Bemerkungen aus der Naturlehre.

„Die Himmel erzählen die Ehre Gottes und die Feste verkündigt seiner Hände Werk. Ein Tag sagt's dem andern und eine Nacht thut's kund der andern. Es ist keine Sprache, noch Rede, da man nicht ihre Stimme höre."

Wenn wir diesen Ausspruch des begeisterten Sängers hören, wenn wir vielfach in den Schriften des N. T. in Gleichnissen und Bildern die Naturbetrachtung erhoben finden, so kann wohl kaum anders der Gedanke des naturwissenschaftlichen Unterrichts aufgefaßt werden, als in der Bestimmung, daß es ein Verstehenlernen der Sprache Gottes sei. Nicht unser Ohr allein trifft diese Sprache, alle Sinne sind ihr geboten, sie sollen alle geöffnet werden, um mit vollen Zügen diese Stimmen aufzunehmen, diesen Tönen zu lauschen. Wohlgefallen sollen sie finden am Glanze der Morgensonne und am lieblichen Schalle der fleißigen Sängerin der Nacht. In Demuth sich beugen vor dem Zornesklange im Gewitter und freudig sich erheben bei den freundlichen Farben im Friedensbogen. Mag der süße Duft der Rose uns erquicken oder der frischlabende Quell, mögen wir ruhen auf dem schwellenden Polster des Mooses oder von Bergeshöhen die heitere Landschaft überschauen. Nicht segensreich kann es wirken, wenn die Sinne abgestumpft das Dargebotene nicht erfassen, wenn der Geist ermattet die göttliche Sprache nicht versteht, sie nicht treu bewahrt und im Herzen erwägt.

Den Reichthum dieser Sprache auszuforschen und ihn dem jugendlichen Gemüthe zu erschließen ist der schönste Beruf der Naturgelehrten. Doch nicht leicht ist diese Kunst. Zwar vermißt sich der Mensch einzudringen ins Innere der Natur; aber die Kräfte von Jahrhunderten, selbst Jahrtausenden haben die Erkenntniß nicht weiter gefördert, als daß wir zu dem Bewußtsein gekommen sind: Wir stehen eben noch am Eingange. Die großartigen Darstellungen A. v. Humboldt's sprechen es aus, wie wir mit einem Blick am sternenklaren Himmel die Geschichte langer Zeiten überschauen und doch — Was verstehen wir von diesem Blick in die Unendlichkeit? Nicht einmal die Weiten der hellsten Sterne können wir messen. Nur das wissen wir durch den glücklichen Gedanken Newton's, daß selbst den Stoff, dessen Leben wir nicht verstehen, ein gemeinsames Band umschlingt, welches die mächtigsten Sonnen hält, wie das geringste Sandkorn. Unscheinbare Bemerkungen, so einfach, daß sie ein Kind zu fassen vermeint, tragen erst jetzt die Früchte, die sie schon längst dem Menschengeschlecht hätten bieten sollen. — Daß der unsichtbare Dampf eine gewaltige Kraft hat, war gewiß schon von vielen bemerkt, ehe Watt es versuchte ihn uns dienstbar zu machen. — Kaum war es gelungen den unbändigen Sohn des Feuers und der Fluth einzufangen in ehrene Banden, so lernte man durch einfache Versuche auch andere Kräfte kennen, die so oft die Erde erschütterten, die Wohnungen der Menschen zerstörten und doch in der Weise, wie man sie bis dahin behandelte, als unbedeutendes Spielzeug galten. Jetzt bringen sie, selbst den Boden des Meeres überschreitend, Botschaft von den äußersten Enden der gebildeten Welt. — Eine Kugel an einfachem Faden maß die Tiefen und gab die Richtschnur den Bauleuten zu herrlichen Tempeln, ehe Galilei in ihren Schwingungen das Maß der Zeit fand, welches gebunden und getrieben durch Federkraft und Schwere Ordnung in schwankende Verhältnisse brachte, und L. Foucault sie wieder in großartiger Einfachheit schwingen ließ im festen Dome zur augenfälligen Erkenntniß einer Wahrheit, deren Begründung viele rührige Geister beschäftigt und manche bindende Wahrheit zu Tage gefördert hatte.

Demüthigt daher so manches Verfehlte und Schwache den menschlichen Geist, so können ihn doch die glücklichen Erfolge wieder erheben und neue Spannkraft geben zur Ehre der Wahrheit thätig zu sein.

Das ist aber der Kern unseres Strebens, daß wir die Göttlichkeit der Wahrheit begründen helfen. Jede Regel, jedes Gesetz der Natur ist sicher und unumstößlich. Es duldet keine Ausnahme, denn es ist Gottes Stimme. Glauben wir sie erkannt zu haben und es findet sich nicht bestätigt, so war es eben Menschenwerk, das nicht bestehen kann. Andere mögen kommen und lesen die geheimnißvollen Zeichen. Das ist die Hoheit in den Werken der Schöpfung, daß sie selbst von der Wahrheit überzeugen. Kein Blendwerk, so glänzend es immer sein mag, bleibt vor ihnen. Die Wahrheit, die reine Wahrheit allein besteht. Ist es da zu verwundern, wenn der Mann, welcher sein Leben mit seiner ganzen Kraft dem Erforschen dieses hohen Zieles widmet, schmerzlicher, als der Künstler durch den Mißton eines Instrumentes, durch die schneidenden Mißtöne des Truges und der Lüge verletzt wird, schroff entgegentritt diesem Fluche der Menschheit, wenn er schlaffe Seelen aufrüttelt und mit scharfen Sporen stachelt um sie zu leiten zum Born der Einsicht und der Erkenntniß? Mit Freuden wird er erfüllt, wenn es gelingt; freudiger noch wird er bewegt, wenn mit sanfteren Mitteln ein frischer Geist gewonnen wird und die Sprache verstehen lernt, die den Menschen zum Menschen bildet.

Doch welches ist der Weg der Naturforschung? Hier ist es die Menge des Einzelnen, die uns umdrängt, dort die großartige Gleichheit weiter Räume, welche uns vergebens nach einem Haltpunkte suchen läßt; stets aber ist es die Hauptschwierigkeit, daß wir aus dem Besondern das Allgemeine finden sollen, während die allumfassenden Gesetze des Geistes das Allgemeine verlangen, um das Besondere danach zu begreifen. Dieser Kreislauf ist das Räthsel der Forschung. Erst auf dem Wege sollen wir das Ziel finden; im Gehen das Gehen lernen. Daher das Ueberraschende, das oft mit Widerstreben Aufgenommene, daher die schwankenden Hypothesen, deren Wahrheit sich erst spät glänzend bethätigte, während Manches früheren Zeiten unumstößlich schien, was jetzt vor dem Lichte der Erkenntniß schwand. Mit welcher Vorsicht wir hier fortschreiten müssen, um nicht auf Irrwege zu gerathen, wird leicht zu ermessen sein.

Die Mißachtung und das Verkennen der wahren Naturverhältnisse hat sich schwer gerächt. Indem man sich ganz den ethischen Wissenschaften zuwandte, die Naturkunde als schwarze Kunst verketzerte, die herrlichen Gebilde Gottes als rohen Stoff den materiellen Interessen zuwarf, verkehrte man den Segen in Fluch. Täuschung und Betrug bemächtigte sich der verkannten Kräfte und der Aberglauben trieb sein böses Spiel. Die reine kräftige Gottessprache drang nicht mehr in die verstopften Ohren, der Mensch blieb taub gegen alle Mahnungen, welche die unabänderlichen Gesetze des Weltenbaues predigten, die Welt erschien ihm unrein, weil er sie selbst entwürdigt hatte und nur das Gemeine in ihr suchte. Seine eigene Lüge trug er hinein und wunderte sich, wenn er nichts Hohes mehr darin fand. Anderen schrieb er die Schuld seiner Leiden, seines Mißgeschickes zu, machte Anderen die Vorwürfe, die er sich selbst machen sollte eingedenk des alten Sprichwortes: „Jeder ist seines Glückes Schmied." Wer freilich den Preis der irdischen Güter nur nach dem Geldwerthe zu schätzen weiß, ist arm bei allem Ueberfluß; reich nur ist der, wer mit sinnigem Geist die Welt umfaßt und sein nennen darf, was er in sich aufgenommen hat. Stolz auf die Gebilde seines Geistes hatte der Mensch vergessen, daß sich der Geist den Leib baue und in seiner selbstgefälligen Eitelkeit legte er nicht den Maßstab der großen Schöpfung an seine schwachen Erzeugnisse. „Wie sonderbar, daß der Ausdruck Bildung bei einem wahrhaft erleuchteten Volke sich nur auf Kenntniß der klassischen Sprachen, Geschichte und Literatur erstreckt!" sagt Liebig und es scheint dieser Vorwurf getroffen zu haben; denn schon ist die hohe Erwartung ausgesprochen: „Die Zeit dürfte mit raschen Schritten herrannahen, wo man von einem Gebildeten ebenso Bekanntschaft mit den chemischen Erscheinungen, als mit den Göttern Griechenlands erwarten wird." Säumen wir nicht auch unser Scherflein dazu beizutragen. Grade die wichtigsten Gesetze, weil sie stets wirksam sind, erscheinen den verwöhnten Sinnen alltäglich. Dahin ist zu arbeiten, daß die Großartigkeit, welche in der Einfachheit liegt, zur Erkenntniß komme. Nur das Wahre kann Anspruch machen zu bestehen. Vielfach aber haben sich in den Wissenschaften Fehler eingeschlichen. Es kann nicht genug darauf aufmerksam gemacht werden, daß unsere Naturerkenntnisse aus dem Einzelnen geschöpft Mängel und Fehler zeigen müssen, wenn wir sie zu sehr als allgemein hinstellen. Beschränkung thut noth. Es ist die Pflicht des Lehrers auf solche Mängel besonders hinzuweisen und in diesem Sinne mögen die folgenden Bemerkungen aufgenommen werden.

1. Der Umfang der Naturwissenschaften und ihre Anordnung.

Glücklicher Weise ist jetzt das Streben allseitig erwacht, was sonst nur wenige belebte, in der Natur das Göttliche zu erkennen. „Aus der Erde Schooß, von des Baumes Moos tönt: Es ist ein Gott." Während der alte Dichter den Menschen zur Erhebung seiner Würde auf die Sterne des Himmels verweiset, wird jetzt jedes Geschöpf zum leuchtenden Sterne; denn der Forschertrieb dringt ebenso in das Kleine, wie in das Große und belauscht die Werkstätten der Natur. Für zweckmäßige Behandlung erheben sich viele Stimmen und namentlich forderte Mager (P. R. 1844 u. 47) die Naturgelehrten auf die Methode des schulmäßigen Unterrichts in den Naturwissenschaften zu prüfen, quid, quale und quantum zu erforschen und dahin zu arbeiten, daß diese Wissenschaften wirklich als Wissenschaften, als logisch geordnetes Wissen erscheinen. Doch sollte man fast meinen, daß sein Ruf vergebens erschollen, wenn man noch selbst in der neuesten Zeit Klagen hört, wie sie z. B. in einem Prog. d. Realschule zu Krotoschin 1853 laut werden. Fassen wir deshalb den geschichtlichen Gang der Naturwissenschaften ins Auge.

1*

Als zur Zeit der alten Weisen alles Wissen in der einen Weisheit vereinigt war, da mußte, insofern die Natur das All war, die Naturlehre gleichbedeutend mit jenem Wissen sein. Doch seit die Philosophen, besonders Aristoteles, die Betrachtung des Körperlichen von der des Geistigen trennte, fiel der Physik nur das Körperliche zu; dies aber auch in weitester Ausdehnung. „Physik ist die Wissenschaft von den Eigenschaften und Kräften der Körper (Erxleben 1772). „Physik ist die Lehre von der Natur, d. h. von dem sinnlich Wahrnehmbaren und den Ursachen der mannigfaltigen Veränderungen, die man Kräfte zu nennen pflegt." (Gehlers Lex. VII. 1. S. 493. 1833 und ähnlich Lamé cours de physique). Es gehörte dazu Astronomie, Geographie und Geometrie, Mechanik, Kenntniß der Thiere und Pflanzen, sowie das Wenige, was man aus Chemie, Optik und Akustik wußte. Alles reihte sich noch leidlich genug aneinander. Die vier Elemente herrschen auf Erden, während der Aether die Welt umfängt. Die einfachen Erscheinungen der Aggregatsformen und die mannigfachen der Wärme, die man leicht mit Licht und Elektrizität in Verbindung bringen konnte, gaben einen passenden Anhaltepunkt. Als jedoch bald darauf die Betrachtung der Größe eine freiere geistige Auffassung fand, trennte sich die Mathematik, zwar noch auf Raumverhältnisse fußend und erst an diese die abstrakte Zahl anschließend, fast ganz von den übrigen Theilen der Physik. Zunächst wohl nur die Planimetrie, denn den stereometrischen Theil finden wir theils in der Astronomie, theils in der Geographie. So blieb es auch nach dem Aufschwung der Wissenschaften in der Neuzeit, wo die Arithmetik sich weiter bildete und als Trigonometrie im engsten Bunde mit der Astronomie gewaltig fortschritt, bis die Philosophie, in großer Regsamkeit mit dem geistigen Leben beschäftigt, sich auch des körperlichen wieder zu bemächtigen suchte. Da mußte es leicht möglich erscheinen jene so reine Wissenschaft ganz von ihrer körperlichen Grundlage zu trennen und in das geistige Gebiet hinüberzuziehen, dabei die Physik selbst als angewandte Mathematik zu betrachten. Diese Umkehrung der natürlichen Verhältnisse mußte freilich für die systematische Anordnung Verlegenheit bereiten (Mager P. R. Märzheft 1844 S. 207), doch wird sie erklärlich dadurch, daß die meisten Erkenntnisse der Natur um so schnellere Fortschritte machen, jemehr sich die Mathematik auf sie anwenden läßt. In der That heißt dies nichts Anderes, als die Betrachtung der Natur ist um so sicherer, jemehr dabei die Gestalt vorherrschend ist. Vom Stoffe beachtete man nur soviel, als grade dem Leben unumgänglich diente. Für die weitere Anordnung galt die Betrachtung, daß der Stoff die Gestalt in seiner Starrheit am besten festhält. In dieser Form diente er als Hülfsmittel zu Werkzeugen und Gefäßen, so beachtete man am leichtesten die Veränderungen der Lage und des Ortes. Daher schloß sich die Mechanik den festen Körpern an. Licht, Wärme, Elektrizität erschienen so flüchtig, daß man sie wohl den flüssigen Körpern zuweisen konnte. So finden sich in einem besonders für den mechanischen Theil ganz tüchtigen Buche (von J. H. Winkler 1754) die flüssigen Körper aufgezählt 1) Luft. 2) Feuer. 3) Wasser. 4) Licht. 5) Quecksilber. 6) Elektrische Materie. 7) Magnetische Materie. 8) Was die flüssigen Materien mit den festen gemein haben: a. Lockerheit. b. Durchsichtigkeit und Sichtbarkeit. c. Farbe. d. Schatten und e. Schall. Bald unterschied man auch darin und 1772 finden wir im Wesentlichen die Anordnung, wie sie noch jetzt beliebt ist, in den „Anfangsgründen der Naturlehre von J. Ch. P. Erxleben," wo in den neueren Auflagen von Lichtenberg

(1794) den eigentlichen Flüssigkeiten eine Uebersicht der Chemie und der Luft die Beschreibung verschiedener Luftarten angehängt ist. Scharfe Unterscheidung zwischen flüssigen und luftartigen Körpern findet man selbst in unseren Zeiten noch nicht in allen Schriften, obgleich sie ebenso bestimmt ist, wie zwischen fest und flüssig. Die Uebergänge (Dampf, Wasser, Eis) und sonstige Beziehungen, namentlich die Wirkungen der Expansivkraft werden erst durch die Erscheinungen, wie sie die Wärme hervorruft, klar, daher sie auch bei der Lehre von der Wärme vorkommen. Soviel hierbei im Laufe der Zeit für Einzelnes geleistet wurde, im Ganzen steht die Physik noch nirgend als eine geordnete Wissenschaft da, selbst in dem engeren Sinne. Fast möchte man sagen, die Bücher enthielten Abschnitte aus den verschiedensten Eintheilungen. Neben einer Lehre von den festen Körpern, also bei einer Theilung nach der Aggregatsform, finden wir eine Akustik und Optik, also Theilung nach den Sinnen, endlich auch Wärme, Magnetismus, Elektrizität, also Theilung nach den Kräften. Wir müssen uns nur wundern, daß alles so harmlos und ohne namhafte Widersprüche dasteht; diese aber dadurch vermieden werden, daß man in den ersteren Abschnitten nur die Wirkungen der Schwere und der dieser entsprechenden oder dadurch gemessenen Kräfte und Erscheinungen, besonders die Bewegung, berücksichtigt, dann die Kräfte, welche auf einzelne Sinne wirken, folgen läßt, insoweit sie leichtfaßliche Gesetze zeigen. Man sieht leicht, daß die einzelnen Abschnitte gebildet sind, je nachdem wichtige Entdeckungen gemacht und deren Gesetze gefunden wurden. So steht die Mechanik ziemlich fest durch Galilei's, Kepler's und Newton's großartige Thätigkeit. Auch die Optik, die immer mehr an Wissenschaftlichkeit gewann, wurde durch Newton's Bemühungen auf einen Grundsatz zurückgeführt, der seinen Anhängern unumstößlich schien. Doch erst Euler's Wellentheorie erhob sie zu einer Vollkommenheit, welche durch die folgerechte Begründung der Erscheinungen der beste Beweis für die Wahrheit der letzteren Hypothese ist. Darauf erhob sich durch Franklin die Elektrizität und griff noch mächtiger um sich, als Galvani und Volta sie da am mächtigsten fanden, wo man sie früher gar nicht erwartet hatte. Die Fortschritte, welche sie durch Davy, Oerstedt und Faraday machte, beengten das Feld des Magnetismus, der bis dahin selbstständig den Vorrang vor ihr behauptet hatte und jetzt, obgleich seiner Anwendbarkeit wegen immer noch sehr wichtig, nur als eine besondere Erscheinung der elektrischen Kraft erschien. Von dieser Kraft war schon Lichtenberg so begeistert, daß er selbst **vor** der Entdeckung der voltaischen Säulen mit prophetischem Geiste sagte: „Wenn wir erst Elektrizität anmachen, wie wir Feuer machen, so werden wir ganz andere Resultate erzielen, für jetzt stehen wir erst beim Reiben." Endlich will sich auch die Chemie wieder Geltung verschaffen und sie, die früher, besonders im Artikel **Feuer**, mit den übrigen Theilen vermengt vorkam, sich dann zeitweise seit ihrer mächtigen Ausdehnung durch Lavoisier ganz von der Physik trennte, wird jetzt als unentbehrlich eingeschoben, wenn die Zeit nicht erlaubt sie als selbstständige Wissenschaft zu behandeln.

In welchem Sinne das Wort Wissenschaft für die Naturkenntnisse gebraucht werden darf, ist durch die Bezeichnung induktive Wissenschaft genauer bestimmt. Es kann bei der Unvollkommenheit unseres Wissens eben nur der **Inbegriff** unserer Kenntnisse von der Natur sein. Um hierin eine gewisse Ordnung zu gewinnen, würde es zunächst darauf ankommen die **Eigenschaften und Kräfte der Körper** überhaupt **kennen** zu lernen. Dies ist jedoch nur dadurch möglich, daß sie Eindrücke auf unsere Sinne machen, also irgend Veränderungen hervorbringen und selbst erleiden. Diese wahrzunehmen und danach die Eigenschaften zu erkennen und diese Kenntnisse zu sammeln ist die Sache der Naturlehre. („Die Aufgabe der Physik ist: Die Ursachen der Dinge zu erkennen oder vielmehr die Gesetze, welche den Erscheinungen in der Natur und deren ohne Unterbrechung einander folgenden Veränderungen zum Grunde liegen, zu erforschen." Gehlers Lex. VII. 1, S. 498.) Wenden wir dann diese Eigenschaften dazu an die Körper kennen zu lernen, benutzen wir sie als Merkmale (historisch), so befinden wir uns im Gebiete der Naturgeschichte. Jene geht dieser nothwendiger Weise voran und ist in der That auch der eigentliche Gegenstand des Unterrichtes, während die naturgeschichtliche Uebersicht mehr zum gedächtnißmäßigen Festhalten dient. Dort sind es die Eigenschaften, hier selbstredend die Gegenstände, welche der Anordnung zum Grunde liegen. Sämmtliche Gegenstände, soweit sie im Bereich unserer Sinne sind, werden aber den Bestimmungen der Naturlehre unterworfen sein.

Somit erhalten wir für die Naturlehre die einfache Bestimmung: Körper ist begrenzter Stoff. Die dadurch ausgesprochenen Eigenschaften sind Ausdehnung und Undurchdringlichkeit als die wesentlichsten. Demnach muß die Mathematik, als Wissenschaft, welche die Ausdehnung in jeder Beziehung bestimmt, ein Theil der Physik sein. Wie abstrakt oder konkret wir sie auch fassen, sie ist die Wissenschaft einer Eigenschaft, ohne welche wir die Körper uns nicht denken können. Sie muß ein wesentliches Glied in der Kenntniß derselben bilden. Sie ist eben nur geistig, insofern alles Wissen geistig ist. Ein sogenannter mathematischer Körper ist der Körper, insofern nur die eine Eigenschaft desselben, seine Ausdehnung, betrachtet wird. Bei den wenigen Beziehungen, welche sie als Grundlage experimentiell darzuthun hat, und bei der großartigen Folgerichtigkeit, mit welcher sie darauf weiter gebaut hat, ist es der Mathematik gelungen sich so ganz loszulösen von ihrem naturwissenschaftlichen Verbande, daß sie als reine Geisteswissenschaft dasteht, welche ihre gewaltige Hülfe der an die Scholle gebundenen Schwester zu leihen scheint. In Bezug auf die Undurchdringlichkeit, wonach kein Körper gleichzeitig den Raum eines andern einnehmen kann, ergeben sich nun die übrigen Eigenschaften der Körper. Einer muß den andern ganz oder theilweise verdrängen; daher Bewegbarkeit (Statik, Mechanik), Zusammenhang (Theilbarkeit), die Stärke des Zusammenhanges (Aggregatsform). Die Theilbarkeit ist wiederum nur möglich, wenn Lücken vorhanden sind, in welche der theilende Körper eindringen kann; also bedingt durch Porosität, der Grundlage der Dichtigkeit und Durchlässigkeit (Endosmose), wobei die Frage entsteht, ob ein Körper seinen vorigen Raum wieder annehmen, ob er größer oder kleiner werden kann? (Elastizität, Ausdehnbarkeit, Ausdehnsamkeit.) Betrachten wir hierbei, wie die Körper weiter aufeinander wirken und wie namentlich Bewegung und Zusammenhang bedingt werden, so finden wir die verschiedenen Arten der Anziehung. Jene Massenanziehung als Schwere und die polaren Anziehungen, die theils die Körper ganz ändern, indem sie durch Verbindung und Trennung neue Körper bilden (Chemie), theils nur äußerlich zu sein scheinen, indem sie die Körper nach der vorübergehenden Erscheinung wieder in den alten Zustand zurückkehren lassen (Elektrizität, welcher sich jetzt der Magnetismus anschließt*).

*) Hier möchte die Bemerkung nicht am unrechten Platze sein, daß der Streit über Chemismus und Voltaismus in der Elektrizitätslehre eben nur ein Wortstreit ist; denn es ist nicht das Eine oder das

Die Erscheinungen der polaren Anziehung sind endlich so bedeutsam, daß sie wieder besondere Betrachtungen hervorrufen. Es sind jene eigenthümlichen Wirkungen auf unsere Sinne. Wenn es auch nicht gelungen ist die Gesetze des besonders in der Chemie angeregten Geschmackes und Geruches jetzt schon zu ergründen, so geben doch Schall, Licht und Wärme (Akustik, Optik, Kaustik) eine desto reichere Ausbeute, da sie auch noch vielfach Rückwirkungen auf die früher erwähnten Eigenschaften ausüben.

Die Gegenstände, welche sich der Naturgeschichte darbieten, sind Himmel und Erde, demnach die Wissenschaften Astronomie, wozu auch die sogenannte mathematische Geographie gehört, und Geognosie im weitesten Sinne. Diese letztere zerfiele in Atmosphärologie (Meteorologie und Klimatologie), Geographie im weiteren Sinne und Geognosie im engeren Sinne mit der Geologie, jenachdem Umgebung (Luft), Oberfläche oder Inneres der Erde zu erforschen ist. Endlich würde die Geographie enthalten die eigentliche Geographie (topische und politische) nebst Zoologie, Botanik und Mineralogie (Oryktognosie).

2. Methode des Unterrichts. Auf die Frage, wie diese Massen zu bewältigen wären, gab Pestalozzi die treffende Antwort, daß aller Unterricht mit der Anschauung beginnen müsse. Herbart im „A B C der Anschauung" hat so eindringlich darüber gesprochen, daß sein im Anfange unseres Jahrhunderts geschriebenes Werkchen noch heut verdient in den Händen jedes Lehrers zu sein. Gegenstände sind für den ersten Unterricht durchaus nothwendig, sonst fehlt es den Worten und somit dem Unterrichte an Inhalt. Die wahre Bedeutung der Worte zu finden ist eben die Sache des Unterrichts. Wie soll der Lehrer, wie soll der Schüler erfahren, ob er richtig beobachtet hat, wenn nicht durch die rechte Bezeichnung der Dinge mit Worten oder durch die Nachahmung der Erscheinung? Daher die Sprache, die Sprache Gottes soll der Schüler kennen lernen. So wie wir aber die Erscheinungen aussprechen, kennen wir auch ihr einfaches Gesetz und das ist eben der Nutzen der Naturwissenschaften für den Unterricht, daß wir einen Prüfstein für die Wahrheit haben, den wir in anderen Wissenschaften entbehren. Hier gilt kein subjektives Meinen, die Natur stellt sich uns objektiv gegenüber. Neben dem Kennen steht das Können, neben dem Lernen das Thun. Hier bot sich zuerst die Geometrie als Schulwissenschaft (Mathematik) dar. Im weiteren Verlauf gab man der Naturgeschichte den Vorrang vor der Naturlehre, indem man vergaß, daß alle Erkenntniß der Eigenschaften nur durch Veränderung möglich ist; denn es gilt das Gesetz für alle Eigenschaften, welches gewöhnlich nur für Ruhe und Bewegung angeführt wird: Jeder Körper bleibt so lange in einem Zustande, bis eine neue Kraft ihn in einen andern versetzt. Daher im Streben der Kinder nach der Erkenntniß das Leben d. i. die Veränderung so anziehend ist und die Naturgeschichte ihnen an Interesse verliert, wenn die Dinge in die strenge

Andere, sondern es ist die Wechselwirkung der Körper, welche entweder nur soweit gedeiht, daß sie eine Spannung ausübt, die sich in den verschiedenen elektrischen Erscheinungen ausspricht, oder so stark ist, daß eine Verbindung der Körper möglich wird, wonach die ebenfalls eingetretene Spannung aufhört. Diese Spannung wird bei vielen schon erreicht, wenn sie einander nur berühren, Galvanismus; bei anderen dagegen erst, wenn sie sich reiben, Reibungs-Elektrizität. Nicht durch Berührung und Reibung entsteht die Elektrizität, sondern bei Berührung und Reibung durch die Kräfte der Körper.

Form des Systems gebracht werden; daher auch wohl der geringe Erfolg trotz der gemachten Anstrengungen. Seit mehr als drei Jahrzehnten hat man durch Harnisch, Suffrian und Lüben angeregt die von Pestalozzi aufgestellte Bedingung in der Methode des naturgeschichtlichen Unterrichts zu erfüllen gesucht. In mehr oder weniger abweichenden Richtungen folgten Andere, doch ist Lüben fast der Einzige geblieben, welcher seine als Grundsätze aufgestellten Ansichten auch in seinen Werken folgerecht durchzuführen suchte. Gabriel hatte zwar in seinem Leitfaden ein Gleiches zu thun versucht, aber in seinem größeren Werke nahm er den Stoff vielfach aus anderen Schriften (z. B. Naturgeschichte von Lenz) ohne den Inhalt seinen ausgesprochenen Ansichten gemäß nach Form, Bau und Leben streng zu ordnen. Die Mängel Eichelberg's hat bei aller sonstigen Anerkennung Nees von Esenbeck aufgedeckt (Breslauer Zeitung 1841 No. 49. Mager P. R. V. B. 206. S. und IX. B. 1. S.) In neuester Zeit hat Nees von Esenbeck selbst in seiner allgemeinen „Formenlehre der Natur als Vorschule der Naturgeschichte" eben jene gerügten Mängel zu ergänzen gesucht. Im Wesentlichen gehört der Inhalt dieser Vorschule in die Naturlehre, doch möchte es schwer sein auf diese Weise bei unerfahrenen Schülern das Ziel zu erreichen. Schön ist es und angenehm für den Forscher, der einen weiten Kreis von Erfahrungen gesammelt hat, diese nach festen Regeln zu ordnen; es möchte aber nicht möglich sein solche mit philosophischem Geiste, doch auch mit philosophischer Starrheit des einmal angenommenen Systems durchgeführte Eintheilung Kindern faßlich zu machen und zwar um so weniger, als die aufgestellten Kreise mehrfach Lücken enthalten, welche entweder durch spätere Forschung ausgefüllt werden sollen oder, wenn in der Natur sich nichts Entsprechendes findet, das System fehlerhaft erscheinen lassen. Mit Recht erkennt Herbart die Kombinatorik als Vorschule der Mathematik an, indem wir mit einem Elemente anfangend die Zahl derselben nach der Fassungskraft der Jugend steigen lassen. Wo irgend möglich muß diese Darstellungsweise auch in der Naturbetrachtung obwalten, doch wird der Uebergang der Formen, wie wir sie z. B. in der Blätterwelt finden, die Mannigfaltigkeit der Farben und Gestalten bei Käfern und Schmetterlingen, die oft wundersamen Gebilde in Füßen und Zähnen der höheren Thiere solche Behandlung für die Reihe der lebenden Wesen sehr erschweren und, wo sie am leichtesten zu sein scheint, bei den Steinen fehlt es an passenden Exemplaren (Individuen möchte man sie den organischen Reichen entsprechend nennen) um krystallographisch das System durchzuführen. Eben dieser Mangel, bedingt durch die gehemmte Ausbildung der Steine und hervorgerufen durch das überwiegende Walten der inneren Kräfte in den nicht vereinzelt organisch gebundenen Stoffen, hat uns gezwungen die Mineralogie auf der unteren Stufe des Unterrichts fast ganz in der Chemie aufgehen zu lassen.

Wir sehen uns also auch hier im Wesentlichen auf die Naturlehre angewiesen und in der That bietet dieselbe beiweitem mehr für die Fassungskraft und die sittliche Bildung der Jugend dar, als es irgend die Naturgeschichte thut. Für die Methode der Naturlehre waren längst die beiden Wege des Experiments und der mathematischen Darstellung gefunden. Wie wichtig, ja nothwendig, der zweite Weg für die weitere Ausbildung der Naturwissenschaften gewesen, wie durch die folgerechte Entwickelung der in mathematische Formeln gekleideten Lehren die Wahrheit derselben durch neugefundene Sätze geprüft wird, ist allgemein anerkannt, doch liegt eben die Schwierigkeit darin einen passenden Ausgangspunkt zu finden, weil bei der

Menge der sich drängenden Erscheinungen das Zusammengesetzte eher erfaßt wird, als das Einfache. Für den Unterricht käme noch dazu, daß die Ausbildung in der Mathematik der Beschäftigung mit den übrigen Theilen der Naturlehre in soweit vorausgehen müßte, als sie benutzt werden soll. Es ist dies auch wohl so ausgesprochen, daß die Mathematik mit der Naturlehre gleichen Schritt halten müsse. Ehe wir daher in der Mathematik soweit vorgeschritten sind, daß wir einen passenden Gebrauch davon machen können, müssen wir auch in der Naturlehre das dazu Nöthige gethan haben. Die erste Stufe des Unterrichts kann also nur die des Beobachtens und Versuchens sein. Die Sinne müssen zunächst geübt werden, besonders Tasten und Sehen, welche vorzüglich Anwendung finden, und solche Uebungen müssen auch in der Absicht der Schriftsteller liegen, wenn sie den Artikeln, in welchen das Wissenswertheste über die einzelnen Eigenschaften zusammen gestellt ist, eine Einleitung oder einen vorbereitenden Kursus vorausschicken, worin jene Eigenschaften flüchtig abgehandelt sind. Es wären dies starre todte Buchstaben, wenn man sie nicht durch die Frische der Erscheinungen lebendig machte. Freilich hat der Schüler auch ohne den Lehrer vielerlei Eindrücke aus der Natur genommen und gewisser Maßen selbst beobachtet und versucht, doch bemerken wir bald, daß er neben vielen Erscheinungen, die er richtig und deutlich wahrgenommen, vieles falsch und undeutlich gesehen hat, daß ihm grade die einfachsten und schlagendsten Erscheinungen, entweder ganz fehlten, oder nicht auffällig waren, weil zu alltäglich. Sonach leidet es keinen Zweifel, daß wir zunächst festhalten müssen an der Natur, denn weder Beschreibung, noch Abbildung kann hier genügen. Eine entschiedene Durchführung einer wirklichen Methode hat J. Heussi gemacht, indem er 1) Erscheinung, 2) Gesetz, 3) Ursache in drei Kursen darstellte. Die Trennung dieser Kursen ist in der That nur scheinbar, denn nur die einfachsten Beobachtungen und Versuche sind in den ersten aufgenommen, die schwierigern dagegen kommen erst in den folgenden, die im Wesentlichen sich der mathematischen Darstellung anschließen.

Das Wahre möchte sein es zu machen, wie es die Chemie macht, nemlich das Qualitative vom Quantitativen zu scheiden. Zuerst mag gezeigt werden, daß und wie eine Erscheinung stattfindet und später erst in welchem Maße. Wo die Erscheinungen des täglichen Lebens nicht ausreichen um durch bloßes Hinweisen auf dieselben den Schüler der Natur zuzuführen, werden wir dies durch Versuche thun müssen. Es wird also gezeigt, wie ein Pendel schwingt, wie es kürzer werdend schneller schwingt, wie ein Körper schneller und schneller fällt, wie ein geworfener Körper einen Bogen beschreibt; später wird nachgewiesen, daß die Pendellängen sich verhalten wie die Quadrate der Schwingungszeiten, ebenso die Fallräume und daß die Bahn des Wurfes kein Kreisbogen, sondern ein Parabelbogen. Das Festhalten am Versuch war es auch, was ebenfalls von der Chemie ausgehend Werke entstehen ließ, wie „die Schule der Chemie," wo Stöckhardt noch unübertroffen dasteht, während sich Crüger in der „Schule der Physik" ihm würdig zur Seite stellt und, wenn irgend wie, dadurch den Anforderungen Heussis genügt. Die Erscheinung und der Versuch müssen die ehernen Säulen sein, auf welche sich die Betrachtung stützt. Unabänderlich und unabweislich muß darauf hinzuweisen sein. Dieselbe Erscheinung muß unter denselben Verhältnissen wiederkehren, es kann keine Veränderung entstehen, wenn nicht neue Veranlassungen dazu eintreten. Die Kinder fühlen das selbst; daher das Drängen zur Wiederholung derselben Erscheinung um sich zu überzeugen, daß wirklich dieselben Ursachen dieselben Wirkungen haben. Der Wilde verkaufte sein Lager am Morgen ohne daran zu denken, daß der Abend wiederkommt; nur vielfache Erfahrung hat uns dahin gebracht zu glauben, es werde der Abend auch heut wiederkehren, weil er so oft wiedergekehrt ist.

Um auf diese Weise das Kennen durch das Können zu prüfen, dürfen wir nicht auf solche Versuche bauen, deren Wiederholung schwierig ist, insofern sie, entweder größere und kostspieligere Vorbereitungen gebrauchen, oder ihre Kräfte sich unserer Macht entziehen. Ich meine theils die in den Lehrbüchern so beliebte Erwähnung der Vergoldungsversuche im Großen, theils die elektrischen Versuche, so große Neigung die Schüler auch haben sich elektrisiren zu lassen. Da die genauern Gesetze der Elektrizität bei der steten Wechselwirkung der Umgebungen sich so leicht einer festen Begründung entziehen, so wird man am besten thun, um nicht in Spielereien auszuarten, die Grunderscheinungen durch einige kräftige Versuche darzuthun. Aehnliches möchte in mancher Beziehung von der Wärme gelten, doch sind ihre Wirkungen so mannigfaltig und in das Leben so tief eingreifend, daß wir im Unterrichte weitläuftiger darauf eingehen müssen, wobei besonders zu bemerken, daß für Manches z. B. die latente und spezifische Wärme noch vielfach genauere Bestimmungen fehlen. Hauptsächlich werden für den Unterricht Mechanik, Optik, Akustik und Chemie Berücksichtigung verdienen. Die beiden ersteren, weil sie neben den genausten Versuchen die geometrische Darstellung als ein augenfälliges Beweismittel erlauben, die letzte als der vorzüglichste mit den einfachsten Mitteln die größte Mannigfaltigkeit darthuende Unterrichtszweig und die Akustik als die Kenntniß der Erscheinungen des Sinnes, welcher den Unterricht vermittelt. Endlich möchte es wünschenswerth sein die Beziehungen recht hervorzuheben, auf welche sich die Gesetze erstrecken, indem dergleichen in den Lehrbüchern fast ganz übergangen wird. So würde es, um nur das Eine in der Kürze zu berühren, zweckmäßig sein hervorzuheben wie beim Schall leicht zu bestimmen sind: Ursachen (Wellenbewegung), Höhe und Tiefe (Größe und Spannung), Geschwindigkeit, Mittönen (Resonanz) und Interferenz (Stimmgabel); dagegen beim Lichte die Stärke, Richtung, Zurückwerfung, Brechung und Veränderung durch verschiedene Mittel. Was beim Schall leicht zu ermitteln war, ließ sich beim Lichte schwer finden und umgekehrt.

3. Sehen und Tasten. So sehr wir auch darauf dringen müssen, daß die Schüler nicht blos ihren Augen trauen, sondern darauf zu achten haben, daß in der Körperwelt der gründlichste Sinn das Tasten ist, ebensosehr müssen wir darauf bedacht sein den Sinn des Lichtes, den wir unaufhörlich gebrauchen, in seinem wahren Wesen zu erkennen. Hat der Schüler sich erst überzeugt, wie vielfach die Körper unseren Augen entzogen werden, wie oft das Licht von seiner geraden Bahn abweicht, so wird er sich schon in Acht nehmen beim Gebrauch seiner Augen. Er wird nicht sogleich behaupten, daß nichts da sei, weil er nichts sieht, oder daß die gesehene Gestalt die wahre sei. Die sogenannten leeren Gefäße, das Zittern der Körper, wenn man über eine Flamme hinsieht, Spiegel und ein Glas Wasser geben passende Beispiele für den Anfang, und seit ich gehört habe, daß eine krumme Gestalt alles Ernstes für gerade angesehen wurde, halte ich für nothwendig die gerade Bahn durch einen gespannten Faden zu erweisen. Es ist das große Verdienst des Otto von Guerike durch einfache Erscheinungen die Kraft der ungesehenen Luft zur Anschauung gebracht zu haben, obgleich mancher

Sturm schon früher diese Macht kennen lehrte. Dampfmaschinen und Gasanstalten zeigen ferner die mannigfache Verschiedenheit dieses Unsichtbaren und die großen damit verbundenen Gefahren machen es wünschenswerth recht zeitig darauf hinzuweisen. Entwicklung von Kohlensäure und Wasserstoff geben dazu passende Beispiele. Die Schüler erkennen an dem Aufbrausen der Flüssigkeiten, daß sich Luft entwickelt. Sie ist unsichtbar, wie die gewöhnliche Luft; aber welcher Unterschied! In einem Glase mit atmosphärischer Luft brennt ein Holzspan weiter, in der Kohlensäure erlischt er augenblicklich, den Wasserstoff entzündet er und ist dieser mit atmosphärischer Luft gemengt, so geschieht es noch auffallender mit einem Knall.

4. Theilbarkeit. Statt solche Beispiele anzuführen, die sich im Versuche nicht leicht darstellen lassen, wie das Ziehen des vergoldeten Drathes, oder die eigentlich nichts beweisen, wie Moschus (wo ja erst bewiesen werden müßte, wie der Geruch wirkt), würde es zweckmäßiger sein einfache Beispiele aus der Chemie zu wählen. Berliner Blau, Kupfer-Ammonium, Jodstärke und als fester Körper das auf Eisen niedergeschlagene Kupfer wären gewiß augenfällig genug.

5. Der Heronsbrunnen und der Luftdruck. Das Grundgesetz des Luftdruckes, daß nemlich die Luft so stark drückt, wie sie zusammengedrückt wird, läßt sich durch den Heronsbrunnen mittelst einer kleinen von mir angebrachten Einrichtung leicht darstellen. Während dies Werkzeug sonst nur eine sinnreiche Spielerei ist, setze ich auf das Spritzrohr eine längere Röhre. Das Wasser steigt darin genau so hoch über die Oberfläche der Flüssigkeit im obern Gefäße, wie die Druckhöhe vom offenen Teller nach der Oberfläche des Wassers im untern Gefäße beträgt. Nehme ich dann die Röhre zeitweise ab und setze dieselbe wieder auf, so muß die Druckhöhe und somit auch die Steigung verringert sein, da das oben ausspritzende Wasser in das untere Gefäß abläuft. Anderseits kann man auch durch Einsetzen eines Trichters in das Rohr, welches das Wasser in das untere Gefäß führt, die Druckhöhe vergrößern und dadurch eine entsprechend höhere Steigung erreichen.

6. Stärke des Athmens und die Lebenswärme. Für die Bestimmung des Atmosphärendruckes genügen im Wesentlichen die Versuche mit einseitig geschlossenen kommunizirenden Röhren, zu denen Luftpumpe und Barometer zu rechnen. Einige Rechnungen über Höhenmessung schließen sich passend an, indem, das Mariottische Gesetz dabei zu Grunde gelegt, selbst im Raume der Schule sich Gelegenheit findet oder ein benachbarter Berg sie bietet, den Unterschied der Barometerstände für verschiedene Höhen nachzuweisen. Nebenbei möchte ich ein Paar Versuche empfehlen, die für die Naturgeschichte von besonderem Interesse sind. Das Athmen muß dem Luftdrucke entsprechen. Nehmen wir also, wie einst Toricelli, statt einer Flüssigkeit, die wir mit Bequemlichkeit einsaugen können, das schwere Quecksilber und versuchen dies aufzusaugen, so wird die Höhe der Quecksilbersäule die Stärke des Athmens angeben. Vorsicht ist bei diesem Versuche dringend zu rathen, daher die Röhre so senkrecht wie möglich zu halten und wohl zu vermeiden, daß nicht durch mehrmaliges Anziehen und Nachlassen Schwankungen entstehen, die bei dem großen Gewichte des Quecksilbers leicht sehr bedeutend werden und die Flüssigkeit bis zum Munde führen könnten. Der Versuch ergab selbst bei kräftigen Zügen starker Schüler nur eine Druckhöhe von vier Zoll, d. h. selbst mit großer Anstrengung wird man bei einem Athemzuge nur den siebenten Theil der in den Lungen befindlichen Luft ausstoßen oder einziehen; bei gewöhnlichen Athemzügen wird es also kaum den zwölften Theil betragen. Bedenken wir nun, daß nach der übereinstimmenden Ansicht der Naturforscher die Körperwärme durch die Verbrennung des aus dem Blute ausgeschiedenen Kohlenstoffes entsteht, so würde diese Ansicht durch unseren Versuch mittelst einer einfachen Rechnung unterstützt werden; denn während in frischer Luft die brennende Kohle glüht bei etwa 400° R., würde sich diese Wärme hier kaum auf den zwölften Theil belaufen können, indem die geringere Menge Sauerstoff geringere Wärmemenge bedingt und außerdem stets an die Umgebung Wärme abgegeben wird, so daß füglich nicht mehr als 30° R. für die warmblütigen Thiere übrig bleiben können. Bei den Amphibien stellt sich das Verhältniß noch ungünstiger, da sie eines Theils langsamer athmen, anderes Theils das aus den Lungen kommende wärmere Blut sogleich im Herzen wieder mit dem aus dem übrigen Körper kommenden Blute vermengen. Da meist auch noch andere kühlende Einflüsse von Außen einwirken, so würde ihre Blutwärme wenig die der Umgebung übertreffen, so daß diese Thiere als kaltblütig bezeichnet werden, obgleich noch immer ein bemerkbarer Unterschied von den Fischen stattfinden muß, deren Athemwerkzeuge noch mehr eine Gleichstellung mit der Wasserwärme bedingen.

7. Die Gesetze des Falles und die Methode der Grenzen. Durch die höhere Ausbildung der Funktionen-Rechnung hat die mathematische Behandlung der physikalischen Lehren so an Sicherheit und Gründlichkeit gewonnen, daß es nicht mehr möglich ist sich mit vielen sonst üblichen Darstellungen zu begnügen. Indessen fehlt der Schule dieses Mittel und so sind wir genöthigt uns der Wahrheit durch die Methode der Grenzen zu nähern. Dies gelingt aber dadurch auch ganz vollkommen. Wir haben dabei statt der stetig wirkenden Kräfte unterbrochen wirkende mit fortgesetzter Wiederholung anzunehmen und die krummlinichten Bahnen als die Grenzen der geradlinichten Figuren anzusehen, welche ihnen um so näher kommen, je kleiner ihre Seiten genommen werden. So ist ein Kreis nicht als ein Vieleck zu denken, sondern er ist die Grenze der regelmäßigen Figuren. Die Unendlichkeit begreifen zu wollen, wird immer die Klippe sein, woran andere Beweisarten scheitern und Ausdrücke wie „kleinste, sehr kleine, verschwindende Größen, Größenelemente" sind viel zu schwankend, als daß sie etwas genügend und verständlich darstellten. Beliebige, aber bestimmt bezeichnete Größen müssen genommen werden. Je kleiner die Theilung, desto näher dem Grenzwerthe. Darin liegt die beweisende Kraft, und es wird darauf ankommen die Ausdrücke so zu formen, daß sie bis zur Grenze geführt die Wahrheit deutlich erkennen lassen. Für die Schule haben wir Fälle zu wählen, wobei dies leicht verständlich auszuführen ist, die schwierigeren den höheren Rechnungsstufen überlassend. Die Darstellung der Fallräume durch ein Dreieck hat auf den ersten Blick etwas empfehlendes, doch ist dies nur in soweit begründet, wie durch die fortgesetzt angereiheten Parallelogramme, die arithmetische Reihe, um welche es sich hierbei eigentlich handelt, bildlich dargestellt wird. Die Summe dieser Reihe entspricht dem Fallraume. Diese Summe kommt dem wahren Fallraume immer näher, je kleiner die einzelnen Zeittheile genommen werden ($\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$ geben passende Beispiele) und wie das Dreieck die Grenze der Summe aller zugehörigen Parallelogramme, ebenso ist die Summe der Reihe ein Grenzwerth, wenn die Gliederzahl unendlich ist. Den einfachen Ausdruck dafür erhält man durch die passende Einführung der getheilten Zeit und Geschwindigkeit.

8. Die Zentralbewegung. Durch die Anwendung des Parallelogrammes der Kräfte auf eine Wurfkraft und die senkrecht, also nahezu parallelwirkende Schwerkraft entsteht als Grenzbahn die Parabel, indem die betreffenden Linien im einfachen und quadratischen Verhältniß fortschreiten. Da aber die Schwerkraft in der That auf einen Punkt gerichtet ist, so sind wir folgerecht und dringend dazu veranlaßt dasselbe Verfahren auf die Zentralkräfte anzuwenden. Die Art und Weise wie diese in den gewöhnlichen Lehrbüchern behandelt werden, meist nemlich historisch berichtend, erreicht den Zweck für den Schüler durchaus nicht, da sie keineswegs das Verständniß eröffnet. Wir haben es hier mit einer Wurfkraft (Flieh-) und einer sich stets erneuenden nach einem Punkt gerichteten Kraft (Ziehkraft, Zentripetalkraft) zu thun. Wäre (fig. 1) **AB** die gegebene Wurfkraft und **AC** die nach **F** gerichtete Ziehkraft, so ist **AD** die Mittelkraft durch das Parallelogramm **ABDC** bestimmt und **DE=AD** die dadurch erlangte Kraft des zweiten (gleichen) Zeitraumes. Wäre für diesen die neue Ziehkraft **DG**, so würde auf dieselbe Weise **DH** die zweite Mittelkraft und **HI=DH** die Fliehkraft des dritten Zeitraumes. Dazu die dritte Ziehkraft **HK**, gäbe die dritte Mittelkraft **HL**. Die hierbei am Punkte **F** entstandenen Dreiecke **AFD**, **DFH** und **HFK** sind, wie leicht zu beweisen, einander gleich, die Ziehkräfte mögen sein, wie sie wollen. Es ist leicht zu sehen, daß dies Gesetz auf jede Bahn, welche durch Zentralkräfte bewirkt wird, ausgedehnt werden kann und für die krummlinichte Grenzbahn den bekannten Satz von der Erhaltung der Flächen giebt, der für die Planetenbahnen als erstes (bisweilen irriger Weise als zweites) keplersches Gesetz ausgesprochen wird. Für den Unterricht muß es von Wichtigkeit sein, daß dies so tief eingreifende, allgemein gültige Gesetz, welches man so häufig auf Ellipsenbahnen beschränken wollte, sich so einfach beweisen läßt und nach einigen Uebungen vollkommene Einsicht in das Wesen solcher Bewegung verschaffen muß. Als einfachster Fall würde gelten, daß ein Körper auf solcher Bahn in gleichen Zeiten gleiche Wege durchliefe und auch die Ziehkraft gleichbliebe. Dies würde der Fall sein, wenn der Bedeutung der fig. 1 entsprechend **AFD** ein gleichschenkliges Dreieck und **BAD** ihm ähnlich wäre. Dann würde dasselbe gelten für **DFH** und **EDH** u. s. w. Es würde dadurch ein Vieleck entstehen, dessen Spitzen auf der Peripherie eines Kreises um **F** lägen. Die Fliehkräfte würden Sekanten desselben sein und der Kreis selbst würde die Grenze der Vielecke werden, die Sekanten aber Tangenten, daher auch die Fliehkraft Tangentialkraft genannt wird. Aus $\triangle$ **ABD** $\backsim$ **FAD** folgt aber das Gesetz des Kreises **AF : AD=AD : BD** oder **AF=r**, **AD=t** und **BD = AC = 2g** gesetzt, die Gleichung $t^2 = 2gr$.

Sollten die Zentralkräfte sich ändern, so würde, selbst wenn $\triangle$ **AFD** gleichschenklig wäre, doch nicht $\triangle$ **BAD** ihm ähnlich sein dürfen, und nehmen wir weiter für die Ziehkraft als Gesetz der Anziehung die Abnahme nach dem quadratischen Verhältniß der zunehmenden Entfernung, so würden die entstehenden Vielecke mehr oder weniger einer Ellipse oder Parabel angehören, von deren eigentlichen Gestalt sie sich um so mehr entfernten, je größer die Strecken **AD** genommen werden.

Für die Parabel gilt die Gleichung der Tangente $t^2 = 4rx$. Da $2x$ die Subtangente und demnach das außerhalb liegende Stück derselben x ist, so würde dies als Ziehkraft (g) zu nehmen sein, indem diese den in der Tangente sich entfernenden Körper wieder bis zur Parabel bringt.

Die Ellipse muß für denselben Brennpunkt F und Anfangspunkt A, d. h. für denselben Parameter, zwischen Kreis und Parabel liegen; demnach müßte für dieselbe $t^2 > 2gr$ und $< 4gr$ sein. Von der Hyperbel kann hier füglich nicht die Rede sein.

Mehrfache Uebung in Zeichnungen nach den angedeuteten Bestimmungen ist für die Schüler um so zweckmäßiger, je weiter die wirkliche Beobachtung solcher Bahnen (am Himmel) von ihrem Gesichtskreise ist und je häufiger doch im Leben davon gesprochen wird.

9. Auf ähnliche Weise läßt sich auch das Gesetz des **Pendelversuches für die Axendrehung der Erde** beweisen und geometrisch anschaulich darstellen. Das Pendel, dem wir so vielfache wichtige Bestimmungen verdanken, ist in der neusten Zeit auch das Mittel geworden einen einfachen augenfälligen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Es ist der berühmte Versuch, welchen Leon Foucault am 3. Februar 1851 der pariser Akademie mittheilte*). Obgleich schon früher die Passatwinde nach Hadley's Erklärung, die Drehung der Winde nach Dowe, sowie die Fallversuche nach Benzenberg als direkte Beweise für die Erddrehung gelten konnten und man nach Foucault bald erkannte, daß das frei schwingende Pendel durch seine Bewegung nur eine feste Ebene darstellen sollte, welche man auch auf andere Weise erhalten könnte, so zeigte sich doch auch, daß kein anderes Werkzeug so geeignet war den Versuch im Großen an jedem Orte auszuführen vorausgesetzt, daß die Länge des Pendels und das Gewicht der angehängten Kugel bedeutend genug (wenigstens 50 Fuß und

*) Die freudige Ueberraschung, welche das glückliche Gelingen dieses großartigen Versuches hervorbrachte, nicht nur bei den Männern von Fach, sondern auch bei allen denen, welche für so faßliche Begründung einer großen Wahrheit Sinn haben, war wohl die Veranlassung, daß derselbe vielfach wiederholt und besprochen wurde. Zwar hatte F. in seiner schlichten, anspruchslosen Darstellung des Versuches auf die mathematische Begründung verzichtet (compt. rend. 32. S. 135), doch lag diese so nahe, daß schon in der nächsten Sitzung der Akademie (am 10. Febr.) Binet das ausgesprochene Gesetz mit aller Strenge und in größter Allgemeinheit in einer weitläuftigen Abhandlung bewiesen vorlegte und Liouville mündlich auf einfach verständliche Weise zeigte, wie die Erscheinung in der Zerlegung der Kräfte ihre Erklärung fände. Es wurden in schneller Folge viele sinnreiche Vorrichtungen angegeben und das Problem der Pendelbewegung von verschiedenen Seiten ausgebeutet, namentlich die konischen Bewegungen. Um so mehr ist es zu bewundern, daß die ersten Berichterstatter in Deutschland so unsicher in ihrer Beweisführung auftraten und selbst theils das Verdienst Foucault's zu schmälern suchten, theils der Pariser Akademie vorwarfen, sie habe den Gegenstand keineswegs aufgeklärt (Pogg. Ann. 83. S. 302 ff.). Auch mehrfache Ungenauigkeiten und Fehler, wie z. B. über Poisson (Journ. de l'ecole polyt. 26 cah. 1837) und den Marquis de Poli (Philos. Transact. No. 468. 1742) schleppen sich von einer zur andern der sich häufenden Schriften; doch zeichnete sich Dr. Garthe durch die Darstellung seiner im kölner Dome herrlich ausgeführten Versuche aus, obgleich auch er in dem beweisführenden Theile sich schwankend und ungenau ausdrückt.

Bei dem Interesse, welches der Gegenstand für mich hatte, verfehlte ich nicht die betreffenden Berichte genauer zu beachten und besonders die Quellen zu durchforschen, soweit ein mehrtägiger Besuch der Königl. Bibliothek in Berlin dazu Gelegenheit bot. Den gesammelten Stoff hier mitzutheilen würde indessen zu weit führen. Nur das Eine möchte ich bemerken, wie ausgezeichnet die Florentiner Physiker des 17. Jahrhunderts, Schüler Galilei's und Toricelli's beobachtet haben. Aus den darüber mitgetheilten Notizen geht nemlich schlagend hervor, daß sie die jetzt von F. bemerkte Bewegung des an einem Faden schwingenden Pendels schon damals beobachteten, aber ihr unter der Inquisition nicht die wahre Deutung geben durften. Sie bemerkten dagegen, daß ein an doppelten Fäden schwingendes Pendel nur in einer Ebene schwinge, welche ihre Lage gegen den Meridian beibehielt.

30 Pf.) und das Gebäude, worin es aufgehängt wird, fest (gewölbt) und geschützt um Zugwind und sonstige störende Einflüsse abzuhalten.*)

Zur Ermittelung des hierbei geltenden Gesetzes vergegenwärtigen wir uns die Bestimmungen, welche bei jeder Kugel, also auch bei der Erde stattfinden. Da die Kugel in jeder Lage als Kreis erscheint, so stellt man sie auch als Kreis dar, für unsern Fall (fig. 2) als Meridiankreis der Erde um **M**. Die auf der Oberfläche senkrechten Linien sind die Radien, wie **AM**, und die wichtigsten Horizontalen würden als berührende am Kreise, hier als Nordlinien **AB** erscheinen. Bei der Drehung der Kugel um ihre Axe beschreibt der Punkt **A** einen auf der Axe senkrechten Kreis (Parallelkreis) um **C** und sowohl der Radius, als auch die Nordlinie Kegel, deren Grundfläche der Parallelkreis, so daß zu jedem Bogen dieses Kreises ein entsprechendes Stück der Kegelflächen in derselben Zeit beschrieben wird.

Nehmen wir nun statt des Parallelkreises ein Vieleck, so erhalten wir statt der Kegel über diesem Vieleck zwei Pyramiden, deren Seitenkanten Radien und Nordlinien für die den Ecken zugehörigen Mediane sind. Während der Punkt **A** eine Seite des Vielecks durchläuft bewegen sich jene Kanten in den Seitenflächen ihrer Pyramiden dem entsprechend, so daß (fig. 3) die drei beschriebenen Winkel über derselben Seite **AD** als Grundlinie an der Spitze dreier gleichschenkligen Dreiecke dargestellt werden, deren Schenkel der Radius des Parallelkreises ($\angle$ **ACD**), der der Kugel ($\angle$ **AMD**) und die Nordlinie ($\angle$ **ABD**) sind. Wenn der $\angle$ **ACD** in der Ebene des Parallelkreises beschrieben ist, so muß die Vertikale den $\angle$ **AMD** und die Nordlinie den $\angle$ **ABD** beschreiben oder: Um eine durch Vertikale und Nordlinie dargestellte Meridianebene in die dem $\angle$ **ACD** entsprechende neue Lage zu bringen, müßte sie bei ungeänderter Richtung der Nordlinie mit der Vertikalen den $\angle$ **AMD** und dann mit der Nordlinie den $\angle$ **ABD** beschreiben d. h. die Bewegung um die Axe (in der Ebene des Parallelkreises) wäre zerlegt in die der Vertikalen um die Horizontale und der Horizontalen um die Vertikalen. Haben wir jetzt eine Ebene, welche nur in einer dieser Richtungen der Bewegung der Erde folgen muß, so wird sie dem Beharrungsvermögen gemäß in der andern Richtung einen Winkel bilden, der dieser zweiten Richtung entspricht. Eine solche Ebene ist nun die Schwingungsebene des Pendels, welche der Richtung des Pendels zufolge nur in der Vertikalen an die Drehung der Erde gebunden ist, daher die Horizontale den $\angle$ **ABD** mit der Nordlinie des Punktes **D** bilden muß, wenn sie vorher die Lage **AB** hatte. Sie würde auch mit **AB** parallel bleiben, wenn nicht am Ende der Seite **AD** die Bewegung des P. **A** durch die Drehung der Vertikalen in die zweite Seite einlenkte, wodurch die horizontale Richtungslinie in die zweite Seitenfläche der Pyramide zu liegen kommt; denn das ist eben der Sinn des Ausdruckes, daß die Vertikale der Bewegung folge. Am Ende dieser zweiten Seite würde die neue Richtungslinie mit der dritten Nordlinie einen Win-

*) Der Mangel eines passenden Lokales, das dazu eingeräumt werden könnte, hielt mich davon ab den Versuch zu wagen. Der hier im Laufe des vorigen Sommers von dem Herrn Uhlenhuth mit einem sehr gut eingerichteten Apparate ausgeführte Versuch war in dem offenen Flur des Elementarschulhauses allen störenden Einflüssen zu sehr ausgesetzt um die Anerkennung zu finden, die ihm unter günstigen Umständen gewiß nicht fehlen konnte.

kel bilden, der um den Winkel der zweiten und dritten Nordlinie größer wäre, als der vorhergehende. Denn hat die fragliche Ebene eine beliebige Lage gegen den Meridian und ist (fig. 4) AE die zugehörige Horizontale, so müßte, wenn sie der Erddrehung folgte, $\angle$ BDE=BAE sein; dagegen in ihrer Lage beharrend würde DF $\mp$ AE und somit $\angle$ BDE um $\angle$ EDF=AED=ABD vergrößert, mit welcher Vergrößerung sie durch die Drehung der Vertikalen in die neue Seitenfläche kommt. Für jede folgende Seite gilt dasselbe. Es ist demnach die ganze Abweichung die Summe der Winkel, welche die aufeinander folgenden Nordlinien bilden und es scheint die horizontale Richtungslinie diesen Winkel um die Vertikale in einem der Erddrehung entgegengesetzten Sinne zu beschreiben, also in der nördlichen Halbkugel links und der südlichen rechts herum.

Die Abweichung wird für gleiche Zeiten um so kleiner, je näher der Ort A dem Aequator liegt; denn desto größer wird seine Nordlinie, welche in $\triangle$ ABD (fig. 3) den Winkel bestimmt. Um sie für irgend einen Fall in Vergleich mit dem zugehörigen Winkel im Parallelkreise darstellen zu können müßte die Nordlinie gefunden werden. Dies geschieht einfach dadurch, daß wir (fig. 5) in den Parallelkreis den Radius AC als Sehne AG eintragen und über den Durchmesser AH den rechten W. AGH bilden. Trägt man darauf fig. 2 entsprechend an die Sehne AG in A den W. (90°—l), so erhalten wir die Nordlinie als Hypotenuse z. B. AK für 52° B., den Durchmesser für 30° B. und für geringere Breiten größer, als der Durchmesser.

Mit dieser Nordlinie schlägt man um die Ecken des in den Parallelkreis eingeschriebenen Vielecks neue Bogen, in welche man von dem betreffenden Radius anfangend die Seiten ebenfalls als Sehnen einträgt. Der bequemeren Darstellung wegen wählt man die Vielecke regelmäßig, wie (fig. 6) ein Sechseck und (fig. 7) ein Vierundzwanzigeck, wobei im letzteren um C ein Kreis mit AE—AC die Endpunkte der über den Mittelpunkt C hinausgehenden Verlängerungen bestimmt. Die Linien Bb, Dd u. s. w. sind die Richtungslinien, welche mit den dazugehörigen Radien des Kreises um C die Abweichung der Schwingungsebene angeben. Je größer die Seitenzahl des Vielecks genommen wird, desto mehr nähern wir uns der Wirklichkeit. Der Unterschied für unsere beiden Annahmen ist (fig. 7) bemerkt, wo Mm die Abweichung für das 24-Eck und Mo die für das 6-Eck bezeichnet.

Gehen wir endlich zum Kreise als der Grenze der Vielecke über, so wird die Summe der Winkel anzusehen sein als der Winkel eines Kreisausschnittes, dessen Radius die Nordlinie und dessen Bogen für den ganzen Tag der Umfang des Parallelkreises und für andere Zeiten die Länge der zugehörigen Bogen desselben.

Da trigonometrisch das Verhältniß der Nordlinie zum Radius des Parallelkreises durch sin l bestimmt ist, so lautet das bewiesene Gesetz: Die in einer Zeit erlangte Abweichung der Schwingungsebene ist gleich der Drehung der Erde in derselben Zeit multiplizirt mit sin l. Für die Pole findet also eine ganze Drehung statt in 24 St., für unsere Breiten in etwa 30 St., für den Aequator gar nicht.

10. Die Wattsche Kurve. Durch einen glücklichen Griff scheint Watt die Anwendbarkeit des nach ihm genannten Parallelogrammes innerhalb der Grenzen gefunden zu haben, wo es hinreichte die Kolbenstange in möglichst gerader Linie zu erhalten. Ich habe wenigstens vergebens in älteren Werken nach Andeutungen darüber gesucht und selbst in Gehler's phys. Wörterb. II. S. 471 finde ich eben nur die Anwendung bemerkt. Die Praktiker beruhigten sich wohl dabei, ja es wurde sogar ein ähnliches Werkzeug erfunden um als Treiber bei den Webstühlen zu dienen, während Andere diesen Treiber auf einem Stabe, also gewiß auf einer geraden Linie wirken ließen. In neuerer Zeit hat man nun auch bei den Dampfmaschinen die Einrichtung des Parallelogrammes vielfach verlassen und die Kolbenstange in einer zweckmäßig eingerichteten Bahn geradlinig geführt.

Das fragliche Parallelogramm beruht einfach geometrisch darauf, daß zwei Kreise in einer Ebene gegeben sind, auf deren Peripherien sich die Endpunkte einer gegebenen Geraden bewegen, während ein Punkt dieser Linie oder ihrer Verlängerung die zu findende Bahn beschreibt. Daß es keine gerade Linie ist, zeigt sich, abgesehen von den Fällen, wo der gegebene Punkt als Endpunkt der Geraden den Bogen eines der gegebenen Kreise beschreibt, auch durch die vier Hauptlagen, welche die gegebene Gerade (Verbindungslinie) mit den Radien der beiden Kreise einnehmen könnte, indem sie mit einem Radius jedes Kreises auf beiden Seiten der Mittelpunktslinie eine Gerade bildet. Welchen Punkt wir auf derselben auch annehmen mögen, es zeigt sich jedenfalls, daß die vier erhaltenen Punkte (fig. 8. E,E,E,E) nicht auf einer geraden Linie liegen können. Wo die Länge der Verbindungslinie diese vier Lagen nicht erlaubt, wie z. B. bei dem sogenannten Knecht am Spinnrade oder bei der an der Kurbel des Schwungrades befindlichen Triebstange, welche an der Kolbenstange eingelenkt ist und daher ihre Endpunkte auf einem Kreise und einer Geraden (Kreis mit unendlichem Halbmesser) hat, wird sich dieselbe Bestimmung bald machen lassen mit drei Punkten. Um so auffallender muß es sein, daß Crüger in der „Schule der Physik" §. 384a alles Ernstes die Geradlinigkeit beweisen will.

In der That beschreibt der angenommene Punkt bei dem Herumführen der Linie ein Schleifenlinie (mit verschiedenen Punkten in sehr verschiedenen Formen), welche auf beiden Seiten stark gekrümmt in den sich kreuzenden Theilen des Weges geraden Linien ziemlich nahe kommt (fig. 10. EÉÉÉ). Aus vier Linealen, deren erstes als Mittelpunktslinie fest angelegt wird, läßt sich leicht ein Instrument zur Herstellung solcher Kurven zusammensetzen. Es zeigt sich ferner, daß ein Punkt auf der Linie selbst in dem einen Systeme der Verbindung und ein Punkt auf der Verlängerung in dem entsprechenden Systeme parallele Kurven beschreiben, indem man die Verbindungslinie des ersten Systems zu einem Radius des zweiten macht und umgekehrt, wobei für die Abstände des beschreibenden Punktes auf der Verlängerung und der Linie selbst die Proportion gilt $b : {}'b = a + b : r = a : r - {}'b$ (fig. 9), die Zeichen in der sogleich zu erklärenden Bedeutung genommen.

Zur Auffindung der Gleichung dieser von mir „Wattsche Kurve" genannten Bahn bieten sich folgende Bestimmungen: Auf den Peripherien der Kreise (fig. 10) um A mit dem Radius r und um B mit dem Radius R, die Mittelpunktslinie $AB = m$ gesetzt, liegen die Endpunkte der Linie $CD = a$, auf deren Verlängerung der Abstand des beschreibenden Punktes $CE = b$. Die Mittelpunktslinie scheint sich als Axe für rechtwinklige Koordinaten zu empfehlen oder als der feste Schenkel, wenn Polarkoordinaten gewählt werden sollten. Es sei nun $AF = x$ und $EF = y$. Um die Gleichung zwischen diesen Linien herzustellen, werden wir einerseits BD und BE ziehen und anderseits die Perpendikel BG und DH fällen. Setzen wir dann $\angle$ BAD=A, $\angle$ BCD=C, $\angle$ CDH=D, $\angle$ BDC=v und $\angle$ BDH=z, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) $y = r.\ sA - (a+b).\ \cos D.$

$x = r.\ \cos A + (a+b).\ sD.$

2) $$\frac{r.\ sA - y}{x - r.\ \cos A} = \operatorname{cotg} D = \operatorname{cotg}(v+z) = \frac{\operatorname{cotg} v.\ \operatorname{cotg} z - 1}{\operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} z}.$$

3) $$\operatorname{cotg} v = \frac{DG}{BG} \text{ und } \operatorname{cotg} z = \frac{DH}{BH}.$$

4) $$\frac{r.\ sA - y}{x - r.\cos A} = \frac{DG.\ DH - BG.\ BH}{DG.\ BH + BG.\ DH}.$$

5) $BG = R.\ sC,\ BH = m - r.\ \cos A,$

$DG = a - R.\ \cos C$ und $DH = r.\ sA.$

6) $$\frac{r.\ sA - y}{x - r.\ \cos A} = \frac{(a - R.\ \cos C)\ r.\ sA - R.\ sC\ (m - r.\ \cos A)}{(a - R.\ \cos C)(m - r.\ \cos A) + R.\ sC.\ r.\ sA}$$

$$= \frac{a.\ r.\ sA - R.\ r.\ sA.\ \cos C - m.R.\ sC + R.\ r.\ \cos A.\ sC}{a.m - a.\ r.\ \cos A - m.\ R.\ \cos C + R.\ r.\ \cos A.\ \cos C + R.\ r.\ sA.\ sC}$$

$$= \frac{a.\ r.\ sA - m.\ R.\ sC + R.\ r.\ s\,(C - A)}{a.\ m - a.\ r.\ \cos A - m.\ R.\ \cos C + R.\ r.\ \cos\,(C - A)}.$$

7) Aus dem Viereck BCEF ergiebt sich zur Bestimmung von cosC

$b^2 + R^2 + 2\,b.\ R.\ \cos C = y^2 + (x - m)^2$, woraus

$$\cos C = \frac{y^2 + (x - m)^2 - b^2 - R^2}{2b.\ R}.$$

8) Aus dem Viereck ABCD zur Bestimmung von cosA

$m^2 + r^2 - 2m.\ r.\ \cos A = a^2 + R^2 - 2a.\ R.\ \cos C$ und daraus

$$\cos A = \frac{m^2 + r^2 - a^2 - R^2 + 2a.\ R.\ \cos C}{2m.\ r}$$

$$= \frac{b(m^2 + r^2 - a^2 - R^2) + a\,(y^2 + (x - m)^2 - b^2 - R^2)}{2b.\ m.\ r}.$$

9) $$sC = \sqrt{1 - \cos C^2} = \frac{1}{2b.\ R}\sqrt{4b^2.\ R^2 - (y^2 + (x - m)^2 - b^2 - R^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2b.\ R}\sqrt{(9)}.$$

10) $sA = \sqrt{1 - \cos A^2}$

$$= \frac{1}{2.\ b.m.r.}\sqrt{4.b^2.m^2.r^2 - [b\,(m^2 + r^2 - a^2 - R^2) + a(y^2 + (x - m)^2 - b^2 - R^2)]^2}$$

$$= \frac{1}{2b.m.\ r}\sqrt{(10)}.$$

11) Die in 7) bis 10) gefundenen Ausdrücke in 6) eingesetzt geben nach einigen Auflösungen und Zusammenziehungen

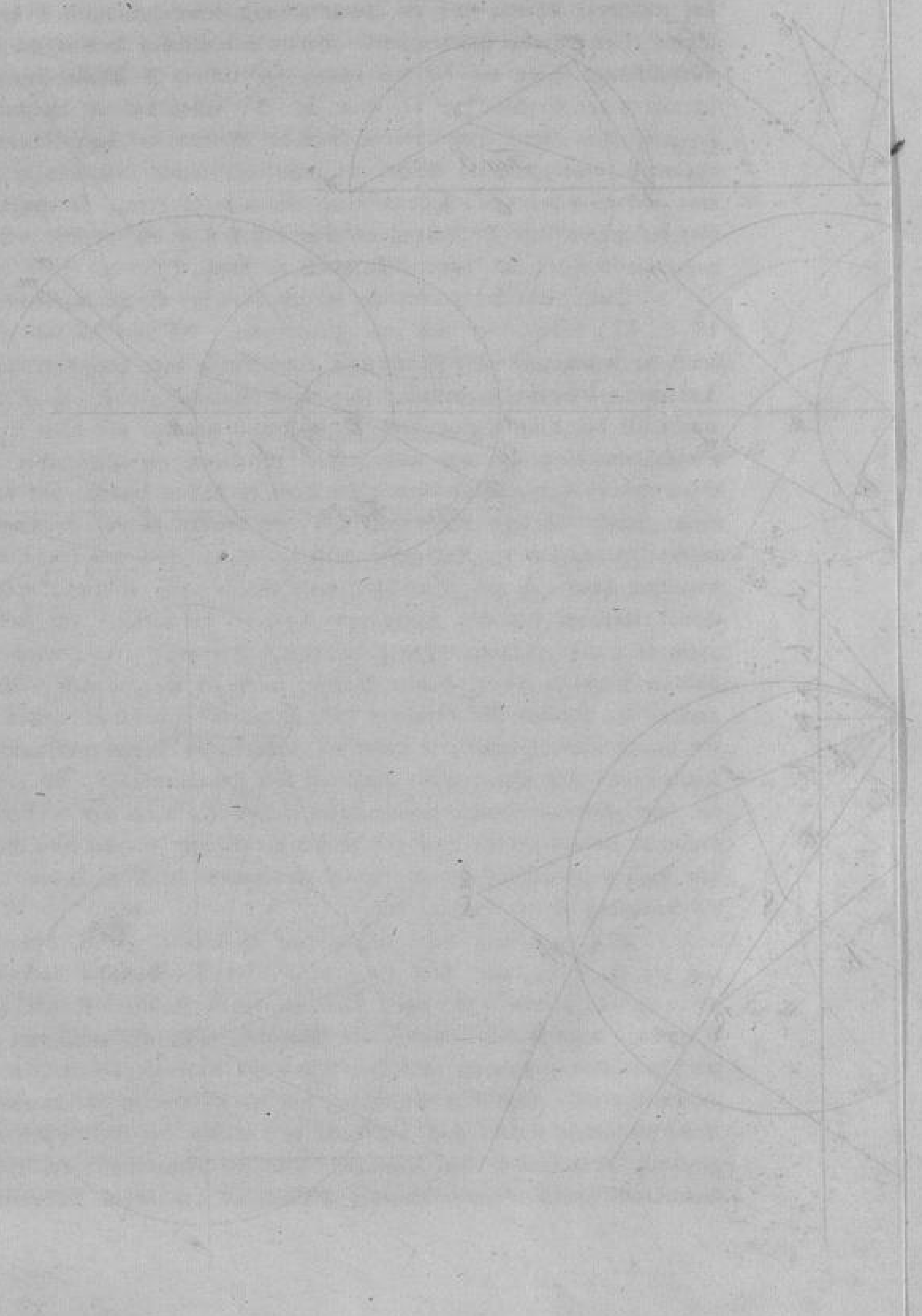
$$L.\ \sqrt{(9)} + M.\ \sqrt{(10)} = N - y.\ \sqrt{(9)}.\ \sqrt{(10)},$$

wo L, M und N rationale Funktionen von x und y sind. Diese Gleichung quadrirt giebt eine Gleichung, welche noch $\sqrt{(9)}.\sqrt{(10)}$ als irrationalen Theil enthält, mithin durch nochmaliges Quadriren rational gemacht werden muß um die verlangte Gleichung zu erhalten. Da $y.\sqrt{(9)}.\sqrt{(10)}$ eine Größe vom 6ten Grade, so entsteht nach dem zweimaligen Quadriren eine Gleichung vom 24sten Grade, deren Entwicklung hier zu weit führen möchte, weshalb wir auch die verschiedenen Beziehungen, welche sich aus den Verhältnissen der gegebenen Linien ergeben, sowie die Bestimmung der Krümmung übergehen müssen. Es mag genügen, darauf hingewiesen zu haben, wie scheinbar einfache Beziehungen zu sehr verwickelten Größen führen. Die gewöhnlichen Fälle ergeben für unsere Kurve eine einfach symmetrische Schleife, welche durch eine gerade Linie nur in vier Punkten geschnitten würde, so daß eine Gleichung vom vierten Grade zu erwarten stand. Jedenfalls haben wir es in unserer Gleichung mit vielen unmöglichen Wurzeln zu thun und ich erinnere in dieser Beziehung an eine Kurve, welche Euler (Introd. in ana. inf. II. §. 527.) erwähnt, wo statt einer Spirale ebenfalls eine Schleife entsteht.

11. Die Krümmung der Kurven. Bei der Betrachtung der Kurven hat die atomistische Ansicht sie als Vielecke von unendlich vielen Seiten zu nehmen soweit Platz gegriffen, daß in vielen Werken von dem eigentlichen Wesen derselben, nemlich von der Krümmung gar nicht die Rede ist, indem man meint diese Bestimmung getrost höheren Stufen überlassen und sie deshalb bei Kreis und Kegelschnitten ganz übergehen zu können. Selbst Ohm schweigt davon, wo er (z. B. analytische Geom. §. 85.) vollkommen Veranlassung hatte die Sache zu besprechen, und doch ist es nothwendig darauf einzugehen, theils um diese Eigenthümlichkeit recht zu erfassen, theils sich vor den vielen Fehlern zu hüten, welche gerade bei der Grundlage gemacht wurden. Denn kaum sollte man glauben, daß so mangelhafte Ansichten und fehlerhafte Darstellungen eines mathematischen Gegenstandes möglich wären. Nachdem besonders Huygens, Leibnitz und die Bernouillis auf das Problem der Krümmung in Verbindung mit den Evoluten geführt waren, finden wir selbst bei diesen Männern Behauptungen, deren Unwahrheit sich mit den einfachsten Mitteln darthun läßt. So Joh. Bern. Lect. math. 15—18. op. III. S. 432 ff.: „Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normale liegt, berührt die Kurve in dem dazu gehörigen Punkte;" während im Gegentheil der Krümmungskreis die Kurve dort schneiden wird, wenn der fragliche Punkt kein Hauptscheitel ist, zu dessen Seiten sich die Kruve gleichmäßig krümmt. Auch würde damit die weiterhin (lect. 16) aufgestellte Bemerkung im Widerspruch stehen, daß der Berührungspunkt des Krümmungskreises aus drei Punkten entstehe, wodurch, um nur bei der Parabel stehen zu bleiben, recht ersichtlich wird, daß es ein Durchschnittspunkt sein muß, weil ein berührender Kreis, dessen Halbmesser länger, als die Normale ist, jedenfalls noch zwei Durchschnittspunkte haben würde, während doch von den vier Punkten, welche möglicher Weise dem Kreise mit der Parabel gemeinschaftlich sein könnten, nur noch einer übrig wäre. Dessen ungeachtet finden wir diese Behauptung in den meisten Lehrbüchern und weitläuftig in Klügel's math. Wörterbuche III. S. 348 ff., wo vielfach Wahres mit Falschem gemischt ist. Noch viel weniger läßt sich die Ansicht vertheidigen, welche davon ausgeht, daß der Krümmungskreis entstanden sei, durch das Zusammenrücken zweier Punkte, an welchen der Kreis und die Kurven gemeinschaftliche Tangenten hätten (Kästner Anal. d. Unendl. §. 512—558). Die Eulersche Darstellung mit ihren unendlich verschiedenen Nullen möchte jetzt auch wohl nicht mehr Anspruch auf Anerkennung machen, obgleich (int. in an. inf. II. cap. 14) manches Wichtige namentlich die Beziehung auf einfachere Kurven und die Zurückführung jeder beliebigen Krümmung auf den Hauptscheitel einer Parabel gegeben wird. Einen wunderlichen Beweis mit annähernd [sic] richtigen Proportionen führt für die Krümmung der Ellipse F. Mallet in der „mathematischen Beschreibung der Erdkugel" §. 21. Anm. b. Am besten hat mit Vermeidung jener groben Fehler unter den älteren Schriftstellern (nach der Methode des Unendlichen) den Gegenstand Karsten behandelt (Lehrbegriff II. Abschn. 4). Endlich brachte Lagrange in der theor. des fonct. eine einfach sichere Begründung dieser Rechnungen (vergl. II. part. II. chap. nr. 8 ff.). Auf die geometrische Darstellung und Deutung ließ er sich indessen nicht ein und es bleibt uns daher die Aufgabe für diesen Standpunkt zu lösen.

Das Hervorheben einzelner Beziehungen der Berührungskreise (vergl. Grunert Archiv 18. S. 31.) konnte hier nicht zum Ziele führen. Es muß darauf ankommen die Krümmung selbst zu bestimmen. Die Richtung einer Kurve wird ganz natürlich durch die jedesmalige Tangente des Punktes dargestellt. Für die Krümmung aber lag es nahe, den Kreis zu wählen; denn bei keiner Kurve wird sie deutlicher erkannt, als beim Kreise, weil sie bei diesem allenthalben gleich ist und desto größer, je kleiner der Halbmesser (Krümmungshalbmesser). Es wird also darauf ankommen, den Kreis zu finden, welcher mit der Kurve in einem gegebenen Punkte gleiche Krümmung hat. Es werden hierbei die Kreise in Betracht kommen müssen, welche mit der Kurve auf derselben Seite einer gemeinschaftlichen Tangente an dem fraglichen Punkte liegen. Ein Theil dieser Kreise wird die Kurve von außen (mit der hohlen Seite) berühren (zwischen Kurve und Tangente durchgehen), ein anderer Theil wird sie von innen (mit der erhabenen Seite) berühren. Derjenige Kreis, welcher den Uebergang macht, also die Kurve in diesem Punkte schneidet, wird sich ihr am meisten nähern. Die ersteren sind flacher, die anderen sind krummer. Er ist die Grenze jener beiden Arten und ihm werden wir um so näher kommen, je näher ein benachbarter Durchschnittspunkt eines der berührenden Kreise rückt. Ein solcher Kreis wird mit ihm zusammenfallen, wenn dieser Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte zusammenfällt. Das Verfahren der Grenzen wird sich auch hierbei bewähren und es ist mir gelungen danach die Beweise für die dem Schulunterrichte zugewiesenen Kurven (Kegelschnitte) auf einfach geometrische Weise zu finden. Ich theile hier zunächst die Auflösung für die Parabel mit.

Bezeichnen wir der gewöhnlichen Bedeutung gemäß den Parameter mit p, so daß die Gleichung aus dem Hauptscheitel für rechtwinklige Koordinaten $y^2=2px$, ferner (fig. 11.) den rad. vect. des gegebenen Punktes P mit r, so daß die einfache Gleichung aus diesem Punkte als Scheitel mit schiefwinkligen Koordinaten $z^2=4rv$ wird, endlich die Tangente PT mit t und die Normale PC mit n. Suchen wir nun den Halbmesser eines Kreises zu bestimmen, der die Parabel in M schneidet und mit ihr in P die Tangente gemein hat, so liegt, wie leicht zu beweisen, der Mittelpunkt auf der über C hinausgehenden Verlängerung der Normale. Das im Mittelpunkte der Sehne MP=S errichtete Perpendikel schneidet den Halbmesser $P'_{\varrho}='_{\varrho}$ ab, zu dessen Bestimmung MU senkrecht auf



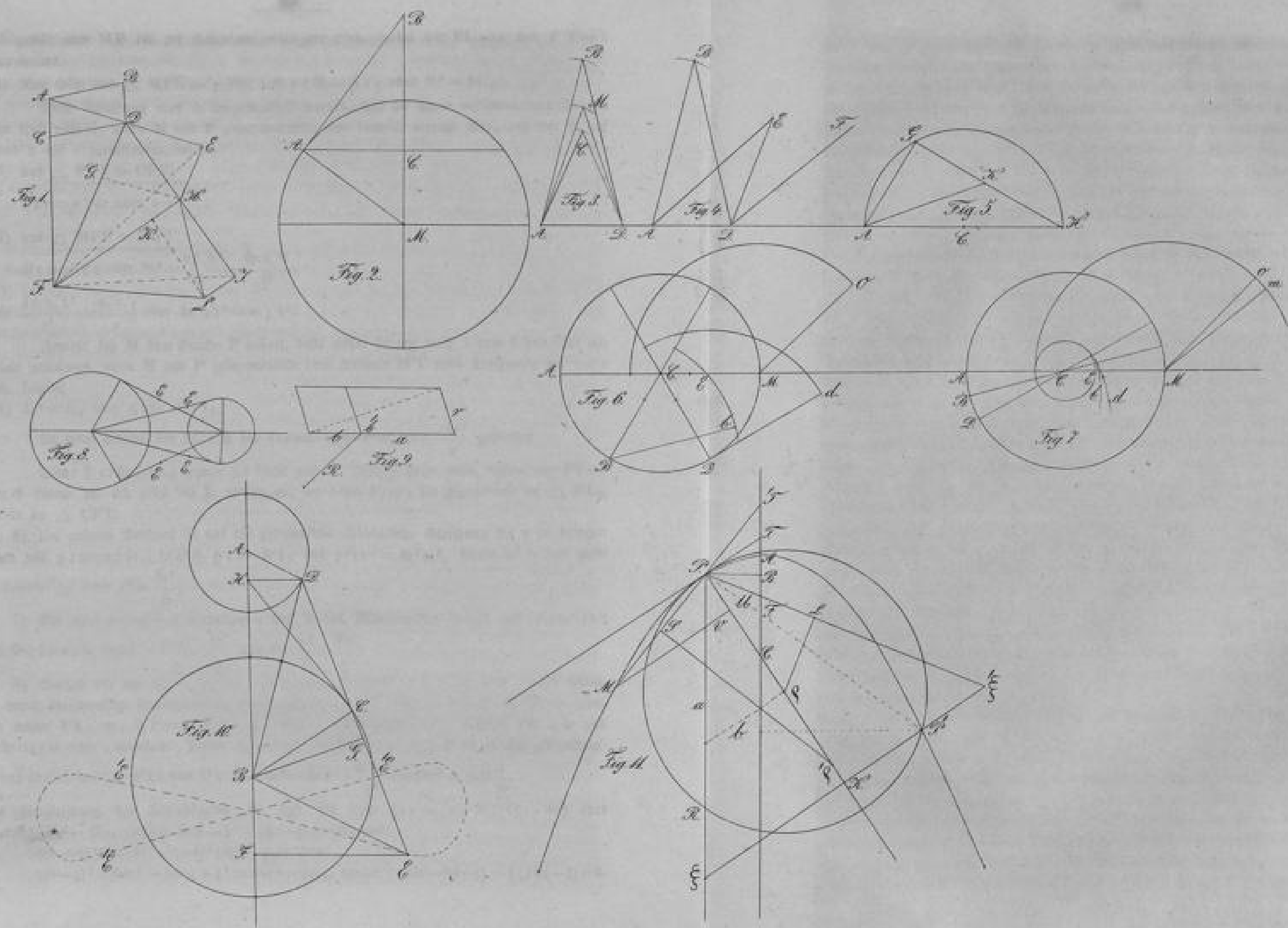
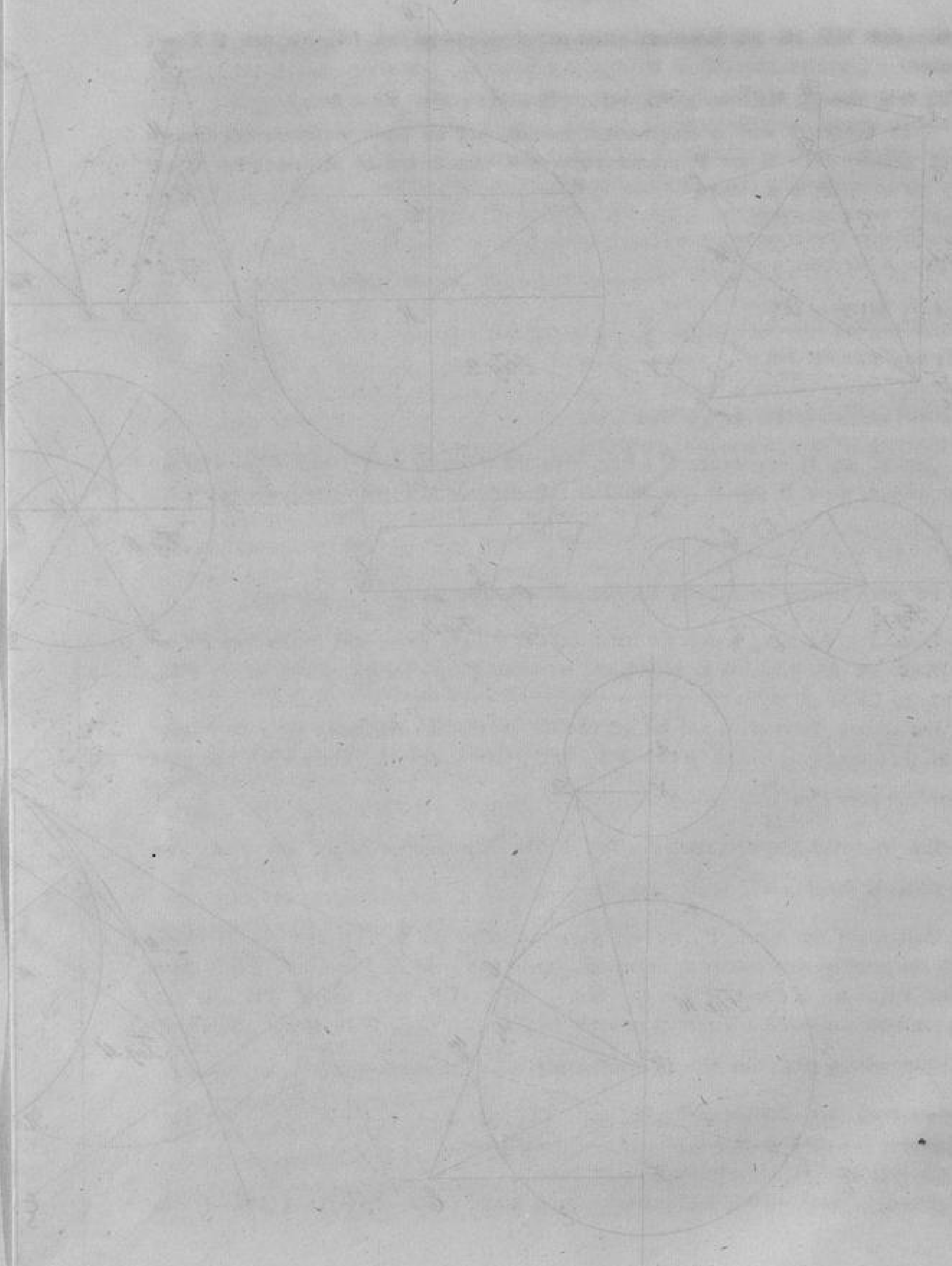


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11



PC gefällt und MP bis zur Hauptaxe verlängert wird, wobei wir $PU = u$ und $P'T = {}'t$ setzen wollen.

1) Nun folgt aus $\triangle MPU \backsim {}'\varrho PS$, daß $u : S = \frac{1}{2}S : {}'\varrho$ oder $S^2 = 2u.{}'\varrho$.

Diese Gleichung muß so umgewandelt werden, daß die darin vorkommenden Größen nicht Null werden, wenn M mit P zusammenfällt, was dadurch erreicht wird, daß wir S auf z und u auf v zurückführen, indem

2) aus $\underline{\triangle PUV \backsim CPT.}$

$u : v = n : 2r$ oder $u = \frac{n.v}{2r}$.

3) aus $\underline{\triangle MPV \backsim P'TT.}$

$S : z = {}'t : t$ oder $S^2 = \frac{z^2.{}'t^2}{t^2} = \frac{4r.v.{}'t^2}{t^2}$.

4) $\frac{4r.v.{}'t^2}{t^2} = \frac{n.v.{}'\varrho}{r}$ oder $4r^2.{}'t^2 = n.{}'\varrho.t^2$.

Jemehr sich M dem Punkte P nähert, desto näher kommt auch $'t$ dem t und fällt mit diesem zusammen, wenn M mit P zusammenfällt (die Sekante $M'T$ wird Tangente), wo $'t = t$ wird, folglich

5) $4r^2 = n.\varrho$ oder $n : 2r = 2r : \varrho$.

Es wäre hiermit der Werth des Krümmungshalbmessers $\varrho = \frac{4r^2}{n}$ gefunden.

Seine Darstellung ergiebt sich leicht aus der stetigen Proportion, indem wir $PF = r$ über F hinaus um sich selbst bis L verlängern, wo dann $P\varrho = \varrho$ die Hypotenuse im $\triangle PL\varrho$, wie $2r$ im $\triangle CPT$.

6) Um unseren Ausdruck 5) auf die gewöhnliche quadratische Gleichung für ϱ zu bringen haben wir $p : n = n : 2r$, folglich $p : n = 2r : \varrho$ und $p^2 : n^2 = 4r^2 : \varrho^2$, hierin $n^2 = 2pr$ giebt $p : 2r = 4r^2 : \varrho^2$ oder $\varrho^2 = \frac{8r^3}{p}$.

7) Die schiefwinkligen Koordinaten a und b des Mittelpunktes folgen aus $p : n = \varrho : a$ und $2r : t = a : b$, sodaß $a = \frac{n.\varrho}{p} = \frac{4r^2}{p}$ und $b = \frac{a.t}{2r} = \frac{2rt}{p}$.

8) Suchen wir den Punkt $'P$, wo der Krümmungskreis die Parabel noch einmal schneidet durch schiefwinklige Koordinaten zu bestimmen, indem wir dieselben $P\xi = \xi$ und $'P\xi = \eta$ setzen und weiter $PK = m$, $K'P = l$, $P'P = q$. Aus $\angle KP\xi = LP\varrho$ folgt sogleich $PR = 4r$ und $\varrho : 2r = \xi : m$ oder $\varrho.m = 2r.\xi$. Ferner $2\varrho.m = q^2$, folglich $q = \eta$ ($\triangle P'P\xi$ ist also gleichschenklig und ähnlich mit $\triangle \xi P'\xi$.) und $l^2 = \eta^2 - m^2 = 4r.\xi - \frac{4r^2.\xi^2}{\varrho^2} = (8r^2 - p.\xi)\frac{\xi}{2r}$.

Aus Vergleichung der Kreissekanten $P\xi$ und $'P\xi$ folgt $\xi : \eta = (\eta - 2l) : (\xi - 4r)$ oder $\xi^2 - 4r.\xi = \eta^2 - 2l.\eta$, folglich $8r.\xi - \xi^2 = (8r - \xi)\xi = 2l.\eta$ und

$(8r - \xi)^2\xi^2 = 4l^2.\eta^2 = 8\xi^2(8r^2 - p.\xi)$, dann

$(8r - \xi)^2 = 64r^2 - 16r.\xi + \xi^2 = 64r^2 - 8p.\xi$, endlich $\xi(16r - 8p - \xi) = \xi(16x - \xi) = 0$.

Dieser Gleichung wird genügt durch $\mathfrak{z}=o$ oder durch $\mathfrak{z}=16x$. d. h. Außer im P. P schneidet der Krümmungskreis die Parabel nur noch im P. 'P, für welchen $\mathfrak{z}=16x$, folglich $\varkappa=4t$. Daraus folgen die rechtwinkligen Koordinaten des P. 'P $'x=9x$ und $'y=3y$.

9) Die allgemeine Herleitung für ϱ genügt insofern nicht für den Hauptscheitel der Parabel, weil für diesen $t=o$ ist; doch folgt hier die Lösung noch leichter, indem
$x:S=\frac{1}{2}S:'\varrho$ oder $S^2=2x.'\varrho$ und $S^2=y^2+x^2=2p.x+x^2$, folglich

$$2x.'\varrho=2p.x+x^2 \text{ und } 2'\varrho=2p+x.$$

Für $x=o$ wird also $\varrho=p$ ganz der allgemeinen Formel entsprechend.

10) In die Gleichung 4) $4r^2.'t^2-n.'\varrho.t^2$ setzt man $\frac{4r^2}{n}=\varrho$, so wird $\varrho.'t^2='\varrho.t^2$. d. h., wenn $'t>t$, so ist auch $'\varrho>\varrho$ und der Kreis, der nun in P berührt, schneidet noch in einem neuen Punkte (M) den verlängerten Schenkel der Parabel; ist aber $'t<t$, so ist auch $'\varrho<\varrho$ und der Kreis schneidet noch einmal auf der Scheitelseite, bis endlich $'\varrho=n$ bei $'t=y$, wo der Kreis um C beide Schenkel der Parabel berührt. Da $'t$ nicht kleiner, als y werden kann, so folgt auch hieraus, daß für $'\varrho<n$ der Kreis nur den Punkt P mit der Parabel gemein hat, übrigens ganz innerhalb derselben liegt.