''}{h_2}\right) \end{aligned}$$

Denn da die inneren und äusseren Winkelhalbirenden die Gegenseite resp. innerlich und äusserlich im Verhältnisse der beiden andern Seiten schneiden, so ist

$$d(U_1) = \frac{b.S''+c.S'''}{b+c},\ d(V_1) = \frac{a.S'+c.S'''}{a+c},\ d(W_1) = \frac{a.S'+bS''}{a+b} \text{ und}$$

$$d(U) = \frac{b.S''-c.S'''}{b-c},\ d(V) = \frac{a.S'-c.S'''}{a-c},\ d(W) = \frac{a.S'-bS''}{a-b}, \text{ woraus}$$

sich die Behauptung sogleich ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass $2\Delta = a.h_1 = b.h_2 = c.h_3$ ist.

$$2. \quad \begin{aligned} &d(O) = \varrho\left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right),\ d(O_1) = \varrho_1\left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S'}{h_1}\right), \\ &d(O_2) = \varrho_2\left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S''}{h_2}\right),\ d(O_3) = \varrho_3\left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right). \end{aligned}$$

Denn sieht man eine Winkelhalbirende als vom Scheitel und der Gegenseite begrenzt an, so wird jede innere Halbirungslinie vom Scheitel aus durch den Mittelpunct des inneren und des einen äusseren Berührungskreises resp. innerlich und äusserlich im Verhältnisse der Summe der beiden den halbirten Winkel einschliessenden Seiten zur Gegenseite getheilt, daher ist

$$d(O) = \frac{a \cdot S' + (b+c) \cdot d(U_1)}{a+b+c} \text{ und } d(O_1) = \frac{(b+c) \cdot d(U_1) - a \cdot S'}{b+c-a}$$ und, wenn man

den in 1) sich ergebenden ursprünglichen Ausdruck für $d(U_1)$ einsetzt,

$$d(O) = \frac{a \cdot S' + b \cdot S'' + c \cdot S'''}{a+b+c},\ d(O_1) = \frac{b \cdot S'' + c \cdot S''' - a \cdot S'}{b+c-a},$$ woraus sich die

Richtigkeit für die beiden ersten und in derselben Weise für die beiden anderen Behauptungen ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass

$$2\Delta = (a+b+c) \cdot \varrho = (b+c-a) \cdot \varrho_1 = (a+c-b) \cdot \varrho_2 = (a+b-c) \cdot \varrho_3 \text{ ist.}$$

3.

$$\alpha) \begin{cases} d(K_1) = \tfrac{1}{2} \varrho \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_1 \left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S'}{h_1}\right) \\ d(L_1) = \tfrac{1}{2} \varrho \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_2 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S''}{h_2}\right) \\ d(N_1) = \tfrac{1}{2} \varrho \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_3 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right) \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} d(K) = \tfrac{1}{2} \varrho_2 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S''}{h_2}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_3 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right) \\ d(L) = \tfrac{1}{2} \varrho_1 \left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S'}{h_1}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_3 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right) \\ d(N) = \tfrac{1}{2} \varrho_1 \left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S'}{h_1}\right) + \tfrac{1}{2} \varrho_2 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S''}{h_2}\right) \end{cases}$$

Denn da bekanntlich $K_1$ und $K$ in der Mitte von $OO_1$ und $O_2O_3$ liegen, so ist $d(K_1) = \tfrac{1}{2}[d(O) + d(O_1)]$ und $d(K) = \tfrac{1}{2}[d(O_2) + d(O_3)]$, woraus sich mit Hülfe vom 2. die Behauptung ergiebt.

Anm. Setzt man $S' = h_1$ und $S''$, so wie $S''' = 0$, d. h. bestimmt man die Seite a als die bisher beliebig angenommene Grade, so ergiebt sich $d(K_1) = \tfrac{1}{2}\varrho - \tfrac{1}{2}\varrho_1$ und $d(K) = \tfrac{1}{2}\varrho_2 + \tfrac{1}{2}\varrho_3$. Nun liegen aber $d(K_1)$ und $S'$ auf verschiedenen Seiten von a, also ist $d(K_1)$ negativ, wie auch schon daraus erkannt wird, dass $\varrho_1 > \varrho$ ist, weshalb der absolute Werth von $d(K_1) = \tfrac{1}{2}\varrho_1 - \tfrac{1}{2}\varrho$ ist. Da aber die Summe der absoluten von $d(K_1)$ und $d(K)$, wie leicht einzusehen, gleich dem Durchmesser des umschriebenen Kreises ist, so ergiebt sich $\tfrac{1}{2}\varrho_1 - \tfrac{1}{2}\varrho + \tfrac{1}{2}\varrho_2 + \tfrac{1}{2}\varrho_3 = 2r$ oder $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 4r + \varrho$.

$$4.\quad d(M) = \tfrac{1}{4}\varrho \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3}\right) + \tfrac{1}{4}\varrho_1 \left(\frac{S''}{h_2} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S'}{h_1}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\varrho_2 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S'''}{h_3} - \frac{S''}{h_2}\right) + \tfrac{1}{4}\varrho_3 \left(\frac{S'}{h_1} + \frac{S''}{h_2} - \frac{S'''}{h_3}\right)$$

Denn da $K$ und $K_1$ einander diametral gegenüber liegen, so ist $d(M) = \tfrac{1}{2}[d(K) + d(K_1)]$, woraus mit Hülfe von 3. die Behauptung folgt.

Anm. Werden $S'$, $S''$, $S'''$ der Reihe nach der entsprechenden Höhe und die beiden andern der Null gleich gesetzt, dann erhält man die Entfernungen des Mittelpuncts M von den Seiten a, b, c so, wie folgt, $\tfrac{1}{4}\varrho - \tfrac{1}{4}\varrho_1 + \tfrac{1}{4}\varrho_2 + \tfrac{1}{4}\varrho_3$, $\tfrac{1}{4}\varrho + \tfrac{1}{4}\varrho_1 - \tfrac{1}{4}\varrho_2 + \tfrac{1}{4}\varrho^3$, $\tfrac{1}{4}\varrho + \tfrac{1}{4}\varrho_1 + \tfrac{1}{4}\varrho_2 - \tfrac{1}{4}\varrho_3$. Daraus ergiebt sich für M als Entfernungssumme von den 3 Seiten $\tfrac{3}{4}\varrho + \tfrac{1}{4}\varrho_1 + \tfrac{1}{4}\varrho_2 + \tfrac{1}{4}\varrho_3$ oder $r + \varrho$ zufolge Anm. zu 3.

5. α)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&1.\quad d(D) = \left[(b-a)\,.\,\frac{S'''}{h_3} + c\,.\,\frac{S'}{h_1}\right].\sin A\\
&2.\quad d(E) = \left[(c-a)\,.\,\frac{S''}{h_2} + b\,.\,\frac{S'}{h_1}\right].\sin A\\
&3.\quad d(F) = \left[(a-b)\,.\,\frac{S'''}{h_3} + c\,.\,\frac{S''}{h_2}\right].\sin B\\
&4.\quad d(G) = \left[(c-b)\,.\,\frac{S'}{h_1} + a\,.\,\frac{S''}{h_2}\right].\sin B\\
&5.\quad d(H) = \left[(a-c)\,.\,\frac{S''}{h_2} + b\,.\,\frac{S'''}{h_3}\right].\sin C\\
&6.\quad d(J) = \left[(b-c)\,.\,\frac{S'}{h_1} + a\,.\,\frac{S'''}{h_3}\right].\sin C
\end{aligned}
\right.
$$

β)

$$
\left\{
\begin{aligned}
&1.\quad d(D_1) = \left[(b+a)\,.\,\frac{S'''}{h_3} - c\,.\,\frac{S'}{h_1}\right].\sin A\\
&2.\quad d(E_1) = \left[(c+a)\,.\,\frac{S''}{h_2} - b\,.\,\frac{S'}{h_1}\right].\sin A\\
&3.\quad d(F_1) = \left[(a+b)\,.\,\frac{S'''}{h_3} - c\,.\,\frac{S''}{h_2}\right].\sin B\\
&4.\quad d(G_1) = \left[(c+b)\,.\,\frac{S'}{h_1} - a\,.\,\frac{S''}{h_2}\right].\sin B\\
&5.\quad d(H_1) = \left[(a+c)\,.\,\frac{S''}{h_2} - b\,.\,\frac{S'''}{h_3}\right].\sin C\\
&6.\quad d(J_1) = \left[(b+c)\,.\,\frac{S'}{h_1} - a\,.\,\frac{S'''}{h_3}\right].\sin C
\end{aligned}
\right.
$$

Zufolge der Vorbemerkung ist D und $D_1$ durch Abschlagen der Seite a von dem Puncte C aus auf CA und auf deren Verlängerung über C hinaus entstanden, also ist $AD = a - b$, $AD_1 = a + b$ und daher

$d(D) = \frac{a\,.\,S' - (a-b)\,.\,S'''}{b}$ und $d(D_1) = \frac{(a+b)\,.\,S''' - a\,.\,S'}{b}$. Da nun $\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{c\,.\,\sin A}{h_1}$ und $\frac{1}{b} = \frac{\sin A}{h_3}$ ist, so ergiebt sich

$$d(D) = c\,.\,\sin A\,.\,\frac{S'}{h_1} - (a-b)\,.\,\sin A\,.\,\frac{S'''}{h_3}$$

$$\text{und } d(D_1) = (a+b)\,.\,\sin A\,.\,\frac{S'''}{h_3} - c\,.\,\sin A\,.\,\frac{S'}{h_1},$$

woraus für d(D) und $d(D_1)$ die Behauptung folgt; in gleicher Weise erfolgt der Nachweis für die Richtigkeit der andern Behauptungen.

Setzt man, um die Entfernungen der Puncte D, E, F von den Seiten a, b, c zu erhalten, zuerst $S' = h_1$ und $S'' = S''' = 0$, darnach $S'' = h_2$ und $S' = S''' = 0$, endlich $S'' = h_3$ und $S' = S'' = 0$, so ergiebt sich, wenn man die Entfernungssumme eines Punctes kurz durch $\Sigma$ und den darauf folgenden Buchstaben des Punctes bezeichnet

aus α) 1 und 2 $\Sigma(D) = \Sigma(E) = (b + c - a)\,.\,\sin A$
aus α) 3 und 4 $\Sigma(F) = \Sigma(G) = (a + c - b)\,.\,\sin B$
aus α) 5 und 6 $\Sigma(H) = \Sigma(J) = (a + b - c)\,.\,\sin C$

Da nun in diesen Ausdrücken S′, S″, S‴ der Reihe nach $= + h_1, + h_2, + h_3$ gesetzt, somit also die positive Richtung der Senkrechten nach der Innenseite der Dreiecksseiten für die vorher berechneten Ausdrücke angenommen ist, so müssen auf Grund der allgemeinen Betrachtung in der Vorrede die Linien DE, FG, HJ die Richtung des einen Liniencomplexes angeben, also natürlich unter einander selbst parallel sein. Aendert man die Positivität der Senkrechten dahin ab, dass der Reihe nach die Senkrechten nach der Aussenseite der einen von den Seiten a, b, c und nach der Innenseite der beiden andern positiv genommen wird, d. h. setzt man zuerst $S' = -h_1$, $S'' = h_2$, $S''' = h_3$, darnach $S' = h_1$, $S'' = -h_2$, $S''' = h_3$, endlich $S' = h_1$, $S'' = h_2$, $S''' = -h_3$, und bezeichnet man die dadurch erhaltenen Entfernungssummen resp. mit $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ und dem Buchstaben des Punctes, so ergiebt sich

aus $\beta$) 1 und 2 $\Sigma_1(D_1) = \Sigma_1(E_1) = (a + b + c) \,.\, \sin B$
aus $\alpha$) 4 und $\beta$) 3 $\Sigma_1(G) = \Sigma_1(F_1) = (a + b - c) \,.\, \sin B$
aus $\alpha$) 6 und $\beta$ (5) $\Sigma_1(J) = \Sigma_1(H_1) = (a + c - b) \,.\, \sin C$, ferner
aus $\beta$) 3 und 4 $\Sigma_2(F_1) = \Sigma_2(G_1) = (a + b + c) \,.\, \sin B$
aus $\alpha$) 2 und $\beta$) 1 $\Sigma_2(E) = \Sigma_2(D_1) = (a + b - c) \,.\, \sin A$
aus $\alpha$) 5 und $\beta$) 6 $\Sigma_2(H) = \Sigma_2(J_1) = (b + c - a) \,.\, \sin C$, endlich
aus $\beta$) 5 und 6 $\Sigma_3(H_1) = \Sigma_3(J_1) = (a + b + c) \,.\, \sin C$
aus $\alpha$) 1 und $\beta$) 2 $\Sigma_3(D) = \Sigma_3(E_1) = (a + c - b) \,.\, \sin A$
aus $\alpha$) 3 und $\beta$) 4 $\Sigma_3(F) = \Sigma_3(G_1) = (b + c - a) \,.\, \sin B$

Hieraus ist, wie vorher, zu schliessen, dass die Linienternionen ($D_1E_1$, $GF_1$, $JH_1$), ($F_1G_1$, $ED_1$, $HJ_1$), ($H_1J_1$, $DE_1$, $FG_1$) die Richtung der drei anderen Liniencomplexe angeben. Wie aber schon früher erwähnt, können noch vier andere Veränderungen der Positivität eintreten, wenn man nämlich die Positivität gerade umgekehrt als in den 4 erwähnten Fällen feststellt, dann erhält man aber dieselben Resultate, mit dem — Zeichen, also bleiben die vier Linienternionen dieselben.

Diese vier Linienternionen hat Jacobi in den Programmen über innere und äussere Entfernungsörter behandelt, aber irrthümlicher Weise die erste Ternion (DE, FG, HJ), die sogenannten inneren Entfernungsörter, den Linien $D_1E_1$, $F_1G_1$, $H_1J_1$, den sogenannten äusseren Hauptörtern, gegenüber gestellt; die hübschen Betrachtungen über das durch die äusseren Hauptörter bestimmte Dreieck würde er, wenn er die Gleichstellung der 4 Linienternionen erkannt hätte, jedenfalls auch auf die durch (DE, $FG_1$, $HJ_1$), ($DE_1$, FG, $JH_1$), ($D_1E$, $GF_1$, HJ) bestimmten analogen Dreiecke ausgedehnt haben. Da sich an diese Dreiecke noch so manches Interessante anknüpft, so behalte ich mir vor, dieselben später ein Mal zu betrachten.

## Von den Nulllinien.

§ 2. Da sich bekanntlich die innere und äussere Halbirungslinie eines Dreiecks-Winkels die Gegenseite im Verhältnisse der beiden andern Seiten theilt, so ist

$$AV = \frac{b\,.\,c}{a - c},\ AW = \frac{b\,.\,c}{a - b},\ BU = \frac{a\,.\,c}{b - c},\ BW = \frac{a\,.\,c}{a - b},\ CU = \frac{a\,.\,b}{b - c},\ CV = \frac{a\,.\,b}{a - c}$$

$$AV_1 = \frac{b\,.\,c}{a + c},\ AW_1 = \frac{b\,.\,c}{a + b},\ BU_1 = \frac{a\,.\,c}{b + c},\ BW_1 = \frac{a\,.\,c}{a + b},\ CU_1 = \frac{a\,.\,b}{b + c},\ CV_1 = \frac{a\,.\,b}{a + c}$$

Hieraus ergiebt sich:

1. Die Puncte, in welchen die 3 äusseren Winkelhalbirenden, so wie 2 innere und die dritte äussere die Gegenseiten treffen, liegen in einer graden Linie.

Denn es ist $AV . BW . CU = AW . BU . CV$, $AV_1 . BW_1 . CU = AW_1 . BU . CV_1$, $AV . BW_1 . CU_1 = AW_1 . BU_1 . CV$ und $AV_1 . BW . CU_1 = AW . BU_1 . CV_1$, also sind nach dem Satze des Menelaos $UVW$, $UV_1W_1$, $U_1VW_1$, $U_1V_1W$ grade Linien.

Da sich später herausstellen wird, dass die Entfernungssumme eines jeden Punctes dieser 4 Linien $= 0$ ist, so sollen dieselben kurz Nulllinien genannt werden, und zwar $UVW$ die innere, $UV_1W_1$, $U_1VW_1$, $U_1V_1W$ bezüglich die erste, zweite, dritte oder zu a, b, c gehörige äussere Nulllinie, da für $UVW$ die Senkrechten aus einem Puncte nach der Innenseite von a, b, c und für $UV_1W_1$, $U_1VW_1$, $U_1V_1W$ bezüglich nach der Aussenseite von a, b, c und nach der Innenseite der beiden andern Dreiecksseiten positiv genommen werden.

Anm. Der voranstehende Satz ist offenbar nur ein specieller Fall des d'Alembert'schen Satzes, dass die drei äusseren Aehnlichkeitspuncte dreier Kreise, so wie 2 innere und 1 äusserer in grader Linie liegen, da die Ecken des Dreiecks und die Durchschnittspuncte der Winkelhalbirenden mit den Gegenseiten Aehnlichkeitspuncte der 4 Berührungskreise sind.

2. Die Linienternionen $(DE, FG, HJ)$, $(D_1E_1, F_1G, H_1J)$, $(D_1E_1, F_1G_1, HJ_1)$, $(DE_1, FG_1, H_1J_1)$ sind bezüglich den Nulllinien $UVW$, $UV_1W_1$, $U_1VW_1$, $U_1V_1W$ parallel.

Denn es ist $AV : AW = \frac{b \cdot c}{a - c} : \frac{b \cdot c}{a - b} = a - b : a - c = AD : AE$, also $VW \parallel DE$,

$$BU : BW = \frac{a \cdot c}{b - c} : \frac{a \cdot c}{a - b} = a - b : b - c = BF : BG, \text{ also } UW \parallel FG,$$

$$\text{und } CU : CV = \frac{a \cdot b}{b - c} : \frac{a \cdot b}{a - c} = a - c : b - c = CH : CJ, \text{ also } UV \parallel HJ,$$

woraus sich die Richtigkeit der Behauptung für die erste Ternion ergiebt. In gleicher Weise folgt das Uebrige.

3. Es sind die Dreiecksquaternionen $AV_{(1)}W_{(1)}$, $BU_{(1)}W_{(1)}$, $CU_{(1)}V_{(1)}$ bezüglich den Quaternionen $AD_{(1)}E_{(1)}$, $BF_{(1)}G_{(1)}$, $CH_{(1)}J_{(1)}$ ähnlich, wenn die Indices so gewählt werden, dass U mit G und J, V mit E und H, W mit D und F übereinstimmen. Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus 2).

Diese 6 Quaternionen von Dreiecken sollen durch $T'_{(1,2,3)}$, $T''_{(1,2,3)}$, $T'''_{(1,2,3)}$, $t'_{(1,2,3)}$, $t''_{(1,2,3)}$, $t'''_{(1,2,3)}$ bezeichnet werden, so dass der obere Index die im Dreiecke vorkommende Ecke A, B, C anzeigt, der fehlende oder vorhandene untere Index die innere oder erste, zweite, dritte äussere Nulllinie, welche eine Seite der Dreiecke T und parallel zu einer Seite der Dreiecke t ist.

4. $$T'_{(1,2,3)} : \Delta : t'_{(1,2,3)} = \frac{b \cdot c}{(a \mp b)(a \mp c)} : 1 : \frac{(a \mp b)(a \mp c)}{b \cdot c}$$

$$T''_{(1,2,3)} : \Delta : t''_{(1,2,3)} = \frac{a \cdot c}{(a \mp b)(b \mp c)} : 1 : \frac{(a \mp b)(b \mp c)}{a \cdot c}$$

$$T'''_{(1,2,3)} : \Delta : t'''_{(1,2,3)} = \frac{a \cdot b}{(a \mp c)(b \mp c)} : 1 : \frac{(a \mp c)(b \mp c)}{a \cdot b}$$

Denn zwei Dreiecke, bei denen ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich ist, oder denselben zu 2 Rechten ergänzt, verhalten sich wie die Producte der beiden diese Winkel einschliessenden Seiten, also

$$T'_{(1,2,3)} : \Delta : t'_{(1,2,3)} = AV_{(1)} \,.\, AW_{(1)} : AB \,.\, AC = AD_{(1)} : AE_{(1)}$$
$$= \frac{b \,.\, c}{a \mp c} \,.\, \frac{b \,.\, c}{a \mp b} : b \,.\, c : (a \mp b)\,(a \mp c)$$
$$= \frac{b \,.\, c}{(a \mp b)\,(a \mp c)} : 1 : \frac{(a \mp b)\,(a \mp c)}{b \,.\, c}$$

In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

Anm. 1. Da $AV_{(1)}$ und $AD_{(1)}$ homologe Seiten in den ähnlichen Dreiecken $T'_{(1,2,3)}$ und $t'_{(1,2,3)}$ sind, ferner $BW_{(1)}$ und $BG_{(1)}$ in $T''_{(1,2,3)}$ und $t''_{(1,2,3)}$, endlich $CU_{(1)}$ und $CH_{(1)}$ in $T'''_{(1,2,3)}$ und $t'''_{(1,2,3)}$, und da $AV_{(1)} : AD_{(1)} = \frac{b \,.\, c}{a \mp c} = (a \mp b) = \frac{b \,.\, c}{(a \mp b)\,(a \mp c)} : 1$ sich verhält, sowie $BW_{(1)} : BG_{(1)} = \frac{a \,.\, c}{a \mp b} : (b \pm c) = \frac{a \,.\, c}{(a \mp b)\,(b \pm c)} : 1$, und $CU_{(1)} : CH_{(1)} = \frac{a \,.\, b}{b \mp c} : (a \mp c) = \frac{a \,.\, b}{(a \mp c)\,(b \mp c)} : 1$, so kann man, wenn T und t ein Paar jener 12 ähnlichen Dreieckspaare und L und l ein Paar homologer Linien in denselben bezeichnen, obigen Satz kurz ausdrücken $T : \Delta = \Delta : t = L : l$.

Anm. 2. Da die unteren Zeichen dem eingeklammerten Index von U, V, W, D, E, F, G, H, J zugehören, so ist es nicht schwer, für ein bestimmtes T und t die richtige Verhältnisszahl anzugeben.

5. Wenn S und s homologe Seiten, H und h die dazu gehörigen Höhen in einem jener 12 Dreieckspaare T und t bezeichnen, so ist $2 \,.\, \Delta = S \,.\, h = s \,.\, H$.

Denn es ist $T = \frac{1}{2} S \,.\, H$ und $t = \frac{1}{2} s \,.\, h$, und nach vorigem Satze Anm. $T : \Delta = \Delta : t = S : s$, also ist $\frac{1}{2} S \,.\, H : \Delta = \Delta : \frac{1}{2} s \,.\, h = S : s$, woraus sich die Behauptung sogleich ergiebt.

Anm. Dieser Satz gilt im Bezug auf jedes Paar ähnlicher Dreiecke, zu welchem $\Delta$ mittlere geometrische Proportionale ist, wie man sogleich an dem Beweise erkennt. Derartige Dreiecke kommen öfter vor, wenn nämlich die Ecken des einen in den Seiten von $\Delta$ liegen, und die Seiten des andern durch die Ecken von $\Delta$ parallel zu den Seiten des ersten gehen, wie z. B. die Dreiecke, deren Ecken einerseits die 3 Berührungspuncte eines Berührungskreises von $\Delta$, andrerseits die Mittelpuncte der 3 übrigen Berührungskreise sind.

6. $T'_{(1,2,3)} = \frac{b \,.\, c}{(a \mp b)\,(a \mp c)} \,.\, \Delta$, $T''_{(1,2,3)} = \frac{a \,.\, c}{(a \mp b)\,(b \mp c)} \,.\, \Delta$, $T'''_{(1,2,3)} = \frac{a \,.\, b}{(a \mp c)\,(b \mp c)} \,.\, \Delta$

und $t'_{(1,2,3)} = \frac{(a \mp b)\,(a \mp c)}{b \,.\, c} \,.\, \Delta$, $t''_{(1,2,3)} = \frac{(a \mp b)\,(b \mp c)}{a \,.\, c} \,.\, \Delta$, $t'''_{(1,2,3)} = \frac{(a \mp c)\,(b \mp c)}{a \,.\, b} \,.\, \Delta$

Dies ergiebt sich unmittelbar aus 4), wie auch

7. $T'_{(1,2,3)} \,.\, t'_{(1,2,3)} = T''_{(1,2,3)} \,.\, t''_{(1,2,3)} = T'''_{(1,2,3)} \,.\, t'''_{(1,2,3)} = \Delta^2$

8. $T' \,.\, T'_1 = T'_2 \,.\, T'_3$, $T'' \,.\, T''_2 = T''_1 \,.\, T''_3$, $T''' \,.\, T'''_3 = T'''_1 \,.\, T'''_2$ und

$t' \,.\, t'_1 = t'_2 \,.\, t'_3$, $t'' \,.\, t''_2 = t''_1 \,.\, t''_3$, $t''' \,.\, t'''_3 = t'''_1 \,.\, t'''_2$

Denn es ist $T' = \frac{b \,.\, c}{(a - b)\,(a - c)} \,.\, \Delta$, $T'_1 = \frac{b \,.\, c}{(a + b)\,(a + c)} \,.\, \Delta$, $T'_2 = \frac{b \,.\, c}{(a + b)\,(a - c)} \,.\, \Delta$, $T'_3 = \frac{b \,.\, c}{(a - b)\,(a + c)} \,.\, \Delta$, also $T' \,.\, T'_1 = \frac{b^2 \,.\, c^2 \,.\, \Delta^2}{(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)} = T'_2 \,.\, T'_3$. In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

Anm. Dieser Satz kommt den Dreiecken T und t desshalb zu, weil die T und t mit gleichem oberen Index, die durch die Diagonalen eines Vierecks gebildeten Dreiecke, und da bei jedem Vierecke die Producte je zweier durch die Diagonalen gebildeten, einander gegenüber liegenden Dreiecke gleich sind.

9. $\frac{1}{t'_{(1)}} + \frac{1}{t'''_{(2)}} = \frac{1}{t''_{(1)}} + \frac{1}{\Delta}$ und $\frac{1}{t''_{2(3)}} + \frac{1}{t'''_{2(3)}} = \frac{1}{t'_{2(3)}} + \frac{1}{\Delta}$

Denn wie aus der Figur sogleich zu erkennen ist, muss

$T'_{(1)} + T'''_{(1)} = T''_{(1)} + \Delta$ und $T''_{2(3)} + T'''_{2(3)} = T'_{2(3)} + \Delta$, also auch zufolge 7)

$\frac{\Delta^2}{t'_{(1)}} + \frac{\Delta^2}{t'''_{(1)}} = \frac{\Delta^2}{t''_{(1)}} + \Delta$ und $\frac{\Delta^2}{t''_{2(3)}} + \frac{\Delta^2}{t'''_{2(3)}} = \frac{\Delta^2}{t'_{2(3)}} + \Delta$ sein, woraus durch Division mit $\Delta^2$ die Behauptung folgt.

10. Da jeder von den Puncten $U_{(1)}$, $V_{(1)}$, $W_{(1)}$ in einer Dreiecksseite und zugleich in der Halbirungslinie des Gegenwinkels dieser Seite liegt, so sind die aus einem dieser Puncte auf die beiden andren Seiten gefällten Senkrechten gleich. Bezeichnet man nun die aus $U_{(1)}$, $V_{(1)}$, $W_{(1)}$ gefällten Senkrechten bezüglich mit $P'_{(1)}$, $P''_{(1)}$, $P'''_{(1)}$, so ist

$$P'_{(1)} = \frac{2\,\Delta}{b \mp c},\; P''_{(1)} = \frac{2\,\Delta}{a \mp c},\; P'''_{(1)} = \frac{2\,\Delta}{a \mp b}.$$

Denn da $T'_{(1)} = \frac{1}{2} AV_{(1)} \,.\, P'''_{(1)} = \frac{1}{2} AW_{(1)} \,.\, P''_{(1)}$, $T''_{(2)} = \frac{1}{2} BU_{(1)} \,.\, P'''_{(1)} = \frac{1}{2} BW_{(1)} \,.\, P'_{(1)}$ und $T'''_{(3)} = \frac{1}{2} CU_{(1)} \,.\, P''_{(1)} = \frac{1}{2} CV_{(1)} \,.\, P'_{(1)}$ ist, so ergiebt sich zufolge 6)

$$\frac{b\,.\,c\,.\,\Delta}{(a \mp b)\,(a \mp c)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{b\,.\,c}{a \mp c} \,.\, P'''_{(1)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{b\,.\,c}{a \mp c} \,.\, P''_{(1)},$$

$$\frac{a\,.\,c\,.\,\Delta}{(a \mp b)\,(b \mp c)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{a\,.\,c}{b \mp c} \,.\, P'''_{(1)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{a\,.\,c}{a \mp b} \,.\, P'_{(1)},$$

und $\frac{a\,.\,b\,.\,\Delta}{(a \mp c)\,(b \mp c)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{a\,.\,b}{b \mp c} \,.\, P''_{(1)} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{a\,.\,b}{a \mp c} \,.\, P'_{(1)}$, und daraus die Behauptung.

Anm. Der Satz kann auch mit Leichtigkeit aus §. 1 (1) entwickelt werden.

11. $\frac{1}{P'_{(1)}} = \frac{1}{h_2} \mp \frac{1}{h_3},\; \frac{1}{P''_{(1)}} = \frac{1}{h_1} \mp \frac{1}{h_3},\; \frac{1}{P'''_{(1)}} = \frac{1}{h_1} \mp \frac{1}{h_2}$

denn $\frac{1}{P'_{(1)}} = \frac{b \mp c}{2\,\Delta} = \frac{b}{2\,\Delta} \mp \frac{c}{2\,\Delta} = \frac{1}{h_2} \mp \frac{1}{h_3}$

12. $P'_{(1)} = \frac{h_2\,.\,h_3}{h_3 \mp h_2},\; P''_{(1)} = \frac{h_1\,.\,h_3}{h_3 \mp h_1},\; P'''_{(1)} = \frac{h_1\,.\,h_2}{h_2 \mp h_1}$

Folgt sogleich aus 11).

13. $\frac{1}{P'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho_2}\right),\; \frac{1}{P''} = \frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho_1}\right),\; \frac{1}{P'''} = \frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$

$\frac{1}{P'_1} = \frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right),\; \frac{1}{P''_1} = \frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_2}\right),\; \frac{1}{P'''_1} = \frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_3}\right)$

Denn es ist $b - c = \frac{1}{2}(a + b - c) - \frac{1}{2}(a + c - b)$

und $b + c = \frac{1}{2}(a + b + c) + \frac{1}{2}(b + c - a)$

also auch $\frac{b - c}{2\,\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2\,\Delta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2\,\Delta}$.

und $\frac{b + c}{2\,\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b + c}{2\,\Delta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2\,\Delta}$

oder zufolge 10) und, da

$2\,\Delta = (a + b + c) \cdot \varrho = (b + c - a) \cdot \varrho_1 = (a + c - b) \cdot \varrho_2 = (a + b - c) \cdot \varrho_3$ ist,

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2\,\varrho_3} - \frac{1}{2\,\varrho_2} \text{ und } \frac{1}{P_1'} = \frac{1}{2\,\varrho} + \frac{1}{2\,\varrho_1}.$$

14. $P' = \frac{2 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}{\varrho_2 - \varrho_3}$, $P'' = \frac{2 \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3}$, $P''' = \frac{2 \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2}$, $P'_1 = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \varrho_1}{\varrho + \varrho_1}$, $P''_1 = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \varrho_2}{\varrho + \varrho_2}$,

$P'''_1 = \frac{2 \cdot \varrho \cdot \varrho_3}{\varrho + \varrho_3}$

Folgt sogleich aus 13.

15. $\frac{1}{P'} + \frac{1}{P'''} = \frac{1}{P''}$, $\frac{1}{P'} + \frac{1}{P_1''} = \frac{1}{P_1'''}$, $\frac{1}{P_1'} + \frac{1}{P'''} = \frac{1}{P_1''}$ und $\frac{1}{P_1'} + \frac{1}{P''} = \frac{1}{P_1'''}$.

Denn es ist $(b - c) + (a - b) = a - c$, $(b - c) + (a + c) = a + b$, $(b + c) + (a - b) = a + c$, $(b + c) + (a - c) = a + b$, woraus sich die Behauptung durch Division mit $2\,\Delta$ ergiebt.

§. 3. Schlägt man um $O_{(1,2,3)}$ mit $e_{(1,2,3)}$ oder $MO_{(1,2,3)}$ einen Kreis und zieht in demselben Sehnen durch M parallel zu den Seiten a, b, c, so sind diese gleich der Differenz oder Summe der nicht parallelen Seiten, je nachdem $O_{(1,2,3)}$ Mittelpunct des inneren und des zu der parallelen Seite gehörenden äusseren Berührungskreises oder eines der beiden anderen ist.

Der Beweis ergiebt sich mit Leichtigkeit aus dem Satze, dass die Mitte einer Seite von den beiden in ihr befindlichen Berührungspuncten um die halbe Differenz und von den beiden in ihrer Verlängerung befindlichen um die halbe Summe entfernt ist, wenn man berücksichtigt, dass die durch M gezogene Parallele auf dem nach dem Berührungspuncte gezogenen Radius des Berührungskreises, um dessen Mitttelpunct der Kreis mit $e_{(1,2,3)}$ geschlagen worden ist, also auch auf einem Radius des mit $e_{(1,2,3)}$ geschlagenen Kreises senkrecht stehen muss.

Hieraus ergiebt sich, wenn man die Sehnen, welche durch M in den um $O_{(1,2,3)}$ mit $e_{(1,2,3)}$ geschlagenen Kreisen parallel zu a, b, c gezogen worden sind, resp. $M\alpha_{(1,2,3)}$ $M\beta_{(1,2,3)}$, $M\gamma_{(1,2,3)}$ nennt:

1. $M\beta_{(1,2,3)}\,\gamma_{(1,2,3)} \cong t'_{(1,2,3)}$, $M\alpha_{(1,2,3)}\,\gamma_{(1,2,3)} \cong t''_{(1,2,3)}$, $M\alpha_{(1,2,3)}\,\beta_{(1,2,3)} \cong t'''_{(1,2,3)}$

da die Winkel, deren Schenkel parallel sind und nach derselben oder entgegengesetzten Richtung gehen, einander gleich sein müssen.

2. Die Radien der um $t'_{(1,2,3)}$, $t''_{(1,2,3)}$, $t'''_{(1,2,3)}$ beschriebenen Kreise sind einander und $e_{(1,2,3)}$ gleich, da in congruenten Dreiecken homologe Stücke gleich sind.

Anm. Dieser für das Folgende wichtige Satz kann auch ohne Schwierigkeit durch Berechnung gefunden werden, wie es Jacobi in den Programmen über die Entfernungsörter gethan hat, doch empfiehlt sich diese Herleitung durch die Einfachheit, mit welcher man zu dem allgemeinen Resultate gelangt.

3. $\beta_{(1,2,3)}\,\gamma_{(1,2,3)} = \frac{a}{r} \cdot e_{(1,2,3)}$, $\alpha_{(1,2,3)}\,\gamma_{(1,2,3)} = \frac{b}{r} \cdot e_{(1,2,3)}$, $\alpha_{(1,2,3)}\,\beta_{(1,2,3)} = \frac{c}{r} \cdot e_{(1,2,3)}$

Denn in 2 Kreisen verhalten sich die Sehnen, welche zu gleichen oder 2 Rechte betragenden Peripheriewinkeln gehören, wie die Radien.

Anm. Zufolge 1) kann man auch sagen $D_{(1)}E_{(1)} = \frac{a}{a}\, e_{(1,2,3)}$, $F_{(1)}G_{(1)} = \frac{b}{r}\, e_{(1,2,3)}$, $H_{(1)}J_{(1)} = \frac{c}{r} \cdot e_{(1,2,3)}$.

4. $\alpha_{(1,2,3)}\,\beta_{(1,2,3)}\,\gamma_{(1,2,3)} \backsim ABC$, da die Seiten gleiches Verhältniss haben und die Winkel gleich sind.

Anm. Die weiteren Beziehungen dieser Dreiecke sind im vorigen Programme schon besprochen.

5. Bezeichnet man die von A, B, C ausgehende Höhe in den Dreiecken $T'_{(1,2,3)}$, $T''_{(1,2,3)}$, $T'''_{(1,2,3)}$ mit $S'_{(1,2,3)}$, $S''_{(1,2,3)}$, $S'''_{(1,2,3)}$, so ist

$$S'_{(1,2,3)} = \frac{r \cdot h_1}{e_{(1,2,3)}},\; S''_{(1,2,3)} = \frac{r \cdot h_2}{e_{(1,2,3)}},\; S'''_{(1,2,3)} = \frac{r \cdot h_3}{e_{(1,2,3)}}.$$

Denn in den Dreiecken $T'_{(1,2,3)}$ und $t'_{(1,2,3)}$ sind $V_{(1)}W_{(1)}$ und $D_{(1)}E_{(1)}$ homologe Seiten, also muss nach 3) und §. 2, (5)

$2\varDelta = \frac{a}{r} \cdot e_{(1,2,3)} \cdot S'_{(1,2,3)}$, also $S'_{(1,2,3)} = \frac{r}{e_{(1,2,3)}} \cdot \frac{2\varDelta}{a} = \frac{r \cdot h_1}{e_{(1,2,3)}}$ sein. In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige. Hieraus folgt sogleich

6. $S'_{(1,2,3)} : h_1 = S''_{(1,2,3)} : h_2 = S'''_{(1,2,3)} : h_3 = r : e_{(1,2,3)}$ und

7. $e.S' = e_1 . S'_1 = e_2 . S'_2 = e_3 . S'_3 = r . h_1$, $e . S'' = e_1 . S''_1 = e_2 . S''_2 = e_3 . S''_3 = r . h_2$, $e . S''' = e_1 . S'''_1 = e_2 . S'''_2 = e_3 . S'''_3 = r . h_3$.

8. Bezeichnen $R'_{(1,2,3)}$, $R''_{(1,2,3)}$, $R'''_{(1,2,3)}$ die Radien der um die Dreiecke $T'_{(1,2,3)}$, $T''_{(1,2,3)}$, $T'''_{(1,2,3)}$ beschriebenen Kreise, so ist $T'_{(1,2,3)} = \frac{R'_{(1,2,3)}}{e_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$, $T''_{(1,2,3)} = \frac{R''_{(1,2,3)}}{e_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$, $T'''_{(1,2,3)} = \frac{R'''_{(1,2,3)}}{e_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$.

Denn da $R'_{(1,2,3)}$ und $e_{(1,2,3)}$ homologe Linien in den ähnlichen Dreiecken $T'_{(1,2,3)}$ und $t'_{(1,2,3)}$ sind, so ergiebt sich die Behauptung sogleich aus §. 2 (4), Anm. 1.

9. $$\frac{T' . T_1' . T_2' . T_3'}{R' . R_1' . R_2' . R_3'} = \frac{T'' . T_1'' . T_2'' . T_3''}{R'' . R_1'' . R_2'' . R_3''} = \frac{T''' . T_1''' . T_2''' . T_3'''}{R''' . R_1''' . R_2''' . R_3'''} = \frac{\varDelta^4}{e . e_1 . e_2 . e_3}$$

Denn nach 8) ist $\frac{T'}{R'} = \frac{\varDelta}{e}$, $\frac{T_1'}{R_1'} = \frac{\varDelta}{e_1}$, $\frac{T_2'}{R_2'} = \frac{\varDelta}{e_2}$, $\frac{T_3'}{R_3'} = \frac{\varDelta}{e_3}$, woraus sich durch Multiplication die Behauptung ergiebt.

10. $$\frac{R' . R_1'}{R_2' . R_3'} = \frac{e . e_1}{e_2 . e_3},\; \frac{R'' . R_2''}{R_1'' . R_3''} = \frac{e . e_2}{e_1 . e_3},\; \frac{R''' . R_3'''}{R_1''' . R_2'''} = \frac{e . e_3}{e_1 . e_2}.$$

Denn nach §. 2 (8) ist $T'.T_1' = T_2'.T_3'$, also nach 8) $\frac{R'}{e}.\Delta.\frac{R_1'}{e_1}.\Delta = \frac{R_2'}{e_2}.\Delta.\frac{R_3'}{e_3}.\Delta$, daher $\frac{R'.R_1'}{e.e_1} = \frac{R_2'.R_3'}{e_2.e_3}$, oder $\frac{R'.R_1'}{R_2'.R_3'} = \frac{e.e_1}{e_2.e_3}$.

11. $R'_{(1)} + R'''_{(1)} = R''_{(1)} + e_{(1)}$ und $R''_{2(3)} + R'''_{2(3)} = R'_{2(3)} + e_{2(3)}$.

Denn wie aus der Figur sogleich zu erkennen ist, ist $T'_{(1)} + T'''_{(1)} = T''_{(1)} + \Delta$ und $T''_{2(3)} + T'''_{2(3)} = T'_{2(3)} + \Delta$, also zufolge 8) $\frac{R'_{(1)}}{e_{(1)}}.\Delta + \frac{R'''_{(1)}}{e_{(1)}}.\Delta = \frac{R''_{(1)}}{e_{(1)}}.\Delta + \Delta$ und $\frac{R''_{2(3)}}{e_{2(3)}}.\Delta + \frac{R'''_{2(3)}}{e_{2(3)}}.\Delta = \frac{R'_{2(3)}}{e_{2(3)}}.\Delta + \Delta$, woraus sich die Behauptung sogleich ergiebt.

12. $R'_{(1,2,3)} = \frac{b.c}{(a\mp b)(a\mp c)}.e_{(1,2,3)}$, $R''_{(1,2,3)} = \frac{a.c}{(a\mp b)(b\mp c)}.e_{(1,2,3)}$, $R'''_{(1,2,3)} = \frac{a.b}{(a\mp c)(b\mp c)}.e_{(1,2,3)}$

Zufolge 8) und §. 2 (6) ist $T'_{(1,2,3)} = \frac{R'_{(1,2,3)}}{e_{(1,2,3)}}.\Delta = \frac{b.c}{(a\mp b)(a\mp c)}.\Delta$, also $R'_{(1,2,3)} = \frac{b.c}{(a\mp b)(a\mp c)}.e_{(1,2,3)}$

13. $V_{(1)}W_{(1)} = \frac{4\Delta}{(a\mp b)(a\mp c)}.e_{(1,2,3)}$, $U_{(1)}W_{(1)} = \frac{4\Delta}{(a\mp b)(b\mp c)}.e_{(1,2,3)}$, $U_{(1)}V_{(1)} = \frac{4\Delta}{(a\mp c)(b\mp c)}.e_{(1,2,3)}$

Denn $V_{(1)}W_{(1)} = 2.R'_{(1,2,3)}.\sin A = \frac{2.b.c.\sin A}{(a\mp b)(a\mp c)}.e_{(1,2,3)} = \frac{4\Delta}{(a\mp b)(a\mp c)}.e_{(1,2,3)}$

14. $V_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}V_{(1)} = (b\mp c) : (a\mp c) : (a\mp b)$. Folgt sogleich aus 13.

15. Seien $i'_{(1,2,3)}, i''_{(1,2,3)}, i'''_{(1,2,3)}$ die Neigungswinkel der 4 Nulllinien gegen die Seiten a, b, c, so ist $\sin i'_{(1,2,3)} : \sin i''_{(1,2,3)} : \sin i'''_{(1,2,3)} = V_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}V_{(1)}$.

Denn da $CW_{(1)}$ und $AU_{(1)}$ Halbirungslinien der Winkel $U_{(1)}CV_{(1)}$ und $V_{(1)}AW_{(1)}$ sind, so verhält sich $V_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}W_{(1)} = CV_{(1)} : CU_{(1)} = \sin i'_{(1,2,3)} : \sin i''_{(1,2,3)}$ und $U_{(1)}W_{(1)} : U_{(1)}V_{(1)} = AW_{(1)} : AV_{(1)} = \sin i''_{(1,2,3)} : \sin i'''_{(1,2,3)}$, woraus sich die Behauptung ergiebt.

16. $\sin i'_{(3)} + \sin i'''_{(3)} = \sin i''_{(3)}$ und $\sin i'_{1(2)} + \sin i''_{1(2)} = \sin i'''_{1(2)}$.

Denn man erkennt sogleich aus der Figur, dass $VW + UV = UW$, $V_1W_1 + UW_1 = UV_1$, $VW_1 + U_1W_1 = U_1V$, $V_1W + U_1V_1 = U_1W$ ist, also muss zufolge 15) auch $\sin i' + \sin i''' = \sin i''$, $\sin i_1' + \sin i_1'' = \sin i_1'''$, $\sin i_2' + \sin i_2'' = \sin i_2'''$, $\sin i_3' + \sin i_3''' = \sin i_3''$ sein.

Hieraus ergiebt sich folgender bemerkenswerthe Satz:

17. Trägt man in A an die Aussen- oder Innenseite von b den Winkel an, welchen resp. die innere und erste äussere, oder die zweite und dritte äussere Nulllinie mit der Seite c bildet, so schneidet der Schenkel des angetragenen Winkels die Peripherie des umschriebenen Kreises in einem Puncte, welcher in Bezug auf die innere und dritte äussere Nulllinie von der Ecke B, in Bezug auf die erste und zweite äussere von der Ecke C eben so weit entfernt ist, als von den andern beiden Ecken zusammengenommen.

Trägt man den Winkel, welchen die innere Nulllinie mit c bildet, d. i. $i'''$ in AC an AC nach Aussen hin an und schneidet der Schenkel des angetragenen Winkels die Peripherie des umschriebenen Kreises in Z, so muss Z im Bogen AC liegen, da bekanntlich die äussere Halbirungslinie von A den Bogen AC schneidet und da $i''' < 90^0 - \frac{A}{2}$ sein muss, denn $i'' + i''' = 180^0 - A$ und zufolge 16) $i'' > i'''$. Verbindet man nun Z mit B und C, so ist $\measuredangle$ ZAC oder $i''' = \measuredangle$ ZBC, es ist aber $\measuredangle B = i' + i'''$ also $\measuredangle ABZ = i'$, also auch $\measuredangle ACZ = i'$ und daher $\measuredangle BCZ = i''$, da $i'' = i' + C$. Da nun aber jede Sehne gleich dem Producte aus dem Durchmesser des Kreises und dem Sinus des zugehörigen Peripheriewinkels ist, so ist $AZ = 2r \,.\, \sin i'$, $BZ = 2r \sin i''$, $CZ = 2r \sin i'''$. Es ist aber nach 16) $\sin i' + \sin i''' = \sin i''$, also auch $2r \,.\, \sin i' + 2r \,.\, \sin i''' = 2r \,.\, \sin i''$, d. h. $AZ + CZ = BZ$. In gleicher Weise ergiebt sich die Behauptung für die übrigen Nulllinien.

Anm. 1. Für das ungleichseitige Dreieck giebt es hiernach in der Peripherie des umschriebenen Kreises 4 Puncte von der Beschaffenheit, dass die Entfernung eines jeden derselben von einer Ecke (Scheitel der beiden kleineren Winkel) so gross ist, als von den beiden andern zusammengenommen. Es giebt aber nur einen Punct, bei welchem die grösste Entfernung zwischen den beiden andern liegt: derselbe liegt in dem Bogen des mittleren Winkels und wird mit Hülfe der inneren Nulllinie gefunden. Dieser eine Punct geht für das gleichseitige Dreieck in die Gesammtheit der Puncte der Peripherie über, da für dasselbe die innere Nulllinie in der Unendlichkeit liegt, also in jeder Richtung liegend gedacht werden kann. Die drei andern Puncte sind die Ecken des gleichseitigen Dreiecks. Beim gleichschenklichen Dreiecke fallen 2 von jenen 4 Puncten mit der Spitze zusammen.

Anm. 2. Der eben erwähnte Satz kann auch folgender Massen ausgesprochen werden: Schlägt man einen Kreis um den Mittelpunct eines Berührungskreises mit seiner Entfernung von dem Mittelpunct des umschriebenen Kreises, zieht man in diesem durch den Mittelpunct des umschriebenen Kreises zu 2 Dreiecksseiten parallele Sehnen und durch die von den beiden Seiten gebildete Ecke eine Parallele zu der Linie, welche die andern Endpuncte der parallelen Sehnen verbindet, so schneidet diese den umschriebenen Kreis in einem Puncte, dessen Entfernung von einer Ecke des Dreiecks so gross ist, als von den beiden andern zusammen genommen.

§. 4. In der Einleitung sind für eine Anzahl bestimmter Puncte (die natürlich bedeutend vermehrt werden kann, wobei man zu beachtenswerthen Resultaten gelangt) Formeln aufgestellt, die man als unentwickelte Entfernungssummen dieser Puncte, wie auch dort gezeigt ist, ansehen kann. Sie haben aber noch eine weitere Bedeutung, da durch §. 3 (5) die Entfernung der Ecken des Dreiecks, also auch die Entfernung der in der Einleitung betrachteten Puncte von den Nulllinien festgestellt ist. Will man die Entfernung jener Puncte von der inneren Nulllinie erhalten, so hat man nur $\frac{S'}{h_1} = \frac{S''}{h_2} = \frac{S'''}{h_3} = \frac{r}{e}$ zu setzen, da die Puncte A, B, C sämmtlich auf derselben Seite dieser Nulllinie liegen; will man dagegen die Entfernung jener Puncte von der ersten äusseren Nulllinie haben, so muss man zuerst S' (oder S'' und S''') negativ setzen, da für diese Nulllinie A mit B und C auf verschiedenen Seiten liegt, und darnach $\frac{S'}{h_1} = \frac{S''}{h_2} = \frac{S'''}{h_3} = \frac{r}{e_1}$. Bei der zweiten und dritten äusseren Nulllinie setzt man zuerst S'' resp. S''' negativ und darnach die Werthe aus §. 3 (6) ein. Wird die Bezeichnung in der Einleitung für die innere Nulllinie beibehalten und für die erste, zweite, dritte äussere Nulllinie an d der Index 1, 2, 3 gesetzt, so ergeben sich folgende Entfernungen der Puncte $D_{(1)}$, $E_{(1)}$, $F_{(1)}$, $G_{(1)}$, $H_{(1)}$, $J_{(1)}$ von der inneren Nulllinie:

1. $d(D) = d(E) = (a + c - a) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin A, \quad d(F) = d(G) = (a + c - b) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin B,$

$$d(G_1) = (b + c - a) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin B, \qquad d(E_1) = (a + c - b) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin A,$$
$$d(J_1) = (b + c - a) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin C, \qquad d(H_1) = (a + c - b) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin C,$$
$$d(H) = d(J) = (a + b - c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin C$$
$$d(D_1) = (a + b - c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin A$$
$$d(F_1) = (a + b - c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin B$$

woraus sogleich noch folgt $d(D, E) + d(D_1) + d(E_1) = (a + b + c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin A,$

$$d(F, G) + d(F_1) + d(G_1) = (a + b + c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin B,$$
$$d(H, J) + d(H_1) + d(J_1) = (a + b + c) \cdot \frac{e}{r} \cdot \sin C.$$

Da nun $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ sich verhält, so sind in diesen Ausdrücken 4 Ternionen von Linien enthalten, die dasselbe Verhältniss wie die Seiten des Urdreiecks haben, die also dem Urdreiecke ähnliche Dreiecke ergeben. Ein Gleiches ergiebt sich für die 3 andern Nulllinien, wenn man die dabei sich ergebende Negativität, die sich ja nur auf die besondere Lage der Senkrechten bezieht, ausser Acht lässt. Fügt man hierzu noch die Quaternion von Dreiecken, die sich, wie man aus der Einleitung erkennt, aus den Entfernungssummen jener Puncte ergeben, so erhält man im Ganzen 5 Quaternionen von Dreiecken, die dem Urdreiecke ähnlich sind. Ihre Betrachtung führt, wie in Jacobi's äusseren Entfernungsörtern an der letzten Quaternion erwiesen ist, zu interessanten Resultaten, es kann jedoch dieselbe wegen mangelnden Raumes hier nicht erfolgen.

Bestimmt man in der angegebenen Weise die Entfernung der Puncte $U_{(1)}$, $V_{(1)}$, $W_{(1)}$ von den Nulllinien, so ergiebt sich

2. $d_1(U_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(b + c) \cdot e_1}, \; d(U_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(b + c) \cdot e}, \; d_3(U) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(b - c) \cdot e_3}, \; d_2(U) = \frac{-4 \Delta \cdot r}{(b - c) \cdot e_2}$

$$d_2(V_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a + c) \cdot e_2}, \; d_3(V) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a - c) \cdot e_3}, \; d(V_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a + c) \cdot e}, \; d_1(V) = \frac{-4 \Delta \cdot r}{(a - c) \cdot e_1}$$
$$d_3(W_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a + b) \cdot e_3}, \; d_2(W) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a - b) \cdot e_2}, \; d_1(W) = \frac{-4 \Delta \cdot r}{(a - b) \cdot e_1}, \; d(W_1) = \frac{4 \Delta \cdot r}{(a + b) \cdot e}$$

Bezeichnet man nun die durch die 4 Nulllinien bestimmten 4 Dreiecke durch $\tau_{(1,2,3)}$, so dass $\tau$ von den 3 äusseren Nulllinien, $\tau_1$ von der inneren und zweiten und dritten äusseren, $\tau_2$ von der inneren und ersten und dritten äusseren und $\tau_3$ von der inneren und ersten und zweiten äusseren gebildet wird, so sind die berechneten Entfernungen der Reihe nach die Höhen dieser Dreiecke und daher zufolge § 3 (13) und weil a . b . c = 4 $\Delta$ . r ist

$$
3.\quad
\begin{aligned}
\tau &= \tfrac{1}{2} \,.\, V_1W_1 \,.\, d_1(U_1) = \frac{2\,\Delta \,.\, e_1}{(a+b)\,(a+c)} \cdot \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(b+c)\,.\,e_1} = \frac{2\,a\,b\,c\,\Delta}{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)} \\
\tau_1 &= \tfrac{1}{2} \,.\, VW \,.\, d(U_1) = \frac{2\,\Delta \,.\, e}{(a-b)\,(a-c)} \cdot \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(b+c)\,.\,e} = \frac{2\,a\,b\,c\,\Delta}{(a-b)\,(a-c)\,(b+c)} \\
\tau_2 &= \tfrac{1}{2} \,.\, UW \,.\, d(V_1) = \frac{2\,\Delta \,.\, e}{(a-b)\,(b-c)} \cdot \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(a+c)\,.\,e} = \frac{2\,a\,b\,c\,\Delta}{(a-b)\,(a+c)\,(b-c)} \\
\tau_3 &= \tfrac{1}{2} \,.\, UV \,.\, d(W_1) = \frac{2\,\Delta \,.\, e}{(a-c)\,(b-c)} \cdot \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(a+b)\,.\,e} = \frac{2\,a\,b\,c\,\Delta}{(a+b)\,(a-c)\,(b-c)}
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$
4.\quad \tau : \tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{b-c}{b+c} : \frac{b-c}{b+c} : \frac{a-c}{a+c} : \frac{a-b}{a+b}
$$

Bedeute $r_{(1,2,3)}, r'_{(1,2,3)}, r''_{(1,2,3)}, r'''_{(1,2,3)}$ bezüglich die Radien des innern und der 3 äusseren Berührungskreise der Dreiecke $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, so ergiebt sich aus den bekannten Formeln

$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_1}$ u. s. w.

$$
5.\quad
\begin{aligned}
r &= \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(b+c)\,.\,e_1 + (a+c)\,.\,e_2 + (a+b)\,.\,e_3}, \quad r' = \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(b+c)\,.\,e + (a-b)\,.\,e_2 + (a-c)\,.\,e_3} \\
r'' &= \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(a+c)\,.\,e + (a-b)\,.\,e_1 + (b-c)\,.\,e_3}, \quad r''' = \frac{4\,\Delta \,.\, r}{(a+b)\,.\,e + (a-c)\,.\,e_1 + (b-c)\,.\,e_2}
\end{aligned}
$$

Denn zufolge 2) ist $\frac{1}{r} = \frac{(b+c)\,.\,e_1}{4\,\Delta\,.\,r} + \frac{(a+c)\,.\,e_2}{4\,\Delta\,.\,r} + \frac{(a+b)\,.\,e_3}{4\,\Delta\,.\,r}$, woraus sich durch Addition und Umkehren des Bruches der Werth von r ergiebt. Aus diesen Formeln kann man sogleich die Formeln für die Radien der äusseren Berührungskreise der Dreiecke $\tau_{(1,2,3)}$ ableiten, wenn man der Reihe nach einen der 3 Summanden im Nenner negativ setzt.

Legt man durch jede Ecke des Urdreiecks zu derjenigen Seite eines jeden von den Nulllinien gebildeten Dreiecks, welche zwischen den Schenkeln des Winkels der Ecke liegt, Parallelen, also durch A zu $V_{(1)}W_{(1)}$, durch B zu $U_{(1)}W_{(1)}$ und durch C zu $U_{(1)}V_{(1)}$, so ergeben sich 4 Dreiecke $\delta_{(1,2,3)}$, welche den Dreiecken $\tau_{(1,2,3)}$ ähnlich sind, und nach einem bekannten Satze zu $\tau_{(1,2,3)}$ und $\Delta$ die dritte Proportionale bilden. Daher ergiebt sich

$$
6.\quad \delta = \frac{(a+b)\,(a+c)\,(b+c)\,.\,\Delta}{2\,abc}, \quad \delta_1 = \frac{(a-b)\,(a-c)\,(b+c)\,.\,\Delta}{2\,abc},
$$

$$
\delta_2 = \frac{(a-b)\,(a+c)\,(b-c)\,.\,\Delta}{2\,abc}, \quad \delta_3 = \frac{(a+b)\,(a-c)\,(b-c)\,.\,\Delta}{2\,abc}.
$$

7. Aus 2) ergeben sich nun zufolge §. 2 (5) und Anmerkung sogleich die Seiten dieser Dreiecke, nämlich für $\delta$, $\frac{(b+c).e_1}{2r}$, $\frac{(a+c).e_2}{2r}$, $\frac{(a+b).e_3}{2r}$, für $\delta_1$, $\frac{(b+c).e}{2r}$, $\frac{(a-b).e_2}{2r}$, $\frac{(a-c).e_3}{2r}$, für $\delta_2$, $\frac{(a+c).e}{2r}$, $\frac{(a-b).e_1}{2r}$, $\frac{(b-c).e_3}{2r}$, für $\delta_3$, $\frac{(a+b).e}{2r}$, $\frac{(a-c).e_1}{2r}$, $\frac{(b-c).e_2}{2r}$. Dann $2\,\Delta : \frac{4\Delta.r}{(b+c).e_1} = \frac{(b+c).e_1}{2r}$ u. s. w.

Bezeichnet man die Radien der um $\delta_{(1,2,3)}$ beschriebenen Kreise mit $\mathfrak{R}_{(1,2,3)}$, so ergiebt sich mit Hülfe der Formel $r = \frac{a.b.c}{4\Delta}$.

8. $\mathfrak{R} = \frac{e_1}{r} . \frac{e_2}{r} . \frac{e_3}{r} . \frac{r}{4}$, $\mathfrak{R}_1 = \frac{e}{r} . \frac{e_2}{r} . \frac{e_3}{r} . \frac{r}{4}$, $\mathfrak{R}_2 = \frac{e}{r} . \frac{e_1}{r} . \frac{e_3}{r} . \frac{r}{4}$, $\mathfrak{R}_3 = \frac{e}{r} . \frac{e_1}{r} . \frac{e_2}{r} . \frac{r}{4}$

Denn $\mathfrak{R} = \frac{(b+c).e_1}{2r} . \frac{(a+c).e_2}{2r} . \frac{(a+b).e_3}{2r} . \frac{a\,b\,c}{2(a+b)(a+c)(b+c)\Delta} = \frac{e_1}{r} . \frac{e_2}{r} . \frac{e_3}{r} . \frac{a.b.c}{16\Delta} = \frac{e_1}{r} . \frac{e_2}{r} . \frac{e_3}{r} . \frac{r}{4}$

Hieraus folgt sogleich

9. $\mathfrak{R} : \mathfrak{R}_1 : \mathfrak{R}_2 : \mathfrak{R}_3 = \frac{1}{e} : \frac{1}{e_1} : \frac{1}{e_2} : \frac{1}{e_3}$

§. 5. Beim Aufsuchen der Verallgemeinerung des Satzes vom gleichseitigen Dreiecke, dass die Entfernungssumme jedes Punctes (die Senkrechten nach der Innenseite der Dreiecksseiten positiv genommen) gleich der Höhe ist, kommt Jacobi einerseits auf die sogenannten Entfernungsörter, andererseits auf den Satz, dass die algebraische Summe der Normalquotienten eines Punctes der Einheit gleich ist. Wegen Verkennung der Hauptlinien für die Entfernungssummen (Nulllinien) bleibt ihm unbekannt, dass der letztere Satz derjenige allgemeine Satz ist, welcher den Satz von der Entfernungssumme für das ungleichseitige Dreieck eben so wohl in sich schliesst, wie für das gleichseitige.

Seien $x_1$, $x_2$, $x_3$ die von einem Puncte X auf die Seiten a, b, c gefällten Senkrechten, welche auf der Innenseite der Dreiecksseiten positiv genommen werden sollen, so ist $\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$.

Denn es ist $XBC + XAC + XAB = \Delta$ oder $\frac{1}{2}a . x_1 + \frac{1}{2}b . x_2 + \frac{1}{2}c . x_3 = \Delta$, woraus sich die Behauptung durch Division mit $\Delta$ ergiebt.

Hieraus folgt, wenn $d_{(1,2,3)}$ die Entfernung des Punctes X von der innern resp. der ersten, zweiten, dritten äusseren Nulllinie bezeichnet, und wenn $d_{(1,2,3)}$ auf derjenigen Seite der Nulllinien, auf welcher die grössere Anzahl der Ecken des Urdreiecks liegt, positiv genommen wird, was wegen der entsprechenden Lage der Seiten $V_{(1)}W_{(1)}$, $U_{(1)}W_{(1)}$, $U_{(1)}V_{(1)}$ in den Dreiecken $AV_{(1)}W_{(1)}$, $BU_{(1)}W_{(1)}$, $CU_{(1)}V_{(1)}$ mit den Seiten a, b, c des Urdreiecks geschehen muss:

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{d \cdot h_1}{S'} = \frac{d \cdot h_2}{S''} = \frac{d \cdot h_3}{S'''} = \frac{d \cdot e}{r}$$

$$\text{II} \quad -x_1 + x_2 + x_3 = \frac{d_1 \cdot h_1}{S_1'} = \frac{d_1 \cdot h_2}{S_1''} = \frac{d_1 \cdot h_3}{S_1'''} = \frac{d_1 \cdot e_1}{r}$$

$$\text{III} \quad x_1 - x_2 + x_3 = \frac{d_2 \cdot h_1}{S_2'} = \frac{d_2 \cdot h_2}{S_2''} = \frac{d_2 \cdot h_3}{S_2'''} = \frac{d_2 \cdot e_2}{r}$$

$$\text{IV} \quad x_1 + x_2 - x_3 = \frac{d_3 \cdot h_1}{S_3'} = \frac{d_3 \cdot h_2}{S_3''} = \frac{d_3 \cdot h_3}{S_3'''} = \frac{d_3 \cdot e_3}{r}$$

Nach dem voranstehenden Satze ist im Bezug auf Dreieck ABC $\frac{x}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1$, ferner im Bezug auf Dreieck CUV $\frac{x_1}{P''} + \frac{x_2}{P'} + \frac{d}{S'''} = 1$, also, wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt und $\frac{d}{S'''}$ transponirt,

$x_1 \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{P''}\right) + x_2 \cdot \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{P'}\right) + \frac{x_3}{h_3} = \frac{d}{S'''}$ und zufolge §. 2 (11) $\frac{x_1}{h_3} + \frac{x_2}{h_3} + \frac{x_3}{h_3} = \frac{d}{S'''}$

oder $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{d \cdot h_3}{S'''}$, woraus mit Hülfe von §. 3 (6) folgt

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{d \cdot h_1}{S'} = \frac{d \cdot h_2}{S''} = \frac{d \cdot h_3}{S'''} = \frac{d \cdot e}{r}$$

Mit Berücksichtigung der positiven und negativen Lage von $d_{1(2,3)}$ ergiebt sich

im Bezug auf Dreieck $AV_1W_1$, $-\frac{d_1}{S'} + \frac{x_2}{P_1'''} + \frac{x_3}{P_1''} = 1$

und im Bezug auf Dreieck $BU_1W_1$, $-\frac{d_2}{S_2''} + \frac{x_1}{P'''} + \frac{x_3}{P_1'} = 1$

endlich im Bezug auf Dreieck $CU_1V_1$, $-\frac{d_3}{S_3'''} + \frac{x_1}{P_1''} + \frac{x_2}{P_1'} = 1$

Hieraus folgt II, III, IV, wenn man die erste Gleichung von diesen der Reihe nach subtrahirt und die vorher citirten Sätze anwendet.

Anm. 1. Man kann auch die von den betreffenden Nulllinien mit den andern Dreiecksseiten gebildeten Dreiecke nehmen, wenn man nach der Lage der x die Vorzeichen derselben wählt.

Anm. 2. Bedeuten $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ Linien aus dem Puncte X, welche gegen die Seiten a, b, c gleich geneigt sind, und sei $\varphi$ der Neigungswinkel, so ist, wenn entsprechend den Zeichen der x die nach der Innenseite der Dreiecksseiten führenden $\xi$ positiv genommen werden, $\xi_1 = \frac{x_1}{\sin \varphi}$, $\xi_2 = \frac{x_2}{\sin \varphi}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{\sin \varphi}$ also $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sin \varphi} = \frac{d \cdot e}{r \cdot \sin \varphi}$ u. s. w. Es gelten also obige Sätze auch für schiefe, unter gleichem Winkel gegen die Dreiecksseiten geneigte Linien, wenn man die Entfernungssummen durch den Sinus des Neigungswinkels dividirt.

In Worten lautet dieser bemerkenswerthe Satz:

Nimmt man die aus einem Puncte auf die Dreiecksseiten gefällten Senkrechten nach der Innenseite aller Dreiecksseiten oder nach der Aussenseite von a, b, c und der Innenseite der beiden andern positiv an, so verhält sich die Entfernungssumme dieses Punctes zu seiner Entfernung von der inneren oder zu a, b, c gehörigen äusseren Nulllinie, wie die Entfernung einer Ecke des Urdreiecks von der Gegenseite zur Entfernung dieser Ecke von der inneren oder zu a, b, c gehörigen äusseren Nulllinie, wie die Excentricität des inneren oder zu a, b, c gehörigen äusseren Berührungskreises zum Radius des umschriebenen Kreises.

Die obigen Entfernungssummen oder $\Sigma_{(1,2,3)}$ sollen der Reihe nach die innere, und erste, zweite, dritte äussere genannt werden, und ihnen, wie auch den entsprechenden Nulllinien soll die innere, und die erste, zweite, dritte äussere Excentricität zugehörig heissen.

Aus obigen Gleichungen folgt nun:

1. Kennt man die Entfernung eines Punctes von einer der Nulllinien, so kennt man auch die betreffende Entfernungssumme.

Für einen Punct in einer der Nulllinien ist die Entfernung von dieser, also auch die betreffende Entfernungssumme $= 0$, woher der Name „Nulllinien".

Ist die Entfernung eines Punctes von einer Nulllinie $= r$, so ist die betreffende Entfernungssumme gleich der zur Nulllinie zugehörigen Excentricität.

Ist die Entfernung eines Punctes von der inneren, oder ersten, zweiten, dritten äusseren Nulllinie gleich der zugehörigen Excentricität, so ist die betreffende Entfernungssumme doppelt so gross als $\varepsilon_{(1,2,3)}$ d. i. die Entfernung des Mittelpunctes des zu der Excentricität gehörigen Berührungskreises vom Mittelpuncte des alle Seiten halbirenden Kreises, da bekanntlich $e^2_{(1,2,3)} = 2\,r\,.\,\varepsilon_{(1,2,3)}$ ist.

Ist die Entfernung eines Punctes von einer Nulllinie $= a, b, c$, so ist die betreffende Entfernungssumme bezüglich $= D_{(1)}E_{(1)}$, $F_{(1)}G_{(1)}$, $H_{(1)}J_{(1)}$, da nach §. 3 (3) Anmerkung

$D_{(1)}E_{(1)} = \frac{a\,.\,e_{(1,2,3)}}{r}$, $F_{(1)}G_{(1)} = \frac{b\,.\,e_{(1,2,3}}{r}$, $H_{(1)}J_{(1)} = \frac{c\,.\,e_{(1,2,3)}}{r}$ ist. U. s. w.

2. $d_{(1,2,3)} = \frac{r\,.\,\Sigma_{(1,2,3)}}{e_{(1,2,3)}}$ d. h. kennt man von einem Puncte seine innere, oder erste, zweite, dritte äussere Entfernungssumme, so kennt man auch seine Entfernung von der inneren oder ersten, zweiten, dritten äusseren Nulllinie.

3. Alle Puncte in gleicher Entfernung von einer der Nulllinien d. h. alle Puncte einer Parallelen zu einer der Nulllinien haben gleiche, der Nulllinie entsprechende Entfernungssumme.

Bekanntlich ist die innere, und erste, zweite, dritte Entfernungssumme

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| von A | $h_1$, | $-h_1$, | $h_1$, | $h_1$ |
| B | $h_2$, | $h_2$, | $-h_2$, | $h_3$ |
| C | $h_3$, | $h_3$, | $h_3$, | $-h_3$ |
| M | $r+\varrho$, | $\frac{1}{4}(\varrho+\varrho_1)$, | $\frac{1}{4}(\varrho+\varrho_2)$, | $\frac{1}{4}(\varrho+\varrho_3)$ |
| O | $3\varrho$, | $\varrho$, | $\varrho$, | $\varrho$ |
| $O_1$ | $\varrho_1$, | $3\varrho_1$, | $-\varrho_1$, | $-\varrho_1$ |
| vom Schwerpuncte | $\frac{1}{3}(h_1+h_2+h_3)$, | $\frac{1}{3}(h_2+h_3-h_1)$, | $\frac{1}{3}(h_1+h_3-h_2)$, | $\frac{1}{3}(h_1+h_2-h_3)$ |

u. s. w., also haben alle Puncte der Parallelen, welche durch einen der erwähnten Puncte zur inneren oder ersten, zweiten, dritten äusseren Nulllinie gezogen ist, die angeführte Entfernungssumme.

4. Die Entfernungssummen zweier Parallelen zu einer der Nulllinien (d. h. der Puncte in diesen Parallelen) verhalten sich wie ihre Entfernungen von der Nulllinie.

Denn wenn $\Sigma_{(1,2,3)}$ und $\Sigma'_{(1,2,3)}$ die Entfernungssummen der beiden Parallelen und d und d' ihre Entfernungen von einer Nulllinie bedeuten, so ist

$$\Sigma_{(1,2,3)} : \Sigma'_{(1,2,3)} = \frac{d \,.\, e_{(1,2,3)}}{r} : \frac{d' \,.\, e_{(1,2,3)}}{r} = d : d'$$

Daher ist die Entfernungssumme einer Parallelen, welche von der inneren Nulllinie 3mal so weit entfernt ist, als der Schwerpunct, $= h_1 + h_2 + h_3$, die Entfernungssumme einer Parallelen, welche von der inneren Nulllinie $^1/_3$mal so weit entfernt ist, als der Mittelpunct des umschriebenen Kreises, $= \varrho$ u. s. w.

5. Die Entfernungssummen von Parallelen, welche in gleicher (natürlich auch dem Vorzeichen nach) Entfernung von den Nulllinien gezogen sind, verhalten sich wie die den Nulllinien zugehörigen Excentricitäten.

Denn wenn d die Entfernung der Parallelen von den Nulllinien ist, so ist

$$\Sigma : \Sigma_1 : \Sigma_2 : \Sigma_3 = \frac{d \,.\, e}{r} : \frac{d \,.\, e_1}{r} : \frac{d \,.\, e_2}{r} : \frac{d \,.\, e_3}{r} = e : e_1 : e_2 : e_3$$

6. Verhalten sich die Entfernungen von Parallelen zu den 4 Nulllinien wie die reciproken Werthe der den Nulllinien zugehörigen Excentricitäten, so sind die Entfernungssummen dieser Parallelen einander gleich.

Denn $\Sigma : \Sigma_1 : \Sigma_2 : \Sigma_3 = d \,.\, e : d_1 \,.\, e_1 : d_2 \,.\, e_2 : d_3 \,.\, e_3$ also

$$\frac{\Sigma}{e} : \frac{\Sigma_1}{e_1} : \frac{\Sigma_2}{e_2} : \frac{\Sigma_3}{e_3} = d : d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{e} : \frac{1}{e_1} : \frac{1}{e_2} : \frac{1}{e_3} \text{ und daher}$$

$$\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$$

7. Die Entfernungssummen von Parallelen, welche bezüglich in der Entfernung $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ zu der inneren und ersten, zweiten, dritten äusseren Nulllinie gezogen sind, sind $= \frac{e}{r} \,.\, \frac{e_1}{r} \,.\, \frac{e_2}{r} \,.\, \frac{e_3}{r} \,.\, \frac{r}{4}$

Denn zufolge 6 und §. 4 (9) sind die Entfernungssummen einander gleich, und, da die Entfernung von der inneren Nulllinie $= \mathfrak{R}$ ist, so muss $\Sigma = \frac{\mathfrak{R} \,.\, e}{r}$, oder nach §. 4 (8) $= \frac{e}{r} \,.\, \frac{e_1}{r} \,.\, \frac{e_2}{r} \,.\, \frac{e_3}{r} \,.\, \frac{r}{4}$ sein.

8. $d \,.\, e = d_1 \,.\, e_1 + d_2 \,.\, e_2 + d_3 \,.\, e_3$

Denn es ist $x_1 + x_2 + x_3 = (-x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 - x_2 + x_3) + (x_1 + x_2 - x_3)$, also auch $\frac{d \,.\, e}{r} = \frac{d_1 \,.\, e_1}{r} + \frac{d_2 \,.\, e_2}{r} + \frac{d_3 \,.\, e_3}{r}$ und $d \,.\, e = d_1 \,.\, e_1 + d_2 \,.\, e_2 + d_3 \,.\, e_3$.

Ist daher ein Punct von 3 Nulllinien gleich weit entfernt, so verhält sich diese Entfernung zur Entfernung von der vierten Nulllinie, wie die der letzteren zugehörige Excentricität zur algebraischen Summe der 3 andern Excentricitäten.

9. $x_1 = \frac{d \,.\, h_1}{2\, S'} - \frac{d_1 \,.\, h_1}{2\, S_1'} = \frac{d_2 \,.\, h_1}{2\, S_2'} + \frac{d_3 \,.\, h_1}{2 \,.\, S_3'}$, $x_2 = \frac{d \,.\, h_2}{2 \,.\, S''} - \frac{d_2 \,.\, h_2}{2 \,.\, S_2''} = \frac{d_1 \,.\, h_2}{2 \,.\, S_1''} + \frac{d_3 \,.\, h_2}{2 \,.\, S_3''}$

$x_3 = \frac{d \,.\, h_3}{2 \,.\, S'''} - \frac{d_3 \,.\, h_3}{2 \,.\, S_3'''} = \frac{d_1 \,.\, h_3}{2 \,.\, S_1'''} + \frac{d_2 \,.\, h_3}{2 \,.\, S_2'''}$

Denn, wenn man II von I abzieht, sowie III und IV addirt, so erhält man $2\, x_1$.

10. Zieht man durch eine Ecke des Urdreiecks eine Parallele zur Gegenseite, so schneidet diese die innere und die zu der Dreiecksseite zugehörige äussere Nulllinie, so wie auch jede der beiden andern äusseren in einem Puncte, welcher von der andern der beiden zusammen geordneten Nulllinie doppelt so weit entfernt ist, als die Ecke.

Denn, wenn die durch A zu a gezogene Parallele die innere Nulllinie in X schneidet, so ist für X $d = 0$ und $x_1 = h_1$, also nach 9) $h_1 = -\frac{d_1 \cdot h_1}{2 \cdot S_1'}$ oder $d_1 = -2 \cdot S_1'$.

11. Wenn ein Punct in einer der 3 äusseren Nulllinien liegt, so ist seine Entfernung von der zu der Nulllinie zugehörigen Seite gleich der Hälfte der inneren Entfernungssumme des Punctes, von einer der beiden andren Seiten aber gleich der Hälfte derjenigen Entfernungssumme, welche der zur dritten Seite zugehörigen Nulllinie entspricht; wenn dagegen ein Punct in der inneren Nulllinie liegt, so ist seine Entfernung von den Seiten a, b, c gleich der mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Hälfte der ersten, zweiten, dritten äusseren Entfernungssumme.

Denn, wenn X in der ersten äusseren Nulllinie liegt, so ist $d_1 = 0$, also nach 9) $x_1 = \frac{d \cdot h_1}{2 \cdot S'}$, $x_2 = \frac{d_3 \cdot h_2}{2 \cdot S_3'''}$, $x_3 = \frac{d_2 \cdot h_3}{2 \cdot S_2''''}$. Das Uebrige folgt ebenso.

Anm. Hieraus ergiebt sich, wie man sogleich erkennt, eine leichte Construction des Ortes für diejenigen Puncte, welche eine vorgeschriebene innere, oder erste, zweite, dritte äussere Entfernungssumme haben sollen.

12. Eine zu einer Nulllinie gezogene Parallele trifft die drei übrigen Nulllinien in 3 Puncten so, dass dem absoluten Werthe nach die Entfernungen des einen Punctes von der Seite a, eines andern von der Seite b und des dritten von der Seite c einander und der jener Nulllinie entsprechenden halben Entfernungssumme der Parallelen gleich sind.

Denn treffe die in der Entfernung d zur innern Nulllinie gezogene Parallele die erste, zweite, dritte äussere Nulllinie in den Puncten X, Y, Z, und seien die aus diesen Puncten auf a, b, c gefällten Senkrechten $x_{1(2,3)}$, $y_{1(2,3)}$, $z_{1(2,3)}$, so muss, da für die Puncte X, Y, Z bezüglich $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ist, nach 9) $x_1 = \frac{d \cdot h_1}{2 S'}$, $y_2 = \frac{d \cdot h_2}{2 S''}$, $z_3 = \frac{d \cdot h_3}{2 \cdot S'''}$ also nach dem Hauptsatze dieses §. $x_1 = y_2 = z_3 = {}^1/_2 \Sigma$ sein. In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

---

Es kann offenbar nicht davon die Rede sein, das Thema erschöpft zu haben, doch hoffe ich, dass nichts Wesentliches von mir übersehen ist; ich schliesse daher hiermit ab, und wünsche nur, dass die Arbeit nachsichtige Leser finden möge.

A. Dietrich.