GRUNDLAGEN UND METHODEN

DES

TABELLARISCHEN RECHNENS.

VON

DR. KARL ISRAEL-HOLTZWART.

VORWORT.

Die nachfolgenden Aufsätze aus dem Gebiete des mathematischen Elementarunterrichts behandeln ausschliefslich solche Rechnungsoperationen, deren Ausführung an den Gebrauch von Tafeln gebunden ist oder doch mit tabellarischen Hilfsmitteln in einer weniger ermüdenden und zeitraubenden Weise als auf direktem Wege bewirkt werden kann. An erster Stelle gehören dahin das logarithmische und trigonometrische Rechnen; aber auch in vielen anderen Fällen kann man sich durch passend eingerichtete Tafeln erhebliche Rechnungsvorteile sichern. So bietet beispielsweise das auf den Binomialformeln beruhende Radizierungsverfahren zwar auf der untersten Stufe, beim Aufsuchen der Quadratwurzel, noch keine nennenswerten theoretischen oder technischen Schwierigkeiten. Mit dem Grade der Wurzel nimmt indessen die Weitschweifigkeit der Methode, ebenso wie der Umfang der Rechenarbeit, unverhältnismäfsig rasch zu — ohne dafs der mathematische Vorstellungskreis des Schülers merklich erweitert wird. Zur Ausziehung von Wurzeln, welche den zweiten Grad übersteigen, empfehlen sich daher tabellarische Methoden, die mit stets gleicher Einfachheit zum Ziele führen.

Der Einwand, dafs durch die Benutzung solcher Tafeln die Operationen zu viel von ihrer Eigenart verlieren oder die Mathematik sich etwas von ihrer wissenschaftlichen Würde vergeben könnte, hat wohl kaum mehr Berechtigung, als wenn man ihn gegen die Anwendung der Logarithmentafel erheben wollte. Weit eher läfst sich behaupten, dafs durch Zuziehung von Tabellen den Rechnungen gerade das blofs Handwerksmäfsige abgestreift, damit aber freie Bahn für bedeutendere und wissenswertere Dinge gewonnen wird.

Die Aufsätze stehen methodisch in einem gewissen inneren Verhältnisse, insofern ihnen ein gemeinsames Entwickelungsprinzip, das der Zerlegung in konvergente Faktorenfolgen, zu Grunde liegt. Inwiefern die Darstellung als eine neue bezeichnet werden kann, ist zwar zunächst eine Frage von sekundärer Bedeutung; gleichwohl glaubte der Verfasser sie nicht ganz ungeprüft lassen zu dürfen. Er hat deshalb Veranlassung genommen, auch auf die geschichtliche Entwickelung der einzelnen Lehren, soweit er sie festzustellen in der Lage war, in kurzen Anmerkungen — zuweilen auch, wenn der Zusammenhang oder der Gegenstand dazu einlud, etwas eingehender — hinzuweisen.

Inhalts-Übersicht.

Anhang.

Druckfehler.

S. 11 lies: Ἀστερισμῶν.
S. 15 Z. 17 v. o.: **3°45 an** statt 3°45.
S. 29 Z. 11 v. u. lies: **Stammbruch.**
S. 29 Z. 4 v. u. lies: **di** statt **de.**

Einleitung.

Wird die Aufgabe gestellt, den Winkel α aus einer Funktion desselben, etwa dem Kosinus, oder umgekehrt, diesen letztern aus α allgemein zu bestimmen, so ist man gezwungen die Hilfe der Analysis in Anspruch zu nehmen, welche im ersten Falle die Gleichung

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\cos\alpha + \frac{1}{2\cdot 3}\cos^3\alpha + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cos^5\alpha + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cos^7\alpha + \ldots\right] \ldots\ldots (1)$$

und im zweiten Falle

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots\ldots (2)$$

als Lösung darbietet.

Wird ferner verlangt — um ein beliebiges Beispiel der Dreiecksauflösung zu wählen — den Winkel α aus den Seiten a, b, c eines Dreiecks zu ermitteln, so unterscheidet sich diese Aufgabe von der durch die Gleichung (1) dargestellten lediglich dadurch, dafs der Wert von cos α nicht direkt, sondern mittelbar durch die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

gegeben ist, so dafs man hat:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)^5 + \ldots\right].$$

Vergleicht man den Beitrag, welcher einerseits von der Trigonometrie (oder richtiger Planimetrie, da die blofse Einführung des Kosinusbegriffs zum Inhalt des erweiterten Pythagoras nicht das Mindeste hinzufügt), andererseits von der Analysis zur Lösung der vorstehenden Dreiecksaufgabe geleistet wird, so ist leicht ersichtlich, dafs das Übergewicht entschieden auf Seiten der letztern sich befindet, ja dafs in dem analytischen Elemente der eigentliche Nerv der Dreiecksrechnung (der Trigonometrie) zu suchen ist. —

An diesem Verhältnisse ändert sich nichts, wenn in der Praxis, bei Lösung bestimmter Aufgaben, anstelle der Reihen die Tafeln treten, da diese sachlich mit ersteren zusammenfallen und nur das numerische Äquivalent der Reihen darstellen.

Eine ähnliche Bewandnis hat es mit der logarithmischen Berechnung von Zahlenausdrücken; auch hier liegt der Schwerpunkt in den Tafeln.

Diese Thatsache ist für das mathematische System von hoher Bedeutung. Denn wenn es schon gegen das oberste Prinzip der Mathematik verstöfst, von einem Lehrsatze Gebrauch zu machen, dessen Rechtmäfsigkeit nicht zuvor streng erwiesen ist, so erscheint dies noch weit weniger statthaft bei einem Hilfsmittel von dem Range der logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, welches das ganze Gebiet der Elementarmathematik durchdringt und beherrscht. Nun ist allerdings die Behandlung der Reihen — also der theoretischen Grundlage der Tafeln — in den Oberrealschulen bedingungslos und in den Realgymnasien wenigstens mit einigem Vorbehalt zulässig. Aber von dem unläugbaren Mifsstande abgesehen, dafs auch in diesen Fällen zwischen der ersten Ausübung des tabellarischen Rechnens in Untersekunda und seiner theoretischen Begründung in Prima eine Kluft von mehreren Jahren fällt, das erstere also immerhin als eine Art Hysteroproton erscheint, so ist doch dem Gymnasium mit jenem Zugeständnisse überhaupt nicht gedient, da hier die Heranziehung der Reihen grundsätzlich ausgeschlossen ist. — Bei dieser Sachlage tritt also insbesondere an die Mathematiklehrer der Gymnasien die Notwendigkeit heran, eine Begründung der betreffenden Lehren auf anderem Wege zu suchen, gleichzeitig aber auch darauf Bedacht zu nehmen, dafs nur solche Begründungsmittel zur Anwendung gelangen, welche bereits den Schülern der Mittelstufe offen stehen, da nur in diesem Falle die Möglichkeit gegeben ist, gleich an der richtigen, d. h. von der Logik gebotenen Stelle ein sicheres Fundament für die Tafeln herzustellen. — Wenn auch die amtlichen Lehrpläne in dieser Beziehung keine bindende Bestimmung enthalten, so überhebt dies den Lehrer doch gewifs nicht der Pflicht, für die Integrität des Systems von sich aus Sorge zu tragen.

Elementare Berechnung der dekadischen Logarithmen.

Die Erwartung, dafs wohl die meisten aus der Zeit vor Erfindung der logarithmischen Reihen[1] stammenden Methoden für unsern Zweck (etwa mit leichten Modifikationen) geeignet sein möchten, fand in dem geschichtlich vorliegenden Materiale keine Bestätigung. Das Verfahren B ü r g i s, das älteste[2] unter allen, zeichnet sich zwar

[1] Durch Nikolaus Kaufmann, gen. Mercator (Logarithmotechnia, Lond. 1668). Die Exponentialreihe (Umkehrung der log. R.) wurde von Newton, Bernoulli, am vollständigsten aber von Euler entwickelt.

[2] Joost Bürgi, Hofastronom des Landgrafen Wilhelm von Hessen-Kassel, hatte — wie historisch feststeht — seinen Kanon der „roten" und „schwarzen" Zahlen bereits 1610, also vier Jahre v o r Neper fertiggestellt, aber aus einem Übermaße von Bescheidenheit mit der Veröffentlichung gezaudert. Erst 1620 gab er ihn nach langem Drängen seiner Freunde unter dem Titel „Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen, samt gründlichem unterricht, wie solche in allen Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden soll" in Druck. So verwirkte leider Bürgi den Prioritätsanspruch an eine der folgenreichsten mathematischen Erfindungen.

Sicher geht man zu weit, wenn man die ersten Spuren des Logarithmenrechnens bereits bei Archimedes sucht. Die betreffende, immerhin denkwürdige Stelle im Arenarius, III, 6 lautet:

εἰ κα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζωντί τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει, ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλαττόνας, ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιαξάντες ἀλλάλους. (*si ex numeris ab unitate in* durch grofse Einfachheit des Gedankengangs aus, mufste aber schon deshalb aufser Betracht bleiben, weil es nicht das gemeine, sondern das natürliche Logarithmensystem zum Gegenstand hat. Aus dem gleichen Grunde konnte auch an eine Verwertung der Neperschen[1] Methode nicht gedacht werden, davon abgesehen, dafs dieselbe erheblich gewundener ist als die Bürgische. Das von Briggs, dem Erfinder der dekadischen Logarithmen, ursprünglich gebrauchte Verfahren[2], ist zwar in der Idee ansprechend, aber in der Anwendung doch zu schleppend und auch für Anfänger zu wenig übersichtlich. Noch weniger empfehlenswert erschien die kurze Zeit nachher von Briggs (nach einem mit Neper gemeinschaftlich verabredeten Plane) in Anwendung gebrachte Art der Logarithmenberechnung, da diese bereits zu tief in die innern Verhältnisse der Logarithmen eingreift.

Hiernach konnte von den ältern Methoden, soweit sie dem Verfasser bekannt geworden sind, nur noch die in Frage kommen, womit, nach gewöhnlicher Annahme, Long[3] die Logarithmik bereichert hat. In der That übertrifft dieselbe an Fafslichkeit und Sicherheit der Handhabung alle bisher genannten Verfahrungsarten, und auch die Herstellung des Hilfsapparats, von welcher die Schüler selbstverständlich nicht entbunden werden können, unterliegt keinerlei Schwierigkeiten. Es fungieren dabei zweierlei Tabellen — eine gröfsere Tafel[4], welche durch blofse quadratische Wurzeln entwickelt wird, und eine (davon unab-

---

eadem proportione positis, aliqui inter se multiplicantur eorum, qui in eadem proportione sunt, etiam productum in eadem erit proportione a majore multiplicatorum tot numeros distans, quot minor multiplicatorum ab unitate distat in proportione, ab unitate vero distabit uno pauciores, quam quantus numerus est utrorumque, quos numeri inter se multiplicati ab unitate distant.)

wozu der Herausgeber, Dr. Heiberg, erläuternd und, unter Beachtung der später folgenden Anwendungen, wohl auch zutreffend bemerkt:

nos sic idem demonstraremus: sit series

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots n,\ n+1,\ \ldots\ldots m+1,\ m+2,\ \ldots\ldots m+n+1$$
$$1,\ a^1,\ a^2,\ \ldots\ldots a^{n-1},\ a^n,\ \ldots\ldots\ldots a^m,\ldots a^{m+1},\ \ldots\ldots\ldots a^{m+n},$$

itaque $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, *quod ab* a^m *abest loca* $(n+1)$, *ab unitate vero* $m+n+1 = (m+1)+(n+1)-1$.

Es geht indessen hieraus nur hervor, daß dem großen griechischen Mathematiker die beiden bei jedem Logarithmensystem in einander greifenden Reihenarten (ar. und geom.) deutlich vorgeschwebt haben, wenigstens in der primitivsten Form ganzzahliger Exponenten. Um von dieser noch sehr engen Vorstellung bis zum allgemeinen Begriffe des Logarithmus vorzuschreiten, bedurfte es aber einer noch mehr als tausendjährigen Arbeit.

[1] John Napier, oder Neper, 1550—1617. Seine Logarithmentafel, Tabula radicalis, bildet einen Teil seines Hauptwerks: Mirifici logarithmorum canonis Descriptio, Edinburgi 1614.

[2] Logarithmorum chilias prima, Londini 1617, und Arithmetica logarithmica, Londini 1624.

[3] Phil. Trans. pour l'année 1724. Die schöne und einfache Methode, welche jetzt allgemein den Namen Longs trägt, scheint von verschiedenen Mathematikern selbständig, also wiederholt erfunden worden zu sein. Schon hundert Jahre vor Long finden sich ihre Grundgedanken entwickelt in Briggs Arithm. logar., Kap. 13 und 14. Vergl. ferner die Schrift von Rob. Flower: The radix, or new way of making Logarithms, London 1771.

[4] von Briggs.

hängige) Reihe kleinerer[1] Tafeln, welche die Ausziehung zehnter bezw. fünfter Wurzeln verlangen. Die beiden Wege, welche sich an der Hand dieser Tafeln zur Berechnung der Logarithmen darbieten, erscheinen gleich gangbar, wenigstens unter der Voraussetzung, dafs die Extraktionen 10. Grads nach dem später mitzuteilenden tabellarischen Verfahren ausgeführt werden. Andernfalls wäre die auf die kleineren Tabellen gegründete Methode — weil sie mit zu schweren Opfern an Kraft und Zeit erkauft werden müfste — entschieden zu verwerfen.

Im Nachstehenden soll indessen nur die Einrichtung der gröfseren Tafel und ihre Anwendung näher betrachtet werden, da deren Einführung auch dann nichts im Wege steht, wenn der Lehrer es für gut findet oder durch die Umstände gezwungen ist, sich allein auf die Behandlung der 2. Wurzel zu beschränken. — Dieselbe ist von dem Verfasser mit einer über die normalen Bedürfnisse der Schule weit hinausgehenden Ausführlichkeit entworfen worden, um erforderlichen Falls eine Rechnung auch mit 8- oder 9stelliger Genauigkeit durchführen zu können. Ihre Zahlenwerte wurden übereinstimmend befunden mit denen der Briggschen Tafel[2], — mit Ausnahme einer Stelle, in welcher bei Briggs fälschlich

$$10^{0,00390625} = 1{,}0090304484 \text{ (statt } 1{,}0090350 45)$$

gesetzt ist.

I. Vorbemerkung.

Die aufeinander folgenden Glieder der nachstehenden Tafel ergeben sich, wie bereits erwähnt, indem man nach und nach die 2., 4., 8., 16. .... Wurzel aus 10 zieht und diese Extraktionen so lange fortsetzt, bis man auf einen der Einheit hinreichend genäherten Wert stöfst. Der Gebrauch der Tafel wird am einfachsten aus den später folgenden Rechnungsbeispielen ersehen.

Die erste Hälfte der Tafel besitzt noch eine besondere mit R. W. überschriebene Kolumne, welche die reziproken Werte der in der Hauptspalte stehenden Zahlen umfafst. Da nämlich die vorliegende Methode in fortlaufenden Divisionen besteht, es aber auf eins hinausläuft, ob man mit a dividiert oder mit $\frac{1}{a}$ multipliziert, so sind zur Bequemlichkeit der Rechnung auch noch die Reziproken angegeben, allerdings nur für den ersten Teil der Tafel. Später — und wenn man sich mit einer Genauigkeit von 5 bis 6 Dezimalen begnügt auch schon früher — hört der Vorteil, mit reziproken Werten zu rechnen, auf. Die Divisionen reduzieren sich sodann auf blofse Subtraktionen der Überschüsse über die Einheit, wie unten gezeigt werden soll.

---

[1] Bezüglich der kleinen Tafeln ist zu vergleichen: Matthiessen, Schl. zu Heis, § 56 No. 41.

[2] Diese Tafel lag dem Verfasser jedoch nur in einer Reproduktion vor.

Tafel I zur Berechnung der gemeinen Logarithmen.

			R. W.
$\sqrt{10} = 10^{1/2}$	$= 10^{0,50000\,00000}$	$= 3,162277660$	$0,3162278 = \frac{1}{\sqrt{10}}$
$\sqrt[4]{10} = 10^{1/4}$	$= 10^{0,25000\,00000}$	$= 1,778279410$	$0,5623413 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$
$\sqrt[8]{10} = 10^{1/8}$	$= 10^{0,12500\,00000}$	$= 1,333521432$	$0,7498941 = \frac{1}{\sqrt[8]{10}}$
$\sqrt[16]{10} = 10^{1/16}$	$= 10^{0,06250\,00000}$	$= 1,154781985$	$0,8659644 = \frac{1}{\sqrt[16]{10}}$
u. s. f.	$10^{0,03125\,00000}$	$= 1,074607828$	0,9305721 u. s. f.
	$10^{0,01562\,50000}$	$= 1,036632928$	0,9646616
	$10^{0,00781\,25000}$	$= 1,018151722$	0,9821718
	$10^{0,00390\,62500}$	$= 1,009035045$	0,9910457
	$10^{0,00195\,31250}$	$= 1,004507364$	0,9957421
	$10^{0,00097\,65630}$	$= 1,002251148$	0,9977539
	$10^{0,00048\,82810}$	$= 1,001124941$	0,9988763
	$10^{0,00024\,41410}$	$= 1,000562313$	0,9994281
	$10^{0,00012\,20700}$	$= 1,000281117$	0,9997191
	$10^{0,00006\,10350}$	$= 1,000140549$	
	$10^{0,00003\,05180}$	$= 1,000070272$	
	$10^{0,00001\,52590}$	$= 1,000035135$	
	$10^{0,00000\,76290}$	$= 1,000017568$	
	$10^{0,00000\,38150}$	$= 1,000008784$	
	$10^{0,00000\,19070}$	$= 1,000004392$	
	$10^{0,00000\,09540}$	$= 1,000002196$	
	$10^{0,00000\,04770}$	$= 1,000001098$	
	$10^{0,00000\,02380}$	$= 1,000000549$	
	$10^{0,00000\,01190}$	$= 1,000000275$	
	$10^{0,00000\,00600}$	$= 1,000000137$	

2. Vier Hilfssätze zum tabellarischen Rechnen.

Bei tabellarischen Rechnungen (und zwar nicht bloſs im Gebiete der Logarithmen) tritt sehr häufig der Fall ein, daſs höhere Operationen auf niedere zurückgeführt werden können, z. B. Division und Multiplikation auf Subtraktion und Addition. Da die

Sätze, worauf diese Beziehungen beruhen, nach Form und Inhalt völlig elementar sind, so ist kein Grund vorhanden, sich die Vorteile dieser abkürzenden Rechnungen entgehen zu lassen. Überdies bieten diese Sätze ein nicht geringes historisches Interesse, insbesondere für die Entwickelung der Logarithmik. Denn die Systeme von Bürgi, Briggs und Napier nehmen sämtlich ihren Ausgangspunkt gerade an dieser Stelle, wo die Grenzen der Operationen in einander fliefsen.

Durch gewöhnliche Division ergiebt sich:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$$

Bedeutet nun x eine sehr kleine Gröfse (etwa 0,0001 oder 0,0002), so darf man setzen, wenn nur eine siebenstellige Genauigkeit erreicht werden soll:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x.$$

Denn offenbar äufsern die höheren Potenzen von x ihren Einflufs erst auf der 8. Dezimale. Daraus folgt der

erste Hilfssatz:

Man findet den Quotienten $\frac{1}{1+x}$, indem man x von der Einheit subtrahiert, vorausgesetzt, dafs x einen hinreichend kleinen, nach dem Grade der verlangten Genauigkeit zu beurteilenden Wert darstellt.

Bezeichnet ferner y eine kleine Gröfse von mindestens gleicher Ordnung wie x, so folgt aus der Gleichung:

$$(1 + x)\ (1 + y) = 1 + x + y \text{ (+ dem verschwindenden Gliede } xy)$$

der

zweite Hilfssatz:

Zwei, von der Einheit nur wenig verschiedene Gröfsen werden multipliziert, indem man die Überschüsse über die Einheit addiert (und diese selbst zur Einheit hinzufügt). Unter der gleichen Voraussetzung und mit Zuziehung des ersten Hilfssatzes $\left(\frac{1}{1+y} = 1 - y\right)$ erhält man die Gleichung:

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + x - y$$

und damit den

dritten Hilfssatz:

Zwei, von der Einheit wenig abweichende Gröfsen werden dividiert, indem man den Überschufs im Nenner vom Überschusse im Zähler subtrahiert.

Endlich besteht bei der nämlichen Voraussetzung noch die Gleichung:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}\,x, \text{ denn } (1 + \tfrac{1}{2}\,x)^2 = 1 + x \left(+ \text{ verschw. } \frac{x^2}{4}\right)$$

Demnach lautet der

vierte Hilfssatz:

Aus einer die Einheit nur wenig übersteigenden Zahl wird die Quadratwurzel gezogen, indem man die Hälfte des Überschusses zur Einheit addiert — ein Satz, der sich leicht auch auf höhere Wurzeln erweitern läfst.

Beispiele:

$$\frac{1}{1{,}0002176} = 0{,}9997824 \quad (= 1 - 0{,}0002176)$$
$$1{,}0001578 \cdot 1{,}0001235 = 1{,}0002813 \quad (= 1 + 0{,}0001578 + 0{,}0001235)$$
$$1{,}0001578 : 1{,}0001235 = 1{,}0000343 \quad (= 1 + 0{,}0001578 - 0{,}0001235)$$
$$\sqrt{1{,}0001578} = 1{,}0000789 \left(= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0001578\right).$$

3. Bestimmung des Logarithmus einer gegebenen Zahl.

Um nun nach Tafel I den Logarithmus einer beliebigen Zahl, etwa

$$\log 2549 = x$$

zu bestimmen, gebe man der Zahl zunächst die Form

$$10^3 \cdot 2{,}549.$$

Sodann entnehme man der Tabelle die der gegebenen Zahl (im abnehmenden Sinne) nächstliegende Potenz von 10, also $10^{1/4} = 1{,}778279$ und dividiere mit dieser in die Zahl 2,549. Es ergiebt sich:

$$2{,}549000 = 1{,}778279 \cdot 1{,}433408 = 10^{0{,}250000} \cdot 1{,}433408.$$

In gleicher Weise behandle man den Restfaktor 1,433408, d. h. man dividiere ihn mit der ihm benachbarten, nächstkleinern Potenz, also mit $10^{1/8} = 1{,}333521$. Hiernach erhält man:

$$2{,}549000 = 10^{0{,}250000} \cdot 10^{0{,}125000} \cdot 1{,}074904,$$

sodann weiter:

$$2{,}549000 = 10^{0{,}250000} \cdot 10^{0{,}125000} \cdot 10^{0{,}031250} \cdot 1{,}000275.$$

Die ferneren Divisionen werden nun am einfachsten nach Maſsgabe der Hilfssätze ausgeführt. Dabei gelangt man im vorliegenden Falle leichter ans Ziel, wenn man nicht die nächst kleinere, sondern die nächst g r ö ſ s e r e Potenz (wegen ihrer weit stärkeren Annäherung an den Restfaktor) zu Hilfe nimmt, mithin setzt:

$$1{,}000275 = \frac{1{,}000281}{1{,}000006} = \frac{1{,}000281}{1{,}000004 \cdot 1{,}000002} = \frac{10^{0{,}000122}}{10^{0{,}000002} \cdot 10^{0{,}000001}}$$
$$= 10^{0{,}000119}$$

So findet sich schlieſslich:

$$2549 = 10^3 \cdot 10^{0{,}250000} \cdot 10^{0{,}125000} \cdot 10^{0{,}031250} \cdot 10^{0{,}000119} = 10^{3{,}406369},$$

also:

$\log 2549 = 3{,}406369$, in Übereinstimmung mit den Logarithmentafeln.

4. Bestimmung des Numerus eines gegebenen Logarithmen.

Es sei

$$\text{num} \log 0{,}333333$$

zu berechnen, d. h. die Gleichung aufzulösen:

$$10^{0{,}333333} = x.$$

Zerlegt man den gegebenen Exponenten 0,333333 nach Tafel I in:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}250000 \\ +\ 0{,}062500 \\ +\ 0{,}015625 \\ +\ 0{,}003906 \\ +\ 0{,}000977 \\ +\ 0{,}000244 \\ +\ 0{,}000061 \\ +\ 0{,}000015 \\ +\ 0{,}000004 \\ +\ 0{,}000001 \end{array}\right\} = 0{,}333333$$

indem man von 0,333333 zuerst den nächstgröfsten tabellarischen Exponenten 0,250000 subtrahiert und mit den aufeinanderfolgenden Resten in gleicher Weise verfährt, so ergiebt sich:

$$x = 10^{0,333333} = 10^{0,250000} \cdot 10^{0,062500} \ldots = 1{,}778279 \cdot 1{,}115478 \cdot 1{,}036633 \cdot 1{,}009035$$
$$\cdot\, 1{,}002251 \cdot 1{,}000562 \cdot 1{,}000141 \cdot 1{,}000035 \cdot 1{,}000009 \,.\, 1{,}000002$$
$$= 2{,}154435 \text{ (genau wie mit siebenstelligen Logarithmentafeln).}$$

Dafs bei Herstellung des vorstehenden Produkts die Multiplikation mindestens der 4 letzten Faktoren durch blofse Addition der Überschüsse bewirkt werden kann, bedarf wohl kaum nochmaliger Erwähnung.

5. Die Napiersche Tafel mit beweglichen Kolumnen.

Der operative Teil der bisherigen und auch der später noch zu behandelnden tabellarischen Rechnungen besteht fast ausschliefslich aus Multiplikationen und Divisionen gröfserer Zahlen. Eine korrekte Ausführung dieser Rechnungen erfordert, wie jeder weifs, einen erheblichen Aufwand an Zeit und eine unausgesetzte Aufmerksamkeit. Bei den mannigfachen Anforderungen, welche gegenwärtig an die Arbeitskraft der Schüler erhoben werden, mufs aber jedes Mittel erwünscht sein, das — namentlich in unwesentlichen, rein mechanischen Dingen — einen unnötigen Verbrauch an Zeit und Kraft zu verhüten geeignet ist.[1]

In unserem Falle — bei Multiplikationen und Divisionen — ist es besonders die Bildung der Partialprodukte, welche, längere Zeit fortgesetzt, abspannend und einschläfernd wirkt. Nun gewährt zwar das Verfahren der abgekürzten Multiplikation und Division in vielen Fällen eine annehmbare Erleichterung, die aber doch nicht ausgiebig genug ist und

[1] Schon der um die Philosophie und Mathematik hoch verdiente Chr. Wolf, dem gewiß Niemand Mangel an Gründlichkeit zum Vorwurfe machen wird, äußert sich in den „Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften" 1. Teil, S. 63, über ein von Ludolf erdachtes und Huygens empfohlenes Multiplikations- und Divisionsverfahren „ohne das Einmaleins" folgendermaßen: „Ein jeder wird verspühren, daß diese Manier zu dividieren (und zu multiplizieren) der gewöhnlichen in großen Zahlen unstreitig weit vorzuziehen sey, nicht allein, weil das verdrießliche Nachsinnen, welches mit der gewöhnlichen Art verknüpfet ist, gehoben wird: sondern auch, weil man hier nicht so leicht fehlen kann, imgleichen in den größten Exempeln sich nicht abmattet".

die Schwierigkeit wohl dem Umfange, aber nicht dem Grade nach vermindert. Die Produktentafeln aber, welche man für den vorliegenden Zweck in Vorschlag gebracht hat, verbieten sich für den Schulgebrauch schon wegen ihres Umfangs, der ein recht beträchtlicher sein mufs, wenn die Tafeln leistungsfähig sein sollen.

Eine durchgreifende Abhilfe ist, nach Ansicht des Verfassers, nur von der Wiedereinführung der ebenso einfachen als sinnreichen und mit Unrecht allmählich aufser Gebrauch[1] gekommenen Napierschen Tafel mit beweglichen Kolumnen[2] zu erwarten. Es kommt nur darauf an, derselben — aufser einer soliden Ausstattung — eine Einrichtung zu geben, welche der Einfachheit ihres Prinzips entspricht. Bei allzu dürftiger Ausstattung oder schwerfälliger Einrichtung können nämlich die gebotenen Vorteile leicht wieder in Frage gestellt werden.

Was zunächst den Grundgedanken der Napierschen Stabtafel betrifft, so besteht derselbe darin, durch eine, der jedesmaligen Aufgabe entsprechende, Aneinanderreihung beweglicher Stäbchen, welche die Elemente der Rechnung enthalten, das Ausrechnen der Partialprodukte (möglichst) in ein blofses Ablesen zu verwandeln.

6	
1	2
1	8
2	4
3	0
3	6
4	2
4	8
5	4

Fig. 1.

Solcher Stäbchen giebt es, der Art nach, zehn, ebenso viel wie Ziffern (0 bis 9). Hat nun beispielsweise ein Stäbchen am Kopfende die Ziffer 6 (s. Fig. 1), so befinden sich unterhalb dieser Ziffer die 8 Produkte von 6 mit 2, 3, 4, bis 9. Das Stäbchen selbst aber ist durch einen starken, möglichst in die Augen fallenden Längsstrich so in zwei Teile zerlegt, dafs die beiden Ziffern der oben erwähnten Produkte rechts und links von diesem Striche zu stehen kommen. Dadurch wird erreicht, wie aus den später folgenden Beispielen erhellt, dafs bei der Bildung der Partialprodukte Einheiten gleicher Ordnung zwischen je zwei fettgedruckte Striche fallen.

Die Zahlen-Kolumnen der Stäbchen werden wohl am besten auf kräftigem weifsem oder mattgelbem Papiere ausgeführt, das dann zur Erhöhung der Steifigkeit auf eine Unterlage von Holz, Horn oder Pappdeckel aufgezogen wird.

2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 2.

Von jeder Stäbchenart sind etwa fünf Stück erforderlich. Da aber ausnahmsweise in einem Multiplikanden oder Divisor mehr als fünf gleichartige Ziffern vorkommen könnten, so ist es sicherer, von jeder Art noch einige lose, d. h. nicht auf einer Unterlage befestigte (und deshalb weniger Raum einnehmende) Stäbchen in Reserve zu stellen. Zur Vollständigkeit des Apparats gehört dann noch ein weiteres, in allen Rechnungen gleichmäfsige Verwendung findendes Stäbchen (s. Fig. 2), welches mit den (zur deutlichern Abhebung rot geschriebenen) Zahlen 2 bis 9 versehen ist.

Was die äufsere Einrichtung betrifft, so kann der Verfasser die folgende als bewährt empfehlen:

Ein in Buchform, aus haltbarem Materiale hergestellter Behälter besteht aus einem

[1] Vergl. auch J. Blater, bei F. Frey in Mainz, 1886.

[2] Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo. Edinburgi 1617.

Gehäuse und einem damit durch Charniere verbundenen Deckel. In dem ersteren befinden sich 10 Zellen, jede hinreichend lang, breit und tief, um die übereinandergelegten Stäbchen gleicher Art aufnehmen zu können. Dem Deckel kann man eine gleiche Anzahl Zellen geben, aber von geringerer Tiefe, da in sie — und zwar nur während der Ausführung der Rechnung — immer blofs ein einziges Stäbchen zu liegen kommt. Aufserdem aber befindet sich am rechten Rande des Deckels noch eine 11. Zelle, welche von dem Stäbchen der Fig. 2 eingenommen wird.

Beispiel zur Multiplikation.

Soll nun mit Hilfe der Stabtafel das Produkt

$$35789 \cdot 36472$$

ausgeführt werden, so entnimmt man dem Gehäuse fünf Stäbchen, welche am Kopfende bezw. die Ziffern 3, 5, 7, 8, 9 tragen und legt dieselben in der genannten Reihenfolge unmittelbar an das Randstäbchen des Deckels. Dadurch entsteht das Schema der Figur 3. Aus demselben kann man nun sofort das Partialprodukt von 25789 und einer der Randziffern ablesen, indem man während des Hinschreibens die zwischen zwei Fettstrichen stehenden Einer gleicher Ordnung im Kopfe addiert, z. B.

$$35789 \cdot 4 = 143156.$$

3		5		7		8		9		
0	6	1	0	1	4	1	6	1	8	2
0	9	1	5	2	1	2	4	2	7	3
1	2	2	0	2	8	3	2	3	6	4
1	5	2	5	3	5	4	0	4	5	5
1	8	3	0	4	2	4	8	5	4	6
2	1	3	5	4	9	5	6	6	3	7
2	4	4	0	5	6	6	4	7	2	8
2	7	4	5	6	3	7	2	8	1	9

Fig. 3.

Für das obige Beispiel ergiebt sich also:

$$\begin{array}{r} 35789 \cdot 36472 \\ = 71578 \\ 250523 \\ 143156 \\ 214734 \\ 107367 \\ \hline 1305296408 \end{array}$$

Beispiel zur Division:

Während es bei Multiplikationen sich im allgemeinen gleich bleibt, welchen der beiden Faktoren man mittels der beweglichen Stäbchen darstellt, so muß dies bei Divisionen offenbar immer mit dem Divisor geschehen. Um das Schema der Figur 3 auch hier benutzen zu können, wählen wir als Beispiel die Umkehrung der obigen Multiplikation. Es ergiebt sich:

```
1305296408 : 35789 = 36472
107367
 231626
 214734
  168924
  143156
   257680
   250523
     71578
     71578
```

Daſs man übrigens bei der Stabrechnung sich auch noch die Vorteile der abgekürzten Multiplikation und Division (durch allmähliches Ausschalten der nicht mehr in Betracht kommenden Stäbchen u. s. f.) zunutze machen kann, ist ohne weiteres einleuchtend.

Während des Hinschreibens eines Partialprodukts läſst man natürlich, wie auch bei Logarithmenrechnungen, den Zeigefinger der linken Hand über die entsprechende Horizontalreihe leicht hinweggleiten.

6. Grundlage der trigonometrischen Tafeln.

Aus der einzigen, vollständig auf uns gekommenen Schrift[1] Hipparchs (cc. 150 v. Chr.), des mutmaſslichen Erfinders der Trigonometrie, geht unzweifelhaft hervor, daſs derselbe sich bei seinen Rechnungen schon einer Sehnentafel (Vorläuferin der Sinustafel) bediente und sie auch bereits auf Aufgaben der sphärischen Trigonometrie (Astronomie) anwandte. Auf welchem Wege diese trigonom. Urtafel berechnet wurde, ist hingegen in Dunkel gehüllt, da leider auch die Schrift des Menelaus, welche diese Berechnung zum Gegenstande hatte, verloren gegangen ist. Doch läſst sich annehmen, daſs der Rechnungsmodus im wesentlichen mit dem von Ptolemäus (cc. 150 n. Chr.) zu gleichem Zwecke in Anwendung gebrachten Verfahren übereinstimmte, und daſs derselbe demnach im Grundgedanken (Bisektion und Kombination der Winkel) auch nicht erheblich verschieden war von den goniometrischen Methoden der Indier[2], der Araber[3] bis herab zu Rhaeticus[4] und Bürgi[5] — nur daſs mit zunehmender Entwicklung der Theorie Genauigkeit der Ergebnisse und Eleganz der Behandlung gleichen Schritt hielten. Als eine Eigenartigkeit der indisch-

[1] *Τῶν Ἀράτου καὶ Εὐδόξου φαινομένων ἐξηγήσεις.* Das Fragment *ἔκθεσις Ἀστερίσμῶν* findet sich bei Ptolemäus.

[2] in der ältern und jüngern Siddhânta; letztere von Brahmagupta (600 v. Chr.?), sowie in der Lilâvâti von Bhâskara (1114 n. Chr.).

[3] in den Schriften des Mohammed ben Musa Alkhorizmi, Al-Batani, Abul Wefa, Ibn Junis (800—1000 n. Chr.) Die Schreibweise der Eigennamen sowie die Zeitangabe bezüglich der ind. und arab. Mathem. sind bei den verschiedenen Historikern noch sehr schwankend, was wegen einiger späterer Citate hier bemerkt werden mag.

[4] Georg Joachim aus Voralberg, daher Rhaeticus: Canon doctr. triangulorum, Noribergae 1551, und das Fundamentalwerk: Opus Palatinum de Triangulis, Neostadii 1596 (von Otho zu Ende geführt und herausgegeben).

[5] „Wie der gantze Canon Sinuum durch die blosse Differentias je zweier Sinuum vom anfang bis zum ende zu erheben sey“, Fragment in der „Arithmetica“. Auch löste Bürgi bereits in seiner „cossischen“ Methode das wichtige und schwierige Problem, die Beziehungen zwischen den Sehnen eines Bogens und eines aliquoten Teils desselben festzustellen, wodurch er gleichzeitig veranlaßt wurde, ein Verfahren zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen zu erfinden.

arabischen Trigonometrie gegenüber der griechischen erscheint indessen, dafs dort von vornherein der Sinus statt der Sehne gebraucht wurde, woher sich auch die Etymologie des sonst etwas rätselhaften Worts Sinus erklärt (skrt. *jîva* = arab. *dshîba*, verdorb. *dschaib* = Busen = *sinus* in den späteren lateinischen Übersetzungen arabischer Schriften).

Mit Aufstellung der trigonometrischen und cyklometrischen Reihen[1] trat die Trigonometrie in ihre letzte, die gesamte Theorie zum Abschlufs bringende Entwicklungsphase. Eine auch nur flüchtige Prüfung der seit Ptolemäus bis ins 16. Jahrhundert gebrauchten, blofs in kleineren Wendungen sich unterscheidenden Methoden zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen ergiebt nun, dafs in diesen Methoden bereits alle Elemente vorliegen, aus denen sich ein auch für die Bedürfnisse der Schule geeignetes, von Reihenentwicklung freies Verfahren zusammenstellen läfst. Nur die herkömmliche, etwas weit ausholende Art der Ableitung einiger Hilfssätze bedarf einer kleinen Abänderung, um sie — unserem Zwecke gemäfs — dem Niveau der Mittelstufe anzupassen.

Dafs die Aufgabe sich speziell auf die

Berechnung der Sinustafel

reduziert, ist wegen des zwischen den verschiedenen Funktionen stattfindenden Zusammenhangs selbstverständlich.

Das nächste und zugleich für die Konstruktion der Tafel wichtigste Ziel bildet die Bestimmung

des Sinus der Winkeleinheit,

als welche man bei fünfstelliger Genauigkeit unbedenklich die Minute annehmen kann. Man geht zu dem Ende von einem bekannten Sinus, etwa

$$\sin 30^0 = 0{,}5$$

aus, bestimmt mit Hilfe der Gleichung

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{2}} \;\ldots\ldots (1)$$

durch fortgesetzte Bisektion des Winkels die Sinusse immer kleinerer Winkel, bis man in eine Gegend kommt, in welcher die Werte der Sinusse den Winkeln proportional gehen. Dann kann durch eine einfache Proportion

$$\sin 1'$$

und hieraus durch Division mit 60 auch $\sin 1''$ ermittelt werden.

Sobald dies geschehen und auch die entsprechenden Kosinusse gefunden sind, ergeben sich — und damit kommen wir zum 2. Teil der Tafelkonstruktion — alle übrigen Sinusse durch geeignete Kombination der Winkel mittels der Relation:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \;\ldots\ldots (2),$$

Da den Gleichungen (1) und (2) in dem eben angedeuteten Rechnungsverfahren die Hauptaufgabe zufällt, dieselben aber nach der jetzigen Praxis erst in dem erweiterten Kursus der Goniometrie (in Obersekunda) entwickelt zu werden pflegen, so ist zuerst ein Weg zu

[1] Durch Leibnitz 1670 und 1691 (Act. erud.), fast gleichzeitig oder nur wenig später von Newton, Bernoulli, Gregory und namentlich Euler.

zeigen, auf welchem diese hier in ihrer wichtigsten Bedeutung auftretenden Relationen auch schon an früherer Stelle, nämlich dem Standpunkte der Untersekunda entsprechend, gefunden werden können.

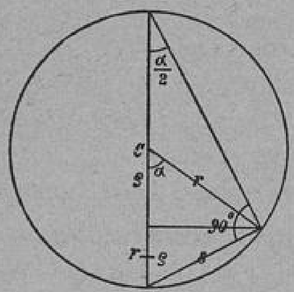

Fig. 4.

Beweis zu 1.

Aus den Sätzen von der mittleren Proportionale folgt (Fig. 4):

$$s^2 = 2r(r - \varrho) = 2r^2 - 2r\varrho$$

$$\frac{s^2}{4r^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{r}$$

$$\left(\frac{s}{2r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha}\right)$$

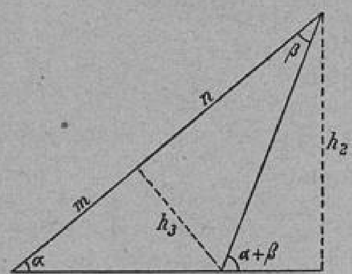

Fig. 5.

Beweis zu 2.

Mit Hilfe der Fig. 5 ergiebt sich, wenn I den Dreiecksinhalt bezeichnet:

$$2\,I = h_2 \cdot b = h_3 \cdot c = h_3 \cdot n + h_3 \cdot m$$

und hieraus durch Division mit ab:

$$\frac{h_2}{a} = \frac{h_3}{b}\cdot\frac{n}{a} + \frac{h_3}{a}\frac{m}{b}, \text{ oder}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Anmerkung. Da $\alpha + \beta$ in der Tafelberechnung stets kleiner als 90° (sogar kleiner als 45° wegen der Komplementbeziehungen), so ist die hier gemachte Voraussetzung zulässig, daß $\gamma > 90°$. — Der gegebene Beweis besteht zwar auch ohne diese Voraussetzung, verlangt aber, wenn $\gamma < 90°$ die Kenntnis des Satzes $\sin x = \sin(180 - x)$, also eine aus dem allgemeinen[1] Begriff des Sinus folgende Relation.

Wenden wir uns nun zur Berechnung der Sinustafel selbst:

Aus $\sin 30° = 0{,}500\,0000$

folgt durch fortgesetzte Zweiteilung des Winkels mit Zuziehung des Hilfssatzes (1):

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}25}}{2}} = \sin 15° = 0{,}2588190$$

sin	7° 30′	= 0,1305262
sin	3° 45′	= 0,0654031
sin	1° 52′ 30″	= 0,0327191
sin	0° 56′ 15″	= 0,0163617
sin	0° 28′ 7″,5	= 0,0081811
sin	0° 14′ 3″,75	= 0,0040906

Dafs man auf diesem Wege nicht unmittelbar zum Werte von sin 1′ geführt wird, ist einleuchtend. Eine Betrachtung der letzten Gleichungen zeigt aber, dafs für Winkel

[1] Mit dem man übrigens aus verschiedenen Gründen nicht bis Obersekunda zurückhalten sollte.

unter $^1/_2$ Grad eine (selbst bei Berücksichtigung von 7 Dezimalen) nahezu völlige Proportionalität von Sinus und Winkel statt hat, so dafs der Wert von sin 1′ aus der Gleichung

$$14\frac{1'}{6} : \sin 14\frac{1'}{6} = 1' : \sin 1',$$

oder $14\frac{1'}{6} : 0{,}0040906 = 1' : \sin 1'$ erschlossen werden kann.

Es ergiebt sich: $\sin 1' = 0{,}00029089$

und dann weiter: $\sin 1'' = \frac{1}{60} \sin 1' = 0{,}000004848$

Mit Ermittelung des Werts von $\sin 1'$

ist der erste Teil der Aufgabe gelöst. Aus diesem Fundamentalsinus erhält man dann zunächst durch blofse Vervielfachung (nach der Formel $\sin n' = n \cdot \sin 1'$) die Werte aller Sinusse bis sin 15′ und (mit Hilfe von $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$) auch die der entsprechenden Kosinusse, somit (nach Abrundung auf 7 Dezimalen) folgendes Täfelchen:

sin 1′ = 0,0002909	cos 1′ = 1,0000000
sin 2′ = 5818	cos 2′ = 0,9999998
sin 3′ = 8727	cos 3′ = 96
sin 4′ = 0,0011636	cos 4′ = 93
sin 5′ = 4544	cos 5′ = 0,9999989
sin 6′ = 7453	cos 6′ = 85
sin 7′ = 0,0020362	cos 7′ = 79
sin 8′ = 3271	cos 8′ = 73
sin 9′ = 6180	cos 9′ = 66
sin 10′ = 9089	cos 10′ = 58
sin 11′ = 0,0031998	cos 11′ = 49
sin 12′ = 4907	cos 12′ = 39
sin 13′ = 7815	cos 13′ = 28
sin 14′ = 0,0040724	cos 14′ = 17
sin 15′ = 3636	cos 15′ = 05

Bei der Berechnung der vorstehenden Kosinusse (die nur an einzelnen Fällen vom Schüler selbst auszuführen ist) macht man selbstredend von der schon an früherer Stelle erwiesenen Approximation Gebrauch:

$$\sqrt{1 - \sin^2 a} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 a,$$

indem man gleichzeitig zur Bildung von $\sin^2 a$ nur die 5 oder 6 ersten Dezimalen berücksichtigt, was vollkommen ausreicht.

Z. B.: $$\begin{aligned} \cos 14' = \sqrt{1 - 0{,}00407^2} &= \sqrt{1 - 0{,}0000165649} \\ &= 1 - 0{,}0000083 \\ &= 0{,}9999917 \text{ (wie in der Tabelle).} \end{aligned}$$

Der weitere Fortgang der Rechnung ist nun leicht zu übersehen. Aus

$$\sin 15' = 0{,}0043636 \text{ und } \cos 15' = 0{,}9999905$$

ergiebt sich nach Hilfssatz (2):

$$\sin 30' = 2 \sin 15' \cdot \cos 15' = 0{,}0087265 \mid \cos 30' = 0{,}9999619$$
$$\sin 1^0 = 2 \sin 30' \cdot \cos 30' = 0{,}0174524 \mid \cos 1^0 = 0{,}9998477$$

u. s. f. u. s. f.

Der hier zur numerischen Auswertung der Funktionen eingeschlagene Weg ist im allgemeinen völlig streng; nur die Proportionalität zwischen kleinen Winkeln und deren Sinussen ist aus der Erfahrung (der unmittelbaren Anschauung der Zahlenwerte) geschöpft. Obwohl hierdurch die Thatsache selbst aufser Frage gestellt ist, was für den Elementarunterricht genügt, so dürfte es sich doch empfehlen, zur Erklärung der merkwürdigen Erscheinung[1] auch noch die Beziehung zwischen Sehne und Bogen, oder besser zwischen Sinus und Arkus $= \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$ (ihr allmähliches Zusammenfallen bei Abnahme der Winkel) durch die bekannte Betrachtung am Kreise klarzulegen.

7. Tabellarische Berechnung von Wurzeln eines beliebigen Grads, ohne Anwendung von Logarithmen.

Das direkte Binomialverfahren[2] der Wurzelausziehung ist nach den Schulplänen dem Kursus der Obertertia zugewiesen, mit der selbstverständlichen Beschränkung auf die

[1] Die Indier nahmen die Proportionalität bereits mit $3^0\,45'$ und zeichneten den Sinus dieses Winkels durch einen besondern Namen aus (Kramajîva, arab. Kardaga).

[2] Schon Pythagoras (570 v. Chr.) und seine Schüler behandelten die Irrationalzahlen und lieferten Beweise für die Irrationalität verschiedener Quadratwurzeln.

Archimedes (287 v. Chr.) gelangte auf dem Wege der Exhaustion (die Details seines Verfahrens sind nicht bekannt) zu dem Ergebnisse, daß

$\sqrt{3}$ zwischen 1,732026 und 1,732051 liegt (bis zur 7. Dez. genauer Wert: 1,7320508).

Heron von Alexandrien (100 v. Chr.) berechnete die Quadratwurzeln mittels der Näherungsformel (wenn b relativ klein neben a):

$$\sqrt{a + b} = a + \frac{b}{2a}$$

und scheint durch wiederholte Anwendung dieser (auch jetzt noch gebräuchlichen) Regel sehr genaue Resultate erzielt zu haben.

Die indischen Mathematiker — unter ihnen Aryabhatta (476 n. Chr.) und Bhâskâra (1114 n. Chr.) — bedienten sich zur Wurzel-Extraktion der Binomialformeln $(a + b)^2$ und $(a + b)^3$, und von den Indiern gelangten diese Methoden durch Vermittelung der Araber (unter denen besonders Mohammed ben Mûsâ al Hovârezmi, Anf. des 8. Jahrh., zu nennen ist), in das Abendland. Es ist hier nicht der Ort, auf den unermeßlichen, erst in diesem Jahrhundert voll gewürdigten Einfluß näher einzugehen, welcher von Indien auf die heutige Gestaltung der Mathematik ausgeübt worden ist. Nicht bloß eine Reihe wissenschaftlicher Zweige der Mathematik verdanken den Brahmanen ihre erste Ausbildung; auch unser gesamtes, an das geniale Positionssystem sich anlehnende elementare Rechnen ist indischen Ursprungs. Was heute selbst der Volksschüler spielend lernt, erforderte vor Einführung der indischen Methoden die ganze geistige Kraft eines Mannes, so daß noch im 10. Jahrhundert der Kommentator der Werke Gerberts, der nachmals als Sylvester II. den päpstlichen Stuhl bestieg, mit Recht sagen konnte: „Regulas dedit, quae a sudantibus abacistis (d. h. Rechenmeistern) vix intelliguntur“ und immer von neuem klagt „quantus sudor in mathesi expensus sit“, und doch handelte es sich dabei nur um Multiplizieren und Dividieren (in der von Gerbert schon erheblich verbesserten römischen Form). — Erst mit der Annahme des indischen Positionsprinzips beginnt für das Rechnen eine neue Epoche; es folgte eine Umwälzung, für deren Trag-

Wurzeln 2. und 3. Grads. Systematisch erscheint dies durchaus gerechtfertigt wegen der bald darauf folgenden Anwendungen; didaktisch aber ist es wohl kaum zu billigen, so zusammengesetzte Operationen schon auf so früher Stufe zu behandeln. Zwar stöſst die Technik des Verfahrens meist auf keine allzugroſsen Schwierigkeiten, um so mehr aber seine Begründung. Die sichtbar herabgespannte Teilnahme, welche selbst bei besseren Schülern einzutreten pflegt, sobald die Erklärung beginnt, dürfte darüber kaum einen Zweifel lassen.

Die Frage ob etwa die Wurzelextraktionen nach den Binomialformeln ganz oder teilweise aus dem Lektionsplane zu streichen seien, mag vorläufig dahinstehen; sie läſst sich schlieſslich nur im Zusammenhange mit einer weit allgemeineren Frage entscheiden, auf die wir später ausführlicher eingehen werden. Denn selbst zugegeben, daſs der dem Verfahren zu Grunde liegende Gedanke eine hervorragende mathematische Bedeutung hat (namentlich, wenn es sich um litterale Ausdrücke handelt), so wirft sich doch immer noch die Frage auf, ob nicht durch ein zu weites Ausspinnen dieses vereinzelten Gedankens anderen, theoretisch oder praktisch wichtigeren Lehren der Platz versperrt wird. Jedenfalls dürfte es ratsam sein, in der Obertertia das Verfahren auf Quadratwurzeln und auch hier nur auf die allereinfachsten numerischen und litteralen Ausdrücke (binomische Quadrate) einzuschränken. Später, mit vorgerückteren Schülern, könnte man dann, wenn es für notwendig erachtet werden sollte, leicht noch eine angemessene Erweiterung eintreten lassen.

Eine unmittelbar an den Begriff der Wurzel anknüpfende Radizierungsmethode ist nun aber einmal unentbehrlich; sich ganz auf die Logarithmen zu verlassen, geht aus den

---

weite unsere Zeit den richtigen Maßstab verloren hat. — Nur um von der originellen, halb philosophischen, halb dichterischen Art der Darstellung, welche uns in allen indischen Schriftwerken entgegentritt, eine kleine Probe zu geben, mögen hier die Worte der Lîlâvatî folgen, mit denen Bhâskâra sein (aus älteren Quellen gesammeltes) Werk abschließt:

> „Auf der einen Seite ist das weite Meer der Wissenschaft für Menschen von geringen Verstandeskräften schwer zu durchwandern, und auf der andern bedürfen die Talentvollen keinen weitläufigen Unterricht. Ein Funke der Wissenschaft, wenn er den verständigen Geist erreicht, dehnt sich aus durch seine eigne Kraft. Wie ein Tropfen Öl sich über das Wasser verbreitet, wie das Geheimnis, welches man dem Schlechten anvertraut, wie die Almosen, dem Würdigen gespendet, wenn sie auch klein sind, so verbreitet sich die Wissenschaft in dem entwickelten Geiste durch ihre eigene innere Kraft. Für Menschen von klarem Verstande ist es leicht erkenntlich, daß das Rechnen aus der Regel der drei Glieder besteht, aber Algebra ist Scharfsinn, wie ich dies in dem Kapitel über die Sphärik gesagt habe. Die Regel der drei Glieder ist Rechnen, fleckenloser Verstand ist Algebra. Was giebt es Unbekanntes für den Verständigen? Deswegen für die Schwachen allein ist dieses Werk geschrieben. Um deine Weisheit zu vermehren und das Vertrauen in deine geistige Kraft zu stärken, mußt du Mathematiker lesen und wieder lesen. Diese Grundzüge der Mathematik, schön in der Sprache, leicht verständlich für die Jugend, umfassend das ganze Wesen der Rechnung, sie enthalten die Erklärung der Grundsätze, sind voll von Hoheit und ohne Fehler".

Der hervorragendste Vertreter der deutschen Coss (= ars major = Algebra, im Gegensatze zur ars minor = gem. Rechnen; coss = caussa). Michael Stifel, ein Zeitgenosse und Freund Luthers, ging bis zur Entwickelung der 8. Wurzel und stellte hierbei das Gesetz der Binomialkoeffizienten auf. Seine auf Erkenntnis allgemeiner Gesetze gerichteten Bestrebungen kennzeichnet er selbst in folgenden Worten: „Denn es ist mein fleiss in sollichen sachen / das ich (wo ich kann) auss vilfeltigkeit mache ein einfeltigkeit. Also hab ich aus vielem Regeln der Coss ein einige Regel gemacht und aus vilem extrahiren auch vast ein gleichförmige weise gestellet unzalbarlichen extrahirens."

verschiedensten Gründen nicht an, und um so weniger, weil sich hier der eigentliche Vorgang des Radizierens dem Auge und der Vorstellung des Schülers gänzlich entzieht und sich lediglich auf ein der Sache nur äufserlich anhaftendes Formalprinzip[1] stützt.

Aus diesen Erwägungen ging schliefslich das nachstehende, tabellarische Verfahren hervor. Dasselbe bedarf, sobald nur die Definition der Wurzel gegeben und klar gestellt ist, keiner weiteren Vorbereitung, eignet sich also besonders für den Anfangsunterricht. Es hat für jeden Wurzelgrad eine unveränderliche Gestalt und erlaubt selbst die Auflösung einer Wurzel beliebigen Grads.

Ist nämlich $\sqrt[n]{a}$ zu bestimmen,

so zerlege man mit Hilfe der Tabellen den Radikanden a in lauter Faktoren n · Grads, wodurch man schliefslich erhält $a = x^n \cdot y^n \cdot z^n \cdots$

Dann ist $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^n \cdot y^n \cdot z^n \cdots} = x \cdot y \cdot z \cdots$$

Die Zerlegung selbst erfolgt im Anschlusse an die Potenztafeln genau so, wie weiter oben bei Bestimmung des Logarithmus einer Zahl. Diese formelle Übereinstimmung in der Lösung zweier der wichtigsten Aufgaben der Elementarmathematik — die auch im Unterrichte dicht hintereinander folgen — dürfte als ein weiterer Vorzug des tabellarischen Wurzelausziehens zu betrachten sein.

Alles Nähere ergiebt sich aus den am Schlusse der Tafeln hinzugefügten Beispielen.

[1] Hankel nennt es die „Permanenz formaler Gesetze"; vergl. Theorie d. compl. Zahlensysteme, p. 10.

Potenz-Tafeln

zur 2. bis 5. Wurzel.

N	N²	N³	N⁴	N⁵	1 : N³	1 : N⁴	1 : N⁵
1,9	3,61	6,859	13,0321	24,76099	0,1457 9386	0,0767 336	0,0403861
1,8	3,24	5,832	10,4976	18,89568	0,1714 6779	0,0952599	0,0529222
1,7	2,89	4,913	8,3521	14,19857	0,2035 4160	0,1197304	0,0704296
1,6	2,56	4,096	6,5536	10,48576	0,2441 4067	0,1525879	0,0953674
1,5	2,25	3,375	5,0625	7,59375	0,2962 9627	0,1975309	0,1316872
1,4	1,96	2,744	3,8416	5,37824	0,3644 3151	0,2603082	0,1859344
1,3	1,69	2,197	2,8561	3,71293	0,4551 6611	0,3501278	0,2693229
1,2	1,44	1,728	2,0736	2,48832	0,5787 0373	0,4822531	0,4018776
1,1	1,21	1,331	1,4641	1,61051	0,7513 1474	0,6830135	0,6209274
1,09	1,1881	1,295029	1,41158161	1,5386240	0,7721 8351	0,7084232	0,6499313
8	1,1664	1,259712	1,36048896	1,4693281	0,7938 3218	0,7350302	0,6805831
7	1,1449	1,225043	1,31079601	1,4025517	0,8162 9792	0,7628953	0,7129862
6	1,1236	1,191016	1,26247696	1,3382256	0,8396 1923	0,7920936	0,7472583
5	1,1025	1,157625	1,21550625	1,2762816	0,8638 8780	0,8227025	0,7835262
4	1,0816	1,124864	1,16985856	1,2166529	0,8889 9633	0,8548041	0,8219272
3	1,0609	1,092727	1,12550881	1,1592741	0,9151 4167	0,8884871	0,8626088
2	1,0404	1,061208	1,08243216	1,1040808	0,9423 2233	0,9238453	0,9057306
1	1,0201	1,030301	1,04060401	1,0510101	0,9705 9022	0,9609804	0,9514657
1,009	1,018081	1,02724373	1,03648892	1,0458173	0,9734 7886	0,9647956	0,9561900
8	1,016064	1,02419251	1,03238605	1,0406451	0,9763 7889	0,9686300	0,9609422
7	1,014049	1,02114734	1,02829537	1,0354934	0,9792 9067	0,9724832	0,9657231
6	1,012036	1,01810822	1,02421687	1,0303622	0,9822 1386	0,9763558	0,9705325
5	1,010025	1,01507513	1,02015050	1,0252518	0,9851 4884	0,9802475	0,9753707
4	1,008016	1,01204806	1,01609626	1,0201606	0,9880 9545	0,9841588	0,9802377
3	1,006009	1,00902703	1,01205411	1,0150903	0,9910 3372	0,9880895	0,9851340
2	1,004004	1,00601201	1,00802403	1,0100401	0,9940 2386	0,9920402	0,9900598
1	1,002001	1,00300300	1,00400600	1,0050100	0,9970 0805	0,9960100	0,9950150
1,0009	1,00180081	1,00270243	1,00360486	1,0045081	0,9973 0477	0,9964080	0,9955123
8	160064	240192	320384	40064	760386	68064	60095
7	140049	210147	280294	35049	790295	72049	65073
6	120036	180108	240216	30036	820210	76036	70053
5	100025	150075	200150	25025	850140	80025	75036
4	080016	120048	160096	20016	880114	84016	80025
3	060009	090027	120054	15009	910047	88009	85014
2	040004	060012	080024	10004	940023	92005	90005
1	020001	030003	040006	05001	970000	96002	95002

N	N²	N³	N⁴	N⁵
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

Rechnungs-Beispiele.

1. (Kubikwurzel).

$$\sqrt[3]{5114} = x$$

Durch fortgesetzte Division mit den größten kubischen Faktoren der Kolumne N³ ergiebt sich:

$$5114 = 1000 \cdot 5{,}114 = 1000 \cdot 4{,}913 \cdot 1{,}030301 \cdot 1{,}009027 \cdot 1{,}001261$$
$$= 10^3 \cdot 1{,}7^3 \cdot 1{,}01^3 \cdot 1{,}003^3 \cdot 1{,}000420^3, \text{ sodaß}$$
$$x = 10 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}003 \cdot 1{,}000420 = 17{,}228743 \text{ (mit siebenst. Log.} = 17{,}228742)$$

2. (Kubikwurzel).

$$\sqrt[3]{0{,}0356} = x$$

Gemäß der Kolumne N³ ist:

$$0{,}0356 = {}^1/_{1000} \cdot 35{,}6 = {}^1/_{1000} \cdot 27 \cdot 1{,}3185185$$
$$= {}^1/_{1000} \cdot 27 \cdot 1{,}295029 \cdot 1{,}0181382$$
$$= {}^1/_{1000} \cdot 27 \cdot 1{,}295029 \cdot 1{,}0181082 \cdot 1{,}0000\,2946$$
$$= {}^1/_{10}{}^3 \cdot 3^3 \cdot 1{,}09^3 \cdot 1{,}006^3 \cdot 1{,}0000\,0982^3.$$

Mithin $x = 0{,}1 \cdot 3 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}006 \cdot 1{,}0000\,0982 = 0{,}3289652.$

3. (Fünfte Wurzel).

$$\sqrt[5]{10} = x$$

Aus der Kolumne N⁵ folgt:

$$10 = 7{,}59375 \cdot 1{,}2762817 \cdot 1{,}0303622 \cdot 1{,}0010004 \cdot 1{,}0003984$$
$$= 1{,}5^5 \cdot 1{,}05^5 \cdot 1{,}006^5 \cdot 1{,}0002^5 \cdot 1{,}0000797^5$$
$$x = 1{,}5 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}006 \cdot 1{,}0002 \cdot 1{,}0000797$$
$$= 1{,}58489317 \text{ (nach Heis, § 54, No. 21 ist } x = 1{,}5848932).$$

4. (Fünfte Wurzel).

$$\sqrt[5]{4601498007398557} = x,$$

(vergl. Heis. § 54, No. 15).

Zunächst hat man:

$$x = 1000 \cdot \sqrt[5]{4{,}001498007398557},$$

sodann aus Kolumne N⁵:

$$4{,}001498007398557 = 3{,}71293 \cdot 1{,}2166529 \cdot 1{,}0150903 \cdot 1{,}0030036 \cdot 1{,}0004805$$
$$= 1{,}3^5 \cdot 1{,}04^5 \cdot 1{,}003^5 \cdot 1{,}0006^5 \cdot 1{,}0000961^5.$$
$$x = 1000 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}003 \cdot 1{,}0006 \cdot 1{,}0000961$$
$$= 1357{,}00002 \text{ (genau} = 1357)$$

Anmerkung 1. Sinken mit fortschreitender Division die Restfaktoren unter die kleinsten Zahlenwerte der Kolumnen, so erhält man nach den Hilfssätzen (2) die Wurzeln dieser Restfaktoren, indem man den Überschuß durch den Wurzelexponenten dividiert. Bei einer geringeren als 7- oder 8stelligen Genauigkeit kann dies Verfahren auch schon früher eintreten.

Anmerkung 2. Überhaupt sind die angez. Hilfssätze bei vorliegender Methode vielfach anwendbar.

Anmerkung 3. Wird die Multiplikation der Division vorgezogen, so gebrauche man statt N³, N⁵ u. s. f. die Reziproken $\frac{1}{N^3}, \frac{1}{N^5}$ u. s. f.

Potenz-Tafeln

zur 6. bis 10. Wurzel.

N	N^6	N^7	N^8	N^9	N^{10}	$1:N^6$	$1:N^7$	$1:N^8$	$1:N^9$	$1:N^{10}$
1,9	47,04588	89,38717	169,8356	322,6877	613,1066	0,0212558	0,0111873	0,0058880	0,0030990	0,00163104
1,8	34,01222	61,22200	110,1996	198,3593	357,0467	0,0294012	0,0163340	0,0090744	0,0050414	0,00280077
1,7	24,13757	41,03386	69,75757	118,5879	201,5994	0,0414292	0,0243701	0,0143354	0,0084326	0,00496033
1,6	16,77722	26,84355	42,94967	68,71947	109,9510	0,0596046	0,0372529	0,0232295	0,0145512	0,00909495
1,5	11,39063	17,08594	25,62891	38,44335	57,66504	0,0877915	0,0585277	0,0390184	0,0260123	0,01734153
1,4	7,529536	10,54135	14,75789	20,66105	28,92547	0,1328103	0,0948645	0,0677604	0,0484003	0,03457161
1,3	4,826809	6,274852	8,157307	10,60450	13,78585	0,2071762	0,1593663	0,1225895	0,0942996	0,07253813
1,2	2,985984	3,583181	4,299817	5,159780	6,191736	0,3348980	0,2790817	0,2325680	0,1938067	0,16150558
1,1	1,771561	1,948717	2,143589	2,357948	2,593742	0,5644739	0,5131581	0,4665073	0,4240976	0,38554327
1,09	1,677100	1,828039	1,992563	2,171894	2,367362	0,5962678	0,5470348	0,5018663	0,4604278	0,42241078
8	1,586874	1,713825	1,850930	1,999005	2,158925	0,6301697	0,5834904	0,5402689	0,5002490	0,46319340
7	1,500730	1,605781	1,718186	1,838459	1,967152	0,6663422	0,6227499	0,5820092	0,5439338	0,50834929
6	1,418519	1,503630	1,593848	1,689479	1,790848	0,7049605	0,6650571	0,6274124	0,5918985	0,55839474
5	1,340096	1,407100	1,477455	1,551328	1,628895	0,7462153	0,7106813	0,6768394	0,6446090	0,61391324
4	1,265319	1,315932	1,368569	1,423312	1,480244	0,7903145	0,7599177	0,7306902	0,7025866	0,67556415
3	1,194052	1,229874	1,266770	1,304773	1,343916	0,8374844	0,8130915	0,7894093	0,7664168	0,74409397
2	1,126162	1,148686	1,171659	1,195093	1,218994	0,8879714	0,8706002	0,8534904	0,8367554	0,82034832
1	1,061520	1,072135	1,082857	1,093685	1,104622	0,9420453	0,9327181	0,9234832	0,9141292	0,88468020
1,009	1,055230	1,064727	1,074309	1,083978	1,093734	0,9476611	0,9392080	0,9308307	0,9225279	0,91429915
8	1,048970	1,057362	1,065821	1,074348	1,082943	0,9533159	0,9457500	0,9382438	0,9307974	0,92341021
7	1,042742	1,050041	1,057391	1,064793	1,072247	0,9590102	0,9523487	0,9457235	0,9391496	0,93262128
6	1,036544	1,042764	1,049020	1,055314	1,061646	0,9647440	0,9589900	0,9532707	0,9475850	0,94193348
5	1,030377	1,035529	1,040707	1,045911	1,051153	0,9705180	0,9656898	0,9608851	0,9561046	0,95134800
4	1,024241	1,028338	1,032452	1,036581	1,040728	0,9763324	0,9724427	0,9685684	0,9647096	0,96086622
3	1,018136	1,021190	1,024253	1,027326	1,030408	0,9821875	0,9792498	0,9763207	0,9734007	0,97048911
2	1,012060	1,014084	1,016112	1,018145	1,020181	0,9880836	0,9861111	0,9841430	0,9821786	0,98021822
1	1,006015	1,007021	1,008028	1,009036	1,010045	0,9940209	0,9930277	0,9920359	0,9910450	0,99005477
1,0009	1,005412	1,006317	1,007223	1,008129	1,0090365	0,9946170	0,9937227	0,9928291	0,9919364	0,99104432
8	1,004810	1,005613	1,006418	1,007223	1,0080288	0,9952134	0,9944177	0,9936230	0,9928286	0,99203500
7	1,004207	1,004910	1,005614	1,006318	1,0070220	0,9958102	0,9951136	0,9944175	0,9937220	0,99302682
6	1,003605	1,004208	1,004810	1,005413	1,0060162	0,9964075	0,9958100	0,9952130	0,9946161	0,99401977
5	1,003004	1,003505	1,004007	1,004509	1,0050113	0,9970051	0,9965068	0,9960091	0,9955114	0,99501386
4	1,002402	1,002803	1,003204	1,003606	1,0040072	0,9976034	0,9972044	0,9968057	0,9964073	0,99600886
3	1,001801	1,002102	1,002402	1,002703	1,0030040	0,9982019	0,9979025	0,9976032	0,9973041	0,99700488
2	1,001201	1,001401	1,001601	1,001802	1,0020018	0,9988009	0,9986009	0,9984014	0,9982016	0,99800227
1	1,000600	1,000700	1,000800	1,000900	1,0010005	0,9994002	0,9993002	0,9992005	0,9991005	0,99900047

N	N^6	N^7	N^8	N^9	N^{10}
1	1	1	1	1	1
2	64	128	256	512	1024
3	729	2187	6561	19683	59049
4	4096	16384	65536	262144	1048576
5	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401

Beispiele.

1. (achte Wurzel).

$\sqrt[8]{28179280429056} = x$,

(s. Heis, § 50, No. 29α).

Setzt man: $x = 10\sqrt[8]{281792{,}80429056}$,

sodann mit Hilfe der Kolumnen N^8:

$281792{,}80429056 = 65536 \cdot 4{,}299817 = 4^8 \cdot 1{,}2^8$,

so wird: $x = 10 \cdot \sqrt[8]{4^8 \cdot 1{,}2^8} = 10 \cdot 4 \cdot 1{,}2 = 48$

2. (zehnte Wurzel).

$\sqrt[10]{10} = x$.

Zufolge der Kolumnen N^{10} ist:

$10 = 1{,}2^{10} \cdot 1{,}04^{10} \cdot 1{,}008^{10} \cdot 1{,}0007^{10} \cdot 1{,}0000486^{10}$,

demnach: $x = 1{,}2 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}0007 \cdot 1{,}0000486 = 1{,}2589257$ (mit 7stelligen Logarithmen = 1,2589255)

Potenz-Tafeln

zur 16., 100. und 1000. Wurzel.

N	N^{16}	N^{100}	N^{1000}	N	N^{16}	N^{100}	N^{1000}
1,9	28844,13			1,0009	1,01 4498	1,094 1300	2,458607
1,8	12143,95			8	1,01 2877	1,083 2525	2,224829
1,7	4866,119			7	1,01 1259	1,072 4819	2,013260
1,6	1844,674			6	1,00 9643	1,061 8174	1,821791
1,5	656,8410			5	1,00 8030	1,051 2580	1,648515
1,4	217,7953			4	1,00 6419	1,040 8025	1,491705
1,3	66,54206			3	1,00 4811	1,030 4499	1,349798
1,2	18,48843	82817980		2	1,00 3205	1,020 1993	1,221378
1,1	4,594974	13780,613		1	1,00 1601	1,010 0495	1,105165
1,09	3,97 0306	5529,041		1,00009		1,009 0402	1,09 4170
8	3,42 5942	2199,761		8		1,008 0818	1,08 3284
7	2,95 2163	867,7164		7		1,007 0243	1,07 2506
6	2,54 0351	339,3020		6		1,006 0178	1,06 1835
5	2,18 2875	131,5012		5		1,005 0124	1,05 1271
4	1,87 2981	50,50494		4		1,004 0080	1,04 0810
3	1,60 4706	19,21863		3		1,003 0045	1,03 0454
2	1,37 2785	7,244647	398264700	2		1,002 0020	1,02 0201
1	1,17 2579	2,704814	20959,16	1		1,001 0005	1,01 0050
1,009	1,15 4141	2,44 9721	7783,343	1,000009			1,009041
8	1,13 5974	2,21 8468	2887,567	8			1,008032
7	1,11 8077	2,00 8848	1070,214	7			7,007025
6	1,10 0443	1,81 8855	393,2605	6			1,006018
5	1,08 3071	1,64 6669	146,5756	5			1,005012
4	1,06 5956	1,49 0635	54,16426	4			1,004008
3	1,04 9095	1,34 9253	19,99553	3			1,003005
2	1,03 2484	1,22 1159	7,374312	2			1,002002
1	1,01 6121	1,10 5116	2,716924	1			1,0010005

8. Berechnung einer Wurzel beliebigen Grads mit Hilfe der Potenztafeln.

Die vorstehenden Tafeln gestatten eine über ihre ursprüngliche Bestimmung hinausgehende Anwendung, welche sich insbesondere auf die Kolumnen N^{100} und N^{1000} gründet. Dieselben können nämlich, mit einigen leichten Umformungen, auch zur Darstellung einer beliebigen Wurzel gebraucht werden — entweder allein oder, falls die allgemeine Binomialreihe zur Verfügung steht, in Verbindung mit dieser. Im letztern Falle gewähren sie die Mittel, um den Radikanden in eine den Konvergenzbedingungen entsprechende Form zu bringen, was ohne die Tafeln meist mit erheblichen Nebenrechnungen verbunden ist.

Der nächste und methodisch einfachste Weg besteht darin, die reziproken Wurzelexponenten in einen Dezimalbruch zu verwandeln; die numerische Auswertung der Wurzel erfolgt dann mit Hilfe der Potenztafeln.

Ein Beispiel mag dies erläutern. Die Aufgabe No. 37, § 84 der Heisschen Sammlung führt auf folgende Gleichung:

$$1 + \frac{x-6}{100} = \sqrt[430]{9428{,}57} = 9428{,}57^{\frac{1}{430}}, \qquad \text{(I)},$$

deren Lösung sich also im wesentlichen deckt mit der Bestimmung der Wurzelgröße.

Setzt man nun $\frac{1}{430} = 0{,}0023256$, so verwandelt sich der Ausdruck zunächst in

$$9428{,}57^{0{,}0023256} = \sqrt[10000000]{9428{,}57^{23256}} = y$$

Zerlegt man ferner den Radikand-Exponenten

23256 in die Summe $20000 + 2000 + 1000 + 250 + 4 + 1$,

so ergiebt sich

$$y = \left(\sqrt[1000]{a}\right)^2 \cdot \sqrt[10000]{a^2} \cdot \sqrt[10000]{a} \cdot \sqrt[40000]{a} \cdot \sqrt[250000]{a} \cdot \sqrt[5000000]{a} \qquad \text{(II)},$$

wenn zur Abkürzung 9428,57 durch a bezeichnet wird.

Der erste Eindruck dieser veränderten Form der Wurzel ist allerdings kein besonders anmutiger; ihre Berechnung scheint auch die Langmut des geduldigsten Rechners erschöpfen zu müssen. Allein, es scheint auch nur so. Denn bei näherer Betrachtung zeigt sich, daß erstens die Faktoren in einem sehr einfachen Zusammenhange stehen, infolgedessen die späteren aus den vorangehenden leicht entwickelt werden können, sodann vereinfacht sich der Natur der Sache nach die Rechnung von Faktor zu Faktor und reduziert sich bei der Mehrzahl der Faktoren (nach dem 4. Hilfssatz) auf eine bloße Division der Überschüsse, demnach auf ein verschwindendes Maß von Arbeit.

Um zu unserer Aufgabe zurückzukehren, so ist also zunächst

$$\left(\sqrt[1000]{9428{,}57}\right)^2 = R_1$$

zu bestimmen.

Nach Kolumne N^{1000} findet man aber in bekannter Weise

$$9428{,}57 = \frac{2887{,}567 \cdot 2{,}716924 \cdot 1{,}221378}{1{,}020201} \cdot 1{,}003857$$

$$= \left(\frac{1{,}008 \cdot 1{,}001 \cdot 1{,}0002}{1{,}00002} \cdot 1{,}000003857\right)^{1000}, \text{ so daß}$$

$$\sqrt[1000]{9428{,}57} = \frac{1{,}008 \cdot 1{,}001 \cdot 1{,}0002 \cdot 1{,}000003857}{1{,}00002} = 1{,}0091937$$

und

$$R_1 = (1{,}0091937)^2 = 1{,}018472.$$

Dabei ist noch zu bemerken, daß der Rechnung an einer Stelle, wie schon bei einer früheren Gelegenheit, eine etwas andere Wendung gegeben worden ist, indem zur Verwandlung des bei der 2. Division auftretenden Restfaktors

1,201811

nicht der kleinere, sondern der bei weitem näher liegende größere Kolumnenwert benutzt worden ist, also nicht 1,10 5165 sondern 1,22 1378. In solchen Fällen erscheint dann der neu entstehende Quotient nicht als Faktor sondern als Nenner. Denn aus

$$1{,}221378 : 1{,}201811 = 1{,}016281 \quad \text{folgt}$$

$$1{,}201811 = \frac{1{,}221378}{1{,}016281}, \text{ und ähnlich zieht man}$$

$$\text{aus } 1{,}020201 : 1{,}016281 = 1{,}003857 \text{ die Gleichung } 1{,}016281 = \frac{1{,}020201}{1{,}003857}.$$

Nichts hindert übrigens, hier und in allen ähnlichen Fällen die regelmäßige Faktorenzerlegung von Anfang bis zu Ende beizubehalten, was zwar etwas Mehrarbeit zur Folge hat, aber für den ersten Anfang doch vielleicht vorzuziehen ist.

Auch mag nochmals daran erinnert werden, daß die 1000. Wurzel des letzten Restfaktors 1,00 3857 durch bloße Division des Überschusses mit 1000 genommen wird, also

$$\sqrt[1000]{1{,}003857} = 1{,}0000038 57.$$

Die Berechnung des 2. Faktors

$$\sqrt[10000]{9428{,}57^2} = \sqrt[10]{R_1} = \sqrt[10]{1{,}018472}$$

geht nun schon wesentlich einfacher von statten. Man findet nämlich

$$1{,}018472 = \frac{1{,}020181}{1{,}001678},$$

wenn wir auch hier wieder, um rascher ans Ziel zu kommen, den nächst größeren Kolumnenwert anwenden. Damit wird aber

$$R_2 = \sqrt[1000]{9428{,}57^2} = \sqrt[10]{\frac{1{,}020181}{1{,}001678}} = \sqrt[10]{\frac{1{,}002^{10}}{1{,}0001678^{10}}} = \frac{1{,}002}{1{,}0001678}$$
$$= 1{,}0018322.$$

Die Zahlenwerte aller weiteren Faktoren lassen sich aber, nach dem 4. Hilfssatze, ohne Weiteres hinschreiben, nämlich:

$$R_3 = \sqrt{R_2} = 1{,}000916$$

$$R_4 = \sqrt[4]{R_3} = 1{,}000229$$

$$R_5 = \sqrt[25]{R_3} = 1{,}0000003664$$

$$R_6 = \sqrt{R_5} = 1{,}0000001832$$

Somit ergiebt sich:

$$\sqrt[430]{9428{,}57} = 1{,}018472 \cdot 1{,}0018322 \cdot 1{,}000916 \,.\, 1{,}000229$$
$$\cdot\, 1{,}0000003664 \,.\, 1{,}0000001832$$
$$= 1{,}021512,$$

wo das Produkt der 4 letzten Faktoren aus wiederholt angeführten Gründen lediglich durch Addition der Überschüsse erhalten wird.

Schließlich hat man als Lösung der vorgelegten Gleichung

$$1 + \frac{x-6}{100} = 1{,}021512, \text{ woraus}$$
$$x = 8{,}1512 \text{ [nach Heis (l. c.) abgekürzt} = 8{,}151].$$

Überblicken wir nun noch einmal die (beim ersten Anblicke fast als undurchführbar erscheinende) Rechnung, so reduziert sich dieselbe in Wahrheit, von den ganz minimalen Nebenrechnungen abgesehen, auf vier Divisionen und drei Multiplikationen, also auf ein Mafs von Arbeit, welches geradezu gering erscheint neben dem Aufgebote von Zeit und

Mühe, das zur Lösung derselben Aufgabe mit Hilfe der meisten anderen Methoden, etwa der Reihenentwickelung, verlangt wird. Zudem läfst sich dieselbe noch bedeutend ermäfsigen, wenn die vorkommenden Divisionen und Multiplikationen mit der Napierschen Stabrechnung ausgeführt werden.

9. Anderes Verfahren zur Darstellung einer Wurzel.

Aufser dem eben besprochenen Verfahren zur Entwickelung irgend einer Wurzel, welches für Anfänger das fafslichste und geeignetste sein dürfte, kann man auch folgenden Weg einschlagen.

Man verwandele den reziproken Wert des Wurzelexponenten in eine (ihrer Natur nach unendliche) Reihe von Stammbrüchen, deren erster jenem reziproken Werte möglichst nahe liegt und entweder selbst in den Potenztafeln vorkommt oder doch, was der häufigere Fall sein wird, sich aus Exponenten dieser Tafeln kombinieren läfst. Von dieser Reihe ziehe man dann so viel Glieder in betracht, wie der zu erreichende Genauigkeitsgrad verlangt.

Hiernach wäre das obige Beispiel folgendermafsen zu behandeln:

Dem Wurzelexponenten 430 liegt am nächsten die Zahl 432, welche in der angegebenen Weise, nämlich als das Produkt

$$16 \cdot 9 \cdot 3$$

darstellbar ist. Man setze nun:

$$\frac{1}{430} = \frac{1}{432\left(1-\frac{2}{432}\right)} = \frac{1}{432\left(1-\frac{1}{216}\right)} = \frac{1}{432}\left[1+\frac{1}{216}+\frac{1}{216^2}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{432} + \frac{1}{432 \cdot 216} + \frac{1}{432 \cdot 216^2} + \cdots,$$

so dafs $\sqrt[430]{a} = a^{\frac{1}{430}}$ in die unendliche Faktorenfolge: $a^{\frac{1}{432}} \cdot a^{\frac{1}{432 \cdot 216}} \cdots$ zerfällt.

Bezeichnet man abkürzungsweise

$$a^{\frac{1}{432}} = \sqrt[432]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[9]{\sqrt[16]{a}}} = N_1, \text{ so hat man also}$$

$$\sqrt[430]{a} = N_1 \cdot \sqrt[216]{N_1} \cdots$$

Weiter als bis zum 2. Gliede braucht man im vorliegenden Falle, wegen der sehr starken Konvergenz der Reihe, nicht zu gehen. Ja selbst das erste Glied würde, falls nur mäfsige Genauigkeit beansprucht wird, schon genügen, wovon man sich durch eine Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{430} = 0{,}002325\cdots$$

$$\frac{1}{432} = 0{,}002315\cdots$$

leicht überzeugt. Auch beweist dies die Entwickelung des ersten Glieds, dessen Wert

$$\sqrt[432]{9428{,}57} = \sqrt[3]{\sqrt[9]{\sqrt[16]{9428{,}57}}} = 1{,}02141 = N_1$$

gefunden wird, wenn man mit Hilfe der Potenztafeln successive die 16., 9. und 3. Wurzel aus dem gegebenen Radikanden zieht — ein Wert, der von dem oben erhaltenen

1,02151

nur sehr wenig abweicht.

Die Berücksichtigung des 2. Glieds, welche hier doch nach der ganzen Struktur der zu lösenden Hauptgleichung (s. oben) angezeigt erscheint, erfordert übrigens nur eine einzige Division mehr. Man hat nämlich:

$$\sqrt[216]{1{,}02141} = \sqrt[27]{\sqrt[8]{1{,}02141}}, \text{ aber nach der Spalte } N^8$$

$$1{,}02141 = \frac{1{,}024253}{1{,}002783}, \text{ mithin}$$

$$\sqrt[8]{1{,}02141} = \sqrt[8]{\frac{1{,}003^8}{1{,}000348^8}} = 1{,}002653$$

$$\text{und } \sqrt[216]{1{,}02141} = \sqrt[27]{1{,}002653} = 1{,}000098 \cdot$$

Damit ergiebt sich dann:

$$\sqrt[430]{9428{,}57} = 1{,}02141 \cdot 1{,}000098 = 1{,}02151, \text{ wie nach dem ersten Verfahren.}$$

Übrigens sieht man, dafs zur Darstellung von

$$\sqrt[216]{1{,}02141}$$

die Tafeln schon sehr wohl hätten entbehrt werden können, da die blofse Division des Überschusses

$$\sqrt[216]{1{,}02141} = 1{,}000099 \text{ liefert,}$$

also auf dasselbe Schlufsergebnis geführt hätte.

Um so mehr wäre diese abkürzende Rechnungsweise bei den weiter folgenden Gliedern statthaft, wenn deren Heranziehung überhaupt notwendig erschiene.

10. Allgemeine Methode zur gegenseitigen Verwandlung von Wurzeln beliebiger Grade.

Die Entwickelung einer gegebenen Wurzel nach dem zuletzt erörterten Verfahren bildet den Übergang zu dem weit allgemeinern Probleme der

Verwandlung von Wurzeln,

bestimmter ausgedrückt, zu dem Probleme:

eine Wurzel des n · Grads auf Wurzeln des m · Grads zurückzuführen.

Es ist leicht einzusehen, dafs diese Aufgabe, neben ihrer theoretischen, auch eine praktische Bedeutung hat, wenn man erwägt, dafs sie als einen Spezialfall die Aufgabe umfaſst, eine Wurzel des m· auf Wurzeln des 2. Grads, demnach jede höhere Wurzel auf die einfachste Kategorie zu reduzieren.

Rein mathematisch, d. h. ohne Beziehung auf die Operation des Wurzelausziehens, läſst sich dieselbe folgendermaſsen formulieren:

Gegeben ist ein beliebiger Stammbruch $\frac{1}{n}$; derselbe soll in eine Reihe anderer Stammbrüche verwandelt werden, deren Nenner Potenzen von m bilden.

Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich zwei Hauptwege — ein auf empirischer Grundlage und ein auf allgemeinen Entwickelungen beruhendes Verfahren. Zunächst soll das erstere, wegen seiner Einfachheit auch dem Anfänger offenstehende Verfahren an dem wichtigsten Spezialfalle, nämlich der

Reduktion irgend einer Wurzel auf Wurzeln des 2. Grads,

etwas eingehender erläutert werden. Die Verallgemeinerung auf irgend einen andern Fall ergiebt sich daraus von selbst.

Die Basis der Verwandlung bildet die nachstehende Tafel der Potenzen von $^1/_2$:

	N	1 : N		N	1 : N
	2	0,5000000000		2^{14}	0,0000610352
	2^2	0,2500000000		2^{15}	0,0000305176
	2^3	0,1250000000	65536 =	2^{16}	0,0000152588
16 =	2^4	0,0625000000		2^{17}	0,0000076294
	2^5	0,0312500000		2^{18}	0,0000038147
	2^6	0,0156250000		2^{19}	0,0000019073
	2^7	0,0078125000	1048576 =	2^{20}	0,0000009537
256 =	2^8	0,0039062500		2^{21}	0,0000004768
	2^9	0,0019531250		2^{22}	0,0000002384
	2^{10}	0,0009765625		2^{23}	0,0000001192
	2^{11}	0,0004882812	16777216 =	2^{24}	0,0000000596
4096 =	2^{12}	0,0002441406		2^{25}	0,0000000298
	2^{13}	0,0001220703		2^{26}	0,0000000149

u. s. f.

Soll nun beispielsweise der (der 10. Wurzel entsprechende) Stammbruch

$\frac{1}{10}$ in Potenzen von $\frac{1}{2}$ verwandelt werden,

so entnimmt man der nebenstehenden Tafel die dem Werte nach nächst kleinere Potenz von $\frac{1}{2}$, subtrahiert dieselbe von $\frac{1}{10}$, und verfährt mit den anfeinanderfolgenden Resten in gleicher Weise bis zum Verschwinden des Restes. So ergiebt sich bei Beschränkung auf fünfstellige Genauigkeit (wenn man zur Abkürzung stets zwei Tabellenwerte zusammenfaſst):

$$
\begin{array}{l}
0{,}1000000 \\
\underline{0{,}0937500} = 1:2^4 + 1:2^5 \\
0{,}0062500 \\
\underline{0{,}0058594} = 1:2^8 + 1:2^9 \\
0{,}0003906 \\
\underline{0{,}0003662} = 1:2^{12} + 1:2^{13} \\
0{,}0000244 \\
\underline{0{,}0000229} = 1:2^{16} + 1:2^{17} \\
0{,}0000015
\end{array}
$$

Wir haben also das Resultat:

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9}\right) + \left(\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}}\right) + \left(\frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{17}}\right) + \cdots$$

zugleich aber auch das deutlich hervortretende Gesetz der Entwickelung.

Das Schema zur Reduktion einer 10. Wurzel auf Wurzeln des 2. Grads gestaltet sich hiernach folgendermaſsen:

$$\sqrt[10]{a} = \sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[32]{a} \cdot \sqrt[256]{a} \cdot \sqrt[512]{a} \cdots\cdots$$

Ebenso einfach und in genau gleicher Weise läſst sich aber das Schema für jede andere Wurzel herleiten.

Auch die Generalisierung des Verfahrens unterliegt keinerlei Schwierigkeiten. Handelte es sich etwa darum, irgend eine Wurzel auf lauter kubische Wurzeln zu bringen, so müſste nur eine Tabelle der Potenzen von $\frac{1}{3}$, nach Analogie der obigen Tafel, entworfen und diese dann der Rechnung zu Grunde gelegt werden.

Was die Bestimmung des Zahlenwerts der Faktorenfolge betrifft, so kann dieselbe im Anschlusse an die oben mitgeteilten Stammtafeln erfolgen. Doch ist dies Verfahren etwas umständlich, obschon die Rechnung sich, wie immer, von Faktor zu Faktor vereinfacht und allmählich in bloſse Divisionen des Überschusses übergeht. Wir werden aber demnächst den Hauptfall — Reduktion einer Wurzel auf Quadratwurzeln — einer nochmaligen Betrachtung unterziehen und dann einen bequemern, durch die Benutzung der „Quadrattafeln" gebotenen Weg kennen lernen.

11. Allgemeine Reihen zur Verwandlung der Wurzeln.

Wenden wir uns nun zur allgemeinen Darstellung des vorstehenden Verfahrens. Die Aufgabe lautete:

den gegebenen Stammbruch $\frac{1}{n}$ in eine Reihe anderer Stammbrüche zu zerlegen, deren Nenner nach Potenzen von m fortschreiten.[1]

[1] Historisch ist zu bemerken, daß die Zerlegung von gewöhnlichen Brüchen in Stammbrüche (deren Zähler = 1) in dem Rechnen der ältesten Völker eine bedeutende Stelle einnimmt — so namentlich bei den ägyptischen und den von diesen abhängigen griechischen Feldmessern (selbst noch bei Hero von Alexandrien,

Auflösung.

Es ist identisch:
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m\left(1 - \frac{m-n}{m}\right)}.$$

Entwickelt man die 2. Seite nach der bekannten Formel
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots,$$
so ergiebt sich:
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m}\left[1 + \frac{m-n}{m} + \left(\frac{m-n}{m}\right)^2 + \cdots\cdots\right] \cdots\cdots \text{(I)}$$

Der Klammerausdruck bildet offenbar eine geometrische Reihe und ist als solche konvergent, wenn $m > n$, also
$$\frac{m-n}{m} < 1.$$

Wird umgekehrt $n > m$, so verwandelt sich die Reihe (I) in:
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{n-m}{m} + \left(\frac{n-m}{m}\right)^2 - \cdots\cdot\right] \cdots\cdot \text{(II)}.$$

Auch diese Reihe ist konvergent, sobald
$$\frac{n-m}{m} < 1.$$

---

100 v. Chr.) Vermutlich geschah diese Umformung lediglich um die Verstellung der Brüche zu erleichtern, und dann also nur als Folge eines noch sehr primitiven mathematischen Denkens, das sich aber selbst in die wissenschaftlich vorgeschrittenen Zeiten forterbte. Dabei wurde, nach Hankel, sowohl bei den Griechen wie den Ägyptern die Regel befolgt, die einzelnen Stammbrüche nach ihrer Größenordnung abzusondern, also etwa
$$\tfrac{12}{13} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{78}$$
gesetzt. Soweit es die griechischen Feldmesser betrifft — die, beiläufig bemerkt, neben den Mathematikern noch lange ihre eigenen, traditionellen Wege gingen — mag Hankels Bemerkung zutreffend sein. Aber die ägyptischen Agrimensoren haben sich erweislichermaßen an eine derartige bestimmte Zerlegungsregel nicht gebunden. Der Papyrus Rhind, in welchem jener Zerlegung ein besonderes Kapitel gewidmet wird, allerdings ohne jeden erklärenden Zusatz, hat u. a. die Gleichung
$$\tfrac{2}{43} = \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{86} + \tfrac{1}{129} + \tfrac{1}{301}, \text{ während doch}$$
$\frac{1}{24}$ der größte in $\frac{2}{43}$ enthaltene Stammbuch ist und die Zerlegung — nach der Hankelschen Hypothese — also die Form haben müßte:
$$\tfrac{2}{43} = \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{258} + \tfrac{1}{1032}$$
Die Zerlegung in Stammbrüche bildet, wenn keine Nebenbedingung zu erfüllen ist, eine Aufgabe der unbestimmten Analysis und läßt als solche zahllose Lösungen zu. Von den Griechen scheint die sehr rationelle Nebenbedingung „allmähliche Absonderung der größten Stammbrüche" aufgestellt worden zu sein. Allein die Ägypter verfuhren augenscheinlich mit großer Willkür; wenigstens ist es dem Verfasser nicht gelungen, in den vom Papyrus Rhind behandelten 49 Beispielen irgend ein festes Prinzip zu erkennen. Erst Leonardo de Pisa, Sohn des Bonaccio, daher gewöhnlich Fibonacci genannt — der erste Abendländer, dessen Arbeiten auf selbständiger Forschung beruhten und sich weit über diejenigen seiner Vorgänger erhoben, welche noch völlig in den Fesseln der indisch-arabischen und griechischen Mathematik lagen — gab in seinem 1202 erschienenen Liber abaci

Bildet man die Summen der beiden Reihen bis zum x · Gliede, so findet man leicht ihre Reste. Damit nehmen (I) und (II) schliefslich die Form an:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + \frac{m-n}{m^2} + \frac{(m-n)^2}{m^3} + \cdots\cdots + \frac{(m-n)^x}{m^{x+1}} + \text{Restglied } \frac{m}{n} \cdot \frac{(m-n)^{x+1}}{m^{x+2}} \cdots\cdots (I\alpha)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{n-m}{m^2} + \frac{(n-m)^2}{m^3} - \cdots\cdots \pm \frac{(n-m)^x}{m^{x+1}} \mp \text{Restglied } \frac{m}{n} \cdot \frac{(n-m)^{x+1}}{m^{x+2}} \cdots\cdots (II\alpha)$$

Die Bedeutung dieser Restglieder für die Praxis des Wurzelausziehens bleibt einer spätern Betrachtung vorbehalten.

Was die Anwendbarkeit der Reihen im Gebiete des numerischen Rechnens betrifft, so ist dieselbe selbstredend durch ihre Konvergenz bedingt. Diese kann aber in konkreten Fällen unter allen Umständen hergestellt werden:

1) für die Reihe (Iα),
2) für beide Reihen, wenn es sich darum handelt, die n · Wurzel in Quadratwurzeln umzusetzen, wenn mithin $m, m^2, m^3, \cdots\cdots$ Potenzen von 2 darstellen.

Nur die Reihe (IIα), in welcher $n > m$ sein soll, läfst sich nicht immer den Konvergenzbedingungen unterwerfen und versagt dann ihre Dienste.

Bezeichnen nämlich m_1 und m_2 zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Potenzen desjenigen Wurzelexponenten, auf welchen der gegebene Exponent reduziert werden soll, so lassen sich m_1 und m_2 stets so wählen,

---

einige allgemeine, aber nur unter bestimmter Voraussetzung anwendbare Regeln zur Zerlegung von Brüchen in Stammbrüche. Eine derselben läßt sich nach Kantor durch die Gleichung darstellen

$$\frac{a}{ma-1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m\,(ma-1)} \cdots\cdots\cdots \alpha$$

ist also an die Bedingung geknüpft, daß der um eine Einheit vergrößerte Nenner des gegebenen Bruchs ein Multiplum des Zählers bildet. Hiernach hat man z. B.

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{4 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{7 \cdot 3 - 1} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 20}$$

Die Fibonaccische Gleichung bildet übrigens nur einen sehr speziellen Fall unserer Gleichung (Iβ). Transformiert man nämlich

$$\frac{a}{ma-1} \text{ in } \frac{1}{m - \frac{1}{a}}, \text{ so wird (vergl. I}\beta)$$

$$n = m - \frac{1}{a};\; m_2 = m.$$

Mit Beschränkung auf das Anfangs- und Restglied folgt dann:

$$\frac{a}{ma-1} = \frac{1}{m - \frac{1}{a}} = \frac{1}{m} + \frac{m}{m - \frac{1}{a}} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{m^2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m(ma-1)}.$$

Alle diese Zerlegungen aber haben mit der uns beschäftigenden Aufgabe doch nur eine ganz äußerliche Verwandtschaft. Denn bei letzterer sollen die Nenner Potenzen einer willkürlich angenommenen Basis sein, wodurch die Aufgabe einen wesentlich anderen Charakter erhält; ferner erscheint dieselbe hier unter einem ganz neuen Gesichtspunkte, nämlich im Zusammenhange mit der Aufgabe der Verwandlung von Wurzeln verschiedenen Grads.

Seit Ausbildung der Bruchrechnung im 16. Jahrhundert (namentlich durch Heinrich Schreiber, gen. Grammateus, 1548; durch Tartaglia und Stifel), insbesondere aber seit Einführung der Dezimalbrüche (durch Rudolff, 1530, und Simon Stevin, 1548) scheint sich auch das Interesse an der Zerlegung in Stammbrüche verloren zu haben.

dafs n zwischen m_1 und m_2 fällt. Alsdann ist aber (wenn m_2 die höhere Potenz bedeutet) immer

$$m_2 > n, \text{ demnach } \frac{m_2 - n}{m_2} < 1$$

Soll beispielsweise die 23. Wurzel in Wurzeln des 3. Grads verwandelt werden, so liegt 23 zwischen 3^2 und 3^3, d. h. zwischen 9 und 27. In diesem besondern Falle ist also

$$n = 23;\ m_1 = 9;\ m_2 = 27, \text{ folglich}$$

$$\frac{m_2 - n}{m_2} = \frac{4}{27} < 1,$$

während

$$\frac{n - m_1}{m_1} = \frac{14}{9} > 1.$$

Folglich würde in der vorstehenden Verwandlungsaufgabe nur die obere Gruppe $m_2 = 27$ der Konvergenz Genüge leisten.

Wäre hingegen die 11. Wurzel in kubische Wurzeln zu verwandeln, so hätte man

$$n = 11\ ;\ m_1 = 9\ ;\ m_2 = 27.$$

Dann ist aber sowohl

$$\frac{m_2 - n}{m_2} = \frac{16}{27} < 1,$$

als auch

$$\frac{n - m_1}{m_1} = \frac{2}{9} < 1.$$

Es sind also jetzt beide Reihen zulässig, und die 2. Reihe wäre sogar, wegen ihrer stärkern Konvergenz, vorzuziehen.

Sind endlich m_1 und m_2 Potenzen von 2 (wie bei der Zurückführung auf Quadratwurzeln), so entsprechen, wie gesagt, stets b e i d e Reihen den Voraussetzungen der Konvergenz.

Ist z. B. die 7. Wurzel in Quadratwurzeln zu verwandeln, so liegt

7 zwischen 2^2 und 2^3, d. h. zwischen 4 und 8,

Demnach hat man

$$n = 7\ ;\ m_1 = 4\ ;\ m_2 = 8 \text{ und ferner}$$

$$\frac{m_2 - n}{m_2} = \frac{1}{8} < 1$$

$$\frac{n - m_1}{m_1} = \frac{3}{4} < 1.$$

Der Grund, weshalb in dem betrachteten Falle auch der 2. Quotient stets kleiner als 1, ist leicht ersichtlich. Denn da hier stets

$$m_2 = 2\,m_1,$$

so liegt n zwischen m_1 und $2\,m_1$, so dafs

$$n - m_1 \text{ stets } < m_1 \text{ ist.}$$

Um diese Unterschiede auch in den Reihen selbst durch ein äufseres Zeichen zum Ausdrucke zu bringen, sollen dieselben in der Folge geschrieben werden:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m_2} + \frac{m_2 - n}{m_2^{\,2}} + \frac{(m_2 - n)^2}{m_2^{\,3}} + \cdots\cdots + \frac{(m_2 - n)^x}{m_2^{\,x+1}} + \text{Restglied } \frac{m_2}{n} \cdot \frac{(m_2 - n)^{x+1}}{m_2^{\,x+2}} \cdots\cdots \quad (\mathrm{I}\beta)$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m_1} - \frac{n - m_1}{m_1^{\,2}} + \frac{(n - m_1)^2}{m_1^{\,3}} + \cdots\cdots \pm \frac{(n - m_1)^x}{m_1^{\,x+1}} \mp \text{Restglied } \frac{m_1}{n} \cdot \frac{(m_1 - n)^{x+1}}{m_2^{\,x+2}} \cdots\cdots \quad (\mathrm{II}\beta).$$

Einige Beispiele mögen zur Veranschaulichung dienen.

1. Verwandlung der 3. Wurzel in quadratische Wurzeln.

Man hat $n = 3\ ;\ m_1 = 2\ ;\ m_2 = 4,$

also bei Wahl der oberen Grenze:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\cdots,$$

hingegen bei Annahme der unteren Grenze:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots$$

Zieht man hier in der 2. Reihe die Glieder paarweise zusammen, so entsteht wieder die erste Reihe.

2. Verwandlung der 7. Wurzel in Wurzeln des 3. Grads.

Hier ist $n = 7;\ m_1 = 3;\ m_2 = 9.$

Also entweder:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9^2} + \frac{2^2}{9^3} + \cdots\cdots$$

oder:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^3} - \cdots\cdots \text{ (divergent!)}$$

3. Verwandlung der 430. Wurzel in quadratische Wurzeln.

Aus $n = 430;\ m_1 = 2^8 = 256;\ m_2 = 2^9 = 512$

folgt:

$$\frac{1}{430} = \frac{1}{512} + \frac{82}{512^2} + \frac{82^2}{512^3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{430} = \frac{1}{256} - \frac{174}{256^2} + \frac{174^2}{256^3} + \cdots\cdots$$

12. Das Restglied der Reihen.

Zunächst ist klar, dafs die Reihen an jeder (auch schon nach der ersten) Stelle abgebrochen und dann durch das Restglied ergänzt werden können. So ist z. B. (s. oben unter 1)

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \text{Restglied} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \text{ (aus der Reihe I}\beta\text{, wenn x = o gesetzt wird)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^3} \text{ (aus I}\beta\text{, wenn x = 1)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^4} \text{ (aus 1}\beta\text{, wenn x = 2)}$$

u. s. f.

Wendet man nun etwa die 2. Reihe auf die Verwandlung der kubischen Wurzel an, so folgt:

$$a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{16}} \left(a^{\frac{1}{16}}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[16]{a^5} \cdot \sqrt[16]{\sqrt[3]{a}}$$

Nun scheint allerdings das Restglied $\sqrt[16]{\sqrt[3]{a}}$ zu einer weiteren Entwickelung ungeeignet, da dasselbe bereits die Kenntnis von $\sqrt[3]{a}$ (also gerade der gesuchten Gröfse) voraussetzt. Erwägt man aber, dafs

$$\sqrt[16]{a^5}$$

einen ersten Näherungswert von $\sqrt[3]{a}$ darstellt, den wir mit

$$N_1$$

bezeichnen wollen, so wird man einen verbesserten Näherungswert erhalten, wenn man in der rechten Seite der Gleichung statt $\sqrt[3]{a}$ den ersten Näherungswert

$$N_1 = \sqrt[16]{a^5}$$

substituiert. Man erhält dann

$$\sqrt[3]{a} = N_1 \cdot \sqrt[16]{N_1} = N_2.$$

Eine 2. Substitution ergiebt als 3. Näherungswert

$$\sqrt[3]{a} = N_1 \cdot \sqrt[16]{N_2} = N_3$$

Fährt man auf diesem Wege fort, so kann man sich dem wahren Wert von $\sqrt[3]{a}$ beliebig nähern.

Sogar schon das Schema $\sqrt[3]{a} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$, welches durch Beschränkung auf das 1. Glied entsteht, liefse sich der Rechnung mit Erfolg zu Grunde legen.

Um dies klarer zu übersehen, hat man nur zu bedenken, dafs — wie wenig oder wie viel Glieder man auch von der Reihe Iβ zur Herstellung des 1. Näherungswerts verwendet — doch immer die Summe dieser Glieder kleiner als $\frac{1}{n}$. Nimmt man nun an, dafs a gröfser als 1, was in praxi meist der Fall ist, so ist jener erste Näherungswert immer kleiner als der Wert von $\sqrt[n]{a}$. Mithin ist auch das Restglied, zu dessen Herstellung der 1. Näherungswert gebraucht wurde, immer kleiner als es bei mathematischer Genauigkeit sein sollte. Demnach ist der durch Zuziehung des Restglieds entstandene 2. Näherungswert zwar ebenfalls kleiner als der wahre Wert, aber gröfser als der 1. Näherungswert. Es ist somit klar, dafs man dem wahren Werte mehr und mehr zustrebt, wenn man die Näherungswerte nach und nach in das Restglied substituiert. — Falls a kleiner als 1, so ist der erste und jeder folgende Näherungswert stets etwas zu grofs; in Verbindung mit dem Restgliede, das ebenfalls immer unter 1 bleibt, vermindert sich aber der Überschufs mehr und mehr. Das Restglied der Reihe selbst konvergiert mit wachsendem x offenbar gegen die Null, dasjenige der Faktorenfolge also gegen die Einheit, gleichviel ob der Radikand gröfser oder kleiner als eins. Im ersten Falle findet die Annäherung von oben, im zweiten Falle von unten statt.

Immerhin wird man es in der Regel bequemer finden, die Reihe so weit fortzuführen, dafs der verlangte Genauigkeitsgrad von vornherein verbürgt ist, oder doch so weit, dafs eine einmalige Substitution in das Restglied die Rechnung zum Abschlusse bringt.

Anmerkung. Die mathematische Aufgabe bei der Verwandlung von Wurzeln war oben dahin definiert worden, den Stammbruch $\frac{1}{n}$ in eine Reihe anderer Stammbrüche von vorgeschriebenem Nenner aufzulösen. Nun sind zwar die Zähler der von den Reihen gelieferten Brüche zunächst von der Einheit verschieden. Es ist aber jeder Zeit möglich, dafür Stammbrüche einzuführen. Angenommen, die Entwicklung enthalte den Bruch

$$\frac{21}{256},$$

so kann man setzen $21 = 16 + 4 + 1$, also $\frac{21}{256} = \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$.

Im allerungünstigsten Falle könnte man sich den Zähler in seine Einheiten zerlegt denken. — Das hier für einen besonderen Fall gezeigte Verfahren ließe sich ohne große Schwierigkeiten auch in den allgemeinen Reihen zum Ausdruck bringen, allein weder für die Theorie noch für die Praxis wäre dadurch etwas Wesentliches gewonnen. Wie sehen deshalb von einer näheren Betrachtung ab.

14. Erweiterter Gebrauch der Quadrattafeln

(zur Berechnung beliebiger Wurzeln, Potenzen, Produkte und Quotienten).

Die eben behandelten Reihen eröffnen den Weg, um in verschiedenster Weise höhere Wurzeln — auch ohne Logarithmen — der Rechnung zugänglich zu machen. Doch liegt es aufserhalb der Grenze einer zunächst für die Schule bestimmten Abhandlung, in eine nähere Erörterung dieser vorwiegend theoretischen Methoden einzutreten. Nur der besondere Fall

der Reduktion irgend einer höheren Wurzel auf quadratische Wurzeln

soll hier noch etwas weiter ausgeführt werden — nicht blofs wegen des allgemeinen mathematischen Interesses, insofern derselbe dem durch die gesamte Mathematik sich hindurchziehenden Grundgedanken,

zusammengesetzte Erscheinungen auf die einfachsten Formen zurückzuführen,

vorzugsweise entspricht, sondern besonders deshalb, weil gerade diese Reduktion der wirklichen numerischen Ausrechnung die geringsten Schwierigkeiten entgegensetzt.

Man besitzt nämlich in den Quadrattafeln[1] ein Mittel, quadratische Wurzeln mit derselben Leichtigkeit numerisch zu bestimmen, wie Logarithmen mit der Logarithmentafel — so dafs sich auch noch so hohe Wurzeln mit relativ geringer Mühe ermitteln lassen.

Da das theoretische Material bereits vollständig entwickelt vorliegt, so bedarf es nur noch einiger Beispiele um das Verfahren zu erläutern.

1. Beispiel.

$$\sqrt[3]{5114} = x = 10\sqrt[3]{5{,}114}$$

Bedient man sich des aus der Reihe $(\mathrm{I}\beta)$ sich ergebenden Schemas

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[64]{a} \cdot \sqrt[256]{a} \cdot \ldots\ldots$$

so liefern die Quadrattafeln:

[1] Vergl. u. a. Tafel VIII in der Sammlung von F. G. Gauß, Zeitz und Leipzig bei E. Strien.

$$\sqrt{5{,}1140} = 2{,}26142$$
$$\sqrt{2{,}26142} = 1{,}5038 = \sqrt[4]{a}$$
$$\sqrt{1{,}5038} = 1{,}2263$$
$$\sqrt{1{,}2263} = 1{,}1074 = \sqrt[8]{a}$$
$$\sqrt{1{,}1074} = 1{,}0523$$
$$\sqrt{1{,}0523} = 1{,}0258 = \sqrt[64]{a}$$
$$\sqrt{1{,}0258} = 1{,}0128$$
$$\sqrt{1{,}0128} = 1{,}0064 = \sqrt[256]{a}$$

Alle weiteren Glieder der Faktorenreihe lassen sich nun, wie man sieht, unmittelbar (d. h. ohne Hilfe der Tafeln) angeben — indem man die Überschüsse, so oft es angeht, mit 4 dividiert. Man erhält alsdann

1,0016, 1,0004, 1,0001,

so daß schließlich

$$\sqrt[3]{5{,}114} = 1{,}5038 \cdot 1{,}1074 \cdot 1{,}0258 \cdot 1{,}0064 \cdot 1{,}0016 \cdot 1{,}0004 \,.\, 1{,}0001$$
$$= 1{,}7228 \text{ und}$$

$\sqrt[3]{5114} = 17{,}228$ (wie mit Logarithmen) gefunden wird.

2. Beispiel.

$\sqrt[430]{9428{,}27} = x$ (vergl. dasselbe Beispiel zu den Potenztafeln).

Zerlegt man diesmal nicht mit Hilfe der Reihen, sondern im Anschlusse an die oben gegebene Tafel der Potenzen von $\frac{1}{2}$, was wegen des Fortfalls aller Umformungen für den Schulgebrauch immer vorzuziehen ist, so wird erhalten:

$$\frac{1}{430} = \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{2^{21}} + \cdots\cdots, \text{ also}$$

$$\sqrt[430]{a} = \sqrt[512]{a} \,.\, \sqrt[4096]{a} \,\ldots\ldots.$$

Nun ist nach den Quadrattafeln

$$\sqrt{9428{,}57} = 97{,}1008$$
$$\sqrt{97{,}1008} = 9{,}853975$$
$$\sqrt{9{,}853975} = 3{,}139107$$
$$\sqrt{3{,}139107} = 1{,}771752$$
$$\sqrt{1{,}771752} = 1{,}33106$$
$$\sqrt{1{,}33106} = 1{,}15372$$
$$\sqrt{1{,}15372} = 1{,}0741$$
$$\sqrt{1{,}0741} = 1{,}03638$$
$$\sqrt{1{,}03638} = 1{,}01804 = \sqrt[512]{a}$$
$$\sqrt{1{,}01804} = 1{,}00897$$
$$\sqrt{1{,}00897} = 1{,}0045$$
$$\sqrt{1{,}0045} = 1{,}00225 = \sqrt[4096]{a}$$

Alle folgenden Glieder werden wiederum durch Division des Überschusses gebildet. Wird dabei der Einfachheit wegen

$$a^{\frac{1}{2^n}} \text{ durch } a_n$$

bezeichnet, so folgt:

$$a_{13} = 1{,}001125$$
$$a_{18} = 1{,}000035$$
$$a_{19} = 1{,}000017$$
$$a_{12} = 1{,}000004$$

und ferner

$$\sqrt[430]{9428{,}57} = 1{,}01804 \cdot 1{,}00225 \cdot 1{,}001125 \cdot 1{,}000056,$$

wo statt der drei letzten Faktoren sofort ihr (durch Addition der Überschüsse gebildetes) Produkt eingeführt worden ist.

Endlich:

$$\sqrt[430]{9428{,}57} = 1{,}0215, \text{ wie früher.}$$

Anmerkung. Bei Beschränkung auf das erste Glied der Reihe mit Benutzung ihres Restes, wodurch man ebenfalls der Mühe der weiteren Umformung überhoben ist, gestaltet sich die Berechnung des letzten Wurzelausdrucks folgendermaßen:

$\sqrt[430]{9428{,}57} = \sqrt[512]{9428{,}57} \cdot \sqrt[512]{N_1^{82}}$, wenn unter N_1 wieder der erste Näherungswert $\sqrt[512]{9428{,}57}$ verstanden wird.

Da 82, in Potenzen von 2 aufgelöst, $= 64 + 16 + 2$ ergiebt, so hat man auch:

$$\sqrt[430]{94{,}2857} = \sqrt[512]{9428{,}57} \cdot \sqrt[8]{N_1} \cdot \sqrt[32]{N_1} \cdot \sqrt[256]{N_1}$$
$$= 1{,}01804 \cdot 1{,}00225 \cdot 1{,}0005625 \cdot 1{,}0000704$$
$$= 1{,}020973 = N_2$$

Nach Substitution dieses 2. Näherungswerts folgt dann:

$$\sqrt[430]{9428{,}57} = \sqrt[512]{9428{,}57} \cdot \sqrt[8]{N_2} \cdot \sqrt[32]{N_2} \cdot \sqrt[256]{N_2}$$
$$= 1{,}021445 = N_3.$$

Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung mit N_3 liefert erst den genauen Wert, und es geht hieraus hervor, daß das Verfahren, das erste Glied zugleich als ersten Näherungswert zu behandeln und alles Weitere dem Restgliede zu übertragen, zwar theoretisch etwas Verlockendes hat, aber doch merklich langsamer zum Ziele führt. — Wird hingegen zur Formation von N_1 auch nur ein Glied mehr herangezogen, so nimmt die Rechnung einen wesentlich rascheren Verlauf.

Potenzierung mit Hilfe der Quadrattafel.

Der Gebrauch der Quadrattafel zur Berechnung höherer Potenzen ist so naheliegend und einfach, dafs er hier nur der Vollständigkeit wegen mit erwähnt wird. Zugleich soll aber an einem Beispiele gezeigt werden, dafs selbst in Fällen ungewöhnlich hoher Potenzierung — wie sie nur im Bereiche der Zinseszins- und Rentenrechnung aufzutreten pflegen — schon die kleine Gaufssche Tafel noch völlig annehmbare Ergebnisse liefert.

Die Aufgabe No. 18 des § 84 der Heisschen Sammlung erfordert die Berechnung des Ausdrucks

$$x = 13490{,}6 \cdot 1{,}0225^{80}$$

Wird

$$1{,}0225^{80} = 1{,}0225^{64} \cdot 1{,}0225^{16}$$

gesetzt, so erhält man aus der Quadrattafel:

$$1{,}0225^2 = 1{,}0455$$
$$1{,}0445^2 = 1{,}0931$$
$$1{,}0931^2 = 1{,}1948$$
$$1{,}1948^2 = 1{,}4275 = 1{,}0225^{16}$$
$$1{,}4275^2 = 2{,}0378$$
$$2{,}0378^2 = 4{,}1526 = 1{,}0225^{64}$$

Mithin: $x = 13490{,}6 \cdot 1{,}4275 \cdot 4{,}1526$
$= 79974$ (genauer Wert $= 80000$).

Multiplikation mit Hilfe der Quadrattafel.

Um die Quadrattafel zur Ausführung von Multiplikationen zu verwenden, bedarf es erst der Aufstellung einer eigenen Formel, deren Beschaffenheit sich nach der Natur der Quadrattafel zu richten hat.

Hiernach bieten sich zunächst zwei Schemata dar:

$$a \cdot b = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} \quad \text{und}$$

$$a \cdot b = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

Wir wählen das letztere, weil dieses nur das Aufschlagen von zwei Quadraten verlangt. In Worten lautet also die Regel: Um zwei Zahlen zu multiplizieren, setze man sie übers Kreuz untereinander, addiere, bezw. subtrahiere dieselben, suche in der Tafel die Quadrate der beiden resultierenden Zahlen und dividiere schliesslich die Differenz dieser Quadrate durch vier.

Tritt noch ein dritter Faktor hinzu, so ist, nach Ermittelung des ersten Produkts, mit diesem und dem dritten Faktor die Rechnung zu wiederholen.

Gewöhnt man den Schüler hierbei an einen festen Rechentypus, etwa nach Art des folgenden, so findet sich das gesuchte Produkt ebenso einfach wie mit Logarithmen — wenigstens wenn nur zwei Faktoren gegeben sind. Denn die logarithmische Rechnung erfordert das Aufschlagen zweier Logarithmen und eines Numerus, die Quadratrechnung aber bloss das Aufschlagen zweier Quadrate, indessen etwas mehr Nebenrechnung. Mit der Anzahl der Faktoren wird die Rechnung allerdings beschwerlicher; gleichwohl dürfte auch in solchen, selteneren Fällen die Quadratrechnung der gemeinen Multiplikation vorzuziehen sein.

Beispiel (mit drei Faktoren).

$$\underbrace{24{,}385}_{a} \cdot \underbrace{8{,}2479}_{b} \cdot \underbrace{117{,}56}_{c} = x.$$

Nach Maßgabe obiger Formel hat man zuerst

$$\begin{array}{rr}
24{,}3850 & 8{,}2479 \\
-8{,}2479 & +24{,}3850 \\
\hline
16{,}1371 & 32{,}6329
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
1064{,}91 & = (a + b)^2 \\
260{,}41 & = (a - b)^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$a \cdot b = 804{,}5 : 4 = 201{,}125 \qquad 117{,}560 \ (3.\ \text{Faktor})$$

$$\begin{array}{rr}
117{,}560 & 201{,}125 \\
\hline
83{,}565 & 318{,}685
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
101560{,}4 & = (a \cdot b + c)^2 \\
6983{,}11 & = (a \cdot b - c)^2
\end{array}$$

$$a \cdot b \cdot c = x = 94577{,}29 : 4$$
$$= 23644{,}32$$

$$\left(\begin{array}{ll}
\text{mit siebenstell. Log.} & = 23644{,}26 \\
\text{„ fünfstell. „} & = 23643{,}9
\end{array}\right)$$

Selbstverständlich können die Vorteile der tabellarischen Multiplikation erst dann greifbar hervortreten, wenn der Schüler das Schema sicher innehat und im Gebrauche der Tafel so weit bewandert ist, um die kleine Interpolation im Kopfe zu vollziehen — was möglichst bald erstrebt werden mufs.

Division mit Hilfe der Quadrattafeln.

Es liegt in der Natur des Quotienten, dafs aus quadratischen Gliedern allein (wie sie die Tafel darbietet) sich keine Formel zu seiner Berechnung konstruieren läfst. Besäfse man aber ein einfaches Mittel, statt des Divisors seinen reziproken Wert einzuführen, so ginge die Division in eine Multiplikation über und könnte dann nach der früheren Formel berechnet werden.

Für die Bedürfnisse der Schule dürfte es genügen — wenigstens, wenn die Genauigkeit der fünfstelligen Logarithmentafel als Norm angenommen wird — der Quadrattafel noch eine kleine Reziprokentafel beizufügen, welche bei Beschränkung auf den Zahlenkreis 1—1000 nur den Raum weniger Seiten einnehmen würde. Man könnte sogar, wenn man eine ganz unbedeutende Nebenrechnung nicht scheut, schon mit dem Intervalle 500—1000 ausreichen. Derartige Tafeln sind mehrfach vorhanden; u. a. findet sich eine solche in „Des Ingenieurs Taschenbuch, Berlin bei Ernst und Korn", welche — um fünfstellige Genauigkeit zu ermöglichen — nur noch mit einer Differenzen- und Interpolationsspalte auszustatten wäre.

Um ein Bild von der Einrichtung einer solchen Tafel zu geben und zugleich eine Basis für das folgende Rechnungsbeispiel zu haben, folge hier ein Bruchstück:

N	$1000 \cdot \frac{1}{N}$	Diff.	P. P.
			$1 = 3{,}6$
524	1,9084		$2 = 7{,}2$
		36	$3 = 10{,}8$
525	1,9048		$4 = 14{,}4$
		37	$5 = 18{,}0$
526	1,9011		$6 = 21{,}6$
		36	
527	1,8975		$7 = 25{,}2$
			$8 = 28{,}8$
			$9 = 32{,}4$

Ist nun, wie im untenstehenden Beispiele, $\frac{1000}{527{,}1}$ zu bestimmen, so liefert die Tafel sofort den Wert 1,8971,
wobei zu beachten ist, dafs der Proportionalteil stets negativ gesetzt werden mufs.

Die kleine Nebenrechnung — welche erforderlich wird, wenn die Reziprokentafel in den Grenzen 500—1000 gehalten wird — besteht in einer blofsen Erweiterung des Quotienten mittels 2,3 oder 5 (= 10 : 2). Beginnt nämlich der ursprünglich gegebene Divisor mit einer Eins, so erweitere man mit 5 (d. h. dividiere nach angehängter Null den Dividenden und Divisor mit 2); ist die erste Stelle des Divisors eine 2, so mufs (um sicher zu gehen) mit 3, ist sie eine 3 oder 4, mit 2 erweitert werden. Dadurch gelangt der Quotient unter allen Umständen in den Bereich der Tafel. Z. B. müfste:

$\frac{23478}{105420}$ mit 5 erweitert werden und ergäbe dann

$$\frac{11739}{52710}.$$

Da die Reziprokentafel das Tausendfache des reziproken Werts giebt, die Quadrattafel aber die Form

$$1{,}1739$$

voraussetzt, so ist klar, dafs zum Schlusse das Resultat immer noch mit

$$10^{n-(p+1)}$$

zu multiplizieren ist, wenn n die Stellenzahl des Zählers und p die des Nenners bezeichnet. Im obigen Falle wäre $n = 5$ und $p = 5$, mithin $10^{n-(p+1)} = 10^{5-6} = \frac{1}{10}$ der Korrektionsfaktor.

Die Einzelnheiten werden am klarsten aus einem bestimmten Beispiele ersehen.

Es sei $\frac{0{,}23478}{1{,}0542} = x$ zu berechnen.

$$\text{Man hat:}\quad x = \frac{23478}{10542} = \frac{11739}{52710} = \frac{1}{10}\cdot \underbrace{1{,}17390}_{a} \cdot \underbrace{1{,}89714}_{b}$$

$$\begin{array}{rr}
1{,}17390 & 1{,}89714 \\
1{,}89714 & 1{,}17390 \\
\hline
3{,}07104 & 0{,}72324
\end{array}$$

$$(a+b)^2 = 9{,}43125$$
$$(a-b)^2 = 0{,}52308$$
$$a \cdot b = 8{,}90817 : 4 = 2{,}22704 \text{ und } x = 0{,}222704$$

(mit 7stell. Log. = 0,222709).

Auch hier ist es ratsam, wenn man gegen Fehler möglichst gesichert sein will und die Vorteile des tabellarischen Rechnens nicht wieder verloren gehen sollen, einen festen, leicht einzuprägenden Rechnungsgang zu beobachten. Folgende Anordnung kann zu dem Ende empfohlen werden:

1) Fortschaffung des Kommas, falls Zähler oder Nenner oder beide in Dezimalbruchform gegeben sind;
2) Erweiterung des Bruchs, wenn der Nenner aufserhalb der Grenzen (500—1000) der Reziprokentafel liegen sollte;
3) Formierung des Produkts aus den drei Elementen: Korrektionsfaktor, Zähler, reziproker Wert des Nenners;
4) Quadratische Berechnung des Produkts.

Was hier sich nur umständlich in Worten ausdrücken läfst, gestaltet sich in der Ausführung äufserst einfach. Namentlich mag noch einmal darauf hingewiesen werden, dafs auch der Korrektionsfaktor sehr leicht — ebenso leicht wie etwa die Kennziffer eines Logarithmus — bestimmt wird. Man erhält nämlich den Exponenten von 10, indem man die Stellenzahl des Nenners um 1 vermehrt und von der Stellenzahl des Zählers subtrahiert.

Übrigens ist einleuchtend, dafs eine Reziprokentafel — selbst in dem oben angedeuteten, gedrängten Umfange — in jedem Falle eine erwünschte Zugabe zu der Quadrattafel bilden wird, da sie fast mühelos die Verwandlung der Division in die immer etwas geschmeidigere Multiplikation ermöglicht.

Als Hauptergebnis unserer Betrachtungen ist indessen festzustellen, dafs mit Hilfe der Quadrattafel gerade die schwierigsten Operationen — die Berechnung höherer Wurzeln und Potenzen — relativ leicht bewältigt werden, dafs man deshalb bis zu einem gewissen Grade

die Quadrattafel als Ersatz der Logarithmentafel betrachten darf.

Es würde mithin auch nichts im Wege stehen, einen in sich abgeschlossenen elementarmathematischen Kursus (mit Inbegriff der Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung u. s. f.) einzurichten — ohne jede Beihilfe der Logarithmen. Selbst die Reihen ($I\beta$) und ($I\gamma$) könnten — wenn man sich völlig in den Grenzen des Elementaren halten wollte — vermieden werden, da es ja freisteht, die Reduktion der höheren Wurzeln auf solche des 2. Grads jederzeit mittels der obigen Tabelle der Potenzen von $\frac{1}{2}$ zu verrichten.

Indessen bedarf ein Fall noch einer etwas näheren Beleuchtung, nämlich die Anwendung der Quadrattafel zur

Lösung von Exponentialgleichungen,

welche sowohl im Gebiete der Zinseszinsrechnung als auch aufserhalb desselben vielfach auftreten, z. B. bei einer allgemeineren Behandlung der Logarithmensysteme. Man könnte sich hierzu der Tabelle I (Stammtafel zur Berechnung der Logarithmen) bedienen, welche ja nicht wesentlich mit dem Logarithmenbegriff zusammenhängt, sondern einfach als ein besonderer Auszug aus der Quadrattafel angesehen werden darf. Wir wollen indessen, um dem nicht uninteressanten Gegenstande einen allgemeinern Gesichtspunkt zu unterlegen, lediglich mit der Quadrattafel operieren.

1. Beispiel.

In wieviel Jahren verdoppelt sich ein zu 3 % zinseszinslich angelegtes Kapital?
(Heis, § 84, No. 39α).

Die Lösung fällt zusammen mit der Auflösung der Exponentialgleichung

$$1{,}03^x = 2.$$

Wird die Basis 1,03 viermal tabellarisch quadriert, so findet sich

$$2 = 1{,}03^{16} \cdot 1{,}03^{4} \cdot 1{,}03^{2} \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}0134, \text{ mithin}$$
$$1{,}03^x = 1{,}03^{23} \cdot 1{,}0134.$$

Da der Restfaktor 1,0134 kleiner als 1,03, so kann er nur durch Wurzeln als Potenz der Basis 1,03 dargestellt werden. Man erhält auf diese Weise

$$1{,}0134 = 1{,}03^{\frac{1}{4}} \cdot 1{,}03^{\frac{1}{8}} \cdot 1{,}03^{\frac{1}{16}} \cdot 1{,}03^{\frac{1}{192}} = 1{,}03^{0{,}443},$$

wobei zu bemerken ist, daß bereits nach der 2. Extraktion die übrigen Wurzeln durch Halbierung der Überschüsse sich ergeben.

$$\text{Schließlich:}\quad 1{,}03^x = 1{,}03^{23{,}443}$$
$$x = 23{,}443 \text{ (nach Heis} = 23{,}45 \text{ Jahren),}$$

ein mit Rücksicht auf die Einfachheit des angewendeten Hilfsmittels (4stellige Tafel) völlig befriedigendes Resultat.

2. Beispiel.

In welchem Zeitraum wächst ein Kapital von 12 388 Mk. zu 22 232,45 Mk. an? Zinsfuß $= 3^1/_2$ %. (Heis, § 84, No. 38).

Aus der Bedingungsgleichung $12388 \cdot 1{,}035^x = 22232{,}45$

folgt zunächst: $1{,}035^x = 1{,}794676.$

Durch tabellarisches Quadrieren der Basis ergiebt sich:

$$1{,}035^{16} \cdot 1{,}035 = 1{,}79416, \text{ demnach}$$

$$1{,}035^x = 1{,}035^{17} \cdot 1{,}00028.$$

Durch tabellarisches Radizieren:

$$1{,}00028 = 1{,}035^{\frac{1}{128}} = 1{,}035^{0{,}008}$$

Endlich: $1{,}035^x = 1{,}035^{17{,}008}$

$$x = 17^a \, 3^d \text{ (nach Heis} = 17 \text{ Jahre).}$$

3. Beispiel.

Auch zusammengesetztere Exponentialgleichungen können auf diesem Wege zur Lösung gebracht werden.

Es sei x aus $\sqrt[x]{3^{5x+7}} = \sqrt[7x]{5^{3x+1}}$ zu bestimmen.

(Heis, § 61, No. 150).

Die transformierte Gleichung lautet:

$$3^{\frac{35x+49}{3x+1}} = 5 = 3 \cdot 1{,}66667$$

Wird die Basis 3 tabellarisch radiziert, so folgt:

$$1{,}66667 = 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}} = 3^{0{,}465}, \text{ also:}$$

$$3^{\frac{35x+49}{3x+1}} = 3^{1{,}465}$$

$$\frac{35x+49}{3x+1} = 1{,}465; \; x = -1{,}5532 \text{ (nach Heis} = -1{,}553174).$$

Anmerkung. Erscheinen in einer Exponentialgleichung mehr als 2 Grundzahlen — ein Fall, der im angewandten Rechnen wohl kaum vorkommt — so wähle man eine derselbe als Reduktionsbasis und stelle die übrigen (durch tabellarisches Potenzieren, bezw. Radizieren) als Potenzen derselben dar. Dadurch werden alle Grundzahlen eliminiert und es bleibt nur noch eine gewöhnliche Gleichung der Exponenten.

Die vorstehende Lösungsmethode der Exponentialgleichungen an der Hand der Quadrattafeln bietet übrigens nicht bloß als solche ein Interesse; dieselbe kann auch als eine zweckmäßige Übung empfohlen werden, die besonders geeignet erscheint, dem Schüler das innere Wesen der beiden unstreitig fruchtbarsten Gegenstände der Elementar-Arithmetik — der Lehre von den allgemeinen Potenzen und Logarithmen — aufzuschließen. Wer in der Quadrattafel und ihren verschiedenen Anwendungen geschult ist, dem fehlen offenbar nur noch einige Kunstausdrücke, um alsbald auch die Logarithmentafel mit Sicherheit handhaben zu können.

Zusatz.

(Modul des gemeinen und Basis des natürlichen Systems.)

Die Frage, ob auf der oberen Stufe des Gymnasialunterrichts ein näheres Eingehen auf die eigentliche Theorie der Logarithmensysteme angebracht erscheine, dürfte zunächst auf die andere Frage hinauslaufen, ob ein solches Eingehen (nach Ausschlufs der Reihen) überhaupt möglich sei.

Da die Mathematik bei Aufstellung ihrer Begriffe keinem äufseren Zwange unterworfen ist, sondern nach freiem Ermessen verfahren darf — allerdings mit der Bedingung, deren Realität nachträglich zu erweisen, wenn diese nicht schon durch die Definition verbürgt ist, so ist es nicht gerade erforderlich, den Modulus zum charakteristischen Merkmale eines Logarithmensystems zu wählen, oder, bestimmter gesprochen, das natürliche

System — welches den Mittelpunkt der Logarithmentheorie bildet — zu definieren als das System mit dem Modulus eins. Mit dieser Definition würde man nämlich, ohne die Unterstützung der Analysis, nicht allzu weit kommen.

Definiert man hingegen das natürliche System als ein solches, welches der Bedingung

$$\log\,(1 + \alpha) = \alpha$$

desto mehr Genüge leistet, je kleiner α, so dürfte u. E. die Hauptschwierigkeit, welche sich einer theoretischen Behandlung der Logarithmen entgegenstellt, gehoben sein — wenigstens, wenn man dabei nur auf das unbedingt Notwendige sich einläſst — die Feststellung des Modulus, die Basis des natürlichen Logarithmensystems, u. s. f.

Zunächst wäre der Fundamentalsatz zu erweisen, daſs

das Verhältnis der Logarithmen gleicher Zahlen in zwei verschiedenen Systemen invariabel ist.

Man findet ihn leicht aus den Gleichungen:

$$a^x = y$$
$$b^z = y,$$

welche durch Logarithmiernng ergeben:

$$x \cdot \log a = z \cdot \log b$$
$$x : z = \log b : \log a$$
$$\log_a y : \log_b y = \frac{\log b}{\log a} = \text{Constans.}$$

Entwickelt man nun die folgenden dekadischen Logarithmen:

$$\log 1{,}01 = 0{,}0043|213737$$
$$\log 1{,}001 = 0{,}000434|0774$$
$$\log 1{,}0001 = 0{,}00004342|72$$
$$\log 1{,}00001 = 0{,}0000043429|2$$
$$\log 1{,}000001 = 0{,}00000043429$$

u. s. f.,

so ersieht man, daſs in den aufeinanderfolgenden Werten eine immer gröſsere Anzahl **konstanter** Ziffern sich auslöst, und man würde zu einem ähnlichen Resultate kommen, wenn man die Reihe der Logarithmen von 1,02; 1,002; 1,0002 u. s. f. der Vergleichung zu Grunde gelegt hätte.

Damit ist aber der Nachweis, daſs unter den unendlich vielen Logarithmensystemen auch eins von der oben postulierten Eigenschaft

$$\log\,(1 + \alpha) = \alpha$$

existiert, und wie dessen Basis beschaffen sein muſs, unschwer zu erbringen.

Setzt man nämlich diese Basis $= e$, so müssen, der aufgestellten Definition zufolge, nachstehende Gleichungen:

$$e^{0,01} = 1{,}01$$
$$e^{0,001} = 1{,}001$$
$$e^{0,0001} = 1{,}0001$$
$$e^{0,00001} = 1{,}00001$$

u. s. f.,

oder, was damit einerlei ist, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\log \text{vulg}\, e &= 100 \cdot \log \text{vulg}\, 1{,}01 = 0{,}43213737\\ &= 1000 \cdot \log \text{vulg}\, 1{,}001 = 0{,}4340774\\ &= 10000 \cdot \log \text{vulg}\, 1{,}0001 = 0{,}434272\\ &= 100000 \cdot \log \text{vulg}\, 1{,}00001 = 0{,}434292\\ &= 1000000 \cdot \log \text{vulg}\, 1{,}000001 = 0{,}43429 \cdots\cdot\end{aligned}$$

u. s. f.

mit immer gröfserer Annäherung stattfinden.

Daraus folgt aber mit sechsstelliger Genauigkeit

natürliche Basis $e = 2{,}71828 \cdots\cdot$

In der That erhält man mit Hilfe dieser Basis

$$\left.\begin{aligned}\log \text{nat}\, 1{,}01 &= 0{,}00995 \cdots\cdot = 0{,}01\\ \log \text{nat}\, 1{,}001 &= 0{,}0009995 \cdots\cdot = 0{,}001\\ \log \text{nat}\, 1{,}0001 &= 0{,}000099995 \cdots\cdot = 0{,}0001\\ \log \text{nat}\, 1{,}00001 &= 0{,}00000999995 \cdots\cdot = 0{,}00001\\ &\text{u. s. f.,}\end{aligned}\right\}\ \text{mit steigender Approximation,}$$

wodurch die der Definition des natürlichen Systems zu Grunde gelegte Eigenschaft

$\log \text{nat}\, (1 + \alpha) = \alpha$, mit abnehmendem α,

verifiziert erscheint.

Zugleich zieht man aus dem Obigen die Gleichung:

$$\log \text{vulg}\, 1{,}00001 = 0{,}43429 \cdot \log \text{nat}\, 1{,}00001,$$

und da nach dem vorausgeschickten Fundamentalsatze zwischen irgend zwei korrespondierenden Logarithmen des natürlichen und dekadischen Systems dasselbe Verhältnis bestehen mufs, allgemein

$$\log \text{vulg}\, y = 0{,}43429 \log \text{nat}\, y.$$

Dieser konstante Faktor 0,43429

mit welcher die natürlichen Logarithmen zu multiplizieren sind, um sie in Vulgärlogarithmen zu verwandeln, heifst nun

der **Modulus** des vulgären Logarithmensystems.

Selbstverständlich bestehen für andere Kunstsysteme ähnliche, die Verbindung mit dem Naturalsysteme vermittelnde Moduli.

Der Modulus des gemeinen und die Basis des natürlichen Systems bilden die beiden Grundpfeiler der Logarithmentheorie. Insbesondere unterliegt es keinerlei Schwierigkeiten, mit Hilfe der Basis e den Modulus eines beliebigen Kunstsystems zu entwickeln. Man hat nur nötig, den natürlichen Logarithmus irgend einer Zahl sowie den entsprechenden künstlichen Logarithmus zu ermitteln: ihr Quotient bildet alsdann den gesuchten Modulus. Die Ausführung der Rechnung erfolgt stets mit Hilfe der Quadrattafel nach Analogie der früher behandelten Exponentialgleichungen.

Mit diesen kurzen Andeutungen über die innere Konstitution der logarithmischen Systeme glauben wir unsere Betrachtungen über das tabellarische Rechnen abschliefsen zu können. Ein weiteres Eingehen auf diesen Gegenstand würde uns notwendig in das Gebiet der Analysis führen und uns zwingen, den bisher grundsätzlich eingehaltenen Standpunkt zu verlassen.

ANHANG.

Die Frage, an welcher Stelle und in welcher Ausdehnung die behandelten Lehren etwa Verwendung finden könnten, läfst sich bei der Mannigfaltigkeit der Schulgattungen und der Verschiedenheit ihrer Unterrichtszwecke nicht wohl allgemein beantworten. Über einzelne Abschnitte — wie Verwandlung der Wurzeln, erweiterter Gebrauch der Quadrattafeln u. a. m. — mögen die Ansichten geteilt sein; über andere Kapitel dagegen können Meinungsunterschiede kaum obwalten. So mufs die tabellarische Berechnung der Logarithmen und trigonometrischen Funktionen für das Gymnasium und alle Anstalten, denen die Hülfe der Analysis abgeschnitten ist, als ein wesentliches Glied des mathematischen Unterrichts betrachtet werden, wenn man nicht Gefahr laufen will, dafs das sonst so peinlich strenge System in bedenklicher Weise durchbrochen wird. — Auch die Wurzelausziehung im Anschlusse an Potenztafeln wird vielleicht bei der Mehrzahl der Fachgenossen auf Zustimmung rechnen dürfen, da der Leistungsfähigkeit des Binomialverfahrens im Bereiche des numerischen Rechnens doch zu enge Grenzen gezogen sind, die logarithmische Radizierung aber schon einer über das gewöhnliche Mafs hinausgehenden Vorbereitung bedarf.

Voraussichtlich aber wird, selbst im Falle einer objectiv günstigen Beurteilung, doch die praktische Durchführbarkeit der Vorschläge immer starken Zweifeln begegnen. Das mathematische Pensum der höheren Schulen ist bereits ein so gewaltiges, dafs jede weitere Vermehrung — ohne eine ausgleichende Beschränkung — kaum zulässig erscheint; es bewegt sich aufserdem in so stabilen Formen, dafs auch blofse Abänderungsvorschläge mehr oder weniger auf Widerspruch gefafst sein müssen. Unter diesen Umständen konnte sich der Verfasser der Einsicht nicht verschliefsen, dafs nur auf Grund einer etwas weiter ausgreifenden Darlegung die Möglichkeit gegeben sei, über die berührten, nicht ganz unbegründeten Bedenken einigermafsen hinwegzuheben. Dies führte ihn indessen über das nächstliegende Ziel mehrfach hinaus und gab zu Erwägungen Anlafs, die mit dem Gegenstande als solchem nur noch wenig Berührungspunkte boten. Er sah sich zuletzt immer wieder vor die grundsätzliche Frage gestellt,

> *ob überhaupt die heutige, aus einer weit zurückliegenden Zeit hervorgegangene Praxis des mathematischen Unterrichts sich auf die Dauer werde aufrecht halten lassen — gegenüber den stetig wachsenden und teilweise auf ganz anderen Grundanschauungen beruhenden Forderungen der Neuzeit.*

Wiewohl nun ein zwingender Grund nicht unmittelbar vorlag, eine Frage von solcher Tragweite hier in die Diskussion zu ziehen, so erschien dieselbe dem Verfasser doch sachlich und pädagogisch durchaus berechtigt. Sie war überdies nicht zum ersten Male an ihn herangetreten, und er glaubte um so weniger zögern zu sollen, sie einmal vor das Forum eines gröfseren Kreises zu bringen und eine Beantwortung von seinem persönlichen Standpunkte aus zu versuchen, da die lange gehegte Hoffnung, dafs ein Berufenerer ihm darin vielleicht zuvorkommen werde, ziemlich tief herabgestimmt war.

Selbstredend kann sich der Verfasser nicht anmafsen, eine so folgenschwere Frage hier in einer erschöpfenden, jeden Zweifel ausschliefsenden Weise behandeln zu wollen. Seine Argumente mögen im Einzelnen anfechtbar sein; wenn sie nur im Ganzen das Richtige treffen und einer näheren Erwägung nicht unwürdig befunden werden. Von einem strikten Beweise kann ja ohnedies nicht die Rede sein bei Dingen, die wesentlich eine Sache der Selbsterfahrung bilden und aus der gesamten Situation mehr herausgefühlt als deduziert werden können.

Der Dualismus zwischen reiner und angewandter Mathematik.

C'est aux applications, qu'il convient
surtout de donner son temps et sa peine.
Lagrange.

Das Emporblühen der Naturwissenschaften beginnt mit der Einführung des Experiments, der sich dann als ein weiterer und vielleicht als der gröfste Fortschritt ihre Verbindung mit der Mathematik anschlofs. Durch diese Vereinigung von prüfender Beobachtung und folgerichtig fortschreitender Entwickelung bekamen die Naturwissenschaften erst eine weltgeschichtliche Bedeutung. Insbesondere wurde seitdem ihre Methode vorbildlich für jede andere Art historischer Forschung. Aber auch umgekehrt empfing die reine Mathematik die mächtigsten Impulse von seiten der Naturwissenschaften; es waren vorwiegend naturwissenschaftliche Probleme, welche für die Newton, Lagrange, Laplace, Gaufs u. A. den Anstofs zu ihren bahnbrechenden mathematischen Arbeiten lieferten. Unstreitig beginnt mit der Aufstellung der Analysis des Unendlichen die bedeutendste Epoche der reinen Mathematik, welche damit die Hauptschwierigkeit, welche der theoretischen Naturerkenntnis entgegenstand, überwunden hat, die Schwierigkeit, das in der Natur waltende Gesetz der Kontinuität *(non datur saltus in natura)* durch Zahlenbegriffe darzustellen. Auch dieser vollendetste und fruchtbarste Zweig der Mathematik hat sich demnach wesentlich aus den Bedürfnissen der Naturforschung — insbesondere der Astronomie, analytischen Mechanik und Physik — entwickelt; er erscheint in Idee und Methode als der wahre Ausdruck des Naturprozesses. — Noch inniger zeigt sich dies Ineinandergreifen von Theorie und Praxis natürlich in den Anfangsstufen des mathematischen Denkens, und manche geistig hochstehende Völker, wie beispielsweise die Römer, haben sich niemals recht zum Begriffe der reinen Gröfse zu erheben vermocht. Einen sprechenden Beweis hierfür liefert u. A. die römische Minutienrechnung, der bekanntlich nicht die abstrakte Einheit, sondern der As (ursprünglich eine Kupfermünze von bestimmtem Gewicht) mit seinen Unterabteilungen (Unciae, Sicilici, Scripuli) zu Grunde liegt, die aber selbst in dieser anschaulichen Fassung noch ein wahres Kreuz für die römische Schul-Jugend gebildet zu haben scheint. Die launigen Verse des Horaz *(de arte poet., 325)* entwerfen davon ein drastisches Bild.

Bei dieser ebensosehr in der Sache wie in der geschichtlichen Entwickelung begründeten Zusammengehörigkeit der reinen und angewandten Mathematik ist es nun eine mindestens unerwartete Erscheinung, dafs allmählich eine so schroffe Scheidung zwischen *mathesis pura* und *mathesis applicata* eintreten konnte. Denn, wenn auch zugegeben werden mufs, dafs die Lehren der reinen Mathematik einen grofsen Wert in sich selbst haben, und dafs mit dem Anwachsen der Wissenschaft eine Teilung der Arbeit auf die Dauer sich nicht abweisen liefs, so konnten diese Gründe doch immer nur für den engern fachwissenschaftlichen Betrieb auf Universitäten u. s. f. mafsgebend sein. Aber den Gegensatz zweier Disziplinen, die eine natürliche Einheit bilden, auch in die Schule hineinzutragen und zwar so, dafs gerade der für die Zwecke der allgemeinen Bildung geeignetste Teil kaum noch geduldet wird, ist eine Verirrung — fast noch ärger, als wenn man auf sprachlichem Gebiete die Jugend mit den dürren Regeln der Grammatik abfinden wollte.

Jedenfalls ist die einseitige Hervorhebung des formalen und Zurückdrängung des realen Elements im mathematischen Unterrichte pädagogisch eine so auffallende Thatsache, dafs man eine besondere Erklärung für sie suchen mufs. Unserer unmafsgeblichen Ansicht nach ist dieselbe mehr ein Werk des Zufalls, als das Resultat einer aus dem Wesen der Sache entsprungenen und nach pädagogischen Grundsätzen geleiteten Entwickelung. So sehen wir zum ersten Male unter dem Einflusse der älteren Akademie und insbesondere nach dem Auftreten Euklids, eines erklärten Anfängers platonischer Grundsätze, nicht blofs ein Vorherrschen der formalen Mathematik, sondern eine fast völlige Abkehr von der Welt der Erfahrung. Es war dies eine notwendige Konsequenz der platonischen Ideenlehre; auch die mathematische Idee (*εἶδος*) wurde als das allein Wifsbare und Wirkliche, als das Gemeinsame im Mannigfaltigen betrachtet und demgemäfs geschätzt. — Zum zweiten Male begegnen wir einer ähnlichen, aber noch intensiveren Einwirkung der Zeitphilosophie auf die allgemeine Denkweise im Ausgange des vorigen und zu Anfange unseres Jahrhunderts. Die grundlegende Stellung, welche den Erkenntnissen der reinen Mathematik (wegen ihres apriorischen, apodiktischen und intuitiven Charakters) im Systeme Kants zugefallen war, konnte — bei dem lange Zeit alle Lebensgebiete beherrschenden Einflusse der Kantischen Ideen — nicht verfehlen, auch auf die kleineren Verhältnisse der Schule, auf die Gestaltung des mathematischen Unterrichts ihre specifische Wirkung auszuüben. Dazu kam das grofse Ansehen der Euklidischen Mathematik als des Urtypus jeder streng wissenschaftlichen Forschung und insbesondere die Bedeutung dieses Systems für die fernere Ausbildung und Vollendung der formalen Logik. In der reinen Mathematik glaubte man infolge aller dieser Umstände die beste Schule der praktischen Logik gefunden zu haben, vor allen anderen Disziplinen berufen, die Jugend an eine strenge Zucht des Denkens zu gewöhnen. — Diese Glorificierung der reinen Mathematik fiel nun aber gerade in jene Zeit, in welcher man an einen festeren Ausbau des höheren Schulwesens überall in Deutschland Hand anlegte. Es war deshalb kaum zu verwundern, dafs der Mathematik in dieser neuen Organisation diejenige Stellung angewiesen wurde, welche sie im Bewufstsein der damaligen Zeit hatte. Es fiel so der Mathematik die zwar ehrende, in vieler Beziehung aber auch recht dornenvolle Aufgabe zu, das heranwachsende Geschlecht — schon von zarter Jugend an — in das Reich des abstrakten Denkens einzuführen. Der mathematische Unterricht schlug damit eine Richtung ein, auf der er im wesentlichen noch jetzt beharrt, trotzdem die Bedenken, welche namentlich vom pädagogischen Standpunkte aus dagegen sprechen, nicht eben fern liegen und von der Erfahrung vollauf bestätigt werden. Ganz davon abgesehen, dafs das zu frühe Spezialisieren, es sei auf welchem Gebiete es wolle, schon dem Begriffe der allgemeinen Bildung widerstreitet, so besitzt die Jugend auch nach ihrem ganzen Naturell wenig Empfänglichkeit für alles abstrakt Wissenschaftliche; ihr Denken klammert sich noch überall an die greifbare, reale Erscheinung. Der logische Fortschritt geht allerdings vom Abstrakten zum Konkreten; aber die psychologische Entwickelung nimmt den umgekehrten Weg vom Anschauen zum Denken.

Eine solche ausschliefsliche Betonung der formalen Seite der Mathematik liegt aber auch weit ab von dem Wege, welchen schon vor länger als drei Jahrhunderten die eigentlichen Schöpfer realistischer Schulbildung dem mathematischen Unterrichte vorgezeichnet hatten.

Melanchthons Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Insbesondere war es Melanchthon, der rastlose Vorkämpfer des Humanismus, der gleichzeitig auch für ein energisches Betreiben der Realwissenschaften mit seinem ganzen Ansehen und dem glücklichsten Erfolge eintrat [1] — ein Verdienst, das in unseren Tagen leider fast ganz vergessen zu sein scheint, jedenfalls stark unterschätzt wird [2]. Zunächst muss hervorgehoben werden, dafs Melanchthon durch eine ausgedehnte litterarische Thätigkeit (durch mehr als 50 teilweise sehr umfassende und auf eigener Forschung beruhende Schriften) sowie in zahlreichen akademischen Reden an der Einführung, Fortbildung und Verbreitung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts einen lebhaften persönlichen Anteil nahm. Die von ihm verfafsten Werke — welche mit der alten aristotelischen Naturauffassung zwar nicht völlig brachen, aber sie doch weit überholten — bildeten fast im gesamten Deutschland die Grundlage des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und fanden noch 200 Jahre später, nachdem sie inhaltlich zum grofsen Teile veraltet waren, die volle Anerkennung der Fachmänner. So wird in der von Titius 1760 zu Wittenberg gehaltenen Gedächtnisrede in bezug auf die „*initia doctrinae physicae*" rühmend hervorgehoben: *insignis ordo, acutum ingenium, summa perspicuitas, varia eruditio.* Auch entnehmen wir derselben Rede, wie nachhaltig die Anregungen waren, „*ut ab illo inde tempore mathematum et physices studia in hac nostra academia prae omnibus fere artibus et scientiis maxime viguerint.*" Diese Stelle berechtigt aber nicht — weder in ihrem Wortlaute noch in ihrem Zusammenhang — zu der viel verbreiteten Annahme, Melanchthon habe nur einseitig die Interessen der Universität gewahrt und nur in diesem engern Kreise sich der Sache der exakten Wissenschaften angenommen. Er kann es nicht oft genug wiederholen, dafs darin schon in früher Jugend ein sicherer Grund gelegt werden müsse, und weist dabei auf das Beispiel der Griechen hin (*cujus elementa tunc omnibus, qui liberaliter instituebantur, statim a teneris tradi solebant*).

---

[1] Vergl. insbes. Bernhardt, Wittenberg 1865.
[2] S. Cantor Vorl. über Gesch. der Math., II B.

Ebenso haltlos erscheint die andere landläufige Behauptung, dafs die von Melanchthon gestellten Anforderungen den Namen einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung wohl kaum verdienten, dafs sie vielmehr geeignet wären, „ein halb spöttisches, halb mitleidiges Lächeln hervorzurufen.“[1] Allerdings hatten Mathematik und Naturwissenschaften in den Lateinschulen keinen Platz; sie gehörten auch nach der damaligen Schulordnung gar nicht zum Trivium; eine desto gewissenhaftere Behandlung erfuhren sie jedoch im Quadrivium. Schon aus der ganzen Anlage und Beschaffenheit der von Melanchthon für diese Stufe teils verfafsten und übersetzten, teils blofs kommentierten oder empfohlenen Werke kann dies mit Sicherheit geschlossen werden. In den Reden *de gradibus discentium* und *de ordine discendi* bezeugt es Melanchthon aber auch selbst: „Hierauf lernen sie Mathematik und Physik kennen und nicht etwa nur oberflächlich. Die Jugend verweilt auf dieser Stufe längere Zeit, bis sie ganz vertraut damit ist und das Urteil durch fortgesetzte Übung sich gekräftigt hat; dann erst gestattet man den Übergang zu den Universitätsstudien.“

Mit wenigen, treffenden Worten kennzeichnet Melanchthon die formal bildende Kraft mathematischer Studien; sie befördern das methodische Denken, bilden das Urteil und sichern vor Irrwegen (*Magnam vim et hoc habet, multum operae collocare in iis artibus, quae plurimum habent demonstrationum . . . Neque hoc eo dico, quod putem in divinis oraculis aut ubique requirendas esse demonstrationes, sed consuetudo methodi prodest studiosis et format judicia.*) Indessen ist Melanchthon weit davon entfernt, die Mathematik in ihrer formal logischen Bedeutung aufgehen zu lassen — und damit kommen wir auf die Hauptfrage zurück — er ist vielmehr von der Überzeugung durchdrungen, dafs diese ihre wahre und eigentliche Bestimmung erst in den Anwendungen findet (Corp. Reform., II, 819): „Jemand, der nur der reinen Gröfsenlehre sich widmet, ohne sie für andere Wissenschaften in Anwendung zu bringen, scheint mit seiner Weisheit nur eitles Spiel zu treiben und aus seinem Wissen keinen rechten Nutzen zu ziehen.“ Als würdigstes Objekt mathematisch-naturwissenschaftlicher Betrachtung erscheint ihm die Astronomie, der er sich selbst mit besonderer Vorliebe widmete und die er in ihrem ganzen Umfange auch beherrschte. Seine kosmische Weltanschauung fafst er mehrmals zusammen in das Wort Platos: *θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν*: *hoc est, ut ego quidem interpretor gubernare omnia et certissima lege cursus coelestes et totam naturam regere.* Wiederholt fühlt er sich veranlafst, die Naturwissenschaften gegen den Vorwurf des Unglaubens in Schutz zu nehmen: „Solche leben nicht blofs im Zwiespalte mit der menschlichen Natur, welche recht eigentlich für die Betrachtung von Gottes Schöpfung eingerichtet ist, sondern sind auch Gottesleugner (*θεόμαχοι*)“. An einem anderen Orte kommt er zu dem Schlusse: *ut haec doctrina primum sit iter ad agnitionem dei, deinde ut monstret vitae praesidia.*

Dieser Ideal-Realismus bildet überhaupt den Grundton in der gesamten Denkweise Melanchthons; er klingt hindurch ebensosehr auf dem Gebiete der Sprache wie auf dem der Naturwissenschaft (*nam efficacissime commendari linguae studium utilitate judico*). Weniger in der Grammatik, als in der Aneignung der Sprache selbst, des Geistes und des

[1] Vergl. Cantor l. c.

Gedankeninhalts der altklassischen Litteratur sucht er den Schwerpunkt des humanistischen Studiums (*praeter loquendi rationem etiam rerum graecarum scientiam delibaret juventus*). Durch die Herausgabe und Erklärung des Arat (Arati Solensis Phaenomena, 1521) erhielt dieser Standpunkt einen prägnanten Ausdruck.

Die Verhältnisse der Gegenwart.

Der eigentümliche Zug in der pädagogischen Reform Melanchthons liegt hiernach in der Forderung einer unmittelbare Hingabe des Lernenden an ein reales Objekt. Mit feinem pädagogischen Takte hatte er nicht das Zurückziehen auf die abstrakten Regeln der Mathematik und Grammatik als das letzte Ziel des Jugendunterrichts hingestellt, sondern das unmittelbare Eingehen auf Natur, Leben und Sprache. Wenn nun auch das Melanchthonsche Bildungsideal in der Folgezeit — welche von ganz anderen, politischen und religiösen Interessen beherrscht war — nicht zur ruhigen Entfaltung gebracht werden konnte, so ist es doch eine bemerkenswerte Erscheinung, dafs die nämlichen Ideen fast an jedem bedeutenden Wendepunkte pädagogischer Entwicklung auftreten und auch in der Gegenwart wieder mehr und mehr zu erstarken beginnen. — Am jähsten war nach dem Tode Melanchthons der Rückschlag auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete, weniger fühlbar an den Universitäten, als an den höheren Schulen. Die mangelnde Fürsorge des Staates führte stufenweise, aber unaufhaltsam zum Verfall dieser Unterrichtszweige, die in den meisten Schulen nur noch ein ganz kümmerliches Dasein fristeten. Als nun später mit einer zeitgemäfsen Umgestaltung des höheren Schulwesens Ernst gemacht wurde, war der Faden mit der Melanchthonschen Reform längst zerrissen. Die von den Universitäten ausgehende geistige Strömung, die von einer gewissen idealistischen Überspannung nicht frei war, entschied auch über das Los des mathematischen Unterrichts, der von da ab im Schulorganismus ungefähr eine ähnliche exceptionelle Stellung erhielt, wie die Mathematik in der transscendentalen Ästhetik Kants. An eine Abwehr seitens der Schule selbst war nicht zu denken. Schon die primitive Art, wie damals die Mathematik an den meisten höheren Schulen vertreten war, schlofs eine selbständige Einwirkung der Schule aus. Der Unterricht lag fast ausnahmslos in den Händen von Lehrern, die ohne alle fachwissenschaftliche Bildung, nur durch eine Tücke des Schicksals zum Amt eines „Mathematikus“ gelangt und also buchstäblich genötigt waren, die Mathematik aus dem Stegreife zu dozieren. Was blieb ihnen hiernach übrig, als mathematische Lehrbücher Satz um Satz von den Schülern auswendig lernen zu lassen, und wie hätten sie sich berufen fühlen können, auch der angewandten Mathematik zu ihrem Rechte zu verhelfen, von deren Existenz sie wohl kaum eine Ahnung hatten? Die Stimmen eines Herder, Lagrange, Littrow — um nur einige der glänzendsten Namen zu nennen — welche vor diesem einseitigen Kultus der *mathesis pura* eindringlich warnten, verhallten ebenso, wie die Worte Melanchthons vergessen waren.

Auch, nachdem die oben berührten Mifsstände zum grofsen Teile gehoben waren und vielfach Männer von hohem wissenschaftlichem Rufe an den höheren Schulen lehrten, blieben die Verhältnisse des mathematischen Unterrichts doch im wesentlichen bestehen, nur dafs er jetzt im fachmännischen Geiste, nach festem Plane und wissenschaftlichen Prinzipien erteilt wurde — womit übrigens den unvergänglichen Verdiensten in keiner Weise zu nahe getreten werden soll, welche sich namentlich Preufsen, das darin lange Zeit als Vorbild allen anderen deutschen Staaten voranging, um die Förderung des rein mathematischen Unterrichtes erworben hat.

Die Anhänger eines ausschliefslich oder vorwiegend formalen Betriebs der Mathematik sind heute fast noch ebenso zahlreich, wie zur Zeit der Wiederherstellung eines geordneten mathematischen Unterrichts — trotz aller schlimmen Erfahrungen. Dafs doch immer nur ein verhältnismäfsig kleiner Bruchteil dem Mathematikunterrichte ein frisches, lebendiges Interesse entgegenbringt, ist eine Erscheinung, die einem unbefangenen Lehrer nicht lange verborgen bleiben kann; allein man findet sich nur allzuleicht damit ab, indem man den Mifserfolg einfach der Denkträgheit der Schüler aufbürdet. Zwar soll keineswegs geleugnet werden, dafs es manchem Lehrer durch unerschöpfliche Geduld, noch mehr aber durch beharrliche Anwendung von Strenge gelingt, sich befriedigende Erfolge zu erzwingen, und dafs besonders bevorzugte Lehrer es verstehen, auch zuweilen in einem etwas weiteren Schülerkreise Liebe zur Sache zu erwecken — allein im Ganzen wird man zugeben müssen, dafs dies nur Ausnahmen sind und nicht in Abrede stellen können, dafs bei Weitem die Mehrzahl der Schüler, sobald sie dem äufseren Zwange enthoben ist, auf der Universität oder im Leben nur noch mit sehr gemischten Gefühlen an die Zeit ihrer mathematischen Bestrebungen zurückdenken. Aber nicht Mangel an Energie des Denkens, sondern Mangel an einem geeigneten, fesselnden Stoffe ist es, der u. E. die Jugend meist von mathematischen Studien zurückstöfst.

Soll deshalb erreicht werden, dafs die Mathematik nicht blofs von aufsen an den Schüler herantritt, sondern als ein sicheres geistiges Besitztum von ihm aufgenommen wird, das ihn auch ins Leben hinaus begleitet, so mufs sie ihm in einer Form dargereicht werden, welche dem jugendlichen Geiste allein zusagt. Mithin darf nicht die Theorie als der höchste Zweck des mathematischen Unterrichts betrachtet werden, sondern die Anwendung, wodurch die Theorie erst Leben und Farbe annimmt. Damit soll durchaus nicht etwa einer unwissenschaftlichen Behandlung das Wort geredet werden; nur mufs die Theorie auf das knappste, zulässige Mafs eingeschränkt und darf blofs soweit herangezogen werden, als der logische Zusammenhang oder die künftige Anwendung es unerbittlich verlangen — auch wenn darüber das theoretische System zuweilen eine etwas ungelenke Gestalt annehmen sollte. Für den Mathematiker von Fach mag ja in den architektonischen Elementen (dem Ebenmafse der Formen, der Feinheit der Übergänge und Wendungen u. s. f.) noch ein ganz besonderer Reiz liegen; die Jugend aber wird sich für solche ätherische Dinge nicht leicht begeistern. — Aufser dieser psychologischen hat unsere Frage aber auch eine eminent praktische Seite. Die Naturwissenschaften sind während der letzten Jahrzehnte zu einer Macht herangewachsen, welche berufen erscheint, die äufseren Lebensbedingungen und die sozialen Verhältnisse der Menschen von Grund aus umzugestalten. Allgemein herrscht das Gefühl, dafs Wissenschaften, welche mit dem Wohl und Wehe des modernen Staats so eng verflochten sind, bis zu einem gewissen Grade Gemeingut aller Gebildeten und ganz besonders derjenigen werden müssen, deren Händen die Verwaltung des Staats vorzugsweise anvertraut wird, und deren Einflufs auf den weiteren Gang der Entwickelung wesentlich auf ihrer wissenschaftlichen Überlegenheit beruht. Über die prinzipielle Berechtigung dieser Forderungen läſst sich kaum streiten, um so mehr aber über die

Mittel zur Abhülfe.

Als wirksamste Maſsregel zur Hebung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts glaubt man vor Allem eine möglichst weitgehende, der Bedeutung der exakten Wissenschaften entsprechende

Stundenvermehrung

empfehlen zu müssen und nur selten erhebt sich die öffentliche Diskussion über dies zwar auf den ersten Blick einleuchtende, aber zunächst doch nur ganz äuſserliche Auskunftsmittel, das überdies von einer unzutreffenden Auffassung ausgeht. Denn augenscheinlich werden dabei zwei wohl zu unterscheidende Gesichtspunkte vermengt, nämlich die Bedeutung der Mathematik als Wissenschaft und die Bedeutung als Gegenstand der allgemeinen Bildung. Kommt, wie es hier der Fall ist, nur die letztere in Frage, so muſs selbstredend bei Zumessung der Stundenzahl die gebührende Rücksicht auf alle übrigen Unterrichtszweige genommen werden; es kann dann immer bloſs die *relative* Wichtigkeit der Mathematik, als Glied des Ganzen, in die Wagschale fallen. Aber ganz hiervon abgesehen, darf eine Verstärkung der Stundenzahl gewiſs nur als letzte Zuflucht in Betracht gezogen werden. Zuerst ist die Vorfrage zu entscheiden, ob die berührten Ausstellungen im mathematischen Unterrichte nicht etwa wesentlich anderen Quellen entstammen, als der angeblich zu dürftigen Stundenzahl und ob also der Hebel nicht ganz wo anders anzusetzen ist.

Der Verfasser bekennt sich rückhaltslos zu der letzten Ansicht, wie aus seinen obigen Darlegungen wohl zur Genüge hervorgeht und beschränkt sich darauf, seinen Standpunkt hier nochmals kurz zusammenzufassen:

1. eine durchgreifende Umgestaltung des mathematischen Unterrichts erscheint aus pädagogischen und sachlichen Gründen als ein unabweisliches Bedürfnis.
2. dieselbe hat nach zwei Seiten hin zu erfolgen,
   a) durch möglichst enge Begrenzung und sorgfältige Sichtung des rein theoretischen Stoffs,
   b) durch möglichst starke Heranziehung belehrender und das Interesse an der Theorie belebender Anwendungen.

Diese Sätze sind bisher nur im allgemeinen zu begründen versucht worden; sie rufen aber notwendig noch zwei weitere Fragen hervor, die wir soweit es der Raum gestattet, ebenfalls zu beantworten haben. Zunächst:

Nach welcher Richtung und in welchem Grade könnte eine Entlastung des mathematischen Lehrpensums eintreten, ohne etwas *Wesentliches* von seinem wissenschaftlichen Gehalte aufzuopfern?

Detaillierte Vorschläge können hier allerdings weder gemacht noch verlangt werden. Aber als leitenden Gesichtspunkt wird man festhalten können: Es ist *Alles auszuscheiden, was nicht zum Aufbau des Systems oder für die Zwecke wirklicher Anwendung* absolut unentbehrlich erscheint. Dahin gehört also der ganze Ballast von Lehrsätzen, Folgesätzen, Zusätzen, Aufgaben, Formeln, welche allmählich in die (auch für die Hand der Schüler bestimmten) Lehrbücher übergegangen sind und gewohnheitsmäfsig mitgeschleppt werden, obwohl sie meist nur ein ganz untergeordnetes spekulatives oder formales Interesse darbieten.

Indessen nicht blofs durch Beseitigung von Unwesentlichem, sondern auch durch angemessene Konzentration des theoretischen Materials kann gar manche Stunde erspart und ein gröfserer Raum für die Anwendung gewonnen werden. So verschlingt beispielsweise die planimetrische Berechnung der Zahl π, der regulären Polygone, überhaupt der ganzen Kreisrechnung eine Menge Zeit, während alle diese Dinge mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln sich in ungleich kürzerer Frist ebenso sicher erledigen lassen. Mancherlei, was durch Zusammenlegung zwar entbehrlich wird, aber doch nur ungern vermifst würde, könnte sehr wohl als Übungsstoff den Hausarbeiten oder Extemporalien zugewiesen werden. — In den Bereich der Konzentration gehört im gewissen Sinne auch zweckmäfsiges und richtiges Definieren. Die Mathematik kann, wie schon bei einer früheren Gelegenheit bemerkt wurde, ihre Begriffe in der verschiedensten Weise bestimmen, wenn nur immer die hinlängliche Zahl wesentlicher, konstitutiver Merkmale dabei verwendet wird. Je nach der Wahl der Merkmale kann sich aber die weitere Entwicklung erheblich vereinfachen oder erschweren. Ein Beispiel bietet die oben (S. 42) gegebene, von der gewöhnlichen Definition abweichende Begriffsbestimmung des natürlichen Logarithmensystems, durch welche allein es ermöglicht wurde, wenigstens die Elemente der allgemeinen Logarithmentheorie auch ohne Analysis festzustellen. — Ein weiteres Beispiel liefert die Definition der Potenz, welche durch ihre Unzweckmäfsigkeit — auf die wir uns jedoch hier nicht näher einlassen können — zu grofsen Weiterungen führt. — Man kann aber auch die Definition zu eng fassen und dadurch ebenfalls Anlafs geben zu einer schwerfälligen und umständlichen Behandlung, indem jeder weitere Fortschritt auch allemal eine Erweiterung der Definition und ein fortwährendes Zurückgreifen nötig macht. — Ein lehrreiches Beispiel tritt uns schon bei den Grundoperationen entgegen. Werden nämlich die Multiplikation und Division sofort mit der ersten Erweiterung des natürlichen Zahlengebiets (also mit Einführung der gebrochenen Zahlen) in der erforderlichen Allgemeinheit definiert, so ergeben sich nicht blofs die Regeln der Bruchrechnung ganz ungezwungen, sondern auch die viel heiklern Gesetze der algebraischen Vorzeichen und der allgemeinen Potenzen, wenn nur im letztern Falle nicht eine absolute sondern eine relative Definition der Potenz (im Anschlusse an die Potenzreihe, wohin doch schliefslich der ganze Verallgemeinerungsprozefs drängt) zu Grunde gelegt wird. — Dafs aufserdem eine zu eng gefafste Definition leicht zu Zirkelschlüssen verleitet, zeigt die Art, wie die oben erwähnten Vorzeichengesetze vielfach begründet werden. Alle mathematische Deduktion mufs an die Begriffsbestimmung anknüpfen. Man darf aber nicht von einer zu engen Definition ausgehen, daraus Sätze ableiten, sodann diesen Sätzen (statt die Definition zu erweitern) eine Allgemeinheit geben, welche ihnen an sich nicht innewohnt, um schliefslich auf diese nur erschlichene Allgemeinheit wieder neue Schlüsse zu bauen. — Ein weiterer und wohl der wichtigste Fall, in welchem eine starke Zusammenziehung zulässig und geboten erscheint, wird weiter unten besonders besprochen werden. Nur auf den mathematischen

Teil der vorliegenden Abhandlung möchte der Verfasser an dieser Stelle noch kurz hinweisen. Denn auch die obigen Aufsätze sollen eine bescheidene Beisteuer liefern zur sachlichen und methodischen Konzentration. Insbesondere dürfte das einfache, vielseitig anwendbare und wohl auch noch einer weiteren Ausbildung fähige Prinzip der Zerlegung in konvergente Faktoren einige Beachtung verdienen.

Besondere Aufmerksamkeit verlangt ferner das Beweisverfahren. Sehr oft können nämlich grofse Umwege vermieden werden, wenn man sich entschliefst, die schwere Rüstung der syllogistischen Beweise fallen und anschauliche Beweise an die Stelle treten zu lassen — ein vom wissenschaftlichen Standpunkte aus nicht blofs unanfechtbares, sondern fast immer entschieden vorzuziehendes Verfahren. Denn u. E. mufs jedem anschaulichen Beweise, wenn er nur auch wirklich beweisende Kraft hat, schon deshalb ein höherer Rang als dem schulgerechtesten logischen Beweise zuerkannt werden, weil er uns unmittelbar in den Realgrund der Erscheinung einführt, während der syllogistische Beweis uns nur mit dem in der Regel weit äufserlicheren logischen Grunde bekannt macht. Selbst dem Beweise durch (niedere) Induktion wird man, ohne darum die Mathematik zu degradieren, einen etwas weiteren Spielraum zugestehen können. Denn es ist nicht wohl einzusehen, warum man grundsätzlich eine Beweisart verschmähen soll, auf die man in anderen, noch dazu verwandten Wissenschaften fast ausschliefslich angewiesen ist und welcher der menschliche Geist seine erhabensten Entdeckungen verdankt. Nur darf man nicht zu freigebig damit umgehen und blofs in solchen Fällen davon Gebrauch machen, wo die kleine Einbufse an logischer Strenge durch anderweitige Vorteile — Umgehung ungewöhnlicher Schwierigkeiten, Zeitgewinn u. dgl. — reichlich aufgewogen wird. Überhaupt erscheint es geraten, in einem für die Jugend bestimmten Unterrichte von der strengen Observanz hie und da etwas nachzulassen. Die reine und angewandte Mathematik bieten einen solchen Überflufs an streng logischem Material, dafs dadurch der formal bildende Wert der Mathematik gewifs nicht herabgedrückt wird. Wenn zugegeben wird, dafs ein Quartaner oder selbst ein Primaner aufser Stande ist, ein so fein gesponnenes Gewebe, wie es schon in den einfachsten Zweigen der Elementarmathematik vorliegt, nach allen Seiten hin klar zu durchschauen, so wird es sich wohl auch verantworten lassen, gelegentlich dem gesunden Menschenverstande und der unmittelbaren Auffassung der Schüler einige Freiheit zu gestatten.

Von grofsem Belang und fast prinzipieller Bedeutung erscheint aufserdem die Frage, in welchem Umfange Konstruktionsaufgaben, ohne Beeinträchtigung wichtigerer Dinge, zu behandeln sind. Wenn man die modernen planimetrischen Lehrbücher durchmustert, denen jetzt regelmäfsig ausgedehnte Aufgabensammlungen beigegeben zu werden pflegen, so sollte man meinen, die Mathematik habe in der That nichts Besseres zu thun, als Dreieckskonstruktionen nachzugrübeln. Das Thema wiederholt sich schier in endlosen Variationen — und man überbietet sich förmlich in der Auffindung neuer, möglichst spitzfindiger und widernatürlicher Bedingungen. Ob solche nüchterne, inhaltsleere Übungen geeignet sind, den Sinn für Mathematik zu entwickeln und das Interesse am Gegenstande zu stärken, möchte wohl etwas mehr als fraglich sein, ebenso, ob der Erfolg mit dem Kraftaufwande einigermafsen im Verhältnisse steht. Schon vom Standpunkte der Konzentration aus ist zu mifsbilligen, dafs neben der Trigonometrie, in welcher das Dreieck κατ' ἐξοχήν zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wird, derselben Aufgabe noch an einer anderen Stelle eine erschöpfende Behandlung zuteil wird — so überschwänglich man auch von der mathematischen Bedeutung des Dreiecks denken mag. Aber auch die dabei angewendete synthetische Methode hat ihre grofsen Bedenken. Allerdings ist dem Schüler Gelegenheit zu geben, eine gewisse Einsicht in das Wesen dieser Methode zu erlangen. Indessen diese Gelegenheit wird schon ausreichend geboten durch die Lehrsätze selbst und die sog. Fundamentalaufgaben, welche das ganze Gebiet der Planimeterie durchziehen, vorausgesetzt, dafs beide in heuristischer Weise behandelt und dem Schüler nicht etwa in dogmatischer Form vorgeführt werden. Darüber hinauszugehen ist wenigstens auf der unteren und mittleren Stufe, unserer Überzeugung nach, nicht ratsam. Die synthetische Lösung jeder etwas schwierigen Aufgabe setzt bereits eine Sicherheit des Urteils und Schlagfertigkeit des Wissens voraus, wie sie höchst selten, allenfalls bei Elite-Schülern, angetroffen werden. Zudem ist in zahlreichen Fällen die Lösung immer an eine glückliche Eingebung, oder an besondere Kunstgriffe gebunden, die sich selbst bei dem Fachmann nicht allemal willig einfinden. So tritt denn bei der überwiegenden Mehrzahl der Schüler an die Stelle ruhig fortschreitender Erwägung meist ein planloses, blind umhertastendes Versuchen. Nach den eigenen Erfahrungen des Verfassers werden deshalb synthetische Konstruktionen am zweckmäfsigsten der obersten Stufe vorbehalten — sowohl, weil hier die mathematische Reife der Schüler bereits erheblich vorgeschritten ist, als auch, weil dann durch die Möglichkeit einer gleichzeitigen trigonometrischen, algebraisch und selbst analytisch geometrischen Behandlung schon von selbst auch der Weg zur synthetischen Lösung mit regerem Interesse gesucht und mit gröfserer Leichtigkeit gefunden wird. — Wesentlich günstiger liegen ohne Zweifel die Verhältnisse bei der analytischen Methode, deren vorherrschende Eigentümlichkeit (aus Gründen, welche der mathematischen Logik angehören) die Anwendung der Rechnung bildet. Wie sie in der Wissenschaft die eigentliche Methode des Erfinders darstellt, so scheint sie auch für didaktische Zwecke bei weitem die vorzüglichere. Es wird hier von den Daten durch eine streng logische Gedankenkette, ohne Sprung, zu den Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken fortgeschritten. Die gefundene Formel hat dabei einen Grad von Allgemeinheit welche die lästige Untersuchung der Einzelfälle, die Diskussion und Determination teils entbehrlich macht, teils wesentlich erleichtert. Daher sind es vorzugsweise Aufgaben aus der Arithmetik (Textgleichungen u. s. f.), aus der algebraischen Geometrie, den beiden Trigonometrieen, der rechnenden Stereometrie sowie der analytischen Geometrie, welche das angemessenste Übungsmaterial für die Schule darbieten. Alle diese dem Kalkul unterworfenen Aufgaben gestatten eine Behandlung nach festen, unmittelbar in der Sache selbst liegenden Regeln und nur durch eine Bearbeitung derselben nach diesen immer wiederkehrenden (weil aus rein logischen Motiven hervorgehenden) Gesichtspunkten gelangt der Schüler allmählich zu einer selbständigen mathematischen Gedankenbildung.

Es bleibt nun noch die zweite Frage kurz zu besprechen, welche Gebiete nämlich für die Anwendungen der Mathematik vorzugsweise in betracht zu ziehen sind. In erster Linie müssen selbstverständlich die Forderungen des bürgerlichen und sozialen

Lebens Berücksichtigung finden (also namentlich auch Alters-, Invaliditäts-, Versicherungsrechnung u. s. f.) Von wissenschaftlichen Disziplinen bieten sich dar und zwar mit einem schon in den untersten Klassen vielfach verwendbaren Stoffe: Physik, Chemie, Krystallographie, praktische Geometrie,[1] Chorographie, Geodäsie, Chronologie[2] und ganz besonders mathematische Geographie, die an allgemeinem Bildungswerte hinter der Physik nicht zurücksteht, sobald sie auf etwas breiterer Grundlage angelegt wird.[3]

Alle diese Gebiete liefern eine reiche Ausbeute, so dafs man eher in die Lage kommt, die Masse des zuströmenden Stoffes abwehren, als ihn suchen zu müssen. Sicher bietet er aber dem jugendlichen Geiste eine andere Nahrung als immer nur trockene, abgezogene Begriffe. Auch die Einkleidung der Aufgaben ist nicht gleichgiltig, ja man kann in dieser Beziehung nicht wählerisch genug sein. Je weiter die Schüler in ihrer allgemeinen geistigen Entwickelung fortschreiten, desto mehr mufs auf einen bedeutenden Inhalt und eine gefällige Form Bedacht genommen werden. Man kann beispielsweise zur Veranschaulichung der relativen Bewegung die bekannte Aufgabe von dem Hasen, welcher von einem Hunde verfolgt wird, benutzen; es läfst sich aber auch die (mittlere) synodische Bewegung des Monds der Betrachtung zu Grunde legen. Die eine Aufgabe erfordert nicht weniger mathematische Überlegung als die andere. Aber der Inhalt der einen ist völlig nichtssagend, während die andere den Schüler mit einer der wichtigsten Naturerscheinungen (dem Verlaufe der Mondwechsel) bekannt macht. — Die Sache spricht für sich selbst. Nur aus Aufgaben mit einem wissenswerten Inhalte kann der Schüler Anregung schöpfen; nur so kommen Ideen in Umlauf, die zu weiteren mathematischen Studien anspornen. Was in aller Welt hat der Wettlauf zwischen einem Hasen und einem Hunde, oder die mathemathischen Meditationen von Eierhändlerinnen, die ihre Waare zu Markte bringen, mit der Bildung der Jugend zu schaffen? Rechnungen aus der niederen Sphäre des Lebens passen nun einmal nicht mehr für Jünglinge, bei dem man schon einen etwas höher entwickelten Sinn für Form und Inhalt voraussetzen mufs. Eine Ausnahme machen selbstredend

---

[1] Verbunden mit Übungen im Gebrauch der Meßkette und des Meßtischs (oder noch besser des Theodoliten) zu Distanz-, Flächen- und Höhenmessungen.

[2] Die Chronologie findet u. E. ihre geeignetste Stelle im mathematischen Unterricht der höheren Lehranstalten, soweit es sich namentlich um die Entwickelung und mathematische Darstellung eines chronologischen Systems handelt. Ihre Grundlehren sind gewiß nicht bloß für den künftigen Historiker oder Astronomen von Wert; es liegt in ihr ein wichtiges Stück Kulturgeschichte, das sie über das engere fachmännische Interesse weit hinaus hebt. Bei maßvoller Behandlung, etwa bei Beschränkung auf die christliche, jüdische und muhammedanische Zeitrechnung, übersteigt sie auch in keiner Weise die Kräfte eines Primaners. Der Vorschlag verdient vielleicht um so eher Berücksichtigung, da die Chronologie auf Universitäten sich fast nur mit kritischer Untersuchung subtiler Einzelheiten befaßt, auf die kunstgerechte Entwickelung eines Systems sich aber kaum einläßt.

[3] Man darf sich dann allerdings nicht bloß auf eine wissenschaftliche Behandlung der beiden Fundamentalbegriffe, der geographischen Länge und Breite, beschränken, sondern muß auch mindestens Kenntnis der Hauptgestirne und ihrer wechselnden Erscheinungen, ferner eine genauere Erklärung der bei der Lektüre der alten Klassiker häufig vorkommenden Gestirnsphasen, sowie eine induktive Begründung der kopperniko-keplerschen Weltgesetze mit aufnehmen, wobei die mathematische Entwicklung selbstredend überall Hand in Hand zu gehen hat mit einfachen Beobachtungen, wie sie noch in allen älteren astronomischen Methoden vorzuherrschen pflegen, mit Bestimmungen am Erd- und Himmelsglobus, Zeichnungen und andern Mitteln der Veranschaulichung.

Aufgaben, die ein geschichtliches Interesse gewähren, etwa den griechischen, indischen, chinesischen Mathematikern entlehnt sind. Hier vergifst selbst der reifere Schüler die Dürftigkeit des Inhalts über die ansprechende, meist hochpoetische Form.

Das Gedeihen eines jeden Unterrichts mag im einzelnen Falle wesentlich durch die Persönlichkeit des Lehrers bedingt sein. Allein ein allgemeiner Aufschwung, jeder gröfsere Fortschritt im Gesamtzustande eines Unterrichtszweiges pflegt doch regelmäfsig, wie die Erfahrung lehrt, nur an hervorragende litterarische Erscheinungen sich anzuschliefsen. Der Erhebung folgt, fast mit Naturnotwendigkeit, ein vorläufiger Stillstand, eine Zeit der Assimilation, und dann ein allmählicher Niedergang, eine zunehmende Verflachung, als deren auffälligstes Symptom die litterarische Überproduktion bezeichnet werden darf. Original-Schriftsteller finden sich auf dem Felde der Schullitteratur noch ungleich seltener als auf dem der reinen Wissenschaft. Die grofse Verbreitung eines Schulbuchs spricht noch nicht unbedingt für seinen inneren Wert; es spiegelt sich darin oft nur der zufällig herrschende, aber keineswegs immer mustergültige Geschmack der Zeit. — Wie dem aber auch sein mag, Thatsache ist, dafs auch die mathematische Litteratur der Gegenwart an einer bedenklichen Einseitigkeit leidet, dafs sie vielfach eine Geistesleere oder doch eine Armut an eigentümlichen Gedanken zeigt, die nur einer erschöpften Litteraturperiode eigen ist. Die Gründe dieser Erscheinung liegen auf der Hand. Das ganze Gebiet der formalen Mathematik, soweit es in die Schule hineinreicht, ist in zahllosen Sammelwerken und Einzeldarstellungen fast bis zum Überdrusse bearbeitet. Wesentlich neue Gesichtspunkte dürften innerhalb der gezogenen Schranken auch beim besten Willen kaum noch zu entdecken sein. Statt nun aber die Mathematik aus ihren (in letzter Linie doch nur selbst angelegten) Fesseln zu befreien, statt aus dem unermefslichen Schatze ihrer Anwendungen immer neuen Gedankenstoff zuzuführen — woran selbst unter den jetzt gegebenen Verhältnissen nichts hindert — zieht man es vor, seine Kraft immer wieder an an längst abgethanen und bis zur Neige verbrauchten Dingen zu versuchen. An gediegenen, zum Teil klassischen Bearbeitungen einzelner Zweige der angewandten Mathematik, an einem reichen, wenn auch zerstreuten Materiale gebricht es nicht. Wenn nur auch der rechte Mann sich bald finden möchte, den zersplitterten Stoff zu sammeln, zu sichten, zu ergänzen und mit methodischem Geiste zu ordnen — sonst könnte nicht mit Ungrund der Vorwurf erhoben werden:

Non deest materies sed artifex.

Schlusswort.

Der Verfasser verhehlt sich keineswegs die Schwierigkeiten, welche einer jeden Neuerung auf schulwissenschaftlichem Gebiete, auch wenn sie weniger entscheidend wäre als die hier vorgeschlagene, sich entgegenstellen. Allein in einer Zeit, in welcher das gesamte Schulwesen sich regeneriert, wäre es geradezu unverständlich, wenn allein die Mathematik starr am Alten kleben wollte. — Dieser Ansicht hat der Verfasser in den vorstehenden Betrachtungen Ausdruck verliehen, indem er zugleich darzulegen versuchte, unter welchen Umständen die Mathematik — die nach Ursprung und Bestimmung eine durchaus praktische Tendenz hat — allmählich einen vorwiegend esoterischen Charakter angenommen hat und mehr zu einer Sache der Schule als des Lebens geworden ist. Wenn der Verfasser seinen Standpunkt zuweilen in etwas unumwundener Weise ausgesprochen hat, so wurde er doch stets von sachlichen Beweggründen und der Überzeugung geleitet, dafs es sich dabei um eine sehr ernste Frage des mathematischen Unterrichts handelt, die nur durch eine freimütige Erörterung dem Austrage näher gebracht werden kann.