Bemerkungen aus der Mathematik und mathematischen Geographie.

Einleitung.

Aufgefordert, die Abhandlung zum diesjährigen Programm zu liefern, glaubte ich kaum darauf eingehen zu dürfen, wenn ich bedachte, wie oft diese Arbeit einerseits von den meisten Lesern als ein opus operatum bei Seite geschoben wird und wie anderseits unter den jetzigen Verhältnissen, wo das Leben so gewaltige Anforderungen an uns stellt; jeder mit der Zeit geizen muß. Da jedoch die gesetzlichen Bestimmungen der Art sind, daß ich mich nicht gut der Aufgabe entziehen konnte, so war die Frage, welches der Gegenstand der Arbeit sein sollte? Vielleicht in die Tiefen der Wissenschaft steigen, um eine werthvolle Erzstufe aus ihren Schachten, eine Perle aus ihrem Meere zu fördern? Doch wer weiß, ob mein Erz kein nutzloser Kobolt und meine Muschel nicht leer? Zudem wie sollte es möglich sein, wenn auch mehrere Anknüpfungspunkte und Vorarbeiten daliegen, die Muße zu gewinnen, um abgeschlossen von der Welt ihnen die nöthige Ausführung zu geben! Sich aber auf politische Streitfragen einzulassen, halte ich für eine Schulschrift um so weniger angemessen, als im Lehrerkreise einer Schule oft die verschiedensten Ansichten vertreten sein können. Ist der Lehrer auch nicht im Stande, sich dem Treiben der Parteien ganz zu entziehen, ist es vielmehr seine Pflicht, nach Kräften belehrend selbst in größeren Kreisen zu wirken, wo noch soviel zu lehren, zu regeln, zu zügeln ist, so muß doch die Politik der Schule fern bleiben. Der Lehrer der Geschichte wird zwar oft darauf geführt, andeutungsweise in der Darstellung vergangener Zeiten und fremder Völker der Gegenwart einen Spiegel vorzuhalten; doch ist dieser um so trügerischer, in je mehr Farben sein Licht spielt und seine Form das Bild verzieht, oft sogar verzerrt. Vor allen scheint dagegen der Lehrer der Naturwissenschaften vielfache Mittel in den Händen zu haben, sich, der Schnecke gleich, in sein Haus zurückzuziehen; doch ist es eben nur eine Schnecke, die dies thut, während Archimedes spricht: Gieb mir eine Stellung, wo ich wirken kann. Auch ist es ja die Natur, welche uns zeigt, wie nach ewigen, unwandelbaren Gesetzen, die *keine* Ausnahme erleiden, Welten ihre Bahnen durchlaufen. Die menschliche Kraft ändert nichts an dem großen Bau; aber forschen sollen wir, wo Ausnahmen zu sein scheinen, und wie weit der Geist gedrungen, zeigt die durch Leverrier vorherberechnete Entdeckung des entfernten Begleiters unserer Sonne. Im Großen der mächtig kreisenden Welten, beim verborgenen Schaffen der Kräfte im Schoße der Natur finden wir dieselbe ewige Gotteskraft. In den Schicksalen der kleinen Welten, die wir Menschen nennen, können wir den Faden nicht immer bemerken, der ihr Treiben regelt, und doch ist er gewiß bindend, wie die Kraft, welche die Planeten an die Sonne kettet zum ewigen Sphärentanze. Streben und Widerstreben wirken wie im materiellen Gebiete, so auf dem der Geschichte. Der Mensch kann sich ebenso wenig den allgemeinen Gesetzen entziehen, wie der Krystall, der in Ruhe und Freiheit sich glänzend und rein ausbildet, während im Drange der Massen nur der rohe Stoff erscheint.

Ich halte es daher für angemessen, ein Stück Menschenleben zu geben, wie es sich in Gestalt eines Schulmannes darstellt, der all sein Wissen und Thun auf das eine Ziel zu richten meint, für das Wohl der Menschen zu arbeiten, soweit es seine Verhältnisse erlauben. Er findet allein in der Natur die Stütze für sein Streben, welches in seiner Stellung so zersplittert erscheint, daß fast die mathematische Gewalt eines Laplace dazu gehört, um fest und sicher seinen Brennpunkt zu finden. Ich glaube dreist behaupten zu können, und Schulmänner werden es zu würdigen wissen, es gehört eine gewaltige Anstrengung dazu, seinen Unterricht in eine Menge ein- und zweistündiger Lektionen im Laufe der Woche zerreißen zu müssen und nicht ganz zu zerfallen. Die Reorganisation der Schule bringt vielleicht auch darin eine Abhülfe. Das Streben nach Einigung macht sich hiebei vorzugsweise geltend und mit den kleinsten Mitteln das größt mögliche Resultat zu erzielen ist die Aufgabe eines solchen Lehrers, wo es darauf ankommt, das Wissen in einem Können flüssig zu machen, damit sich nicht das von Scheibert so scharf gegeißelte Proletariat der Schulen, das jurare in verba magistri, herausstelle. Angelerntes Wissen ist mehr als zuviel vorhanden, daher die Steifheit, Ungelenkigkeit und selbst Aufgeblasenheit im Gegensatz zum Ziele der sokratischen Weisheit: Ich weiß, daß ich nichts weiß.

I. Die Kettenbrüche angewandt auf die Quadratwurzeln.

Beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen scheint in dem Falle, wo wir auf den Theiler Eins kommen, der Zweck ganz verfehlt. Außerdem muß es einem aufmerksamen Schüler auffallen, daß die ganze, oft lange Reihe der gefundenen Quotienten nicht benutzt wird. Ein solches Abschließen der Wissenschaft ist gefährlich für den Geist. Wenn es auch angemessen erscheint, das Gegebene als ein Ganzes darzustellen, so muß doch bei betreffenden Sätzen stets darauf hingewiesen werden, wie sich an sie ein anderes weites Feld der Betrachtung anschließt. Für den in Frage stehen-den Satz findet dies seine Erledigung in der Lehre von den Kettenbrüchen. Hier werden durch Benutzung der Quotienten auf eine leichte Weise die Verhältnisse in kleineren Zahlen so nahe wie möglich ausgedrückt und bald zeigt sich dem forschenden Geiste, daß noch viele wichtige Wahrheiten der Mathematik dadurch aufgeschlossen werden. Die Kettenbrüche sind besonders geeignet, den Begriff der Grenzen (Näherungswerthe) dem Schüler klar zu machen, auch sind sie das vorzüglichste Mittel Irrationalzahlen annähernd zu finden. Ich halte es deshalb für einen großen Mangel, daß ihre Anwendung auf die Ausziehung der Wurzeln so selten in den Kreis des Schulunterrichts gezogen wird. Die schöne Regelmäßigkeit, mit welcher dabei die Quadratwurzeln erscheinen, und die Einfachheit für Zahlen, die sich auf bestimmte Weise von Quadraten unterscheiden, sind Eigenschaften, welche die Bildung des jugendlichen Geistes fördern müssen. Ich will daher die wichtigsten Fälle davon in der Kürze durchgehen, indem ich die einfachen Grundregeln der Kettenbrüche voraussetze. Es wird sich dabei Gelegenheit finden, an einzelnen Stellen auf Bestimmungen aufmerksam zu machen, die oft für weiteren Fortschritt von bedeutendem Einfluß sind und meist nicht stark genug hervorgehoben werden.

1. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um Eins größer ist, als ein Quadrat.

Auflösung. $\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x}$. Hier kommt es darauf an x zu finden, also $\sqrt{17} - 4 = \frac{1}{x}$ und nach Umkehrung des Bruches $x = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}$.

Ein Nenner mit Irrationalzahlen ist unbrauchbar und es gilt für Schüler die Bemerkung, daß man stets sich bestreben muß, die Irrationalität durch Formveränderung des Bruches aus dem Nenner vor seiner Anwendung wegzuschaffen. Hier geschieht dies ganz einfach durch Multiplikation mit der Summe $(4 + \sqrt{17})$, wodurch der Unterschied der Quadrate in den Nenner kommt, ein Verfahren, was im Folgenden vielfach Anwendung findet. Demnach wird

$$x = 4 + \sqrt{17} = 8 + \frac{1}{x}, \text{ d. h.}$$

der Quotient ist die doppelte ganze Zahl der Wurzel und kehrt stets wieder, so daß der Kettenbruch ein unendlicher mit eingliedriger Periode ist. Die formelle Ausziehung der Wurzel ist also mit der Auffindung des ersten Gliedes geschlossen und wir haben nur dieselbe Zahl wiederholt zu schreiben. Eine Bestimmung, auf welche wir bei periodischen Zahlen überhaupt nicht genug aufmerksam machen können, weil eben darin die gewaltige Kraft des Verfahrens liegt und der Unterschied zwischen bloßem Zahlenschreiben und Rechnen sich recht stark herausstellt*).

---

*) Zur Uebung für die Schüler wird es gut sein, sogleich bei den einzelnen Fällen die Näherungswerthe aufzusuchen.

Da n^2+1 die betrachteten Zahlen im Allgemeinen bezeichnet, so wollen wir dafür dieselbe Rechnung durchführen. $\sqrt{(n^2+1)} = n + \frac{1}{x}$, folglich $\sqrt{(n^2+1)} - n = \frac{1}{x}$, folglich $x = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)} - n} = n + \sqrt{(n^2+1)} = 2n + \frac{1}{x}$. d. h.

Es gilt das bei $\sqrt{17}$ bemerkte Gesetz bei allen Zahlen, die um Eins größer sind, als ein Quadrat.

2. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um Eins kleiner ist, als ein Quadrat.

Auflösung. Hierbei lassen sich zwei Wege einschlagen, nämlich durch negative und positive Quotienten die Kette bestimmen.

a) $\sqrt{15} = 4 - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = 4 - \sqrt{15}$, $x = \frac{1}{4-\sqrt{15}} = 4 + \sqrt{15} = 8 - \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(n^2-1)} = n - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = n - \sqrt{(n^2-1)}$, $x = \frac{1}{n - \sqrt{(n^2-1)}}$, $x = n + \sqrt{(n^2-1)} = 2n - \frac{1}{x}$.

Es gilt hier dasselbe Gesetz wie bei 1, nur mit negativen Gliedern der Kette.

b) $\sqrt{15} = 3 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{15} - 3 = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{3+\sqrt{15}}{6} = 1 + \frac{1}{6x}$, $6x = 3 + \sqrt{15} = 6 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(n^2-1)} = n - 1 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(n^2-1)} - (n-1) = \frac{1}{x}$, folglich $x = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)} - (n-1)} = \frac{n-1+\sqrt{(n^2-1)}}{2(n-1)} = 1 + \frac{1}{2(n-1)x}$, folglich $2(n-1)x = n - 1 + \sqrt{(n^2-1)} = 2(n-1) + \frac{1}{x}$.

Es entsteht auch hier ein periodischer Kettenbruch, aber mit zweigliedriger Periode, worin der erste Quotient Eins und erst der zweite die doppelte ganze Zahl der Wurzel ist.

3. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um Zwei größer ist, als ein Quadrat.

Auflösung. $\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{18} - 4 = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{18}-4} = \frac{4+\sqrt{18}}{2}$, $x = 4 + \frac{1}{2x}$, $2x = 4 + \sqrt{18} = 8 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(n^2+2)} = n + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(n^2+2)} - n = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{(n^2+2)} - n}$,

$x = \frac{n + \sqrt{(n^2+2)}}{2} = n + \frac{1}{2x}$, $2x = n + \sqrt{(n^2+2)} = 2n + \frac{1}{x}$.

Es entsteht hier ein Kettenbruch mit zweigliedriger Periode, worin der erste Quotient die ganze Zahl der Wurzel und der zweite das Doppelte derselben ist.

4. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um Zwei kleiner ist, als ein Quadrat.

Auflösung. Wie bei 2 die beiden Arten.

a) $\sqrt{14} = 4 - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = 4 - \sqrt{14}$, $x = \frac{1}{4 - \sqrt{14}} = \frac{4 + \sqrt{14}}{2} = 4 - \frac{1}{2x}$,

$2x = 4 + \sqrt{14} = 8 - \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(n^2-2)} = n - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = n - \sqrt{(n^2-2)}$, $x = \frac{1}{n - \sqrt{(n^2-2)}}$,

$x = \frac{n + \sqrt{(n^2-2)}}{2} = n - \frac{1}{2x}$, $2x = n + \sqrt{(n^2-2)} = 2n - \frac{1}{x}$.

Dasselbe Gesetz wie bei 3, nur mit negativen Gliedern.

b) $\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{14} - 3 = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{3 + \sqrt{14}}{5} = 1 + \frac{1}{y}$.

Da der Divisor in der ganzen Zahl von x nicht aufgeht, so wiederholt sich die Rechnung zur Aufsuchung von y, indem

$\frac{\sqrt{14} - 2}{5} = \frac{1}{y}$, $y = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{5(2 + \sqrt{14})}{10} = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} = 2 + \frac{1}{z}$.

Die Rechnung kehrt jetzt ebenso für z wieder.

$\frac{\sqrt{14} - 2}{2} = \frac{1}{z}$, $z = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{2(2 + \sqrt{14})}{10} = \frac{2 + \sqrt{14}}{5} = 1 + \frac{1}{5x}$, folglich

nach der ersten Gleichung $5x = 3 + \sqrt{14} = 6 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(n^2-2)} = n - 1 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(n^2-2)} - (n-1) = \frac{1}{x}$, folglich

$x = \frac{1}{\sqrt{(n^2-2)} - (n-1)} = \frac{n - 1 + \sqrt{(n^2-2)}}{2n-3} = 1 + \frac{1}{y}$; folglich

$\frac{\sqrt{(n^2-2)} - (n-2)}{2n-3} = \frac{1}{y}$, $y = \frac{2n-3}{\sqrt{(n^2-2)} - (n-2)} = \frac{(2n-3)[n-2+\sqrt{(n^2-2)}]}{4n-6}$

und $y = \frac{n - 2 + \sqrt{(n^2-2)}}{2} = n - 2 + \frac{1}{z}$, $\frac{\sqrt{(n^2-2)} - (n-2)}{2} = \frac{1}{z}$, folglich

$z = \frac{2}{\sqrt{(n^2-2)} - (n-2)} = \frac{2[n-2+\sqrt{(n^2-2)}]}{4n-6} = \frac{n-2+\sqrt{(n^2-2)}}{2n-3}$ und

$z = 1 + \frac{1}{(2n-3)x}$, folglich nach der ersten Gleichung

$$(2n-3)\,x = n - 1 + \sqrt{(n^2-2)} = 2\,(n-1) + \frac{1}{x}.$$

Diese Auflösung giebt einen Kettenbruch mit viergliedriger Periode, worin der erste und dritte Quotient Eins, der zweite die ganze Zahl der Wurzel weniger Eins und erst der vierte die doppelte ganze Zahl ist.

5. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um einen nichtquadratischen*) Faktor derselben größer ist, als ein Quadrat.

Auflösung. $\sqrt{39} = 6 + \frac{1}{x}, \sqrt{39} - 6 = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{\sqrt{39} - 6} = \frac{6 + \sqrt{39}}{3}$,

$x = 4 + \frac{1}{3x}$, $3x = 6 + \sqrt{39} = 12 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 + m)} = mn + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(m^2 n^2 + m)} - mn = \frac{1}{x}$,

$$x = \frac{1}{\sqrt{(m^2 n^2 + m)} - mn} = \frac{mn + \sqrt{(m^2 n^2 + m)}}{m} = 2n + \frac{1}{mx}, \text{ folglich}$$

$mx = mn + \sqrt{(m^2 n^2 + m)} = 2mn + \frac{1}{x}$ d. h.

Es entsteht hier ein Kettenbruch mit zweigliedriger Periode, worin der zweite Quotient die doppelte ganze Zahl der Wurzel ist und der erste gleich dem zweiten, dividirt durch den gegebenen Faktor.

6. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um einen nichtquadratischen Faktor kleiner ist, als ein Quadrat.

Auflösung. a) $\sqrt{33} = 6 - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = 6 - \sqrt{33}, x = \frac{1}{6 - \sqrt{33}} = \frac{6 + \sqrt{33}}{3}$,

$x = 4 - \frac{1}{3x}$, $3x = 6 + \sqrt{33} = 12 - \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 - m)} = mn - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = mn - \sqrt{(m^2 n^2 - m)}$,

$$x = \frac{1}{mn - \sqrt{(m^2 n^2 - m)}} = \frac{mn + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}}{m} = 2n - \frac{1}{mx}, \text{ folglich}$$

$mx = mn + \sqrt{(m^2 n^2 - m)} = 2mn - \frac{1}{x}$.

Dasselbe Gesetz wie bei 5, nur mit negativen Gliedern.

---

*) Soll hier ein Faktor der Grundgröße des Quadrates sein, so daß z. B. auch 4 und 9 dafür gelten können.

b) $\sqrt{33} = 5 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{33} - 5 = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{33} - 5} = \frac{5 + \sqrt{33}}{8} = 1 + \frac{1}{y}$,

$\frac{\sqrt{33} - 3}{8} = \frac{1}{y}$, $y = \frac{8}{\sqrt{33} - 3} = \frac{8(3 + \sqrt{33})}{24} = \frac{3 + \sqrt{33}}{3} = 2 + \frac{1}{z}$, $\frac{\sqrt{33} - 3}{3} = \frac{1}{z}$,

$z = \frac{3}{\sqrt{33} - 3} = \frac{3(3 + \sqrt{33})}{24} = \frac{3 + \sqrt{33}}{8} = 1 + \frac{1}{8x}$, folglich nach der Gleichung

für x $\quad 8x = 5 + \sqrt{33} = 10 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 - m)} = mn - 1 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - 1) = \frac{1}{x}$,

$$x = \frac{1}{\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - 1)} = \frac{mn - 1 + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}}{2mn - m - 1} = 1 + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - m)}{2mn - m - 1} = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{2mn - m - 1}{\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - m)},$$

$$y = \frac{(2mn - m - 1)\,[mn - m + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}]}{2m^2 n - m^2 - m} = \frac{mn - m + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}}{m},$$

$$y = 2n - 2 + \frac{1}{z}, \quad \frac{\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - m)}{m} = \frac{1}{z}, \quad z = \frac{m}{\sqrt{(m^2 n^2 - m)} - (mn - m)},$$

$$z = \frac{m\,[mn - m + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}]}{2m^2 n - m^2 - m} = \frac{mn - m + \sqrt{(m^2 n^2 - m)}}{2mn - m - 1},$$

$z = 1 + \frac{1}{(2mn - m - 1)\,x}$, folglich nach der Gleichung für x

$(2mn - m - 1)\,x = mn - 1 + \sqrt{(m^2 n^2 - m)} = 2(mn - 1) + \frac{1}{x}$ d. h.

Diese Auflösung giebt einen Kettenbruch mit viergliedriger Periode, worin der erste und dritte Quotient Eins, der vierte die doppelte ganze Zahl der Wurzel und der zweite gleich dem vierten + 2, dividirt durch den gegebenen Faktor, und davon 2 abgezogen oder gleich der doppelten Grundgröße des zweiten quadratischen Faktors weniger Zwei.

7. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um das Doppelte eines nichtquadratischen Faktors derselben größer ist, als ein Quadrat.

Auflösung. $\sqrt{87} = 9 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{87} - 9 = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{87} - 9} = \frac{9 + \sqrt{87}}{6}$

$x = 3 + \frac{1}{6x}$, $6x = 9 + \sqrt{87} = 18 + \frac{1}{x}$.

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 + 2m)} = mn + \frac{1}{x}$, $\sqrt{(m^2 n^2 + 2m)} - mn = \frac{1}{x}$,

$$x = \frac{1}{\sqrt{(m^2 n^2 + 2m)} - mn}, = \frac{mn + \sqrt{(m^2 n^2 + 2m)}}{2m} = n + \frac{1}{2mx},$$

$$2mx = mn + \sqrt{(m^2 n^2 + 2m)} = 2mn + \frac{1}{x}.$$

Es entsteht auch hier ein Kettenbruch mit zweigliedriger Periode, worin der zweite Quotient die doppelte ganze Zahl der Wurzel ist und der erste gleich dem zweiten, dividirt durch den doppelten gegebenen Faktor.

8. Aufgabe. Die Wurzel aus einer Zahl ziehen, welche um das Doppelte eines nichtquadratischen Faktors derselben kleiner ist, als ein Quadrat.

Auflösung a) $\sqrt{75} = 9 - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = 9 - \sqrt{75}, x = \frac{1}{9 - \sqrt{75}} = \frac{9 + \sqrt{75}}{6},$

$$x = 3 - \frac{1}{6x}, \; 6x = 9 + \sqrt{75} = 18 - \frac{1}{x}.$$

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} = mn - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} = mn - \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)},$

$$x = \frac{1}{mn - \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}} = \frac{mn + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}}{2m} = n - \frac{1}{2mx}, \text{ folglich}$$

$$2mx = mn + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} = 2mn - \frac{1}{x}.$$

Dasselbe Gesetz wie bei 7, nur mit negativen Gliedern.

b) $\sqrt{75} = 8 + \frac{1}{x}, \sqrt{75} - 8 = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{\sqrt{75} - 8} = \frac{8 + \sqrt{75}}{11} = 1 + \frac{1}{y},$

$$\frac{\sqrt{75} - 3}{11} = \frac{1}{y}, \; y = \frac{11}{\sqrt{75} - 3} = \frac{11(3 + \sqrt{75})}{66} = \frac{3 + \sqrt{75}}{6} = 1 + \frac{1}{z},$$

$$\frac{\sqrt{75} - 3}{6} = \frac{1}{z}, \; z = \frac{6}{\sqrt{75} - 3} = \frac{6(3 + \sqrt{75})}{66} = \frac{3 + \sqrt{75}}{11} = 1 + \frac{1}{11x},$$

$$11x = 8 + \sqrt{75} = 16 + \frac{1}{x}.$$

Im Allgemeinen $\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} = mn - 1 + \frac{1}{x}, \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 1) = \frac{1}{x},$

$$x = \frac{1}{\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 1)} = \frac{mn - 1 + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}}{2mn - 2m - 1} = 1 + \frac{1}{y},$$

$$\frac{\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 2m)}{2mn - 2m - 1} = \frac{1}{y}, \; y = \frac{2mn - 2m - 1}{\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 2m)},$$

$$y = \frac{(2mn - 2m - 1)\,[mn - 2m + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}]}{4m^2 n - 4m^2 - 2m} = \frac{mn - 2m + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}}{2m},$$

$$y = n - 2 + \frac{1}{z}, \; \frac{\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 2m)}{2m} = \frac{1}{z}, \; z = \frac{2m}{\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} - (mn - 2m)},$$

$$z = \frac{2m\,[mn - 2m + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}]}{4m^2 n - 4m^2 - 2m} = \frac{mn - 2m + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}}{2mn - 2m - 1},$$

$$z = 1 + \frac{1}{(2mn - 2m - 1)x},\ (2mn - 2m - 1)x = mn - 1 + \sqrt{(m^2 n^2 - 2m)} = 2(mn - 1) + \frac{1}{x}.$$

Entsprechend 6 b. giebt diese Auflösung einen Kettenbruch mit viergliedriger Periode, worin der erste und dritte Quotient Eins, der vierte die doppelte ganze Zahl der Wurzel und der zweite gleich der Grundgröße des zweiten quadratischen Faktors weniger Zwei.

Diese Gesetze sind so einfach, daß jeder nur einiger Maßen geübte Rechner die Wurzeln aus den entsprechenden Zahlen im Kopfe ausziehen und bis zu einer genügenden Genauigkeit entwickeln kann. Der Uebersicht halber will ich die zu den einzelnen Formeln bis 100 gehörigen Zahlen zusammenstellen.

1) $\sqrt{(n^2 + 1)}$, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82 geben eingliedrige Perioden mit positiven Quotienten.

2) $\sqrt{(n^2 - 1)}$, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 geben eingliedrige Perioden mit negativen Quotienten und zweigliedrige mit positiven.

3) $\sqrt{(n^2 + 2)}$, (3), 6, 11, 18, 27, 38, 51, 66, 83 geben zweigliedrige Perioden mit positiven Quotienten.

4) $\sqrt{(n^2 - 2)}$, (2), 7, 14, 23, 34, 47, 62, 79, 98 geben zweigliedrige Perioden mit negativen Quotienten und viergliedrige mit positiven.

5) $\sqrt{(m^2 n^2 + m)}$, 12, 20, 30, 39, 42, 56, 68, 72, 84, 90 geben zweigliedrige Perioden mit positiven Quotienten. Diese Formel umfaßt auch noch $(n^2 + 1)$ und die graden Zahlen von $(n^2 + 2)$.

6) $\sqrt{(m^2 n^2 - m)}$, 33, 60, 95 geben zweigliedrige Perioden mit negativen Quotienten und viergliedrige mit positiven. Zu dieser Formel gehört auch $(n^2 - 1)$, die graden Zahlen von $(n^2 - 2)$ und diejenigen von $(m^2 n^2 + m)$, wo $n = 1$ ist.

7) $\sqrt{(m^2 n^2 + 2m)}$, 40, 87 geben zweigliedrige Perioden mit positiven Quotienten; dazu gehört auch die Formel $(n^2 + 2)$ und die Zahlen von $m^2 n^2 + m$, wo m grade ist.

8) $\sqrt{(m^2 n^2 - 2m)}$, 32, 75, 96 geben zweigliedrige Perioden mit negativen Quotienten und viergliedrige mit positiven; dazu gehört auch die Formel $(n^2 - 2)$ und die Zahlen von $m^2 n^2 - m$, wo m grade ist.

Ohne uns auf die Entwickelung der Quadratwurzeln durch Kettenbrüche im Allgemeinen einzulassen, mögen hier noch einige Bemerkungen zu deren Verständniß folgen.

Wie wir schon oben S. 3 gesehen, wird sich dabei der Nenner jedes vollständigen Quotienten rational darstellen lassen. Setzen wir daher für $\sqrt{A}$ irgend einen solchen

Quotienten $X = \frac{Q + \sqrt{A}}{P} = q + \frac{1}{Y}$ und den folgenden $Y = \frac{R + \sqrt{A}}{S} = r + \frac{1}{Z}$, wo q und r die in X und Y enthaltenen ganzen Zahlen sind, so ist alsbald

$$R = qP - Q \text{ und } S = \frac{A - R^2}{P} = \frac{A - q^2P^2 + 2qPQ - Q^2}{P}.$$

Es werden hier R und S ganze Zahlen sein, wenn es P, Q und $\frac{A - Q^2}{P}$ sind. Durch eine vollständige Induktion läßt sich diese Bestimmung bis auf den ersten Quotienten zurückführen, wo $\sqrt{A} = a + \frac{1}{x}$ gesetzt, $x = \frac{a + \sqrt{A}}{A - a^2}$, also $Q = a$ und $P = A - a^2$, folglich $\frac{A - Q^2}{P} = 1$; demnach R und S ganze Zahlen für alle Quotienten. Zugleich findet sich auch, daß R und S positiv werden, woraus sich alsbald ergiebt, daß $R < \sqrt{A}$ und $S < 2\sqrt{A}$.

Da der Kettenbruch für jede irrationale Größe ein unendlicher ist, so muß er hier bei der begrenzten Anzahl von Werthen für R und S ein periodischer sein. Die Gliederzahl der Periode im Allgemeinen zu bestimmen ist zwar nicht gelungen, doch lassen sich noch folgende zwei Gesetze ableiten:

1) Kommt man in der Entwicklung bei zwei auf einander folgenden Quotienten auf denselben Zähler, so kehrt beim zweiten der vorhergehende Nenner wieder und es geht von da die Reihe rückwärts bis zur doppelten ganzen Zahl der Wurzel, was eine grade Gliederzahl der Periode giebt.

2) Kommt man dagegen auf denselben Nenner, so kehrt der vorhergehende Zähler wieder und es geht von da die Reihe ebenfalls rückwärts bis zur doppelten ganzen Zahl der Wurzel, was eine ungrade Gliederzahl der Periode giebt.

Bezeichnet hierbei $\frac{B}{C}$ den zum vorletzten Gliede der Periode gehörigen Näherungswerth von $\sqrt{A}$, so ist für den ersten bei weitem häufigeren Fall $B^2 = AC^2 + 1$ und für den zweiten Fall $B^2 = AC^2 - 1$. Die Entwicklung dieser Ausdrücke hat seit Fermat und Brounker, also fast 200 Jahre, die Mathematiker vielfach beschäftigt.

In der bestimmten Form, worin die Quadratwurzeln auf diese Weise erscheinen, liegt es auch, daß dies Verfahren ein ungleich einfacheres und folgenreicheres sein muß, als jedes andere.

Für die in obiger Tabelle bis 100 noch fehlenden 37 Zahlen finden wir hiernach

1) für 41 eine dreigliedrige Periode mit den Quotienten 2, 2, 12;
2) für 13, 29, 53, 74, 85, 89, 92 fünfgliedrige Perioden;
3) für 58 und 73 siebengliedrige;
4) für 61 und 97 elfgliedrige;

5) für 28 und 55 viergliedrige, woraus folgt, daß nur die zweigliedrigen ein bestimmtes Kennzeichen für ihre zugehörigen Zahlen sind; die Verschiedenheit dieser und der früher gefundenen viergliedrigen fällt übrigens auch bald in die Augen.
6) für 19, 21, 22, 45, 52, 54, 57, 59, 70, 77, 88 sechsgliedrige;
7) für 31, 44, 69, 71, 91 achtgliedrige;
8) für 43, 67, 86, 93 zehngliedrige;
9) für 46 und 76 zwölfgliedrige;
10) für 94 eine sechzehngliedrige Periode.

Außer den Wurzeln mit eingliedriger Periode nur zwölf Zahlen mit ungrader Gliederzahl der Perioden.

Lassen wir noch die Näherungswerthe einiger Wurzeln folgen, indem wir die Nenner derselben bei den kleineren Zahlen nicht über 100 nehmen, so erinnere ich dabei an folgende Grundbestimmungen.

1) Die Fehlergrenze, f, ist genau bestimmt. Wenn nämlich $\frac{Z}{N}$ und $\frac{T}{M}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe bei positiven Quotienten sind, so ist

$$f < \frac{Z}{N} - \frac{T}{M} = \frac{\pm 1}{NM}.$$

2) Die Reduktionsformel für den folgenden Näherungswerth $\frac{V}{L}$ ist, wenn dessen Quotient q, $\frac{V}{L} = \frac{qT + Z}{qM + N}$.

Wäre der Quotient (—q), so würde $\frac{V}{L} = \frac{qT - Z}{qM - N}$, wobei zu bemerken, daß bei fortlaufend negativen Quotienten alle Näherungswerthe zu groß werden.

Wäre endlich das zugehörige Glied $\frac{v}{q}$ oder der Quotient $\frac{q}{v}$, so müßte $\frac{V}{L} = \frac{qT + vZ}{qM + vN}$. Diese Formel gilt, wenn die Perioden zusammengezogen werden, um bei großer Gliederzahl derselben die Annäherung nicht nach einzelnen Gliedern, sondern nach den ganzen Perioden vornehmen zu können.

1) $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \text{ꝛc.}}$ die Näherungswerthe $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, der folgende Nenner $M = 169$, folglich $f < \frac{1}{11830}$.

2a) $\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{4 - \text{ꝛc.}}$ die Näherungswerthe $\frac{7}{4}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{97}{56}$ sind nur die oberen Grenzen, so daß wir dadurch die halbe Arbeit ersparen, während f ziemlich gut durch das Quadrat des letzten Nenners bestimmt ist.

b) $\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{26}{15}$, $\frac{71}{41}$, $\frac{97}{56}$, $M = 153$, $f < \frac{1}{8568}$.

3) $\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \text{ic.}}$ die Näherungswerthe $\frac{9}{4}$, $\frac{38}{17}$, $\frac{161}{72}$, $M = 305$, $f < \frac{1}{21960}$.

4) $\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe $\frac{5}{2}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{49}{20}$, $\frac{218}{89}$, $M = 198$, $f < \frac{1}{17622}$.

5a) $\sqrt{7} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{6 - \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe $\frac{8}{3}$, $\frac{45}{17}$, $\frac{127}{48}$.

b) $\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{ic.}}}}}$ die Näherungswerthe 3, $\frac{5}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{37}{14}$, und dann nach Perioden fortgeschritten, indem $\frac{2}{3}$ und $\frac{9}{14}$ die beiden letzten Näherungswerthe der Periode sind, wird für die Wurzel der vorletzte Näherungswerth der zweiten Periode $\frac{127}{48}$, $M = 223$, $f < \frac{1}{10704}$.

6a) $\sqrt{8} = 3 - \cfrac{1}{6 \text{ ic.}}$ die Näherungswerthe $\frac{17}{6}$, $\frac{99}{35}$.

b) $\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe 3, $\frac{14}{5}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{82}{29}$, $\frac{99}{35}$, $M = 169$, $f < \frac{1}{5915}$.

7) $\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \text{ic.}}$ die Näherungswerthe $\frac{19}{6}$, $\frac{117}{37}$, $M = 228$, $f < \frac{1}{8436}$.

8) $\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe $\frac{10}{3}$, $\frac{63}{19}$, $\frac{199}{60}$, $M = 379$, $f < \frac{1}{22740}$.

9) $\sqrt{12} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \text{ic.}}}$ die Näherungswerthe $\frac{7}{2}$, $\frac{45}{13}$, $\frac{97}{28}$, $M = 181$, $f < \frac{1}{5068}$.

10) $\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \text{ꝛc.}}}}}}}}}$

die Näherungswerthe bis zum Schluß der ersten Periode 6, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$, $\frac{206}{37}$, $\frac{657}{118}$, $\frac{863}{155}$, $\frac{1520}{273}$, $\frac{16063}{2885}$. Schon für den vorletzten ist $f < \frac{1}{787605}$, mithin ist derselbe wenigstens bis zu sieben Decimalstellen genau.

Da hier die beiden letzten Näherungswerthe der Periode $\frac{155}{273}$ und $\frac{1638}{2885}$, so werden für die Wurzel die beiden letzten Näherungswerthe in der zweiten Periode $\frac{4620799}{829920}$ und $\frac{48831515}{8770399}$, wobei schon der vorletzte wenigstens auf 15 Decimalstellen genau wäre.

Man bricht gern die Reihe mit dem vorletzten Gliede der Periode ab, weil der letzte Quotient, als der größte, bedeutend größere Zahlen geben würde, ohne eine bedeutend vermehrte Annäherung; während der vorletzte in kleineren Zahlen eine sehr bedeutende Näherung giebt wegen des folgenden großen Quotienten.

II. Die Platonischen Körper.

Wenn wir in den Schriften Platos sehen, mit welcher Begeisterung er stets die Mathematik zur Grundlage seiner Betrachtungen und Einrichtungen macht, so dürfen wir uns nicht wundern, daß es am Eingange seiner Schule hieß: „Jeder Nichtmathematiker bleibe draußen." Unterrichtet von den Schülern des Pythagoras, zeigt er schon in seiner Jugend eine scharfsinnige Auffassung der Zahlen, z. B. im Theätet S. 147 f. Er legt ihnen aber auch eine große magische Kraft bei, wie im Anfange des achten Buches „vom Staate" S. 546 f., wo er die Bedeutsamkeit ihrer Zauberkraft so hoch anschlägt, daß er es nicht einmal wagt, diese Behauptung dem Sokrates ohne weiteres in den Mund zu legen, sondern dazu die Musen anruft. Mystisch vergleicht er hier die Glieder einer Proportion mit den vier Weltaltern des Hesiod, während er sie später, im Timäus, mit seinen Elementen zusammenstellt. Er unterscheidet dabei eine menschliche und eine göttliche Zahl, aber die phantastische Darstellung seiner sogenannten geometrischen Zahl zu erklären, möchte wohl ebensowenig gelingen, als so manche Zauberformeln der Chiromanten. Ihm beruht in seinem Musterstaat (καλλίπολις) alle geistige und körperliche (μουσικὴ καὶ γυμναστικὴ) Bildung auf Mathematik. Sie ist seine Schulwissenschaft (μάθημα), sie soll der künftige Philosoph, sie soll der Krieger treiben. (7 B. vom Staate S. 522 ff.). Zuerst die

Arithmetik. τὸ ἕν τε καὶ τὰ δύο καὶ τὰ τρία διαγιγνώσκειν. „Die Eins, die Zwei, die Drei*) kennen zu lernen, nicht blos handwerksmäßig, sondern bis zum vollen Verständniß der Natur der Zahlen. Nicht Handels und Gewerbes wegen, sondern des Geistes wegen, den Uebergang zu erleichtern vom Schaffen zum wahren Sein." Den großen Erfolg, welchen er sich von diesem Studium verspricht, schildert er mit den lebhaftesten Farben und weiset seine Zuhörer sogar auf die Erfahrung hin, um dadurch die gehegte Erwartung zu begründen.

Als Zweites gilt ihm die Geometrie (Planimetrie). Auch hier kämpft er gegen den alten Schlendrian und sucht zu zeigen, wie sie die Seele anleite, die Idee des Guten zu erschauen und die Seeligkeit des Wirklichen zu sehen.

Wie nun Glaukon zum Dritten die Astronomie annehmen will, deren großartiger Einfluß 10 B. S. 616 geschildert wird, zeigt ihm Sokrates, daß man die Körper nicht eher im Umschwunge betrachten dürfe, als man sie an und für sich erforscht habe, und verlangt, daß vor der Astronomie die Stereometrie der Geometrie folge. Von ihr erwartet er aber noch mehr Gewinn für die Seele, wenn diese Wissenschaft nur erst recht ausgebildet sei.

Dem Gange der Platonischen Betrachtungsweise gemäß finden wir in spätern Gesprächen weiter ausgeführt, was in frühern nur angedeutet ist. Im Timäus bemüht sich der große Philosoph, seine Naturansichten zu begründen und giebt uns in ihnen eine Apotheose seines mathematischen Lieblingskindes, der Stereometrie.

Schon um aus seinen beiden Urelementen, Feuer und Erde, die beiden mittleren, Luft und Wasser, herzuleiten, bedient er sich (S. 31 f.) der Proportion mit den beiden mittleren Proportionalen, deren Auffindung zu Platos Zeit die mathematische und durch das berühmte delische Problem der Würfelverdoppelung auch die politische Welt in Bewegung setzte. Denn nur auf diese Proportion kann die Auseinandersetzung gedeutet werden, indem Plato bestimmt und klar auf das Würfelverhältniß hinweiset: „Wenn eine Ebene der Leib des Alls sein und er keine Dicke haben sollte, so reichte schon eine Mittlere hin die Aeußeren mit sich zu verbinden. Doch er muß körperlich sein und Körper verbindet nicht eine, sondern stets zwei Mittlere. So zwischen Feuer und Erde stellte Gott Wasser und Luft und zu einander soviel als möglich nach demselben Verhältniß. Das Feuer also zur Luft, wie Luft zum Wasser und die Luft zum Wasser, wie Wasser zur Erde verband er und errichtete den Himmel sichtbar und greifbar. So wurde aus diesen Vieren der Leib der Welt."**) Daß es sich in diesen Worten nur

*) Wir würden sagen, das Ein mal Eins zu lernen.

**) Diese Stelle scheint mit der hervorgehobenen Vierzahl gegen die Pythagoräer gerichtet zu sein, deren Ansichten Aristoteles mit Verwerfung der Platonischen wieder aufnimmt und sich weitläuftig darüber ausläßt. Während Plato das Wahre nur im Sein und Bestehen findet, hebt Aristoteles das Bewegliche in seiner ganzen Naturbetrachtung hervor. Aristoteles ed. Becker. Vom Himmel 1 B. 1 K.

um eine Vergleichung handelt und nicht etwa die vier Elemente ihrer materiellen Beschaffenheit nach in dem angedeuteten Verhältniß stehen sollen, geht theils schon aus den Worten „soviel als möglich“ hervor, theils wird später, S. 54, ausdrücklich erklärt, daß ihrer Bildung gemäß nur die ersten drei in einander übergehen könnten, nie aber das Vierte, welches in einem der übrigen aufgelöset, sich wieder herstelle, wenn seine Theile zusammentreffen (Krystallisation?); doch läßt er an einer anderen Stelle, S. 49, Erde (Eis) in Wasser u. s. w. übergehen und umgekehrt aus dem Feuer Luft u. s. w. entstehen. Den von Plato hier aufgestellten Proportionen zufolge kann also nur davon die Rede sein, das ursprüngliche Würfelverhältniß $a^3 : b^3$ in seine drei Linienverhältnisse aufzulösen, was wir durch die Kubikwurzeln leicht bewirken, indem $a : \sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[3]{ab^2} : b$. Den Alten war diese Zahlenbezeichnung, insofern sie Irrationalzahlen darstellten, nicht genehm. Sie versuchten es auf geometrische Weise und sprachen dafür von Linien-, Flächen- und Körper-Zahlen. Mancher Philolog, durch diese ihm nicht geläufigen Bestimmungen irregeleitet, verlor sich in weitläuftige Spekulationen, während schon Ammonios bei Proklos das Wahre giebt.

— Nachdem so die Vierzahl der Elemente nachgewiesen ist, kommt es auf deren Verbindung an und welche Gestalt der Welt zu geben sei. Offenbar die Vollkommenste und dies ist die Kugel, von allen die vollkommenste und sich selbst ähnlichste Gestalt, wobei zugleich nachgewiesen wird, daß Gott der Sinne in menschlicher Weise nicht bedürfe (S. 83). Den Elementen muß nun auch ihre Gestalt angewiesen werden, natürlich nur in ihren kleinsten Theilen (S. 56). Ihnen gebühren die schönsten Gestalten. „Welche sind diese, unähnlich unter einander und doch durch einander lösbar? Das weiß Gott und der Mensch, der ihm lieb ist. Denn niemals werden wir zugeben, daß es schönere Körper gebe.“ (S. 53.) Um diese Gestalten zu finden, stellt er folgende Betrachtung an: Die Seiten der Körper sind Ebenen. Eine ist die Grundfläche; aber auch in der Richtung der Höhe liegen Ebenen (Durch diese Bestimmung der Höhe sucht Plato wohl den Vorwurf von sich abzuwenden, als ob er die Körper aus Flächen entstehen ließ oder sie als leere Räume darstelle). Die einfachste Figur ist das Dreieck. Jedes Dreieck besteht aus zwei rechtwinkligen, welche entweder gleichschenklig oder ungleichschenklig sind. Von jenen giebt es nur eine Art, von diesen aber unzählige und wir wählen dasjenige als das schönste, aus welchem das gleichseitige entsteht, wo also die kleinere Kathete gleich der halben Hypotenuse oder, wie Plato sich ausdrückt, das Quadrat der größeren Kathete gleich dem dreifachen der kleineren ist. Das gleichseitige Dreieck denkt er sich aus sechs solchen Dreiecken bestehend; setzt er dagegen sein gleichschenkliges Dreieck zusammen, so erhält er aus vieren das Quadrat.

S. 268 über die Dreizahl. Von der Natur 1 B. 6 K. S. 189 und 4 B. 1. 2 K. S. 208 f. über die Bildung der Elemente.

Der erste Körper wird von vier gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen. Plato nennt ihn einen körperlichen Winkel, gebildet aus der Neigung der auf einander folgenden ebenen Winkel; später Pyramide. Der zweite Körper aus acht, der dritte aus zwanzig*) dergleichen; der vierte ist der Kubus, von sechs Quadraten eingeschlossen. „Es giebt aber noch eine fünfte Zusammenstellung. Diese breitete Gott um das All es zu verzieren.“

Wie hier Plato sich den Atomisten nähert und zwar auf eine Weise, die nur darin Entschuldigung finden kann, daß er den schönen Formen der regelmäßigen Körper eine Verherrlichung zu Theil werden ließ, so finden wir die von ihm dem fünften Körper zugetheilte Ausspannung über das Weltall auch auf die übrigen ausgedehnt bei Kepler und seinen Zeitgenossen mit ebensowenig wissenschaftlicher Berechtigung, sondern fast nur als phantastisches Spiel.

Die acht Ringe, welche Plato für den Lauf der Himmelskörper aufstellte, konnten die Astronomen der Neuzeit nicht mehr benutzen, als Kopernikus seine sechs bekannten Planeten in excentrischen Kreisbahnen um die Sonne führte. Der Hang zum Wunderbaren führte die Gelehrten auf mannichfache Abwege. So suchte **Rhaeticus** in seiner **ep. ad Schonerum 1540** aus jener Excentricität den Umsturz der Weltreiche abzuleiten. Kepler fühlte sich gleich beim Beginn seiner Studien durch das Verhältniß der Planetenabstände angezogen und betrachtete es als ein **mysterium cosmographicum**, welches er in dem **prodomus dissertationum 1596** zuerst darstellte**). Selbst als er gestützt auf die zwanzigjährigen Beobachtungen des Tycho Brahe die wahre Gestalt der Planetenbahnen am Mars erkannte 1609, und sogar nach dem glänzendsten Resultate seines Nachdenkens, nach dem Auffinden des sogenannten dritten Keplerschen Gesetzes 1618***)

---

*) 2 × 60 Grunddreiecke, sagt Plato, woraus hervorgeht, wie er nachher den Uebergang der Elemente in einander erklärt; nämlich Luft = 2 Feuer, Wasser = 2 Luft + 1 Feuer oder 2½ Luft. Daß diese Zahlen ebensowenig der obigen Proportion, als dem geometrischen Inhalte der Körper bei gleichen Seiten entsprechen, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

**) Wie eifrig man sich damals mit den platonischen Körpern beschäftigte, zeigt unter andern Perspectiva corporum regularium. Allen Liebhabern der freyen Kunst zu Ehren durch Wentzeln Jamitzer, Bürger und Goldschmid zu Nürnberg 1568.

***) In der „Harmonik“, wo er jene Einhüllung mit dem neuen Gesetze unmittelbar zusammenstellt. Seine große Freude über die Auffindung dieses Gesetzes spricht er lebhaft 5 B. S. 189 folgender Maßen aus: Rursus hic aliqua pars mei mysterii cosmographici, suspensa ante 22 annos, quia nondum liquebat, absolvenda et huc inferenda est.

Inventis enim veris orbium intervallis per observationes Brahei plurimi temporis labore continuo, tandem, tandem, genuina proportio temporum periodicorum ad proportionem orbium — sera quidem respexit inertem. Respexit tamen, et longo post tempore venit eaque (si temporis articulos petis, 8 mart. hujus anni 1618 animo concepta, sed infeliciter ad calculos vocata eoque pro falsa rejecta, denique 15 Maii reversa) novo capto impetu expugnavit mentis meae tenebras tanta comprobatione et laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis et meditationibus hujus in unum conspirantium, ut somniare me et praesumere quaesitum inter principia theilt er doch noch seine jugendliche Ansicht 1622 in der **epitome astronomiae copernicanae** (4 B.) mit, obgleich er in demselben Werke Ikosaeder und Dodekaeder benutzt, um an ihre Ecken ausgezeichnete Sterne des Himmels zu stellen.

Die Bahnen der Planeten sollen auf dazu gehörigen Kugeln liegen, zwischen denen die regelmäßigen Körper so eingeschoben sind, daß sie die eine berühren, während sie ihre Ecken in der nächsten haben. Zwischen Saturn und Jupiter liegt der Würfel, zwischen Jupiter und Mars das Tetraeder, zwischen Mars und Erde (orbis magnus cum luna) das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder und endlich zwischen Venus und Merkur das Oktaeder, wobei noch unentschieden bleibt, ob die Kugelschalen nur die Dicke der Planeten oder auch ihrer Excentricitäten haben sollen. Die drei ersten Körper nennt er **primaria**, die beiden letzten **secundaria** und weiß für ihre Stellung noch besondere naturphilosophische Gründe anzuführen.

Als ich Behufs der Berechnung der regelmäßigen Körper die Formeln über die ein- und um-schriebenen Kugeln bei **van Swinden** übersetzt von Jacobi 11 B. 3 Absch. verglich, zeigten sich einige nothwendige Verbesserungen, die ich im Folgenden beim Oktaeder und Dodekaeder bemerken werde. Bezeichnet a die Kante des regelmäßigen Körpers, R den Radius der umschriebenen und r den der eingeschriebenen Kugel, sowie ϱ den Radius des um eine Grenzfigur gelegten Kreises, so ist für alle Körper $R^2 - \varrho^2 = r^2$ und demnach:

1) für den Würfel $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $r = \frac{a}{2}$, folglich $\frac{R}{r} = \sqrt{3} = \frac{97}{56}$, der siebente Näherungswerth der Wurzel. Genügt ziemlich gut der Sonnenferne des Jupiter und der Sonnennähe des Saturn, 113 und 187 Mill. Meilen.

---

crederem. Sed res est certissima exactissimaque, quod proportio quae est inter binorum quorumcumque planetarum tempora periodica sit praecisa sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est orbium ipsorum.

Durch dies Gesetz hätte Kepler augenblicklich auch das Gesetz der allgemeinen Schwere gefunden, wenn er es mit dem Galliläischen Gesetze des freien Falles auf seine Ideen über die bewegende Kraft der Himmelskörper anwandte. Doch es war zu viel für einen Geist, beide Gesetze zu bewältigen und es bedurfte eines Newtons, der erst am Ende des Jahrhunderts dies Gesetz auf anderem Wege nach vielfacher Anstrengung fand. Wir haben jetzt leichtes Spiel das Ei des Columbus auf die Spitze zu stellen, da die Arbeit gethan ist.

Bezeichnet nämlich T die Umlaufszeit, R den Abstand und P die Centripetalkraft eines Planeten gegen die Sonne und t, r, p dies entsprechend für einen zweiten, so ist

1) nach dem Gesetze des freien Falles $R : r = PT^2 : pt^2$,
2) nach dem Keplerschen Gesetze $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$,

folglich 3) das Newtonsche Gesetz $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} = P : p$.

2) für das Tetraeder $R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\varrho = \frac{a}{3}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, $r = \sqrt{(R^2 - \varrho^2)}$ $r = \sqrt{\left(\frac{3a^2}{8} - \frac{a^2}{3}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$, folglich $\frac{R}{r} = 3$. Ebenfalls der Sonnenferne des Mars und der Sonnennähe des Jupiter genügend, 34 und 103 Mill. Meilen.

3) Für das Dodekaeder wird das Aufsuchen der Radien auf eine leichte Weise bewirkt, wenn wir berücksichtigen, daß acht Ecken des Körpers zugleich Ecken eines Würfels sind, der von derselben Kugel eingeschlossen ist und dessen Kanten Diagonalen der unsern Körper begrenzenden Fünfecke sind. Setzen wir diese Würfelkante $= d$, so ist $R = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ und $a = \frac{d}{2}(\sqrt{5} - 1)$, folglich $R = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$. Da nun $\varrho^2 = \frac{2a^2}{5 - \sqrt{5}}$ $\varrho^2 = \frac{2a^2\sqrt{5}}{5(\sqrt{5} - 1)}$, so erhalten wir $r = \frac{a}{\sqrt{5} - 1}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$ und $\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{15}{5 + 2\sqrt{5}}}$ $\frac{R}{r} = \sqrt{(15 - 6\sqrt{5})}$. Hier $\sqrt{5} = \frac{9}{4}$ als erster Näherungswerth genommen, ist $\sqrt{(15 - 6\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, wofür der zweite Näherungswerth $\frac{11}{9}$, ein Verhältniß, welches den wahren Entfernungen der Erde und des Mars nur wenig genügt, da die Sonnenf. der Erde 21 und die Sonnenn. des Mars 29 M. M.

4) Beim Ikosaeder findet dasselbe Verhältniß der Radien statt, indem

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \text{ und } r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}, \text{ folglich } \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{3(5 + \sqrt{5})}{7 + 3\sqrt{5}}},$$

$\frac{R}{r} = \sqrt{(15 - 6\sqrt{5})}$. Es genügt dies aber ebensowenig dem Abstande der Venus und Erde, etwa 15 und 20 M. M.

5) Für das Oktaeder ist $R = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $r = a\sqrt{\frac{1}{6}}$ *) und $\frac{R}{r} = \sqrt{3}$, wie beim Würfel, ziemlich den mittleren Entfernungen des Merkur und Venus genügend, gegen 9 und 15 M. M.

Wir sehen also, daß diese Einschiebung bis auf Venus und Merkur den Planeten vollkommen und bei der Erde noch überflüssig Spielraum für die Excentricität ihrer Bahnen gestattet; doch die Entdeckung neuer Planeten in anderen Bahnen mußte diese Phantasie ganz zerstören, da nur fünf solcher regelmäßigen Körper möglich sind.

Der Satz über die Anzahl der regelmäßigen Körper gehört mit seinen einfachen Verhältnissen gewiß ebenso an die Spitze der Körperbetrachtung, wie der entsprechende

---

*) Bei van Swinden ist für das Oktaeder die Entfernung des Mittelpunktes von den Kanten mit dem Halbmesser der eingeschriebenen Kugel, Entfernung von den Flächen verwechselt.

Satz in der Planimetrie, wonach die Seitenzahl einer Figur gleich ihrer Winkelzahl, und ich gebe ihn auch dort mit folgendem algebraischen Beweise:

Bezeichnet W die Anzahl der ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Körpers, K die Kantenzahl, E die Eckenzahl und F die Flächenzahl desselben, sowie m die Winkelzahl einer Ecke und n die einer Fläche, so erhalten wir augenblicklich die Gleichungen

$$W = 2K,\ W = mE \text{ und } W = nF \text{ oder}$$

$$K = \frac{1}{2}W,\ E = \frac{1}{m}W \text{ und } F = \frac{1}{n}W.$$

Dazu kommt noch die Gleichung über die Eulerschen Körper, $E + F - K = 2$.

Aus diesen vier Gleichungen finden wir ohne weiters $W\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = 2$.

Da W positiv sein muß, so ist die Gleichung nur möglich, wenn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ ist. Es dürfen also m und n nicht beide gleich vier oder größer sein und wenn eine dieser Größen gleich drei, darf die andere nicht größer, als fünf sein. Da nun auch keine von beiden kleiner, als drei sein kann, so bleiben nur folgende fünf Fälle übrig.

1) $m = 3 = n$, ist $W = 12$, $K = 6$, $E = 4 = F$, das Tetraeder.
2) $m = 4$, $n = 3$, $W = 24$, $K = 12$, $E = 6$, $F = 8$, das Oktaeder.
3) $m = 5$, $n = 3$, $W = 60$, $K = 30$, $E = 12$, $F = 20$, das Ikosaeder.
4) $m = 3$, $n = 4$, $W = 24$, $K = 12$, $E = 8$, $F = 6$, der Würfel.
5) $m = 3$, $n = 5$, $W = 60$, $K = 30$, $E = 20$, $F = 12$, das Dodekaeder.

Hierbei ist noch gar nicht vorausgesetzt, daß die besagten Körper regelmäßig sind, wie in der That vielfach in der Mineralogie unregelmäßige Körper von den angegebenen Zahlenverhältnissen vorkommen. Es ist daher Sache eines weiteren Fortschrittes in der Stereometrie nachzuweisen, daß die Bedingungen der Regelmäßigkeit innerhalb der Grenzen liegen, für welche die oben berechneten Zahlenangaben gelten, und es führt uns dieser Zahlensatz zu der Auffindung der elementaren Sätze über die Lage der Ebenen im Raume und deren Verbindung zu Ecken, um daraus die Beschaffenheit der Körper genau zu ermitteln.

Nachschrift. Wegen Mangel an Raum muß sowohl die oben angedeutete Bemerkung aus der mathematischen Geographie, als auch Einiges aus den Naturwissenschaften, dessen Darstellung beabsichtigt war, zurückbleiben. Es möge mir nur kurz noch Folgendes erlaubt sein: Den sogenannten induktiven Wissenschaften, Physik und Chemie, wünschte ich wohl eine größere Verbreitung im Schulunterrichte und auf den unteren Stufen den Vorrang vor der Naturgeschichte. Wahrnehmung ist hier die Grundlage aller Erkenntniß. Sehen wir nun mit welcher lebhaften Freudigkeit selbst die jüngeren Schüler auch unscheinbare Experimente z. B. Abwägen verschiedener Stoffe verfolgen;

mit welchem Jubel sie die so leicht hervorzubringenden Veränderungen der Farben und Aggregatsformen begrüßen, wie sie dadurch vielfach zu eigener Thätigkeit angetrieben werden; mit welchen geringen Mitteln oft die schlagendsten Versuche sich machen lassen, um dadurch eine Menge von Vorurtheilen gründlich wegzuräumen. Denken wir dagegen, mit welchen Schwierigkeiten wir in der Naturgeschichte zu kämpfen haben, wo uns meist nur kleinere Gegenstände oder Abbildungen zu Gebote stehen, und wie eine wahre Anschauung derselben nur in der freien Natur eintreten kann, welche sie in ihrer vollen Bedeutsamkeit und Frische erscheinen läßt! Um auf diesem Felde mancherlei Aberglauben auszurotten, bedürfen wir meist ein tieferes Eingehen, wenn es mehr als ebenfalls Glauben sein soll. Die leider noch in so vielen Büchern spukenden Geschichten von lebenden Kröten in festen Gesteinen und von Fröschen im menschlichen Körper zeigen, wie schwer es hält solchen Unsinn zu vertilgen, der bei einer vernünftigen Erforschung der Natur jener Thiere rein unmöglich erscheint. Wie wenig Frösche und namentlich Froschlaich im Stande sind, der tödtlichen Einwirkung der Wärme und der Säuren zu widerstehen, davon kann sich jeder leicht selbst überzeugen. In Bezug auf die Kröten ist es interessant genug, wie jener Aberglauben durch eine falsche Uebersetzung entstanden, Jahrhunderte lang selbst die gelehrte Welt befangen hielt, bis der Sprachfehler vor wenigen Jahrzehnten aufgeklärt wurde, indem der französische Bergmann eine Krystallverbindung in kleinen kugelförmigen Höhlungen nach ihrer Gestalt mit „crapaud vif (lebende Kröte)" bezeichnet, die wir „glänzende Druse" nennen.