Vorrede.

In den beiden höchst anregenden Programmen des verstorbenen Prof. Jacobi in Pforta über innere und äussere Entfernungsörter sind zwei wesentlich verschiedene Beziehungen der sogenannten Entfernungsörter zusammen verarbeitet. Es sind nämlich einerseits die innern Entfernungsörter der Graden (Gränzparallelen nach Jacobi), in welcher sich die drei äussern Aehnlichkeitspuncte der drei äusseren Berührungskreise des Dreiecks befinden, und die äusseren Entfernungsörter den Graden, in welchen sich zwei innere und ein äusserer Aehnlichkeitspunct des inneren und zweier äusseren Berührungskreise finden, parallel, woraus für jene Linien die Gleichheit der Entfernungssummen und ihr Name folgt. Andrerseits liegen die beiden einen Entfernungsort bestimmenden Puncte zweier Dreiecksseiten in 2 Kreisen, welche um 2 Pole (Puncte des umschriebenen Kreises, welche senkrecht über den Mitten der Dreiecksseiten liegen) beschrieben sind. Die erste Beziehung der sogenannten Entfernungsörter werde ich, wenn es gestattet ist, in dem nächsten Programme abhandeln und darin durch die sich ergebenden einfachen und allgemein gültigen Formeln nachweisen, dass jene oben angedeuteten Linien die Hauptlinien der Betrachtung sind. Die andre Beziehung zu den Polen der Dreiecksseiten wird in der folgenden Abhandlung, die naturgemäss keine erschöpfende sein kann, in Betrachtung gezogen werden.

Einleitung.

§. 1. Zieht man in einem Dreiecke durch die Ecken Transversalen, welche sich in einem Puncte schneiden, und durch die Mitten der Seiten Parallelen zu den Transversalen aus den Gegenecken, so schneiden sich diese ebenfalls in einem Puncte, welcher mit dem Schwerpuncte des Dreiecks und dem Durchschnittspuncte der Transversalen in einer Graden so liegt, dass der Schwerpunct sich zwischen beiden befindet, und welcher vom Schwerpuncte und von den Mitten der Seiten halb so weit entfernt ist, als der Durchschnittspunct der Transversalen vom Schwerpuncte und von den Gegenecken.

Anm. Sämmtliche Figuren fehlen, doch lassen sich dieselben aus den gemachten Angaben leicht zeichnen.

Fig. I. Sei L der Schwerpunct des Dreiecks ABC und K der Durschschnittspunct der Transversalen AG, BH, CJ, seien ferner D, E, F die Mitten der 3 Seiten und DM und EM Parallelen zu AG und BH, so sind nach einem bekannten Satze die Seiten des Dreiecks DEF parallel den Seiten des Dreiecks ABC und halb so gross wie diese. Da nun wegen Parallelität der Seiten Dreieck DEM $\sim$ ABH ist, so muss DM : AK = EM : BK = 1 : 2 sein, und da bekanntlich der Schwerpunct von der Mitte einer Seite halb so weit entfernt ist, als von deren Gegenecke, so muss Dreieck AKL $\sim$ DML sein, also auch ML : LK = 1 : 2 und $\sphericalangle$ KLA = MLD, daher KLM eine gerade Linie, folglich ist Dreieck LFM $\sim$ LCK, daher $\sphericalangle$ LMF = LKC, also MF $\parallel$ KC und FM : KC = 1 : 2.

Hieraus ergiebt sich:

1) Der Mittelpunct des einem Dreiecke umschriebenen Kreises liegt mit dem Schwerpuncte und dem Höhendurchschnittspuncte in einer geraden Linie so, dass der Schwerpunct sich zwischen den beiden andern Puncten befindet, und ist vom Schwerpuncte und den Seiten des Dreiecks halb so weit entfernt, als der Höhendurchschnitt vom Schwerpuncte und den Gegenecken.

In der Folge soll unter dem oberen Höhenabschnitte die Entfernung des Höhendurchschnitts von einer Ecke verstanden werden.

Anm. Die Transversalen AG, BH, CJ sollen von nun ab als Höhen angesehen werden, und daher M als Mittelpunct des umschriebenen Kreises.

2) Die Linie, welche die Mitte einer Seite mit der Mitte des oberen Abschnitts ihrer Höhe verbindet, ist gleich dem Radius des umschriebenen Kreises, halbirt die Verbindungslinie des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises und des Höhendurchschnitts und wird von dieser Linie halbirt.

Denn wenn P die Mitte von AK ist, so ist KP und PA $\#$ DM, also sind PAMD und KPMD Parallelogramme.

3) Die Mitte der Linie, welche den Höhendurchschnitt mit dem Mittelpuncte des umschriebenen Kreises verbindet, ist Mittelpunct eines Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten und der oberen Höhenabschnitte geht, und der Radius dieses Kreises ist halb so gross, als der Radius des umschriebenen Kreises.

Denn wenn sich KM und PD in N schneiden, so ist nach vorigem Satze PN = ND $= \frac{1}{2}$PD $= \frac{1}{2}$r.

4) Der die Seiten eines Dreiecks halbirende Kreis muss auch durch die Fusspuncte der Höhen gehn.

Denn in einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Scheitel des rechten Winkels von der Mitte der Gegenseite um deren Hälfte entfernt, also GN = PN = DN.

5) Der Kreis, welcher dem durch die Fusspuncte der Höhen bestimmten Dreiecke umschrieben ist, halbirt die Seiten des Dreiecks und die oberen Höhenabschnitte, und der Radius dieses Kreises ist halb so gross, als der Radius des umschriebenen Kreises.

Folgt unmittelbar aus 4) und 3), da durch 3 Puncte ein Kreis seiner Lage und Grösse nach vollständig bestimmt ist.

Anm. Ist das Dreieck ABC ein rechtwinkliges, so fallen die Fusspuncte zweier Höhen mit dem Scheitel des rechten Winkels zusammen, daher gilt diese Umkehrung nicht ohne Hinzufügung eines dritten den Kreis bestimmenden Punctes.

6) Der um die Mitte einer Seite mit deren Hälfte, sowie der um die Mitte des oberen Abschnittes ihrer Höhe mit der Hälfte des Abschnitts geschlagene Kreis geht durch

die Fusspuncte der beiden andern Höhen; daher ist die Linie, welche die Mitte einer Seite mit der Mitte des obern Abschnitts ihrer Höhe verbindet, ein auf der Linie, welche die Fusspuncte der beiden andern Höhen verbindet, senkrechter Durchmesser des die Seiten halbirenden Kreises, welcher diese Linie, so wie die beiden zu ihr gehörenden Bogen halbirt.

Denn da die Winkel bei J und H rechte sind, so ist $BD = DC = DJ = DH$ und $AP = PK = JP = PH$.

7) Der nach einer Ecke gezogene Radius des umschriebenen Kreises steht auf der Linie senkrecht, welche die Fusspuncte der Höhen und der beiden andern Ecken verbindet.

Denn, wie schon erwähnt, ist APDM ein Parallelogramm, also $AM \parallel PD$; da nun nach 6) $PD \perp JH$ ist, muss auch $AM \perp JH$ sein.

8) Der Peripheriewinkel in dem die Seiten halbirenden Kreise, welcher auf dem durch eine Dreiecksseite abgeschnittenen Bogen steht, ist gleich der Differenz der beiden an der Seite anliegenden Winkel.

Da AM ein Radius des umschriebenen Kreises und AG eine Höhe ist, so ist nach einem bekannten Satze $\measuredangle\, GAM = B - C$. Nun ist aber $PD \parallel AM$, also ist $\measuredangle\, GPD = B - C$.

9) Der Peripheriewinkel in dem die Seiten halbirenden Kreise, welcher auf dem halben durch eine Dreiecksseite abgeschnittenen Bogen steht, ist gleich dem Winkel, welcher von der Höhe zu dieser Seite und der Halbirungslinie des Gegenwinkels eingeschlossen wird.

Denn beide Winkel sind gleich der halben Differenz der an der Seite anliegenden Winkel.

10) Verlängert man die Linie, welche den Mittelpunct des umschriebenen Kreises mit der Mitte einer Seite verbindet, über die Mitte der Seite hinaus um sich selbst, so ist der Endpunct der Verlängerung Mittelpunct eines Kreises, welcher durch die Endpuncte der Seite und durch den Höhendurchschnitt geht, und der Radius dieses Kreises ist gleich dem Radius des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises.

Denn, wenn MDU eine gerade Linie und $DU = DM$ ist, so ist UKAM ein Parallelogramm, da $KA \parallel UM$ und zufolge 1) $KA = UM$ ist, und UBMC ist ein gleichseitiges Parallelogramm, da die Diagonalen sich halbiren und auf einander senkrecht stehn.

11) Die Mittelpuncte der Kreise, welche durch 2 Ecken des Dreiecks und den Höhendurchschnitt gehen, bestimmen ein Dreieck, dessen Seiten parallel und gleich den Seiten des Urdreiecks sind.

Seien V und W die Endpuncte der Verlängerungen von EM und FM um sich selbst, so müssen eben so wie UKAM auch VKBM und WKCM Parallelogramme sein, also werden AU, BV, CW in N halbirt, also sind auch ABUV, BCVW, ACUW Parallelogramme.

12) Die Mittelpuncte der Kreise, welche durch 2 Ecken des Dreiecks und den Höhendurchschnitt gehen, bestimmen ein Dreieck, für welches der Mittelpunct des umschriebenen Kreises und der Höhendurchschnitt ihre Bedeutung vertauschen.

Denn nach 10) ist $UK = VK = WK = r$, und da MU, MV, MW auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht stehen, müssen sie auch auf den nach 11) parallelen Seiten des Dreiecks UVW senkrecht stehen.

13) Der die Seiten eines Dreiecks halbirende Kreis muss diese Bedeutung behalten auch für das durch die erwähnten Mittelpuncte bestimmte Dreieck.

Denn nach 3) liegt der Mittelpunct des die Seiten halbirenden Kreises in der Mitte zwischen Höhendurchschnitt und Mittelpunct des umschriebenen Kreises, daher ergiebt sich zufolge 12) sogleich die Behauptung.

Da es nicht Zweck der Arbeit ist, die Beziehung der Dreiecke ABC und UVW näher ins Auge zu fassen, so schliesse ich diese einleitende Betrachtung mit der Bemerkung, dass durch 6) schon auf das Folgende hingewiesen ist.

Von den Polen der Dreiecksseiten.

§. 2. Vorbemerkung. Der Allgemeinheit wegen ist in der folgenden Betrachtung das Dreieck ABC als ungleichseitig angenommen, und zwar so, dass $a > b > c$ ist. Wenn nun $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, $\frac{1}{2}(b + c - a) = s_1$, $\frac{1}{2}(a + c - b) = s_2$, $\frac{1}{2}(a + b - c) = s_3$ gesetzt wird, so muss auch $s > s_3 > s_2 > s_1$ sein; wenn ferner ϱ den Radius des innern Berührungskreises, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien der zu a, b, c gehörenden äusseren bezeichnet, so muss auch $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho$ sein, da bekanntlich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC oder $\Delta = \varrho s = \varrho_1 s_1 = \varrho_2 . s_2 = \varrho_3 . s_3$ ist.

Erklärung. Pole einer Dreiecksseite sollen (analog den Polen eines Kugelkreises) die Endpuncte des auf der Dreiecksseite senkrechten Durchmessers (Axe) in dem um das Dreieck beschriebenen Kreise genannt werden. Der Pol, welcher mit dem Dreiecke auf derselben Seite der Dreiecksseite liegt, soll der obere, der andere der untere heissen, beide zu einander Gegenpole. Daher:

1) Die Pole einer Dreiecksseite sind Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis die Dreiecksseite ist.

2) Der untere oder obere Pol einer Dreiecksseite befindet sich auf der inneren resp. äusseren Halbirungslinie des Gegenwinkels dieser Seite, und umgekehrt: die Senkrechte aus der Mitte einer Dreiecksseite trifft die innere und äussere Halbirungslinie des Gegenwinkels in Puncten, die sich in der Peripherie des um das Dreieck beschriebenen Kreises befinden und daher Pole der Dreiecksseite sind.

3) Der um den unteren oder oberen Pol einer Dreiecksseite mit seiner Entfernung von den Endpuncten geschlagene Kreis trifft jede von den beiden andern Seiten in einem zweiten Puncte, welcher von der Gegenecke der Seite, zu welcher der Pol gehört, um die andre von den beiden Seiten entfernt ist. Fig. 2.

Denn bezeichnet man den unteren und oberen Pol der Seiten a, b, c mit $A_{1(2)}$, $B_{1(2)}$, $C_{1(2)}$ und die Durchschnittspuncte der Kreise um $A_{1(2)}$ mit c und b, um $B_{1(2)}$ mit c und a, um $C_{1(2)}$ mit b und a resp. durch $F_{(1)}$ und $J_{(1)}$, $E_{(1)}$ und $H_{(1)}$, $D_{(1)}$ und $G_{(1)}$, so ist Dreieck $A_{1(2)}J_{(1)}A \cong A_{1(2)}BA$, da $AA_{1(2)} = AA_{1(2)}$, $BA_{1(2)} = J_{(1)}A_{1(2)}$, $\sphericalangle BAA_{1(2)} = J_{(1)}AA_{1(2)}$ nach 2) und $\sphericalangle ABA_{1(2)} + AJ_{(1)}A_{1(2)} \gtrless 180^0$, da $J_{(1)}$ nicht in der Peripherie des umschriebenen Kreises liegt; eben so ist Dreieck $AF_{(1)}A_{1(2)} \cong ACA_{1(2)}$ und daher $AJ_{(1)} = AB$ und $AF_{(1)} = AC$.

In gleicher Weise ergiebt sich $BH_{(1)} = AB$ und $BE_{(1)} = BC$, sowie $CG_{(1)} = AC$ und $CD_{(1)} = BC$.

Anm. 1. Man könnte den Beweis auch mit Hülfe des Satzes führen, dass der Centriwinkel doppelt so gross ist, als der Peripheriewinkel auf demselben Bogen; ich ziehe aber den obigen Beweis vor wegen der unveränderten Ausdrucksweise für alle Fälle.

Anm. 2. Durch die eingeklammerten Indices wird zugleich ein zweiter Fall erwiesen, und im Folgenden gehört zu diesem zweiten Falle das untere von den beiden Zeichen $\mp$. Eine eingeklammerte Null (0) bedeutet, dass in dem zweiten Falle der Buchstabe ohne Index genommen werden soll.

4) Der um den unteren oder oberen Pol einer Seite mit seiner Entfernung von den Endpuncten der zugehörigen Seite geschlagene Kreis schneidet auf jeder der beiden andern Seiten eine Sehne ab, welche gleich der Differenz resp. Summe der beiden andern Seiten ist.

Aus 3) ergiebt sich sogleich $CJ_{(1)} = BF_{(1)} = b \mp c$, $AE_{(1)} = CH_{(1)} = a \mp c$ und $AD_{(1)} = BG_{(1)} = a \mp b$.

5) Die von dem unteren oder oberen Pole einer Seite auf die beiden andern Seiten gefällten Senkrechten theilen die grössere innerlich, die kleinere äusserlich in 2 Theile, von denen der eine gleich der halben Summe, der andere gleich der halben Differenz dieser Seiten ist.

Sei $A_{1(2)}P_{(1)} \perp AC$ und $A_{1(2)}Q \perp AB$, so sind $P_{(1)}$ und $Q_{(1)}$ die Mitten von $CJ_{(1)}$ und $BF_{(1)}$, da der Mittelpunct eines Kreises senkrecht über der Mitte einer jeden Sehne liegt, also ist $CP_{(1)} = BQ_{(1)} = \frac{1}{2}(b \mp c)$ nach 4), daher $AP_{(1)} = b - \frac{1}{2}(b \mp c) = \frac{1}{2}(b \pm c)$ und $AQ_{(1)} = \frac{1}{2}(b \mp c) \pm c = \frac{1}{2}(b \pm c)$.

In gleicher Weise ergiebt sich die Behauptung für die Senkrechten aus den andern Polen.

6) Fällt man aus den beiden Polen einer Seite Senkrechte auf eine der beiden andern Seiten, so sind die Fusspuncte der Senkrechten um die dritte Seite von einander entfernt.

Folgt unmittelbar aus 5), so wie auch

7) Schlägt man mit der Entfernung des untern oder obern Pols von der Gegenecke der zugehörigen Seite einen Kreis, so schneidet dieser auf den beiden andern Seiten eine Sehne ab, welche gleich der Summe resp. Differenz dieser Seiten ist.

8) Schlägt man um die gleichartigen (die beiden oberen oder unteren) oder ungleichartigen (ein oberer und ein unterer) Pole zweier Seiten mit ihren Entfernungen von den Endpuncten der zugehörigen Seite Kreise, so ist der obere resp. untere Pol der dritten Seite gleich weit entfernt von den beiden nicht mit einer Ecke zusammen fallenden Durchschnittspuncten in jenen Seiten.

Es ist Dreieck $CD_{(1)}A_2 \cong BE_{(1)}A_2$, da $A_2C = A_2B$ nach 1), $D_{(1)}C = E_{(1)}B = BC$ nach 3) und $\sphericalangle A_2CD_{(1)} = A_2BE_{(1)}$ als Peripheriewinkel oder Nebenwinkel von Peripheriewinkeln auf gleichem Bogen, daher $A_2D_{(1)} = A_2E_{(1)}$. Eben so ist auch Dreieck $A_1CD_{(1)} \cong A_1BE_{1(0)}$, also $A_1D_{(1)} = A_1E_{1(0)}$.

In gleicher Weise ergiebt sich auch $B_2F_{(1)} = B_2G_{(1)}$, $B_1F_{(1)} = B_1G_{1(0)}$, $C_2H_{(1)} = C_2J_{(1)}$, $C_1H_{(1)} = C_1J_{1(0)}$.

9) Schlägt man um die gleichartigen oder ungleichartigen Pole zweier Seiten mit ihren Entfernungen von den Endpuncten der zugehörigen Seite Kreise, so muss der durch die beiden nicht mit einer Ecke zusammenfallenden Durchschnittspuncte in jenen Seiten und durch die Gegenecke der dritten Seite gelegte Kreis durch den oberen resp. unteren Pol der dritten Seite gehn.

Die Richtigkeit folgt sogleich aus 8) und der Umkehrung 2).

§. 3. Da in jedem Dreiecke die Mittelpuncte des inneren und der 3 äusseren Berührungskreise die Durchschnittspuncte der 3 inneren und je einer inneren und der beiden andern äusseren Winkelhalbirenden sind, und da die inneren Winkelhalbirenden auf den zugehörigen äusseren senkrecht stehn, so kann jedes Dreieck als Höhendreieck des durch die Mittelpuncte der 3 äusseren Berührungskreise bestimmten Dreiecks angesehen werden. Daher ergiebt sich aus §. 1 (5) und (6), wenn man den inneren und den zu einer Dreiecksseite gehörenden äusseren Berührungskreis zum unteren Pole dieser Seite und die beiden andern Berührungskreise zum oberen Pole zugehörig nennt, folgender Satz:

Der untere oder obere Pol einer Seite ist von den Endpuncten dieser Seite und den Mittelpuncten der zugehörigen Berührungskreise gleich weit entfernt.

Anm. Gewöhnlich wird dieser Satz, der sonst in anderer Form ausgesprochen wird und zum Lösen vieler Aufgaben von Wichtigkeit ist, durch Betrachtung der Winkel erwiesen.

Aus diesem Satze ergiebt sich:

1) Die Linie, welche die gleichartigen oder ungleichartigen Pole zweier Seiten verbindet, ist parallel und gleich der halben Centrale der beiden dem oberen resp. unteren Pole der dritten Seite zugehörigen Berührungskreise.

Denn die Linie, welche die Mitten zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist parallel und halb so gross, als die dritte.

2) Die Entfernung des unteren oder oberen Pols einer Seite von dieser Seite ist gleich der halben Differenz resp. Summe und von jeder der beiden andern Seiten gleich der halben Summe resp. Differenz der Radien der zugehörigen Berührungskreise.

Fig. III. Sei $A_{1(2)}P_1 \perp AC$ und $A_{1(2)}Q_{(1)} \perp AB$ und seien D, E, F die Mitten der Seiten a, b, c, ferner $O_{(1,2,3)}$ die Mittelpuncte und $\varrho_{(1,2,3)}$ die Radien des inneren und der zu a, b, c gehörenden äusseren Berührungskreise, endlich $G_{(1,2,3)}$, $H_{(1,2,3)}$, $J_{(1,2,3)}$ die bezüglichen Berührungspuncte dieser Kreise mit den Seiten a, b, c, so ist nach dem Hauptsatze dieses §. jeder Pol die Mitte einer der beiden convergirenden Seiten dreier Trapeze, deren Ecken die Mittelpuncte der dem Pole zugehörigen Berührungskreise und die Berührungspuncte dieser Kreise mit den Seiten a, b, c sind, z. B. $A_{1(2)}$ die Mitte von $O_{(2)}O_{1(3)}$ in den Trapezen $O_{(2)}O_{1(3)}G_{1(3)}G_{(2)}$, $O_{(2)}O_{1(3)}H_{1(3)}H_{(2)}$, $O_{(2)}O_{1(3)}J_{1(3)}J_{(2)}$. Da nun bekanntlich die aus der Mitte einer der beiden convergirenden Seiten zu den parallelen Seiten eines Trapezes gezogene und von der andern convergirenden Seite begrenzte Parallele gleich der halben Differenz oder Summe der beiden parallelen Seiten ist, je nachdem sich die convergirenden Seiten ohne Weiteres oder erst in der Verlängerung schneiden, so ist $A_1D = \frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho)$, $A_1P = A_1Q = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho)$, $A_2D = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3)$, $A_2P_1 = A_2Q_1 = \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_3)$.

In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

3) In allen Dreiecken, die eine Seite und deren Gegenwinkel gleich haben, ist die Differenz der Radien des zu dieser Seite gehörenden äusseren und des inneren Berührungskreises, so wie die Summe der Radien der beiden andern Berührungskreise eine constante Grösse. ($a \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ uud $a \,.\, \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A$.)

Die Richtigkeit der Behauptung ergiebt sich sogleich aus 2).

Anm. Sind die Gegenwinkel nicht gleich, sondern Supplementswinkel, so ist die Differenz des einen Radienpaares der Summe des andern gleich.

4) Die Summe der 3 äusseren Berührungskreise ist um den Radius des innern grösser als der doppelte Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Es ist nach 2) $A_1D = \frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho)$ und $A_2D = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3)$, also wenn r den Radius des umschriebenen Kreises bedeutet, $A_1D + A_2D$ oder $2r = \frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho) + \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3$, woraus $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 4r + \varrho$ folgt.

5) Der Radius des äusseren Berührungskreises einer Seite ist kleiner, gleich oder grösser als die Summe der Radien der 3 andern Berührungskreise, je nachdem die Seite einem spitzen, rechten oder stumpfen Winkel gegenüber liegt, und zwar im ersten und letzten Falle um die vierfache Entfernung des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises von jener Seite.

Wenn M der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ist, so ist im ersten Falle $A_2D = r + MD$ und $A_1D = r - MD$ also $2 . MD = A_2D - A_1D = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3) - \frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho)$, woraus sogleich $\varrho_1 + 4 . MD = \varrho + \varrho_2 + \varrho_3$ folgt.

Im zweiten Falle liegt bekanntlich der Mittelpunct des umschriebenen Kreises in der Hypotenuse, also fallen D und M zusammen, daher ist $A_1D = A_2D (= r)$ d. i. $\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho) = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3)$ und daher $\varrho_1 = \varrho + \varrho_2 + \varrho_3$.

Da im letzten Falle der Mittelpunct des umschriebenen Kreises ausserhalb des Dreiecks und unterhalb der Gegenseite des stumpfen Winkels liegt, so ist $A_2D = r - MD$ und $A_1D = r + MD$ also $2 . MD = A_1D - A_2D = \frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho) - \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3)$, woraus sich sogleich $\varrho_1 - 4 . MD = \varrho + \varrho_2 + \varrho_3$ ergiebt.

6) Nimmt man die Senkrechte aus dem Mittelpunkte des einem stumpfwinkligen Dreiecke umschriebenen Kreises nach der Gegenseite des stumpfen Winkels negativ an, da sie sich auf der äusseren Seite dieser Dreiecksseite befindet, so kann man den vorigen Satz auch folgendermassen aussprechen:

Die Entfernung des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von einer Seite ist gleich dem vierten Theile der Differenz, welche erhalten wird, wenn man den Radius des zu der Dreiecksseite gehörenden äusseren Berührungskreises von der Summe der Radien der 3 anderen Berührungskreise subtrahirt.

7) Mit Beibehaltung der in 6) aufgestellten Bestimmung folgt: die Summe der Entfernungen des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von den 3 Seiten ist um den Radius des inneren Berührungskreises grösser als der Radius des umschriebenen Kreises.

Denn nach 6) ist $MD = \frac{1}{4}(\varrho + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_1)$, $ME = \frac{1}{4}(\varrho + \varrho_1 + \varrho_3 - \varrho_2)$, $MF = \frac{1}{4}(\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3)$, also $MD + ME + MF = \frac{1}{4}(3\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) = r + \varrho$ nach 4).

8) Der obere Abschnitt der Höhe zur Gegenseite eines stumpfen Winkels führt nicht vom Scheitel aus zu diesem hin, sondern in entgegengesetzter Richtung, nimmt man daher für diesen Fall den oberen Abschnitt negativ an, so erhalten wir aus 6) und 7) mit Hülfe von §. 1 (1):

Der obere Abschnitt einer Höhe ist gleich der Hälfte der Differenz, welche erhalten wird, wenn man den Radius des mit der Höhe zu einerlei Seite gehörenden äusseren Berührungskreises von der Summe der Radien der 3 anderen Berührungskreise subtrahirt, und die Summe der oberen Höhenabschnitte ist um den Durchmesser des inneren Berührungskreises grösser als der Durchmesser des umschriebenen Kreises.

9) Die Entfernung der Mittelpunkte zweier äusseren Berührungskreise oder des inneren und eines äusseren Berührungskreises ist mittlere geometrische Proportionale zum Durchmesser des umschriebenen Kreises und zur Summe resp. Differenz der Durchmesser der beiden Berührungskreise.

Da A_1BA_2 ein rechtwinkliges Dreieck ist, so ist A_1B zu A_1A_2 oder $2r$ und A_1D, sowie A_2B zu A_1A_2 und A_2D die mittlere geometrische Proportionale, daher ist nach 2) $A_1B = \sqrt{r(\varrho_1 - \varrho)}$ und $A_2B = \sqrt{r(\varrho_2 + \varrho_3)}$. Nun ist aber nach dem Hauptsatze $A_1B = A_1O = A_1O_1$ und $A_2B = A_2O_2 = A_2O_3$, also ist $OO_1 = 2\sqrt{r(\varrho_1 - \varrho)}$ oder $\sqrt{2r(2\varrho_1 - 2\varrho)}$ und $O_2O_3 = 2\sqrt{r(\varrho_2 + \varrho_3)} = \sqrt{2r(2\varrho_2 + 2\varrho_3)}$.

In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

10) Die Summe der Quadrate der Centralen der beiden zum unteren und oberen Pole einer Seite gehörenden Berührungskreise ist 16mal so gross als das Quadrat vom Radius des umschriebenen Kreises.

Denn $A_1B^2 + A_2B^2 = A_1A_2^2$ oder $\frac{1}{4}OO_1^2 + \frac{1}{4}O_2O_3^2 = 4r^2$.

11) Die Summe der Quadrate der Centralen der 4 Berührungskreise ist 48mal so gross als das Quadrat vom Radius des umschriebenen Kreises.

Folgt unmittelbar aus 10).

§. 4. Der Punct (F resp. F_1 in BC), in welchem eine Seite von der inneren oder äusseren Halbirungslinie des Gegenwinkels geschnitten und innerlich oder äusserlich nach dem Verhältnisse der beiden andern Seiten getheilt wird, soll der innere oder äussere Verhältnisspunct der Seite und dem unteren oder oberen Pole dieser Seite zugehörig heissen.

Die Entfernungen des unteren oder oberen Pols einer Seite von deren Gegenecke und von dem Mittelpuncte eines zugehörigen Berührungskreises, so wie die Entfernungen des Pols von dem Mittelpuncte des Berührungskreises und von dem zugehörigen Verhältnisspuncte verhalten sich wie die Entfernungen des Mittelpuncts des Berührungskreises von der Ecke und von dem Verhältnisspuncte.

Fig. IV. Es ist $\sphericalangle AA_1C = FA_1C$ und $\sphericalangle A_1AC = A_1CF$, also Dreieck $AA_1C \sim A_1CF$, darum verhält sich $A_1A : A_1C = A_1C : A_1F = AC : CF$; nun verhält sich auch $AC : CF = AO_{(1)} : FO_{(1)}$, da $CO_{(1)}$ Halbirungslinie von $\sphericalangle C$ ist; folglich ist
$A_1A : A_1C = A_1C : A_1F = AO_{(1)} : FO_{(1)}$ oder, da nach §. 3 $A_1C = A_1O_{(1)}$ ist,
$A_1A : A_1O_{(1)} = A_1O_{(1)} : A_1F = AO_{(1)} : FO_{(1)}$.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass $A_2A : A_2O_{2(3)} = A_2O_{2(3)} : A_2F_1 = AO_{2(3)} : F_1O_{2(3)}$ ist.

Anm. In allen Figuren sind $A_{1(2)}$, $B_{1(2)}$, $C_{1(2)}$ die Pole der Seiten a, b, c und $O_{(1,2,3)}$ die Mittelpuncte der Berührungskreise, deren Berührungspuncte mit Seite a in Fig. III., IV., V durch $G_{(1,2,3)}$ bezeichnet sind.

Hieraus ergiebt sich:

1) Die Potenz des Mittelpuncts eines der 4 Berührungskreise eines Dreiecks für den umschriebenen Kreis ist gleich dem Rechtecke (Producte) aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Radius des Berührungskreises.

Wegen Gleichheit der rechten Winkel und Parallelität der Linien A_1A_2 und und $O_{(1,2,3)}\,G_{(1,2,3)}$ ist Dreieck $AA_1A_2 \sim O_{(1)}G_{(1)}F \sim O_{2(3)}G_{2(3)}F_1$, daher verhält sich $A_1A_2 : A_1A = FO_{(1)} : G_{(1)}O_{(1)}$, so wie nach vorstehendem Satze $A_1A : A_1O_{(1)} = AO_{(1)} : FO_{(1)}$, folglich auch $A_1A_2 : A_1O_{(1)} = AO_{(1)} : G_{(1)}O_{(1)}$, d. h. es ist $A_1O \cdot AO = 2r\varrho$ und $A_1O_1 \cdot AO_1 = 2r\varrho_1$. In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

2) Bezeichnet man $MO_{(1,2,3)}$ durch $\varrho_{(1,2,3)}$, so ist $e = \sqrt{r(r - 2\varrho)}$ und $e_{1(2,3)} = \sqrt{r(r + 2\varrho_{1(2,3)})}$.

Denn zieht man von $O_{(1,2,3)}$ gerade Linien durch M, welche den Kreis um M in $X_{(1,2,3)}$ und $Y_{(1,2,3)}$ schneiden, so ist nach 1) $O_{(1,2,3)}X_{(1,2,3)} \cdot O_{(1,2,3)}Y_{(1,2,3)} = 2r\varrho_{(1,2,3)}$ oder $(r + e)(r - e) = 2r\varrho$ und $[e_{1(2,3)} + r]\,[e_{1(2,3)} - r] = 2r\varrho_{1(2,3)}$, woraus sich die Behauptung ergiebt.

3) Die Summe der Quadrate der Excentricitäten (Entfernungen des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises von den Mittelpuncten) der 4 Berührungskreise ist 12mal so gross, als der Quadrat vom Radius des umschriebenen Kreises.

Denn $e^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = r^2 - 2r\varrho + r^2 + 2r\varrho_1 + r^2 + 2r\varrho_2 + r^2 + 2r\varrho_3 = 4r^2 + 2r(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho) = 4r^2 + 2r \, . \, 4r$ oder $12r^2$ nach §. 2 (3).

4) Die Summe der Quadrate der Centralen der 4 Berührungskreise ist 4mal so gross als die Summe der Quadrate der Excentricitäten derselben.

Folgt unmittelbar aus §. 3 (11) und aus vorigem Satze.

5) Der die Seiten eines Dreiecks halbirende Kreis berührt die 4 Berührungskreise des Dreiecks.

Fig. V. Sei K der Mittelpunct und HH_1 ein auf BC in J senkrechter Durchmesser des die Seiten halbirenden Kreises, heisse (analog dem früheren) H der untere und H_1 der obere Pol und schneiden die Graden vom unteren und oberen Pole nach den inneren resp. äusseren (in der Verlängerung befindlichen) Berührungspuncten von BC den Kreis um K in $L_{(1,2,3)}$, so ist, wenn $F_{(1)}$ Verhältnisspunct der Seite a ist, nach dem Hauptsatze $A_1A : A_1O_{(1)} = AO_{(1)} : FO_{(1)}$, daher wegen Parallelität der aus A, A_1 und $O_{(1)}$ auf BC gefällten Senkrechten AE, A_1D, $O_{(1)}G_{(1)}$

$DE : DG_{(1)} = EG_{(1)} : FG_{(1)}$ und, da die Potenz eines Punctes $(G_{(1)})$ für denselben Kreis constant ist, $DG_{(1)} : L_{(1)}G_{(1)} = HG_{(1)} : EG_{(1)}$, und, da $\sphericalangle$ EAF $= FO_{(1)}G_{(1)} =$ JEH, nach §. 1 (9) und daher Dreieck $FO_{(1)}G_{(1)} \backsim$ JEH, $O_{(1)}G_{(1)} : EJ = FG_{(1)} : JH$ und, da der Mittelpunct senkrecht über der Mitte jeder Sehne liegt, $2 \, . \, EJ : ED = 1 : 1$, woraus sich durch Zusammensetzung $2 \, . \, O_{(1)}G_{(1)} : L_{(1)}G_{(1)} = HG_{(1)} : JH$ ergiebt; es ist aber endlich $HG_{(1)} : JH = HH_1 : HL_{(1)}$, da Dreieck $G_{(1)}HJ \backsim L_{(1)}HH_1$, also ist $2 \, . \, O_{(1)}G_{(1)} : L_{(1)}G_{(1)} = HH_1 : HL_{(1)}$ oder $O_{(1)}G_{(1)} : L_{(1)}G_{(1)} = HK : HL_{(1)}$. Da nun $HK \parallel O_{(1)}G_{(1)}$ ist, so müssen die 3 Puncte K, $O_{(1)}$, $L_{(1)}$ in einer geraden Linie liegen und es muss $KH : KL_{(1)} = O_{(1)}G_{(1)} : O_{(1)}L_{(1)}$, d. h. $O_{(1)}G_{(1)} = O_{(1)}L_{(1)}$ sein, d. h. der Kreis um K berührt den Kreis um $O_{(1)}$.

Aendert man F, H, H_1, A_1, $G_{(1)}$, $L_{(1)}$ und $O_{(1)}$ in F_1, H_1, H, A_2, $G_{2(3)}$, $L_{2(3)}$, $O_{2(3)}$ um, so ergiebt sich, dass der Kreis um K den Kreis um $O_{2(3)}$ berührt.

Anm. Wie leicht zu erkennen, berührt der Kreis um K den inneren Berührungskreis von Innen, die 3 andern von Aussen.

6) Der die Seiten eines Dreiecks halbirende Kreis berührt die Berührungskreise von 8 Dreiecken.

Wie in der Einleitung gezeigt, halbirt der die Seiten des Dreiecks ABC halbirende Kreis auch die Seiten der Dreiecke ABK, ACK, BCK, UVW, UVM, UWM, VWM. Fig. I.

Anm. Ist das Dreieck ABC ein bei A rechtwinkliges, so fällt K mit A und U mit M zusammen, daher berührt für diesen Fall der die Seiten halbirende Kreis nur die Berührungskreise der Dreiecke ABC und UVW, ausserdem aber noch, wie leicht zu erkennen, die den beiden Dreiecken umschriebenen Kreise.

7) Die Summe der Entfernungen des Mittelpuncts des die Seiten eines Dreiecks halbirenden Kreises von den Mittelpuncten der 4 Berührungskreise ist gleich dem dreifachen Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Bezeichnen wir $KO_{(1,2,3)}$ durch $\varepsilon_{(1,2,3)}$, so ist nach 5) und zufolge §. 1 (3) $\varepsilon = \frac{1}{2}r - \varrho$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}r + \varrho_1$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}r + \varrho_2$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}r + \varrho_3$, also ist $\varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2r + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho = 6r$.

8) Die Excentricität eines Berührungskreises ist mittlere geometrische Proportionale

zum Durchmesser des umschriebenen Kreises und zur Entfernung des Mittelpuncts des die Seiten halbirenden Kreisrs von dem Mittelpuncte des Berührungskreises.

Aus 2) ergiebt sich $e = \sqrt{2r(\frac{1}{2}r - \varrho)}$ und $e_{(1,2,3)} = \sqrt{2r(\frac{1}{2}r + \varrho_{(1,2,3)})}$, also auch $e_{(1,2,3)} = \sqrt{2r \cdot \varepsilon_{(1,2,3)}}$.

9) Die Quadrate der Excentricitäten der 4 Berührungskreise verhalten sich wie die Entfernungen der Berührungskreise vom Mittelpuncte des die Seiten halbirenden Kreises.

Denn $e^2 : e_1^2 : e_2^2 : e_3^2 = 2r\varepsilon : 2r\varepsilon_1 : 2r\varepsilon_2 : 2r\varepsilon_3 = \varepsilon : \varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3$.

§. 5. Verbindet man den unteren oder oberen Pol einer Seite mit einem inneren resp. äusseren Berührungspuncte dieser Seite, so schneidet diese Linie auf der Höhe zu derselben Seite vom Fusspuncte aus den Radius des zum Berührungspuncte gehörenden Berührungskreises ab.

Fig. IV. Wenn $K_{(1,2,3)}$ die Durchschnittspuncte der Linien $A_1G_{(1)}$ und $A_2G_{2(3)}$ mit der Höhe AE bezeichnen, so ist wegen Parallelität von AE und $O_{(1)}G_{(1)}$ $A_1A : A_1O_{(1)} = A_1K_{(1)} : A_1G_{(1)}$ und nach vorigem §. $A_1A : A_1O_{(1)} = A_1O_{(1)} : A_1F$, also $A_1K_{(1)} : A_1G_{(1)} = A_1O_{(1)} : A_1F$. Hieraus folgt, dass $K_{(1)}O_{(1)} \parallel EG_{(1)}$ und $EK_{(1)}O_{(1)}G_{(1)}$ ein Parallelogramm, also $KE = OG = \varrho$ und $K_1E = O_1G_1 = \varrho_1$ ist.

Durch Abänderung der Indices ergiebt sich $EK_2 = \varrho_2$ und $EK_3 = \varrho_3$.

Hieraus ergiebt sich, wenn man den Punct, in welchem die durch den Fusspunct einer Höhe und Mittelpunct eines Berührungskreises bestimmte Linie die Axe der Seite schneidet, zu welcher die Höhe gehört, kurz als Axenpunct der Seite, ferner den Pol, zu welchem der Berührungskreis gehört, als dem Axenpuncte zugehörig, und den zu demselben Pole zugehörigen anderen Berührungskreis als den conjugirten Berührungskreis des Axenpuncts bezeichnet:

1) Die Entfernung eines Axenpuncts von dem zugehörigen Pole der Axe ist gleich dem Radius des conjugirten Berührungskreises.

Wie eben bewiesen, ist $EK_{(1)}O_{(1)}G_{(1)}$ ein Parallelogramm, also geht die Linie $A_1K_{(1)}$ durch die Mitte von $EO_{(1)}$; da nun nach §. 3 A_1 die Mitte von OO_1 ist, so geht $A_1K_{(1)}$ durch die Mitten zweier Seiten des Dreiecks EOO_1, also ist $A_1K_{(1)} \parallel EO_{1(0)}$. Wenn also $EO_{(1,2,3)}$ die Axe von BC in $L_{(1,2,3)}$ schneidet, so ist $EK_{(1)}A_1L_{1(0)}$ ein Parallelogramm, also ist $EK = A_1L_1$ und $EK_1 = A_1L$, daher nach vorigem Satze $A_1L_1 = \varrho$ und $A_1L = \varrho_1$.

In gleicher Weise ergiebt sich $A_2L_3 = \varrho_2$ und $A_2L_2 = \varrho_3$.

Anm. Der Punct L_1 muss immer ausserhalb des Kreises um M liegen.

2) Die Entfernung eines Axenpuncts von dem nicht zugehörigen Pole der Axe ist gleich der Summe oder Differenz aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Radius des conjugirten inneren resp. äusseren Berührungskreises.

Denn $L_1A_2 = A_1A_2 + L_1A_1$ und $LA_2 = A_1A_2 - LA_1$, daher zufolge des vorigen Satzes $L_1A_2 = 2r + \varrho$ und $LA_2 = 2r - \varrho_1$; eben so ergiebt sich $L_3A_1 = 2r - \varrho_2$ und $L_2A_1 = 2r - \varrho_3$.

Anm. 1. Zufolge der Vorqemerkung in §. 2 ist $\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho) - \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_3) > 0$ und nach §. 3 (4) $\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho) + \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_3) = 2r$, weshalb $\varrho_2 < 2r$ und daher auch $\varrho_3 < 2r$ sein muss. Dagegen ist $\varrho_1 \gtreqless 2r$, wenn $\measuredangle A \gtreqless 76^0\ 20'\ 43{,}5''$ und $\measuredangle B$ so angenommen wird, dass $\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) \gtreqless \cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$

ist. Denn da O_1 in der um A_1 mit A_1C geschlagenen Kreislinie liegt, so muss $\varrho_1 \lesseqgtr DA_1 + A_1C \lesseqgtr 2\,r\left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)$ sein. Ist nun $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} \gtreqless 1$ oder $\sin\frac{A}{2}$ tang. $\varphi) \gtreqless 1/2(\sqrt{5} - 1)$ oder tang $2\varphi \gtreqless 2$ und daher $\measuredangle\, A \gtreqless 76^0\ 20'\ 43{,}5''$, so kann $\varrho_1 \gtreqless 2r$ sein. Da ferner $OO_1 = 2\,.\,A_1C = 4r \sin\frac{A}{2}$, $O_1C = OO_1\,.\,\cos\frac{B}{2}$ und $\varrho_1 = O_1C \cos\frac{C}{2}$, also $\varrho_1 = 4r \sin\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{B}{2}\,.\,\cos\frac{C}{2}$ ist, so muss $\varrho_1 \gtreqless 2r$ seiu, wenn ausserdem $2 \sin\frac{A}{2}\,.\,\cos\frac{B}{2}\,.\,\cos\frac{C}{2} \gtreqless 1$ oder, wie sich durch einige leichte Umformungen ergiebt, $\sin\left(\frac{A}{2} + B\right) \gtreqless \cos\frac{A}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{A}{2}$ ist.

Anm. 2. Zufolge §. 3 (4) könnte man auch sagen, die Entfernungen der Axenpuncte von den nicht zugehörigen Polen der Axe seien bezüglich $1/2(\varrho_1 + \varrho) + 1/2(\varrho_2 + \varrho_3)$, $1/2(\varrho_1 + \varrho) - 1/2(\varrho_2 + \varrho_3)$, $1/2(\varrho_1 - \varrho) - 1/2(\varrho_2 - \varrho_3)$, $1/2(\varrho_1 - \varrho) + 1/2(\varrho_2 - \varrho_3)$, oder zufolge §. 4 (7) $5/2 r - \varepsilon_{(1,2,3)}$.

3) Jeder Axenpunct ist von der Seite, zu welcher die Axe gehört, eben so weit entfernt, als der zugehörige Pol von den beiden andern Seiten.

Denn nach §. 3 (2) ist $A_1D = 1/2(\varrho_1 - \varrho)$ und $A_2D = 1/2(\varrho_2 + \varrho_3)$, also ist $L_1D = A_1D + A_1L_1 = 1/2(\varrho_1 - \varrho) + \varrho = 1/2(\varrho_1 + \varrho)$ und $LD = A_1L - A_1D = \varrho_1 - 1/2(\varrho_1 - \varrho) = 1/2(\varrho_1 + \varrho)$, so wie $L_3D = A_2L_3 - A_2D = \varrho_2 - 1/2(\varrho_2 + \varrho_3) = 1/2(\varrho_2 - \varrho_3)$ und $L_2D = A_2D - A_2L_2 = 1/2(\varrho_2 + \varrho_3) - \varrho_3 = 1/2(\varrho_2 - \varrho_3)$, woraus sich die Behauptung nach §. 3 (2) ergiebt.

4) Die Axenpuncte, denen der untere oder obere Pol zugehörig ist, und die inneren resp. äusseren Berührungspuncte der Seite, zu welcher die Axe gehört, sind Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms, dessen Seiten der halben Centrale der dem Pole zugehörigen Berührungskreise, und dessen Winkel der Differenz der an der Seite anliegenden Winkel und dem Supplemente davon gleich sind.

Da die Axe $A_1A_2 \perp BC$, also $\parallel O_{(1)}G_{(1)}$ und A_1 die Mitte von OO_1 ist, so muss $GD = G_1D$ sein; ausserdem ist nach 3) $LD = L_1D$ und daher GLG_1L_1 ein gleichseitiges Parallelogramm. Da aber zufolge 1) $OG \;\#\; A_1L_1$ ist, so muss $GL_1 = OA_1$ sein, und $\measuredangle\, GL_1A_1 = GOA_1 = KAO = 1/2(B - C)$, also $\measuredangle\, GL_1G_1 = B - C$.

Eben so ergiebt sich, dass $G_2L_2G_3L_3$ ein gleichseitiges Parallelogramm, $L_3G_2 = A_2O_2$ und $\measuredangle\, L_2G_2L_3 = B - C$ ist; nur dass $90^0 - 1/2(B - C)$ statt $1/2(B - C)$ beim Beweise gesetzt werden muss.

Anm. Die Seiten des einen Parallelogramms stehen auf denen des andern senkrecht.

5) Die inneren Berührungspuncte einer Seite sind von der Mitte der Seite um die halbe Differenz der beiden andern Seiten und von den Endpuncten der Seite um die halbe Summe oder Differenz aus der Seite und der Differenz der beiden andern Seiten entfernt; die äusseren Berührungspuncte dagegen sind von der Mitte der Seite um die halbe Summe der beiden andern Seiten und von den Endpuncten der Seite um die halbe Summe oder Differenz aus der Summe der beiden andern Seiten und der Seite selbst entfernt; endlich sind die beiden inneren von den beiden äusseren Berührungspuncten um die beiden andern Seiten entfernt.

Denn nach §. 3 ist $O_{(2)}A_{1(2)} = A_{1(2)}C$, also auch nach vorigem Satze $G_{(2)}L_{(2)} = A_{1(2)}C$, ferner ist, wenn $A_{1(2)}P_{(1)} \perp AC$, nach 3) $L_{1(2)}D = A_{1(2)}P_{(1)}$, also sind die rechtwinkligen Dreiecke $G_{(2)}L_{(2)}D$ und $A_{1(2)}P_{(1)}C$ congruent und daher $G_{(2)}D = P_{(1)}C$. Nun ist aber nach §. 2 (5) $P_{(1)}C = 1/2(b \mp c)$, also ist $G_{(2)}D = 1/2(b \mp c)$. Wie aber in 4) schon erwähnt, ist D die Mitte von $G_{(2)}G_{1(3)}$, also ist $GD = G_1D = \frac{1}{2}(b - c)$ und $G_2D = G_3D = \frac{1}{2}(b + c)$.

Hieraus ergiebt sich sogleich $GB = G_1C = s_2$, $GC = G_1B = s_3$, $G_2C = G_3B = s_1$, $G_2B = G_3C = s$, $GG_2 = G_1G_3 = b$, $GG_3 = G_1G_2 = c$.

Anm. Wie schon erwähnt und leicht aus der Fundamentalformel abzuleiten, ist $\Delta = \varrho \cdot s = \varrho_1 \cdot s_1 = \varrho_2 \cdot s_2 = \varrho_3 \cdot s_3$, also ist $\Delta^2 = s \cdot s_1 \cdot \varrho \cdot \varrho_1 = s_2 \cdot s_3 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3$. Da nun $\sphericalangle\, OGC = O_1G_1C = 90^0$ und $\sphericalangle\, OCG = G_1O_1C = \frac{1}{2}\, C$ ist, so muss Dreieck $OGC \sim O_1G_1C$ und daher $OG : G_1C = GC : O_1G_1$ oder $\varrho : s_2 = s_3 : \varrho_1$, also $\varrho \cdot \varrho_1 = s_2 \cdot s_3$ sein. Setzt man dies in Δ^2 ein, so ergiebt sich $\Delta^2 = s \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 = \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3$, also $\Delta = \sqrt{s \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3} = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3}$

6) Die Axenpuncte, denen der untere oder obere Pol zugehörig ist, und die äusseren resp. inneren Berührungspuncte der Seite, zu welcher die Axe gehört, sind Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms, dessen Seiten der Entfernung des oberen resp. unteren Pols von der Gegenecke der Seite und dessen Winkel den Winkeln an der Gegenecke gleich sind.

Da $L_2L_3 \perp GG_1$ und nach 5) $GD = G_1D = \frac{1}{2}(b - c)$, so wie nach 3) $L_2D = L_3D = \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_3)$ ist, so ist $GL_2G_1L_3$ ein gleichseitiges Parallelogramm. Da nun nach §. 2 (5) $AP_1 = \frac{1}{2}(b - c)$ und nach §. 3 (2) $A_2P_1 = \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_3)$ ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke GL_2D und AP_1A_2 congruent, also $GL_2 = AA_2$ und $\sphericalangle\, GL_2D = AA_2P_1 = \frac{1}{2}\, A$, also $\sphericalangle\, GL_2G_1 = A$.

Eben so ergiebt sich, dass $G_2LG_3L_1$ ein gleichseitiges Parallelogramm, $LG_2 = AA_1$ und $\sphericalangle\, LG_2L_1 = A$ ist.

Anm. Die Seiten des einen Parallelogramms stehen auf denen des andern senkrecht.

7) Die Linie, welche einen Axenpunct und den in der Seite zur Axe liegenden Berührungspunct des conjugirten Berührungskreises verbindet, schneidet auf der Höhe zu dieser Seite von der Ecke aus den Radius des conjugirten Berührungskreises ab.

Denn nach 1) sind OGL_1A_1 und $O_1G_1LA_1$ Parallelogramme, daher ist, wenn der Durchschnittspunct jener Linie mit der Höhe in der Folge als Höhenpunct und $L_{(1,2,3)}$ entsprechend mit $U_{(1,2,3)}$ bezeichnet wird, $AU_{(1)}L_{(1)}A_1$ ein Parallelogramm und daher $AU = \varrho_1$, so wie $AU_1 = \varrho$ ist.

In gleicher Weise ergiebt sich, dass $AU_{3(2)}L_{2(3)}A_2$ ein Parallelogramm und $AU_2 = \varrho_3$, $AU_3 = \varrho_2$ ist.

Anm. U muss immer in der Verlängerung über A hinausliegen.

8) Jeder Axenpunct ist Mittelpunct eines Kreises, welcher durch den entsprechenden Höhenpuct und durch die in der Seite zur Axe liegenden inneren oder äusseren Berührungspuncte geht, je nachdem der obere resp. untere Pol dem Axenpuncte zugehörig ist.

Denn nach 7) ist $AU_{(1)}L_{(1)}A_1$ ein Parallelogramm, also $U_{(1)}L_{(1)} = A\,A_1$, und nach 6) ist $L_{(1)}G_2 = L_{(1)}G_3 = A\,A_1$.

Eben so ist $U_{2(3)}L_{2(3)} = L_{2(3)}G = L_{2(3)}G_1 = A\,A_2$.

Ist einem Axenpuncte der untere oder obere Pol der Axe zugehörig, so sollen die äusseren resp. inneren Berührungspuncte der Seite zur Axe dem entsprechenden Höhenpuncte zugehörig heissen, so wie auch derjenige Berührungskreis, dessen Mittelpunct zur Erzeugung des Axenpuncts mit dem Fusspuncte der Höhe verbunden worden ist.

9) Jeder Höhenpunct bestimmt mit den zugehörigen Berührungspuncten ein Dreieck, welches dem durch die Mittelpuncte der nicht zugehörigen Berührungskreise bestimmten ähnlich ist.

Denn es ist $\measuredangle$ EUL = DLG_1 = $\frac{1}{2}$(B — C) nach 4) und $\measuredangle$ $G_2UG_3 = 90^0 - \frac{1}{2}A$, da nach 6) $G_2LG_3 = 180^0 - A$ und nach 8) L Mittelpunct des Kreises um G_2UG_3 ist. Es wird aber, wenn man aus einer Ecke des Dreiecks die Höhe und den Radius des umschriebenen Kreises zieht, durch die Halbirungslinie des Winkels der Ecke auch der Winkel zwischen Höhe und Radius halbirt, daher ist $\measuredangle$ $G_3UE = \frac{1}{2}[90^0 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(B - C)] = \frac{1}{2}C$ und $\measuredangle$ $G_2UE = \frac{1}{2}[90^0 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(B - C)] = \frac{1}{2}B$, woraus sogleich wegen der rechten Winkel bei E $\measuredangle$ $UG_3G_2 = 90^0 - \frac{1}{2}C$ und $\measuredangle$ $UG_2G_3 = 90^0 - \frac{1}{2}B$ und die Aehnlichkeit der Dreiecke UG_2G_3 und $O_1O_2O_3$ folgt.

Ganz analog ergiebt sich $U_1G_2G_3 \backsim OO_2O_3$, $U_2GG_1 \backsim OO_1O_3$, $U_3GG_1 \backsim OO_1O_2$.

Anm. Zwei Seitenpaare der genannten ähnlichen Dreiecke müssen daher immer parallel sein.

Ist $\varrho_{(1,2,3)}$ der Radius des einem Höhenpuncte zugehörigen Berührungskreises, so soll $s_{(1,2,3)}$ die dem Höhenpuncte zugehörige Berührungsstrecke heissen.

10) Die Linien, welche einen Höhenpunct mit den zugehörigen Berührungspuncten verbinden, schneiden auf den Seiten des Dreiecks die zugehörigen Berührungsstrecken ab.

Wie in 9) erwiesen, ist $\measuredangle$ $UG_2G_3 = 90^0 - \frac{1}{2}B$, wenn also UG_2 die Seite AB in J_2 schneidet, so ist in dem Dreieck BJ_2G_2 der Winkel $BJ_2G_2 = 90^0 - \frac{1}{2}B$, also $BG_2 = BJ$. Es ist aber nach 5) $BG_2 = s$, also ist auch $BJ_2 = s$. Eben so ergiebt sich, wenn UG_3 die Seite AC in H_3 schneidet, $CH_3 = CG_3 = s$.

Anm. J_2 und H_3 sind also zufolge 5) Berührungspuncte der Kreise um O_2 und O_3 mit den Seiten AB und AC.

11) Die Linien, welche einen Höhenpunct einer Seite mit den zugehörigen Berührungspuncten verbinden, gehen durch diejenigen Höhenpuncte der beiden andern Seiten, welchen derselbe Berührungskreis zugehörig ist.

Fig. III. Denn bezeichnet man die Höhenpuncte der Seiten AC und AB durch $V_{(1,2,3)}$ und $W_{(1,2,3)}$, je nachdem die Kreise um $O_{(1,2,3)}$ zugehörig sind, so muss nach vorigem Satze VH_3 durch G_3 und WJ_2 durch G_2 gehen.

12) Die Verbindungslinie derjenigen Höhenpuncte zweier Seiten, denen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, schneiden auf diesen Seiten die zugehörige Berührungsstrecke ab.

Folgt unmittelbar aus 10) und 11).

13) Diejenigen Höhenpuncte der 3 Seiten, denen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, bestimmen ein Dreieck, welches dem durch die Mittelpuncte der nicht zugehörigen Berührungskreise bestimmten ähnlich ist.

Denn zufolge 9) ist $\measuredangle$ $G_2UG_3 = 90^0 - \frac{1}{2}A$, $\measuredangle$ $H_1VH_3 = 90^0 - \frac{1}{2}B$, $\measuredangle$ $J_1WJ_2 = 90^0 - \frac{1}{2}C$, also zufolge 11) $\measuredangle$ $VUW = 90^0 - \frac{1}{2}A$, $\measuredangle$ $UVW = 90^0 - \frac{1}{2}B$, $\measuredangle$ $UWV = 90^0 - \frac{1}{2}C$, also Dreieck $UVW \backsim O_1O_2O_3$.

Eben so ergiebt $U_1V_1W_1 \cong OO_2O_3$, $U_2V_2W_2 \backsim OO_1O_3$, $U_3V_3W_3 \backsim OO_1O_2$.

Anm. Die Seiten der ähnlichen Dreiecke sind paarweise parallel.

14) Diejenigen Höhenpuncte der 3 Seiten, denen der innere oder derselbe äussere Berührungskreis zugehörig ist, liegen in der Peripherie eines um den Höhendurchschnittspunct geschlagenen Kreises, dessen Radius die Summe resp. Differenz aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Radius des zugehörigen Berührungskreises ist.

Sei N der Durchschnittspunct der Höhen, so ist $NU = AU + AN$, $NV = BV + BN$, $NW = CW + CN$; da aber nach §. 3 (8) $AN = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_1)$, $BN = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_1 + \varrho_3 - \varrho_2)$, $CN = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3)$, und nach 7) $AU = \varrho_1$, $BV = \varrho_2$, $CW = \varrho_3$ ist, so ergiebt sich $NU = NV = NW = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)$ oder zufolge §. 3 (4) $= 2r + \varrho$.

Eben so ergiebt sich $NU_1 = NV_1 = NW_1 = 2r - \varrho_1$, $NU_2 = NV_2 = NW_2 = 2r - \varrho_2$ und $NU_3 = NV_3 = NW_3 = 2r - \varrho_3$.

Anm. 1. Ist $2r = \varrho_1$, was unter den in 2) Anm. 1 angegebenen Bedingungen möglich ist, so fallen die Puncte U_1, V_1, W_1 mit dem Durchschnittspuncte der Höhen zusammen. Der Flächenraum des Dreiecks $U_1 V_1 W_1$ ist daher $= 0$.

Anm. 2. Ist in dem Dreiecke ABC $\measuredangle$ A ein stumpfer, so ist, wie in §. 3 (8) schon bemerkt, $\frac{1}{2}(\varrho + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_1)$ negativ; da aber für diesen Fall N zwischen A und U fällt, so ist $NU = AU - AN$, also auch $= 2r + \varrho$.

Anm. 3. Ist $\measuredangle$ A ein rechter, so erkennt man leicht mit Hülfe von 5), dass $\varrho = s_1$, $\varrho_1 = s$, $\varrho_2 = s_3$, $\varrho_3 = s_2$ und auch dass $AN = 0$, weshalb $s_{(1,2,3)}$ der Radius des Kreises um $U_{(1,2,3)}$ $V_{(1,2,3)}$ $W_{(1,2,3)}$ sein muss; daher schneiden die Verbindungslinien derjenigen Berührungspuncte, durch welche auf BC und AB oder AC gleiche Strecken $s_{(1,2,3)}$ abgeschnitten werden, auch auf der dritten Seite AC oder AB dieselbe Strecke $s_{(1,2,3)}$ ab.

§. 6. Schlägt man um die unteren und oberen Pole zweier Seiten eines Dreiecks mit ihren Entfernungen von den Endpuncten der zugehörigen Seiten Kreise, so schneiden diese die beiden Dreieckseiten in den Ecken des Dreiecks und in 4 Puncten, welche mit der Gegenecke der dritten Seite 4 Dreiecke bilden, welche die umliegenden Dreiecke dieser Ecke heissen sollen, und in denen diese Ecke die Hauptecke, so wie die gegenüberliegende Seite die Hauptseite genannt werden soll. Die beiden Pole, um welche die Kreise geschlagen sind, welche die Endpuncte der Hauptseite eines dieser umliegenden Dreiecke bestimmten, sollen die erzeugenden Pole dieses Dreiecks heissen. Sind die erzeugenden Pole gleichartig oder ungleichartig, so soll der obere, resp. untere Pol der dritten Seite dem umliegenden Dreiecke zugehörig heissen, desgleichen auch derjenige Berührungskreis des Urdreiecks, welcher den beiden erzeugenden Polen gemeinsam zugehörig ist. Der keinem der beiden erzeugenden Pole zugehörige Berührungskreis soll der conjugirte Berührungskreis des umliegenden Dreiecks genannt werden.

Da den 4 Polpaaren zweier Seiten immer ein anderer Berührungskreis gemeinsam zugehörig ist, so unterscheiden sich die 4 umliegenden Dreiecke einer Ecke dadurch, dass einem jeden von ihnen ein andrer von den 4 Berührungskreisen zugehörig ist. Daher sollen die Mittelpuncte der Kreise um die 4 umliegenden Dreiecke einer Ecke mit dem Buchstaben der Hauptecke und dem Index 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden, je nachdem der Berührungskreis um O oder O_1 oder O_2 oder O_3 zugehörig ist.

Aus der Bezeichnung des Mittelpuncts des Kreises um ein umliegendes Dreieck erkennt man sogleich die Hauptecke dieses Dreiecks und den zugehörigen Berührungskreis, und daraus die erzeugenden Pole, so wie den zugehörigen Pol und den conjugirten Berührungskreis. z. B. erkennt man aus C_6, dass das umliegende Dreieck an der Ecke C liegt, und O_3 der Mittelpunct des zugehörigen Berührungskreises ist; ferner, da der Kreis um O_3 der den erzeugenden Polen gemeinsam zugehörige Berührungskreis ist, und da die erzeugenden Pole in den Axen von a und b sich befinden müssen, weil das Dreieck an der Ecke C liegt, dass A_2 und B_2 die erzeugenden Pole sind, endlich dass O der Mittelpunct des conjugirten Berührungskreises ist, und C_2 der zugehörige Pol, da die erzeugenden Pole gleichartig sind.

Fig. VI. Die beiden erzeugenden Pole eines umliegenden Dreiecks bestimmen mit den Mittelpuncten der Kreise um dieses und das Urdreieck ein gleichseitiges Parallelogramm, in welchem die Seiten gleich dem Radius des Kreises um das Urdreieck und die Winkel gleich den Winkeln an der Hauptecke sind.

Denn wenn die um B_1 und C_1 mit B_1A resp. C_1A geschlagenen Kreise AB und AC in E resp. D schneiden, so müssen die Centralen der Kreise um A_3 und B_1 oder C_1 auf den gemeinsamen Sehnen AE resp. AD senkrecht stehen und daher den Axen zu AB resp. AC parallel sein, also $A_3B_1 \parallel MC_1$ und $A_3C_1 \parallel MB_1$; da nun ausserdem $MB_1 = MC_1 = r$ ist, so ist $MB_1A_3C_1$ ein gleichseitiges Parallelogramm, in welchem $\sphericalangle MB_1A_3 = MC_1A_3 = A$ sein muss, da die Schenkel dieser Winkel auf denen von BAC oder A senkrecht stehen.

Anm. Hierdurch kann man mit Leichtigkeit die Mittelpuncte der 12 umliegenden Dreiecke bestimmen.

Hieraus ergiebt sich:

1) Die Centrale der Kreise um 2 umliegende Dreiecke einer Ecke, die einen erzeugenden Pol gemeinsam haben, wird durch diesen Pol halbirt und ist gleich und parallel der Linie, welche die beiden andern erzeugenden Pole verbindet, d. h. gleich und parallel der Axe zur dritten Seite.

Denn nach vorigem Satze ist $A_3B_1 \# MC_1$ und $B_1A_5 \# MC_2$, also ist $A_3B_1A_5$ eine gerade Linie, da C_1MC_2 eine solche ist, und daher $A_3A_5 \# C_1C_2$.

2) Die Centrale der Kreise um 2 umliegende Dreiecke verschiedener Ecken, die einen erzeugenden Pol gemeinsam haben, ist parallel und gleich der Linie, welche die beiden andern erzeugenden Pole verbindet.

Denn nach dem Hauptsatze ist $C_1A_3 \# MB_1$ und $MB_1 \# A_1C_3$, also $A_3C_1 \# A_1C_3$, und daher $A_3C_3 \# A_1C_1$.

3) Die 4 Mittelpuncte der Kreise um diejenigen umliegenden Dreiecke zweier Ecken, die einen erzeugenden Pol gemeinsam haben, bestimmen ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen Mittelpunct der erzeugende Pol ist, und dessen Diagonalen und Seiten bezüglich gleich und parallel den Linien sind, welche die andern erzeugenden Pole verbinden.

Denn nach 1) ist B_1 die Mitte von A_3A_5 und C_3C_5 und $A_3A_5 \# C_1C_2$, so wie $C_3C_5 \# A_1A_2$ und nach 2) $A_3C_3 \# A_1C_1$ und $A_3C_5 \# C_1A_5$.

4) Die Mittelpuncte der Kreise um die sämmtlichen umliegenden Dreiecke zweier Ecken liegen auf den Peripherien der beiden Kreise, welche um die beiden Pole der dritten Seite mit dem Radius des Kreises um das Urdreieck geschlagen sind.

Folgt ohne Weiteres aus dem Vorhergehenden, so wie auch

5) die 8 Mittelpuncte der Kreise um die umliegenden Dreiecke zweier Ecken bestimmen 2 rechtwinklige Parallelogramme mit den Polen der dritten Seite als Mittelpuncten, die einander und dem durch die übrigen Pole bestimmten rechtwinkligen Parallelogramme congruent sind.

z. B. $A_4B_4A_5B_5 \cong B_3A_6B_6A_3 \cong A_1B_2A_2B_1$.

6) Die Mittelpuncte der Kreise um 3 umliegende Dreiecke, die an verschiedenen Ecken liegen und paarweise einen erzeugenden Pol gemeinsam haben, bestimmen ein Dreieck, dessen Seiten gleich und parallel den Seiten des durch die 3 erzeugenden Pole bestimmten Dreiecks sind.

Denn nach 2) ist $A_3C_3 \# A_1C_1$, $A_3B_3 \# A_1B_1$ und $B_3C_3 \# B_1C_1$.

Anm. Die Mittelpuncte ordnen sich zweimal zu 4 Dreiecken zusammen, die den durch die Pole bestimmten Dreiecken congruent sind, nämlich $A_{3(4,5,6)}\,B_{3(4,5,6)}\,C_{3(4,5,6)}$ oder $A_4B_5C_6$, $A_5C_5B_6$, $B_3C_4A_6$, $C_3B_4A_5$, je nachdem $O_{(1,2,3)}$ Mittelpunct des zugehörigen oder conjugirten Berührungskreises ist.

7) Die Linie, welche den Mittelpunct des Kreises um ein umliegendes Dreieck mit dem Mittelpuncte des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises verbindet, ist parallel und gleich der Linie, welche den einen erzeugenden Pol mit dem Gegenpol des andern verbindet.

Denn nach dem Hauptsatze ist $A_3B_1 \# MC_1$, also auch $A_3B_1 \# MC_2$, daher $A_3M \# B_1C_2$.

8) Die Centrale der Kreise um 2 umliegende Dreiecke einer Ecke, die keinen erzeugenden Pol gemeinsam haben, wird durch den Mittelpunct des dem Urdreieck umschriebenen Kreises halbirt, und ist gleich und parallel der Centrale der zugehörigen Berührungskreise.

Nach vorigem Satze ist A_3M und $A_4M \# B_1C_2$ und deshalb A_3MA_4 eine Grade, deren Mitte M ist. Nun ist aber nach §. 3 (1) $B_1C_2 \# \frac{1}{2}OO_1$, also ist $A_3A_4 \# OO_1$.

9) Die Mittelpuncte der Kreise um die 4 umliegenden Dreiecke einer Ecke sind Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms, dessen Seiten gleich dem Durchmesser des um das Urdreieck beschriebenen Kreises, dessen Diagonalen gleich den parallelen Centralen der Berührungskreise und dessen Winkel gleich den Winkeln an der Hauptecke sind.

Folgt sogleich aus 1) und 8).

10) Verbindet man die Mittelpuncte der Kreise um 2 umliegende Dreiecke verschiedener Ecken, die einen erzeugenden Pol gemeinsam haben, miteinander und mit dem Mittelpuncte des um das Urdreieck beschriebenen Kreises, so sind die Seiten des entstandenen Dreiecks parallel und gleich den Seiten des Dreiecks, dessen Ecken der Gegenpol des gemeinsamen erzeugenden Pols und die beiden andern erzeugenden Pole sind.

Denn nach 7) ist $A_3M \# B_1C_2$, so wie $B_3M \# A_1C_2$ und nach 2) $A_3B_3 \# A_1B_1$.

11) Die Linie, welche den Mittelpunct des Kreises um eins der 4 umliegenden Dreiecke einer Ecke mit dem Mittelpuncte des zugehörigen Berührungskreises verbindet, ist gleich und parallel der Linie, welche den Mittelpunct des Kreises um das Urdreieck mit dem Gegenpole des zugehörigen Pols verbindet.

Da nach §. 3 A_1 die Mitte von OO_1 ist, so ist nach 8) $OA_1 \# A_3M$, also auch $OA_3 \# MA_1$.

12) Schlägt man um den Mittelpunct eines Berührungskreises mit dem Radius des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises einen Kreis, so geht derselbe durch die Mittelpuncte der Kreise um diejenigen 3 umliegenden Dreiecke, denen jener Berührungskreis zugehörig ist.

Folgt unmittelbar aus 11).

13) Die Linie, welche den Mittelpunct eines Kreises um ein umliegendes Dreieck mit dem Gegenpole des zugehörigen Pols verbindet, ist parallel und gleich der Excentricität des conjugirten Berührungskreises.

Da nach §. 3 A_1 die Mitte von OO_1 ist, so ist nach 8) $OA_1 \# MA_4$, also auch $A_4A_1 \# OM$.

14) Verlängert man die Excentricität eines Berührungskreises um sich selbst über den Mittelpunct des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises hinaus, so ist der Endpunct der Verlängerung Mittelpunct eines Kreises, welcher durch die Mittelpuncte der Kreise um

um diejenigen umliegenden Dreiecke geht, denen jener Berührungskreis conjugirt ist, und welcher diejenigen 3 Kreise von aussen berührt, die mit dem Radius des Kreises um das Urdreieck, um die Mittelpuncte der andern Berührungskreise geschlagen sind.

Denn es ist, wenn $OM\Omega$ eine gerade Linie und $OM = M\Omega$ ist, nach vorigem Satze $A_1A_4 \# OM$, also auch $A_1A_4 \# M\Omega$, und daher $A_1M \# A_4\Omega$; da aber auch nach 11) $A_1M \# O_1A_4$ ist, so muss $O_1A_4\Omega$ eine gerade Linie und $A_4\Omega = r$ sein. Eben so sind $O_2B_5\Omega$ und $O_3O_6\Omega$ gerade Linien und $B_5\Omega = C_6\Omega = r$, woraus sich die Behauptung ergiebt.

Anm. Bedeute $\Omega_{1(2,3)}$ für $O_{1(2,3)}$, was Ω für O, so erkennt man sogleich, dass $\Omega_{(1,2,3)}$ Mittelpuncte der Kreise um die Dreiecke $O_1O_2O_3$, OO_2O_3, OO_1O_3, OO_1O_2 sind, ferner dass die Radien dieser Kreise $= 2r$, und dass die um $\Omega_{(1,2,3)}$ mit $3r$ geschlagenen Kreise jene im Satze erwähnten Kreise von innen berühren.

15) Die Entfernung des Mittelpuncts des um ein umliegendes Dreieck beschriebenen Kreises von der Gegenseite der Hauptecke im Urdreiecke ist gleich der Summe oder Differenz der Radien des zugehörigen inneren resp. äusseren Berührungskreises und des um das Urdreieck beschriebenen Kreises.

Es ist $MA_1 \perp BC$, da A_1 ein Pol der Seite BC ist, und nach 11) $MA_1 \parallel A_3O$, also muss auch $A_3O \perp BC$ sein, und da O von BC um ϱ entfernt und $A_3O = r$ ist, so ist A_3 von BC um $r + \varrho$ entfernt.

In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

Anm. Die Mittelpuncte der Kreise um die 12 umliegenden Dreiecke liegen daher auf denjenigen Radien der Berührungskreise, welche nach den 12 Berührungspuncten gehen.

16) Zieht man durch die Mittelpuncte der Kreise um diejenigen 3 umliegenden Dreiecke, denen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, Parallelen zu den Seiten des Urdreiecks, so entsteht ein dem Urdreiecke ähnliches Dreieck, für welches der Mittelpunct des Berührungskreises homologer Mittelpunct ist.

Denn da nach vorigem Satze und nach 11) die Parallelen einerseits von den Seiten des Urdreiecks, andrerseits von dem Mittelpuncte des Berührungskreises gleich weit entfernt sind, so müssen die Ecken des entstandenen ähnlichen Dreiecks auf denjenigen Winkelhalbirenden des Urdreiecks liegen, deren Durchschnittspunct Mittelpunct des Berührungskreises ist, woraus sogleich die Behauptung folgt.

Anm. Die Parallelen könnten zufolge 12) Tangenten und zufolge 14) Potenzlinien genannt werden.

17) Die Linie, welche den Mittelpunct des Kreises um eins der 4 umliegenden Dreiecke einer Ecke mit dem zugehörigen Pole verbindet, ist parallel und gleich der Excentricität des zugehörigen Berührungskreises.

Nach 11) ist $A_3O \# MA_1$, also auch $A_3O \# MA_2$ und daher auch $A_3A_2 \# MO$.

18) Die Radien der Kreise um diejenigen umliegenden Dreiecke, welchen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, sind einander und der Excentricität des zugehörigen Berührungskreises gleich.

Denn nach §. 2 (9) liegen A_2, B_2, C_2 in den Kreislinien um A_3, B_3, C_3, also sind die Radien dieser Kreise einander und der Excentricität gleich, da nach vorigem Satze $A_3A_2 = B_3B_2 = C_3C_2 = MO = e$.

In gleicher Weise ergiebt sich $A_4A_2 = C_4C_1 = B_4B_1 = e_1$, sowie $A_5A_1 = B_5B_2 = C_5C_1 = e_2$ und $A_6A_1 = B_6B_1 = C_6C_2 = e_3$.

19) Schlägt man um den Mittelpunct eines Berührungskreises mit der Summe oder

Differenz aus dem Radius des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises und der Excentricität des Berührungskreises einen Kreis, so berührt derselbe die Kreise um diejenigen 3 umliegenden Dreiecke, denen der Berührungskreis zugehörig ist, von innen resp. von aussen.

Da nach 18) die Radien der Kreise um diejenigen umliegenden Dreiecke, denen der innere oder ein äusserer Berührungskreis zugehörig ist, einander und $e_{(1,2,3)}$ gleich sind, und da der Kreis um den Mittelpunct des Berührungskreises mit $r \pm e$ resp. $e_{(1,2,3)} \pm r$ geschlagen werden soll, so ist die Differenz resp. Summe der Radien dieses und je eines von jenen 3 Kreisen $= r$. Da nun aber nach 11) der Mittelpunct des Kreises um ein umliegendes Dreieck von dem Mittelpuncte des zugehörigen Berührungskreises um r entfernt ist, so ist die Centrale gleich der Differenz resp. Summe der Radien, weshalb eine innere resp. äussere Berührung stattfinden muss.

20) Die Hauptseiten derjenigen umliegenden Dreiecke, welchen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, sind einander parallel und verhalten sich zu den Gegenseiten der Hauptecken im Urdreieck wie die Excentricität des zugehörigen Berührungskreises zu dem Radius des dem Urdreiecke umschriebenen Kreises.

Zufolge §. 2 (8) ist $A_3A_2 \perp DE$, wie auch $B_3B_2 \perp FG$ und $C_3C_2 \perp HJ$.

Da die Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke über derselben Basis senkrecht auf dieser stehen muss, und nach 17) ist A_3A_2, B_3B_2, $C_3C_2 \parallel OM$, also auch $OM \perp DE, FG, HJ$, und daher $DE \parallel FG \parallel HJ$. Da sich aber in 2 Kreisen die Sehnen zu gleichen Centriwinkeln oder Peripheriewinkeln wie die Radien verhalten müssen, so ist $DE : BC = FG : AC = HJ : AB = e : r$.

In gleicher Weise ergiebt sich $D_1E_1 \parallel FG_1 \parallel H_1J$, sowie $D_1E \parallel F_1G_1 \parallel HJ_1$ und $DE_1 \parallel F_1G \parallel H_1J_1$ und $D_1E_1 : D_1E : DE_1 : BC = FG_1 : F_1G_1 : F_1G : AC = H_1J : HJ_1 : H_1J_1 : AB = e_1 : e_2 : e_3 : r$.

Anm. $D_{(1)}, E_{(1)}, F_{(1)}, G_{(1)}, H_{(1)}, J_{(1)}$ bezeichnen natürlich dieselben Puncte wie in §. 2 oder Fig. II.

21) Die aus den Hauptseiten derjenigen umliegenden Dreiecke, welchen derselbe Berührungskreis zugehörig ist, construirten Dreiecke sind dem Urdreiecke ähnlich.

Folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz.

Anm. Die hier erwähnten Dreiecke entstehen zusammen mit Dreiecken, die den umliegenden Dreiecken, aus deren Hauptseiten sie gebildet werden sollen, congruent sind, wenn man um den Mittelpunct eines jeden Berührungskreises mit seiner Excentricität einen Kreis schlägt, in diesem aus dem Mittelpuncte des umschriebenen Kreises den Dreiecksseiten parallele Sehnen zieht und die Endpuncte dieser Sehnen mit einander verbindet. Die Richtigkeit der Behauptung ergiebt sich ohne Schwierigkeit mit Hülfe von §. 5 (5).

22) Der Mittelpunct des Kreises um ein umliegendes Dreieck ist von der Potenzlinie dieses und des um den Mittelpunct des zugehörigen Berührungskreises mit dem Radius des Kreises um das Urdreieck geschlagenen Kreises eben so weit entfernt, wie der Mittelpunct jenes Berührungskreises von dem Mittelpuncte des die Seiten des Urdreiecks halbirenden Kreises.

Ist $O_{(1,2,3)}$ der Mittelpunct des zugehörigen Berührungskreises, so ist nach 18) $e_{(1,2,3)}$ der Radius des Kreises um das umliegende Dreieck, und da nach 11) die Centrale beider Kreise $= r$ ist, so muss, wenn die Entfernung des Mittelpuncts des Kreises um das umliegende Dreieck von der Potenzlinie mit x bezeichnet wird, zufolge des Begriffs der Potenzlinie $x \,.\, (2r - x) = [e_{(1,2,3)} + x] \,.\, [e_{(1,2,3)} - x]$, also $2rx = e^2_{(1,2,3)}$ oder nach §. 4 (8) $2r \,.\, x = 2r \,.\, \varepsilon_{(1,2,3)}$, also $x = \varepsilon_{(1,2,3)}$ sein.

Anm. Die stillschweigend gemachte Annahme, dass die Potenzlinie von dem Mittelpuncte des Kreises um das umliegende Dreieck nach dem Mittelpuncte des Berührungskreises hinwärts liege, wird durch das positive Resultat bestätigt.

23) Die 3 Potenzlinien des um den Mittelpunct eines Berührungskreises mit dem Radius des Kreises um das Urdreieck geschlagenen Kreises und je eines Kreises um diejenigen 3 umliegenden Dreiecke, welchen jener Berührungskreis zugehörig ist, schliessen ein dem Urdreiecke ähnliches Dreieck ein, in welchem der Mittelpunct des Berührungskreises homologer Mittelpunct ist.

Da die Potenzlinien und zufolge 15) die Seiten des Urdreiecks auf den entsprechenden Centralen senkrecht stehen, so sind die Potenzlinien den Seiten des Urdreiecks parallel, also das von ihnen gebildete Dreieck dem Urdreiecke ähnlich. Da aber auch die Potenzlinien zufolge 22) und 12) von dem Mittelpuncte des zugehörigen Berührungskreises und den Seiten des Urdreiecks gleich weit entfernt sind, so ergiebt sich die Behauptung wie in 16).

24) Der Mittelpunct des innern oder eines äusseren Berührungskreises ist von den zugehörigen, in 23) erwähnten Potenzlinien um die Summe resp. Differenz aus dem Radius des Berührungskreises und dem halben Radius des Kreises um das Urdreieck entfernt.

Da zufolge 11) und 22) die Entfernung gleich dem absoluten Werthe von $r - \varepsilon_{(1,2,3)}$ und da nach §. 4 (7) $\varepsilon = \frac{1}{2}r - \varrho$ und $\varepsilon_{1(2,3)} = \frac{1}{2}r + \varrho_{1(2,3)}$ ist, so muss die Entfernung des Mittelpuncts des inneren Berührungskreises von den zugehörigen Potenzlinien $= \varrho + \frac{1}{2}r$ und eines äusseren Berührungskreises gleich dem absoluten Werthe von $\frac{1}{2}r - \varrho_{1(2,3)}$ oder $\varrho_{1(2,3)} - \frac{1}{2}r$ sein.

§. 7. Zufolge des Satzes §. 3 (1) müssen die Dreiecke, welche durch 3 zu verschiedenen Seiten gehörende Pole bestimmt sind, so wie die im vorigen §. erwähnten congruenten Dreiecke gleich dem vierten Theile derjenigen ihnen ähnlichen Dreiecke sein, welche durch je 3 von den Mittelpuncten der 4 Berührungskreise bestimmt sind; es soll daher bei der folgenden Flächeninhalts-Betrachtung nicht weiter von denselben die Rede sein.

Das durch die Mittelpuncte der 3 äusseren Berührungskreise bestimmte Dreieck ist doppelt so gross, als das durch die Ecken des Urdreiecks und die 3 unteren Pole bestimmte Sechseck.

Da A_1, B_1, C_1 die Mitten von OO_1, OO_2, OO_3 sind, so sind die Dreiecke OAB_1, OAC_1, OBC_1, OBA_1, OCA_1, OCB_1 die Hälften der Dreiecke OAO_2, OAO_3, OBO_3, OBO_1, OCO_1, OCO_2 und daher $AB_1CA_1BC_1 = \frac{1}{2}O_1O_2O_3$.

Hieraus ergiebt sich, wenn man den Flächenraum (Masszahl) von ABC mit $\varDelta$, den von $O_1O_2O_3$, OO_2O_3, OO_1O_3, OO_1O_2 mit T, T_1, T_2, T_3 bezeichnet:

1) $T_{(1,2,3)} = 2r \cdot s_{(1,2,3)} = \frac{2r}{\varrho_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$

Denn es ist $AB_1CA_1BC_1 = MCA_1B + MAB_1C + MBC_1A = \frac{1}{2}r \cdot a + \frac{1}{2}r \cdot b + \frac{1}{2}r \cdot c$, oder $= rs$, da die Diagonalen der Vierecke auf einander senkrecht stehen; also nach vorigem Satze $T = 2rs = \frac{2r}{\varrho} \cdot \varDelta$, da $s = \frac{\varDelta}{\varrho}$ ist.

Da sich aber 2 Dreiecke von gleicher Grundlinie wie die Höhen verhalten, so ist $T : T_1 = O_1A : OA$. Da aber $O_1A : OA = \varrho_1 : \varrho$ ist, muss $T : T_1 = \varrho_1 : \varrho$, also $T_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot T = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{2r}{\varrho} \cdot \varDelta = \frac{2r}{\varrho_1} \cdot \varDelta$ oder auch $= 2rs_1$ sein, da $s_1 = \frac{\varDelta}{\varrho_1}$ ist.

In gleicher Weise ergiebt sich $T_2 = \frac{2r}{\varrho_2} \cdot \varDelta = 2rs_2$ und $T_3 = \frac{2r}{\varrho_3} \cdot \varDelta = 2rs_3$.

Anm. Ist $\varrho_1 = 2r$, so ist $T_1 = \varDelta$.

2) Bezeichnet man die Flächenräume der durch die Berührungspuncte der Kreise um $O_{(1,2,3)}$ gebildeten Dreiecke $G_{(1,2,3)}$ $H_{(1,2,3)}$ $J_{(1,2,3)}$ durch $\tau_{(1,2,3)}$, so ist $\tau_{(1,2,3)} = \frac{\varrho_{(1,2,3)}}{2r} \varDelta$.

Wie in §. 6 (14) erwähnt ist und aus §. 1 (5) gefolgert werden kann, sind die Radien der Kreise um die Dreiecke $O_1O_2O_3$, OO_2O_3, OO_1O_3, OO_1O_2 gleich $2r$, also muss, da diese Dreiecke wegen Parallelität der Seiten den Dreiecken $G_{(1,2,3)}$ $H_{(1,2,3)}$ $J_{(1,2,3)}$ ähnlich sind $\tau_{(1,2,3)} : T_{(1,2,3)} = \varrho^2_{(1,2,3)} : 4r^2$ und daher $\tau_{(1,2,3)} = \frac{\varrho^2_{(1,2,3)}}{4r^2} \cdot T_{(1,2,3)} = \frac{\varrho^2_{(1,2,3)}}{4r^2} \cdot \frac{2r}{\varrho_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta = \frac{\varrho_{(1,2,3)}}{2r} \cdot \varDelta$ sein.

Anm. Ist $\varrho_1 = 2r$, so ist $\tau_1 = \varDelta$.

3) $T_{(1,2,3)} \cdot \tau_{(1,2,3)} = \varDelta^2$, denn $T_{(1,2,3)} \cdot \tau_{(1,2,3)} = \frac{2r}{\varrho_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta \cdot \frac{\varrho_{(1,2,3)}}{2r} \cdot \varDelta = \varDelta^2$.

4) $T_{(1,2,3)} \cdot \tau_{(1,2,3)} = \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = s \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ folgt aus 4) u. §. 5 (5) Anm.

5) $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau = 2\varDelta$.

Denn nach 2) ist $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau = \frac{\varrho_1}{2r} \cdot \varDelta + \frac{\varrho_2}{2r} \cdot \varDelta + \frac{\varrho_3}{2r} \cdot \varDelta - \frac{\varrho}{2r} \cdot \varDelta = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho}{2r}$, also nach §. 3 (4) $= \frac{4r}{2r} \cdot \varDelta = 2\varDelta$.

6) $\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T} = \frac{2}{\varDelta}$

Denn setzt man die Werthe $\tau_{(1,2,3)} = \frac{\varDelta^2}{T_{(1,2,3)}}$ aus 4) in 5) ein, so ist $\frac{\varDelta^2}{T_1} + \frac{\varDelta^2}{T_2} + \frac{\varDelta^2}{T_3} - \frac{\varDelta^2}{T} = 2\varDelta$, also $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T} = \frac{2}{\varDelta}$

7) $(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T}\right) = 4$. Folgt aus 5) und 6).

8) Bezeichnet man die Flächenräume der in §. 5 erwähnten Dreieck $U_{(1,2,3)}$ $V_{(1,2,3)}$ $W_{(1,2,3)}$ mit $\vartheta_{(1,2,3)}$, so ist $\vartheta = \frac{(2r + \varrho)^2}{2r\varrho} \cdot \varDelta$ und $\vartheta_{(1,2,3)} = \frac{[2r - \varrho_{(1,2,3)}]^2}{2r\varrho_{1(2,3)}} \cdot \varDelta$

Wie in §. 5 (13) erwähnt ist, sind die Dreiecke $U_{(1,2,3)} V_{(1,2,3)} W_{(1,2,3)}$ den Dreiecken $O_1O_2O_3$, OO_2O_3, OO_1O_3, OO_1O_2 ähnlich, daher ist zufolge §. 5 (14)
$\vartheta : T = (2r + \varrho)^2 : 4r^2$ und $\vartheta_{1(2,3)} : T_{1(2,3)} = [2r - \varrho_{1(2,3)}]^2 : 4r^2$, also
$\vartheta = \frac{(2r + \varrho)^2}{4r^2} : T = \frac{(2r + \varrho)^2}{4r^2} \cdot \frac{2r}{r} \cdot \varDelta = \frac{(2r + \varrho)^2}{2r \cdot \varrho}$ und

$$\vartheta_{1(2,3)} = \frac{[2r - \varrho_{1(2,3)}]^2}{4r^2} \cdot T_{1(2,3)} = \frac{[2r - \varrho_{1(2,3)}]^2}{4r^2} \cdot \frac{2r}{\varrho_{1(2,3)}} \cdot \varDelta = \frac{[2r - \varrho_{1(2,3)}]^2}{2r\varrho_{1(2,3)}} \cdot \varDelta$$

9) $\vartheta = T + \tau + 2\varDelta$ und $\vartheta_{1(2,3)} = T_{1(2,3)} + \tau_{1(2,3)} - 2\varDelta$

Denn nach 8) ist $\vartheta = \frac{(2r + \varrho)^2}{2r^2} \cdot \varDelta = \frac{4r^2 + \varrho^2 + 4r\varrho}{2r\varrho} \cdot \varDelta = \frac{2r}{\varrho} \cdot \varDelta + \frac{\varrho}{2r} \cdot \varDelta + 2\varDelta$ $= T + \tau + 2\varDelta$ nach 1) und 2). In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

Anm. Ist $\varrho_1 = 2r$, so ist $\vartheta_1 = 0$, wie in §. 5 (14) Anm. schon erwähnt.

10) $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = 6\varDelta$

Zufolge 9) ist $\vartheta - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) = T + \tau + 2\varDelta - [T_1 + T_2 + T_3 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - 6\varDelta] = T - [T_1 + T_2 + T_3] + 8\varDelta - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau) = 6\varDelta$ nach 6) und da $T = T_1 + T_2 + T_3$ sein muss.

11) Bezeichnet man die Flächenräume der in §. 6 (16) erwähnten Dreiecke, welche durch Tangenten [§. 6 (16) Anm.] an die mit r um $O_{(1,2,3)}$ geschlagenen Kreise entstanden sind, durch $t_{(1,2,3)}$, so ist $t_{(1,2,3)} = \frac{r^2}{\varrho^2_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$

Denn nach §. 6 (16) sind diese Dreiecke dem Urdreiecke ähnlich, und die mit r um $O_{(1,2,3)}$ geschlagenen Kreise sind an dieselben Berührungskreise, die bezüglich den Berührungskreisen um $O_{(1,2,3)}$ homolog sind, daher ist $t_{(1,2,3)} : \varDelta = r^2 : \varrho^2_{(1,2,3)}$ also $t_{(1,2,3)} = \frac{r^2}{\varrho^2_{(1,2,3)}} \cdot \varDelta$.

12) $t \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = r^8$. Denn nach 11) ist $t \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = \frac{r^2}{\varrho^2} \cdot \varDelta \cdot \frac{r^2}{\varrho_1^2} \cdot \varDelta \cdot \frac{r^2}{\varrho_2^2} \cdot \varDelta \cdot \frac{r^2}{\varrho_3^2} \cdot \varDelta$, also auch $= \frac{r^8 \cdot \varDelta^4}{(\varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3)^2} = r^8$ nach §. 5 (5) Anm.

13) Bezeichnet man die Flächenräume der in §. 6 (23) erwähnten Dreiecke, welche durch die Potenzlinien der mit $e_{(1,2,3)}$ um die bezüglichen Mittelpuncte und der mit r um $O_{(1,2,3)}$ geschlagenen Kreise entstanden sind, durch $\mathfrak{T}_{(1,2,3)}$, so ist $\mathfrak{T} = \left(1 + \frac{r}{2\varrho}\right)^2 \cdot \varDelta$ und $\mathfrak{T}_{(1,2,3)} = \left[1 - \frac{r}{2 \cdot \varrho_{1(2,3)}}\right]^2 \cdot \varDelta$.

Denn nach §. 6 (23) sind diese Dreiecke dem Urdreieck ähnlich und zufolge §. 6 (24) sind die um O mit $(\varrho + \frac{1}{2}r)$ und um $O_{1(2,3)}$ mit $[\varrho_{1(2,3)} - \frac{1}{2}r]$ geschlagenen Kreise homolog den Berührungskreisen um O resp. $O_{1(2,3)}$, daher ist $\mathfrak{T} : \varDelta = (\varrho + \frac{1}{2}r)^2 : \varrho^2$ und $\mathfrak{T}_{1(2,3)} : \varDelta = [\varrho_{1(2,3)} - \frac{1}{2}r]^2 : \varrho^2_{1(2,3)}$, also $\mathfrak{T} = \left(1 + \frac{r}{2\varrho}\right)^2 \cdot \varDelta$ und $\mathfrak{T}_{1(2,3)} = \left[1 - \frac{r}{2\varrho_{1(2,3)}}\right]^2 \cdot \varDelta$

14) $\mathfrak{T} = \varDelta + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}T$ und $\mathfrak{T}_{1(2,3)} = \varDelta + \frac{1}{4}t_{1(2,3)} - \frac{1}{2}T_{1(2,3)}$

Denn da nach 13) $\mathfrak{T} = \left(1 + \frac{r}{2\varrho}\right)^2 \cdot \varDelta$ ist, so ist auch $\mathfrak{T} = \varDelta + \frac{r^2}{4\varrho^2} \cdot \varDelta + \frac{r}{\varrho} \cdot \varDelta = \varDelta + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}T$ nach 11) und 1). In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

15) $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 = 4\varDelta + \frac{1}{4}(t + t_1 + t_2 + t_3)$.

Denn nach 14) ist $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_3 = 4\varDelta + \frac{1}{4}(t + t_1 + t_2 + t_3) - \frac{1}{2}[T_1 + T_2 + T_3 - T]$, woraus die Behauptung folgt, da $T = T_1 + T_2 + T_3$ ist.

16) Bezeichnet man die Flächenräume der in §. 6 (21) erwähnten Dreiecke, die aus den Hauptseiten derjenigen umliegenden Dreiecke gebildet sind, denen die Berührungskreise um $O_{(1,2,3)}$ zugehörig sind, durch $D_{(1,2,3)}$, so ist $D_{(1,2,3)} = \frac{e^2_{(1,2,3)}}{r^2} \cdot \varDelta$.

Nach §. 6 (21) sind diese Dreiecke dem Urdreiecke ähnlich, und nach §. 6 (20) verhalten sich die Seiten derselben zu denen des Urdreiecks $= e_{(1,2,3)} : r$, also ist $D_{(1,2,3)} : \varDelta = e^2_{(1,2,3)} : r^2$, oder $D_{(1,2,3)} = \frac{e^2_{(1,2,3)}}{r^2} \cdot \varDelta$.

17) $D = \varDelta - 4\tau$ und $D_{1(2,3)} = \varDelta + 4\tau_{1(2,3)}$.

Da nach 16) $D = \frac{e^2}{r^2} \cdot \varDelta$ und nach §. 4 (2) $e^2 = r^2 - 2r\varrho$ ist, so ist $D = \left(1 - \frac{2\varrho}{r}\right)\varDelta = \varDelta - \frac{2\varrho}{r} \cdot \varDelta = \varDelta - 4\tau$ nach 2). In gleicher Weise ergiebt sich das Uebrige.

18) $D + D_1 + D_2 + D_3 = 12\Delta$. Denn nach 17) ist $D + D_1 + D_2 + D_3 = 4\Delta + 4(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau) = 4\Delta + 8\Delta$ oder 12Δ nach 5).

19) Bezeichnet man die Flächenräume der in §. 6 (9) erwähnten Parallelogramme, deren Ecken Mittelpuncte der Kreise um die umliegenden Dreiecke der Ecken A, B, C sind, durch P_1, P_2, P_3, so ist $P_1 = 2r \,.\, a$, $P_2 = 2r \,.\, b$, $P_3 = 2r \,.\, c$.

Nach §. 6 (9) stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und sind gleich den ihnen parallelen Centralen der Berührungskreise. Da aber Vierecke, deren Diagonalen gleich sind und sich unter gleichen Winkeln schneiden, einander gleich sein müssen, so ist $P_1 = O_1O_2\ OO_3 = OO_1O_3 + OO_1O_2 = T_2 + T_3$, also auch nach (1) $= 2r \,.\, s_2 + 2r \,.\, s_3 = 2r \,.\, a$, da $s_2 + s_3 = \frac{1}{2}(a + c - b) + \frac{1}{2}(a + b - c) = a$ ist. Eben so ergiebt sich $P_2 = 2r \,.\, b$, $P_3 = 2r \,.\, c$.

Anm. Die Pole je zweier Seiten bestimmen rechtwinklige Parallelogramme, deren Seiten halb so gross sind, als die Diagonalen von P_1, P_2, P_3. Diese und die in §. 6 (5) erwähnten congruenten Parallelogramme sind daher, wie leicht einzusehen, halb so gross, als die bezüglichen Parallelogramme P_1, P_2, P_3.

20) $P_1 + P_2 + P_3 = 4rs = 2T$. Denn $P_1 + P_2 + P_3 = 2r\,(a + b + c) = 4r \,.\, s = 2T$.

21) Verbindet man die Mitten je zweier anstossenden Seiten eines Vierecks, so entsteht bekanntlich ein Parallelogramm, dessen Seiten halb so gross, als die Diagonalen des Vierecks und dessen Winkel gleich den von den Diagonalen eingeschlossenen Winkeln sind. Führt man nun diese Construction an den 3 Vierecken DED_1E_1, FGF_1G_1, HJH_1J_1 aus, welche von den Hauptseiten der umliegenden Dreiecke der Ecken A, B, C gebildet werden, und bezeichnet man die Flächenräume der so entstandenen Parallelogramme durch p_1, p_2, p_3, so ist $p_1 = \frac{a^3}{2r}$, $p_2 = \frac{b^3}{2r}$, $p^3 = \frac{c^3}{2r}$.

Da beide Diagonalen in den Vierecken DED_1E_1, FGF_1G_1, HJH_1J_1 einander und bezüglich $2a$, $2b$, $2c$ gleich und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel die Winkel der Ecken A, B, C sind, so sind die erwähnten Parallelogramme gleichseitig und den Parallelogrammen mit den Flächenräumen P_1, P_2, P_3 nach §. 6 (9) ähnlich; daher ist $p_1 : P_1 = a^2 : 4r^2$ oder nach 19) $p_1 : 2ra = a^2 : 4r^2$, also $p_1 = \frac{a^3}{2r}$. Eben so ergiebt sich $p_2 = \frac{b^3}{2r}$, $p_3 = \frac{c^3}{2r}$

Anm. Bei dem Vierecke, welches von den Hauptseiten der umliegenden Dreiecke der Ecke C (kleinster Winkel des Urdreiecks) gebildet wird, schneiden sich zwei Seiten; versteht man für diesen Fall unter dem Flächenraum des Vierecks die Differenz der beiden Dreiecke, so sind die Flächenräume der Vierecke, welche von den Hauptseiten der umliegenden Dreiecke der Ecken A, B, C gebildet werden, bezüglich $\frac{a^3}{r}$, $\frac{b^3}{r}$, $\frac{c^3}{r}$, da bekanntlich p_1, p_2, p_3 halb so gross als diese Vierecke sind.

22) $\sqrt[3]{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} = 2\Delta$. Denn nach 21) ist $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{a^3 .\, b^3 .\, c^3}{8r^3}$, also $\sqrt[3]{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{2r} = 2\Delta$, da $\frac{abc}{4r} = \Delta$ ist.

Schlussbemerkung. Da die Abhandlung als Programmarbeit auf einen beschränkten Raum angewiesen ist, so konnten namentlich die §§. 5 und 6 nicht in der Weise ausgebeutet werden, als es möglich war. Doch ist der Zweck der Arbeit in so fern erreicht, als nachgewiesen ist, dass die Pole der Dreiecksseiten in enger Beziehung zu den Berührungskreisen stehen.

Das Weglassen der Figuren war nicht von vornherein beabsichtigt, sonst würde es von mir möglichst vermieden worden sein, dieselben Buchstaben für verschiedene Puncte zu gebrauchen, was nachträglich zu thun die Zeit nicht gestattete.

A. Dietrich.