1. Zur Bestimmung eines Punktes in einer Ebene bedient man sich der rechtwinkeligen oder schiefen Parallel-Koordinaten, der Polar- oder der trimetrischen Koordinaten. Ein Punkt ist auch durch die Winkel bestimmt, die durch die Verbindung desselben mit den Endpunkten einer festen Strecke gebildet werden. Diese Winkel-Koordinaten sind, soweit die Litteratur über analytische Geometrie mir bekannt ist, noch nicht zur Untersuchung der Eigenschaften der Kegelschnitte verwandt worden. Indem ich im folgenden einige Abschnitte hierüber veröffentliche, gebe ich der Hoffnung Raum, eine willkommene Bereicherung des Aufgabenmaterials in diesem Zweige der Mathematik zu bieten.

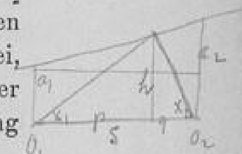
$x_2 h = p x_1 x_2$
$x_1 h = q x_2 x_1$

$h(x_1 + x_2) = s(x_1 x_2)$

$p = \frac{h}{x_1}$

$q = \frac{h}{x_2}$

Bezeichnet man eine feste Strecke mit $s$, so mögen unter den Koordinaten $x_1$ und $x_2$ eines Punktes die Tangenten der Winkel verstanden sein, die durch die Verbindungen des Punktes mit den Endpunkten von $s$ gebildet werden. Die Drehung wird hierbei, der Analogie halber, von der Festen ausgehend gerechnet, so dass sie bei $x_1$ der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzt, bei $x_2$ derselben entspricht. Die Entfernung des Punktes von der Festen $s$ ist $h = \frac{s x_1 x_2}{x_1 + x_2}$, die Abstände des Fusspunktes von den Endpunkten von $s$ sind $s_1 = \frac{s x_2}{x_1 + x_2}$, $s_2 = \frac{s x_1}{x_1 + x_2}$.




2. Errichtet man in den Endpunkten der Festen $O_1$ und $O_2$ die Senkrechten, deren Längen bis zum Durchschnitt mit einer Geraden $a_1$ und $a_2$ sein mögen, und habe ein Punkt der Geraden die Koordinaten $x_1$ und $x_2$, so erhält man, wenn durch den Endpunkt von $a_2$ zu $s$ die Parallele gezogen wird, die Proportion (Fig. 1):

$$AD : BE = DC : EC \quad \text{d. h.}$$

$$(a_1 - a_2) : \left( \frac{s x_1 x_2}{x_1 + x_2} - a_2 \right) = s : \frac{s x_1}{x_1 + x_2},$$

woraus als Gleichung der Geraden hervorgeht:

$$s x_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0.$$

Gl. der Geraden

Der Winkel[1]), den diese Gerade mit $s$ bildet, ist $m = \frac{a_1 - a_2}{s}$. Im Falle der Gleichheit von $a_1$ und $a_2$ ist die Gerade der $s$ parallel. Die Abschnitte auf der Festen verhalten sich wie $a_1 : a_2$, und es liegt der Durchschnittspunkt in der Verlängerung von $s$, wenn $a_1$ und $a_2$ gleiche Vorzeichen, zwischen $O_1$ und $O_2$, wenn $a_1$ und $a_2$ ver-

[1]) Der Kürze halber ist durchgängig „Winkel" statt der Tangente desselben gesetzt.

schiedene Vorzeichen haben. Steht die Gerade auf $s$ senkrecht, so werden $a_1$ und $a_2$ unendlich. Bezeichnet in diesem Falle $P$ den Durchschnitt mit $s$ und ist $O_1P = s_1$, $O_2P = s_2$, so verhält sich $x_1 : x_2 = s_2 : s_1$. Die Gleichung ist also $s_1 x_1 - s_2 x_2 = 0$. Die Mittelsenkrechte wird dargestellt durch $x_1 - x_2 = 0$. Für einen Punkt $p_1 p_2$ dieser Senkrechten gilt auch: $p_1 : p_2 = s_2 : s_1$, also $x_1 : x_2 = p_1 : p_2$ oder $p_2 x_1 - p_1 x_2 = 0$. Es stellt demnach diese Gleichung die vom Punkte $p_1 p_2$ auf $s$ gefällte Senkrechte dar. $x_1 + x_2 = 0$ ist die Gleichung der unendlich fernen Geraden.

Soll eine Gerade durch die beiden Punkte $p_1 p_2$ und $q_1 q_2$ gezogen werden, so gelten für dieselbe folgende Gleichungen:

$$sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$
$$sp_1 p_2 - a_1 p_1 - a_2 p_2 = 0$$
$$sq_1 q_2 - a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0.$$

Demnach ist die Gleichung dieser Geraden

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_1 & x_2 \\ p_1 p_2 & p_1 & p_2 \\ q_1 q_2 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder in entwickelter Form}$$

$$x_1 x_2 (p_1 q_1 - q_1 p_2) + p_1 p_2 (q_1 x_2 - q_2 x_1) + q_1 q_2 (x_1 p_2 = x_2 p_1) = 0$$

$$sx_1 x_2 - \frac{sp_2 q_2 (p_1 - q_1)}{p_1 q_2 - p_2 q_1} x_1 - \frac{sp_1 q_1 (q_2 - p_2)}{p_1 q_2 - p_2 q_1} x_2 = 0.$$

Für die durch den Punkt $p_1 p_2$ gehende Gerade, welche mit $s$ den Winkel $m$ bildet, gelten die Bedingungen

$$sp_1 p_2 - a_1 p_1 - a_2 p_2 = 0 \text{ und } ms = a_2 - a_1,$$

worauf folgt
$$a_1 = \frac{sp_2 (p_1 - m)}{q_1 + p_2}, \quad a_2 = \frac{sp_1 (p_2 + m)}{p_1 + p_2}.$$

Liegt der Punkt auf $s$, und teilt er sie im Verhältnis von $s_1 : s_2$, so wird $a_1 = -ms_1$ und $a_2 = ms_2$. Die Gleichung lautet dann

$$sx_1 x_2 + ms_1 x_1 - ms_2 x_2 = 0.$$

Für die durch einen Punkt $p_1 p_2$ gehende Gerade, welche $s$ im Verhältnis von $s_1 : s_2$ teilt, ist $m = \dfrac{sp_1 p_2}{s_2 p_2 - s_1 p_1}$, demnach

$$a_1 = \frac{sp_1 p_2 [(s + s_2) p_2 - s_1 p_1]}{(p_1 + p_2)(s_2 p_2 - s_1 p_1)}$$
$$a_2 = \frac{sp_1 p_2 [s_2 p_2 - (s + s_1) p_1]}{(p_1 + p_2)(s_2 p_2 - s_1 p_1)}.$$

3. Gegeben sind die beiden Geraden $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ und $sx_1 x_2 - b_1 x_1 - b_2 x_2 = 0$. Durch Subtraktion beider Gleichungen wird $x_1 (a_1 - b_1) + x_2 (a_2 - b_2) = 0$. Es ist dieses die Gleichung der vom Durchschnittspunkte beider Geraden auf $s$ gefällten Senkrechten, welche $s$ im Verhältnis von $(a_1 - b_1) : (b_2 - a_2)$ teilt. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind

$$sx_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - b_1}, \quad sx_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2 - a_2}.$$

Für $a_1 = b_1$ ist der Durchschnittspunkt der Endpunkt von $a_1$, für $a_2 = b_2$ der Endpunkt von $a_2$, wie auch unmittelbar aus der Bedeutung von $a_1$ und $a_2$ erhellt. Ist $a_1 b_2 = a_2 b_1$, verhält sich also $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, so wird $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; die Geraden schneiden sich also auf der Festen. Die Winkel, welche die Geraden mit $s$ bilden, sind $\frac{a_1 - a_2}{s}$ und $\frac{b_1 - b_2}{s}$; ist daher $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, so sind die Linien parallel. Wenn $b_1 - b_2$ der reziproke Wert von $a_1 - a_2$ ist, schneiden die Geraden sich rechtwinkelig.

4. Die drei Geraden
$$\begin{aligned} s x_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 &= 0 \\ s x_1 x_2 - b_1 x_1 - b_2 x_2 &= 0 \\ s x_1 x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$
schneiden sich in demselben Punkte, wenn die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ verschwindet,

wenn also
$$a_1 (b_2 - c_2) - a_2 (b_1 - c_1) + b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0.$$

Häufig lässt sich schon eine der Gleichungen auf einfache Weise aus den beiden andern ableiten. In dem Falle haben die drei Linien auch denselben Schnittpunkt. Von den Linien, die sich bei einem Dreiecke in einem Punkte schneiden, mögen die Höhen als Beispiel genommen werden. Die der Grundlinie $s$ anliegenden Winkel eines Dreieckes seien $p_1$ und $p_2$, so hat die Höhe zu $s$ die Gleichung $p_2 x_1 - p_1 x_2 = 0$, die von $O_2$ auf die Seite $x_1 = p_1$ und von $O_1$ auf die Seite $x_2 = p_2$ gefällten Senkrechten haben die Gleichungen
$$p_1 x_2 = 1 \text{ und } p_2 x_1 = 1.$$

Durch Subtraktion der beiden letzteren entsteht die erste, woraus hervorgeht, dass die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Der Inhalt eines Dreiecks mit der Seite $s$ und den anliegenden Winkeln $x_1$ und $x_2$ ist $\frac{s^2 x_1 x_2}{2(x_1 + x_2)}$.

5. Ein Punkt habe in Bezug auf $s$ die Koordinaten $x_1$ und $x_2$; es sollen dieselben (Fig. 2) durch die Koordinaten $y_1$ und $y_2$ ausgedrückt werden, die der Punkt in Bezug auf eine in $s$ gelegene Strecke $A_1 A_2 = g$ hat. Es sei $O_1 A_1 = q_1$ und $O_2 A_2 = q_2$, so geht die Linie $JO_1$, bezogen auf $g$, durch den Punkt $y_1 y_2$ und teilt $g$ im Verhältnis $q_1 : (g + q_1)$; sie bildet also nach §. 1, 2 mit $g$ den Winkel
$$x_1 = \frac{g y_1 y_2}{(g + q_1) y_2 - q_1 y_1}; \text{ ebenso erhält man für } x_2 = \frac{g y_1 y_2}{(g + q_2) y_1 - q_2 y_2}.$$
Fällt $A_1$ mit $O_1$ zusammen, so ist $q_1 = 0$ und $x_1 = y_1$.

Die neue Feste $g$ gehe von $O_1$ aus und bilde mit $s$ den Winkel $p_1$. Die Koordinaten eines Punktes in Bezug auf $s$ seien $x_1 x_2$, in Bezug auf $g$ $y_1 y_2$, so ist $x_1 = \frac{y_1 + p_1}{1 - y_1 p_1}$.

In dem Dreiecke $O_1 D A_2$ (Fig. 3) ist $O_1 D = \frac{g y_2 \sqrt{1 + y_1^2}}{y_1 + y_2}$, in $O_1 D O_2$ ist $O_1 D = \frac{s x_2 \sqrt{1 + x_1^2}}{x_1 + x_2}$, oder nach Einsetzung des Wertes von $x_1$

$$O_1 D = \frac{s x_2 \sqrt{(1 + p_1^2)(1 + y_1^2)}}{y_1 + p_2 + x_2 (1 - y_1 p_1)}, \text{ woraus folgt}$$

$$x_2 = \frac{g y_2 (y_1 + p_1)}{s \sqrt{1 + p_1^2}\, (y_1 + y_2) - g y_2 (1 - y_1 p_1)}.$$

Steht $g$ auf $s$ senkrecht, so wird $x_1 = -\frac{1}{y_1}$ und $x_2 = \frac{g y_2}{s (y_1 + y_2) - g y_1 y_2}$.

Soll eine beliebige Strecke $g$ die neue Feste werden, so gelangt man durch zweimalige Anwendung vorstehender Transformation zu den Beziehungen zwischen den Koordinaten $x_1 x_2$ und $y_1 y_2$.

Ein spezieller Fall möge hier noch Erwähnung finden. Es sei $g$ parallel zu $s$ im Abstande $m$, und zwar so gelegen, dass die Mittelsenkrechte von $s$ auch $g$ halbiert. Alsdann haben die Entfernungen eines Punktes $D$ von $s$ und $g$ die Differenz $m$; es ist demnach

$$\frac{s x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{g y_1 y_2}{y_1 + y_2} + m.$$

Ferner sind die Differenzen zwischen den Abschnitten auf $s$ und $g$, die die Senkrechte von $D$ auf diesen Strecken bildet, gleich; folglich

$$\frac{s (x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{g (y_1 - y_2)}{y_1 + y_2}.$$

Werden diese beiden Gleichungen nach $x_1$ und $x_2$ aufgelöst, so ergibt sich

$$x_1 = 2 \frac{g y_1 y_2 + m (y_1 + y_2)}{s (y_1 + y_2) - g (y_1 - y_2)}$$

$$x_2 = 2 \frac{g y_1 y_2 + m (y_1 + y_2)}{s (y_1 + y_2) + g (y_1 - y_2)}.$$

6. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

stellt, besondere Fälle ausgenommen, einen Kegelschnitt dar. Es sei vorausgesetzt, dass derselbe von der $H$-Achse geschnitten werde, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, indem durch Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel $\varphi$ dieser Bedingung immer Genüge geleistet werden kann, wenn überhaupt die Koordinaten reell sein sollen. Für $y = 0$ wird dann

$$x_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - AF}}{A}, \quad x_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - AF}}{A}.$$

Die Differenz dieser Werte $\frac{2\sqrt{D^2 - AF}}{A}$ ist eine Sehne des Kegelschnitts und möge als die Feste $s$ genommen werden. Verschiebt man die $X$-Achse so, dass $x = z + \dfrac{-D-\sqrt{D^2-AF}}{A}$ wird, erhält man, wenn noch $2\sqrt{D^2-AF} = As$ gesetzt wird,

$$Az^2 + By^2 + 2Czy - Asz - \left(Cs - 2E + \frac{2CD}{A}\right) y = 0$$

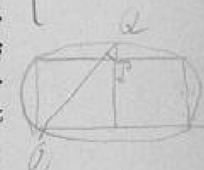
Nach §. 1, 1 hat man für $z = \dfrac{sx_2}{x_1+x_2}$ und für $y = \dfrac{sx_1\,x_2}{x_1+x_2}$ zu setzen.

Man erhält alsdann

$$sx_1\,x_2 - \frac{2AE + ACs - 2CD}{AB}\,x_1 - \frac{2AE - ACs - 2CD}{AB}\,x_2 - \frac{A}{B} = 0$$

$$\text{oder } sx_1\,x_2 - a_1\,x_1 - a_2\,x_2 - k = 0.$$

Um die Bedeutung der Konstanten zu finden, errichte man in dem Endpunkte von $s$ in $O_2$ auf $s$ die Senkrechte; es ist dann $x_2 = \infty$ und $sx_1 = a_2 \cdot a_2$ bezeichnet also die Länge der in $O_2$ senkrecht errichteten Sehne, $a_1$ die der in $O_1$ senkrecht stehenden Sehne. Setzt man in der Gleichung der Kurve $x_2 = x_1$, so wird $sx_1^2 - (a_1 + a_2)\,x_1 - k = 0$. Aus dieser Gleichung ergibt sich für $k$ folgende Konstruktion. Errichtet man auf $s$ in $O_1$, $O_2$ und in der Mitte die Senkrechten $a_1$, $a_2$ und $m$ und verbindet man die Endpunkte von $a_1$ und $a_2$, welche Linie $m$ in $P$ schneidet, so ist, wenn $Q$ den Schnittpunkt von $m$ mit der Kurve bedeutet, die Projektion von $PQ$ auf $QO_1$ oder auf $QO_2$ $\frac{1}{2}k$.



Darauf, dass in der Gleichung $sx_1^2 - (a_1 + a_2)\,x_1 - k = 0$ das Produkt der beiden Wurzelwerte $-\dfrac{k}{s}$ ist, lässt sich noch eine andere Konstruktion von $k$ gründen. Wird auf $s$ die Mittelsenkrechte errichtet, welche die Kurve in $Q$ und $R$ schneide, und sind die Abschnitte dieser Senkrechten $m$ und $n$, so sind die beiden Wurzelwerte $\dfrac{2m}{s}$ und $\dfrac{2n}{s}$, ihr Produkt $\dfrac{4mn}{s_2} = -\dfrac{k}{s} \cdot \frac{1}{2}k$ ist also die vierte Proportionale zwischen $\frac{1}{2}s$, $m$ und $-n$. Die Summe der beiden Wurzelwerte ist $\dfrac{a_1 + a_2}{s}$. Hieraus ergibt sich der Satz:

Die algebraische Summe der beiden Abschnitte der Mittelsenkrechten einer Sehne eines Kegelschnitts ist der halben algebraischen Summe von $a_1$ und $a_2$ gleich. Verbindet man die Endpunkte von $a_1$ und $a_2$, so ist das an der Kurve gelegene Stück des einen Abschnitts der Mittelsenkrechten dem anderen Abschnitte gleich.

7. Die Natur der durch $sx_1\,x_2 - a_1\,x_1 - a_2\,x_2 - k = 0$ dargestellten Kurve ist von den Konstanten $a_1$, $a_2$ und $k$ abhängig. Untersuchen wir zuerst, ob die Kurve einen unendlich fernen Punkt hat oder ob sie eine geschlossene ist. Ist ein unendlich ferner Punkt vorhanden, so sind die Verbindungslinien dieser mit den Endpunkten der Festen parallel, also $x_2 = -x_1$. Durch Einsetzung dieses Wertes wird $sx_1^2 + (a_1 - a_2)\,x_1 + k = 0$, woraus für $x_1$ folgt $x_1 = -\dfrac{a_1 - a_2}{2s} \pm \sqrt{\dfrac{(a_1 - a_2)^2}{4s^2} - \dfrac{k}{s}}$.

Zwei unendlich ferne Punkte sind also vorhanden, wenn $ks < \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$; die Kurve ist also Hyperbel. Ist $ks = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$, so ist sie Parabel, für $ks > \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$ ist die Kurve geschlossen, also Ellipse.

8. Verbindet man die Gleichung einer durch den Punkt $O_2$ gehenden Geraden $x_2 = p_2$ mit der Gleichung der Kurve $sx_1x_2 - a_1x_1 - a_2x_2 - k = 0$, so wird $x_1 = \frac{k + a_2 p_2}{sp_2 - a_1}$. Es hat also eine solche Gerade mit der Kurve ausser $O_2$ nur noch einen Punkt gemeinsam. Ist $x_2 = 0$, so wird $x_1 = -\frac{k}{a_1}$. Die Gleichung dieser Geraden bezeichnet die Tangente der Kurve in $O_1$. Für die Tangente in $O_2$ gilt die Gleichung $x_2 = -\frac{k}{a_2}$. Hieraus ergibt sich die Proportion $x_1 : x_2 = a_2 : a_1$. Es verhalten sich also die Tangenten der Winkel, die zwei Tangenten eines Kegelschnitts mit der Berührungssehne bilden, wie die senkrechten Sehnen, die in den Endpunkten der Berührungssehne errichtet werden. Wenn $x_1$ und $x_2$ die Winkel bezeichnen, welche die Feste mit den beiden Tangenten in den Endpunkten derselben bildet, so ist $k = -a_1 x_1$ und $k = -a_2 x_2$, woraus der Satz hervorgeht: Zieht man zu einer Sehne $O_1 O_2$ durch die Endpunkte der auf ihr in $O_1$ und $O_2$ senkrecht stehenden Sehnen Parallele, so schneiden die Normalen in $O_1$ und $O_2$ auf den Parallelen gleiche Stücke ab.

9. Für $k = 0$ stellt $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ die durch die Endpunkte von $a_1$ und $a_2$ gehende Gerade dar; in ihr ist aber auch die Gleichung der Festen enthalten, da $x_1 = x_2 = 0$ der Gleichung Genüge leistet. Auch in dem Falle, dass $k = -\frac{a_1 a_2}{s}$, degeneriert der Kegelschnitt in zwei Gerade, indem dann die Gleichung der Kurve $\left(x_1 - \frac{a_2}{s}\right)\left(x_2 - \frac{a_1}{s}\right) = 0$ wird.

Ist $a_1 = a_2 = 0$, ist also $s$ Durchmesser des Kegelschnitts, so wird $sx_1 x_2 = k$, welche Gleichung eine Ellipse darstellt, wenn $k$ positiv, eine Hyperbel, wenn $k$ negativ ist. Für den Fall, dass $k = s$ ist, geht die Gleichung der Ellipse in die des Kreises über. Hieraus ergibt sich, dass bei einer Ellipse und Hyperbel die Produkte der Tangenten der Winkel, die von einem Durchmesser und der Verbindungslinie eines Punktes der Kurve mit den Endpunkten desselben gebildet werden, konstant sind; ferner: Das Verhältnis des Quadrats der halben auf einem Durchmesser senkrechten Sehne zum Produkte aus den Abschnitten des Durchmessers ist konstant. Ist dasselbe gleich 1, so ergibt sich der bekannte Kreissatz. Sind die Senkrechten $a_1$ und $a_2$ einer der Assymptoten einer Hyperbel parallel, so werden sie sowohl als auch $k$ unendlich, es erhält die Gleichung $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$ dann die Form $mx_1 + nx_2 = k$. Bei der Parabel sind $a_1$ und $a_2$, wenn sie der Achse parallel laufen, also die Feste auf der Achse senkrecht steht, unendlich und gleich. In diesem Falle ist $sx_1 + sx_2 = p$ die Gleichung der Parabel. Die Summe der Tangenten der Winkel also, die entstehen, wenn die Endpunkte einer auf der Parabel-Achse senkrechten Sehne mit einem Kurvenpunkte verbunden werden, ist konstant, und zwar dem Verhältnis des Abstandes der Sehne vom Scheitelpunkte zur halben Sehne.

10. Haben zwei Strahlbüschel (Fig. 4) $O_1\,O_2\,ACP$ und $O_2\,O_1\,BDP$ den Strahl $O_1\,O_2$ gemeinsam, so ist das Doppelverhältnis der Strahlen $x_1 = 0$, $x_1 = p_1$, $x_1 = q_1$, $x_1 = r_1$ $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varrho_1} : \frac{\sin(\varphi_1 - \chi_1)}{\sin(\chi_1 - \varrho_1)}$. Drückt man dasselbe durch die Tangenten der betreffenden Winkel aus, so erhält man nach einigen Umformungen $\frac{p_1}{r_1} : \frac{p_1 - q_1}{q_1 - r_1}$. Das Doppelverhältnis des zweiten Büschels $x_2 = 0$, $x_2 = p_2$, $x_2 = q_2$, $x_2 = r_2$ ist ebenso $\frac{p_2}{r_2} : \frac{p_2 - q_2}{q_2 - r_2}$. Sind die beiden Verhältnisse gleich, so hat man die Gleichung

$$\frac{p_1}{r_1} : \frac{p_1 - q_1}{q_1 - r_1} = \frac{p_2}{r_2} : \frac{p_2 - q_2}{q_2 - r_2} \quad \text{oder}$$

$$p_1 p_2 (q_1 r_2 - q_2 r_1) + q_1 q_2 (r_1 p_2 - r_2 p_1) + r_1 r_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0.$$

Die Durchschnittspunkte $P$, $Q$, $R$ liegen also in gerader Linie.

Aus dieser Eigenschaft lassen sich die bekannten Beziehungen der Strahlenbüschel zu den Punktreihen für gleiche Doppelverhältnisse ableiten. Sind die eben erwähnten Doppelverhältnisse ungleich, ist ihr Quotient $\varepsilon$, also

$$\frac{p_1 (q_1 - r_1)}{r_1 (p_1 - q_1)} = \varepsilon \frac{p_2 (q_2 - r_2)}{r_2 (p_2 - q_2)}, \quad \text{so erhält man}$$

$$p_1 p_2 [r_2 (q_1 - r_1) - \varepsilon r_1 (q_2 - r_2)] - p_1 r_2 q_2 (q_1 - r_1) - p_2 \varepsilon r_1 q_1 (r_2 - q_2) = 0.$$

Wird $p_1$ und $p_2$ als veränderlich angesehen, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie dar. Der Punkt $P$ liegt also in diesem Falle auch mit $QR$ in gerader Linie. Anders gestaltet es sich, wenn $q_1$ und $q_2$ als variabel angenommen werden, also die der $O_1\,O_2$ zugeordneten Strahlen. Bezeichnet man die Veränderlichen $q_1$ und $q_2$ mit $x_1$ und $x_2$ und löst die Gleichung nach diesen auf, so wird

$$x_1 x_2 (p_1 r_2 - \varepsilon r_1 p_2) - x_1 p_2 r_2 (p_1 - \varepsilon r_1) - x_2 p_1 r_1 (r_2 - \varepsilon p_2) + p_1 p_2 r_1 r_2 (1 - \varepsilon) = 0.$$

Da dies die Gleichung eines Kegelschnitts ist, so ergibt sich hieraus der Satz: Zieht man von den Endpunkten einer Sehne eines Kegelschnitts $O_1$ und $O_2$ je zwei konjugierte Strahlen zu zwei Punkten der Kurve, so sind, wenn man einen weiteren beliebigen Punkt mit $O_1$ und $O_2$ verbindet, die Quotienten der Doppelverhältnisse der beiden Büschel gleich.

11. In Fig. 4 hat $PR$ die Gleichung $x_1 x_2 (p_1 r - p_2 r_1) - x_1 p_2 r_2 (p_1 - r_1) - x_2 p_1 r_1 (r_2 - p_2) = 0$, $AB$ hat die Gleichung $x_1 x_2 (p_1 p_2 - r_1 r_2) - x_1 p_2 r_2 (p_1 - r_1) - x_2 p_1 r_1 (p_2 - r_2) = 0$. Das Verhältnis der Abschnitte, die $PR$ auf der Festen bildet, ist $e = -\frac{p_2 r_2 (p_1 - r_1)}{p_1 r_1 (p_2 - r_2)}$, die $AB$ auf ihr bildet $f = \frac{p_2 r_2 (p_1 - r_1)}{p_1 r_1 (p_2 - r_2)}$. Da $e = -f$ ist,

so ist die Feste harmonisch geteilt. Es ist dies der Satz vom Vierseit. Da $Q$ in $PR$ liegt, so folgt, dass $CD$, $AB$ und $EF$ sich in einem Punkte der Festen schneiden. Für den Durchschnitt der Geraden $PR$ und $AB$ erhält man $x_2 = \frac{2p_2 r_2}{p_2 + r_2}$, $x_1 = \frac{2p_1 r_1}{p_1 + r_1}$. In einem Vierseit ist also die Tangente des Winkels, den eine Diagonale und die Verbindungslinie eines Endpunktes dieser Diagonale mit dem Durchschnittspunkte der beiden anderen bildet, das harmonische Mittel zwischen den Tangenten der Winkel, die die erste Diagonale mit den beiden von dem betreffenden Eckpunkte ausgehenden Seiten bildet.

12. Sind die in Fig. 4 gezeichneten Büschel in quadratischer Involution, so ist $q_1^2 = p_1 r_1$ und $q_2^2 = p_2 r_2$. Wird $q_1$ und $q_2$ konstant angenommen und bewegt sich der Punkt $P$ auf der Geraden $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$, so ist, wenn für $x_1 = p_1 = \frac{q_1^2}{r_1}$ und $x_2 = p_2 = \frac{q_2^2}{r_2}$ gesetzt wird, $sq_1^2 q_2^2 - a_1 q_1^2 r_2 - a_2 q_2^2 r_1 = 0$, oder wenn $r_1$ und $r_2$ durch $y_1$ und $y_2$ ersetzt werden, $a_2 q_2^2 y_1 + a_1 q_1^2 y_2 - sq_1^2 q_2^2 = 0$. Es ist dies die Gleichung einer Hyperbel, deren eine Assymptote auf der Festen senkrecht steht, während die andere mit derselben den Winkel $y_2 = \frac{sq_1^2 q_2^2}{a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2}$ bildet. In dem Falle, dass $a_2 q_2^2 = a_1 q_1^2$, ist der Kegelschnitt, den $R$ beschreibt, eine Parabel, welche die Gleichung $sy_1 + sy_2 = \frac{s^2 q_1^2}{a_2}$ hat. Dies findet demnach immer statt, wenn $Q$ auf der Mittelsenkrechten zu $s$ liegt und die Gerade, auf welcher $P$ sich bewegt, der $s$ parallel ist. Liegt noch ausserdem $O_2$ in der Parallelen, ist $q_1 = q_2 = \frac{2a_1}{s}$, so wird $sy_1 + sy_2 = 4a_1$, eine Parabel, deren Scheitel in $Q$ liegt. Ist $P$ irgend ein Punkt des Kegelschnitts $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$, so beschreibt $R$ auch einen Kegelschnitt, der die Gleichung $sy_1 y_2 - \frac{sa_2 q_2^2}{k} y_1 - \frac{sa_1 q_1^2}{k} y_2 - \frac{s^2 q_1^2 q_2^2}{k} = 0$ hat. Ist $a_1 = a_2 = 0$, ist also $s$ eine Achse des ersteren Kegelschnitts, so wird $sy_1 y_2 = \frac{s^2 q_1^2 q_2^2}{k}$. Beide Kegelschnitte sind also gleichzeitig Ellipsen oder Hyperbeln. Der Fall, dass $P$ sich auf einer Parabel $sx_1 + sx_2 = e$ bewegt, ergibt, dass $R$ auf der Geraden $y_1 y_2 - \frac{sq_2^2}{e} y_1 - \frac{sq_1^2}{e} y_2 = 0$ liegt, wobei sich die auf ihr in den Endpunkten der Festen errichteten Senkrechten $b_1$ und $b_2$ umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Tangenten der Winkel $QO_1O_2$ und $QO_2O_1$. Es entsteht nun die Frage, ob zwei beliebige Kegelschnitte $sr_1 x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - k_c = 0$ und $sx_1 x_2 - d_1 x_1 - d_2 x_2 - k_d = 0$ einen Involutionspunkt $Q$ haben. Nach dem vorhergehenden muss unter den Konstanten die Abhängigkeit bestehen: $d_2 = \frac{sc_2 q_2^2}{k}$

$d_2 = \frac{sc_1\, q_1^2}{k}$, $k_d = \frac{s^2\, q_1^2\, q_2^2}{k_c}$. Hieraus folgt für die Koordinaten des Punktes $Q$ $q_1 = \pm\sqrt{\frac{d_2\, k}{c_1\, s}}$, $q_2 = \pm\sqrt{\frac{d_1\, k}{c_2\, s}}$. Ein solcher ist jedoch nur dann vorhanden, wenn $k_d = \frac{d_1\, d_2\, k_c}{c_1\, c_2}$ oder $\frac{c_1\, c_2}{k_c} = \frac{d_1\, d_2}{k_d}$. Ist $k_c = k_d$, so muss $c_1\, c_2 = d_1\, d_2$ sein. Wird ferner angenommen, dass $c_1 = d_2$ und $c_2 = d_1$, so gelten für den Involutionspunkt der Kurven $sx_1\, x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - k = 0$ und $sx_1\, x_2 - c_2\, x_1 - c_1\, x_2 - k = 0$ die Koordinaten $q_1 = q_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{s}}$. Da diese unabhängig von den Konstanten $c_1$ und $c_2$ sind, so ist dieser Punkt $Q$ der Involutionspunkt für alle Kegelschnittpaare der bezeichneten Art.

13. Um die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts $sx_1\, x_2 - a_1\, x - a_2\, x_2 - k = 0$ zu transformieren, werde angenommen, die neue Feste $g$, auf welche die Koordinaten $y_1$ und $y_2$ sich beziehen mögen, bilde mit $s$ den Winkel $p$ und gehe von $O_1$ aus; so ist $x_1 = \frac{y_1 + p}{1 - py_1}$ und $x_2 = \frac{gy_2\,(y_1 + p)}{s\,(y_1 + y_2)\sqrt{1 + p^2} - gy_2\,(1 - py_1)}$ zu setzen. Man erhält alsdann als Gleichung:

$$\frac{gs\,(y_1 + p)^2\, y_2}{(1 - py_1)\,[s\, y_1 + y_2]\sqrt{1 + p^2} - gy_2\,(1 - py_1)} - \frac{a_1\,(y_1 + p)}{1 - py_1} -$$
$$\frac{a_2\, gy_2\,(y_1 + p)}{s\,(y_1 + y_2)\sqrt{1 + p^2} - gy_2\,(1 + py_1)} - k = 0.$$

Hieraus wird nach den Unbekannten geordnet $gy_1^2\, y_2\,(s - a_1\, p + a_2\, p + kp^2) + y_1^2 \sqrt{1 + p^2}\,(ksp - a_1\, s) + y_1\, y_2\,(2\, gsp + a_1\, g - a_1\, gp^2 - a_2\, g + a_2 gp^2 - 2\, pgk + \sqrt{1 + p^2}\,[ksp - a_1\, s]) - y_1 \sqrt{1 + p^2}\,(a_1\, s\, p + ks) + y_2\,(p^2\, gs + a_1\, gp - a_2\, gp + gk - \sqrt{1 + p^2}\,[a_1\, sp + ks]) = 0$.

Soll nun $g$ ebenfalls Sehne des Kegelschnitts werden, so muss $g = \frac{sx_2 \sqrt{1 + x_1^2}}{x_1 + x_2}$ werden, wo $x_1 = p$ und $x_2 = \frac{a_1\, p + k}{sp - a_2}$ ist. Nach Einsetzung dieser Werte wird

$$g = \frac{s\,(a_1\, p + k)\sqrt{1 + p^2}}{sp^2 + a_1\, p - a_2\, p + k},$$
$$s = \frac{g\,(a_1\, p - a_2\, p + k)}{(a_1 p + k)\sqrt{1 + p^2} - gp^2}.$$

Es ist in diesem Falle der Koeffizient von $y_2 = 0$ und es entsteht dann nach Division durch $y_1$ die Form $gy_1\, y_2 - b_1\, y_1 - b_2\, y_2 - l = 0$, wo $b_1 = \frac{s\sqrt{1 + p^2}\,(a_1 - kp)}{s - a_1\, p + a_2\, p + kp^2}$ und $b_2 = \frac{s\sqrt{1 + p^2}\,(a_1 - kp) - g\,(2\, ps + a_1 - a_1\, p^2 - a_2 + a_2\, p^2 - 2\, kp)}{s - a_1\, p + a_2\, p + kp^2}$.

Diese beiden Werte werden gleich, wenn

$$2ps + a_1 - a_1 p^2 - a_2 + a_2 p^2 - 2\,kp = 0, \text{ also}$$

$$p = \frac{s - k \pm \sqrt{(s-k)^2 + (a_1 - a_2)^2}}{a_1 - a_2}.$$

Hierdurch ist also der Wert der Tangenten der Winkel gefunden, welche die Feste mit den Achsen des Kegelschnitts bildet. Die geometrische Konstruktion der Achsen eines Kegelschnitts lässt sich hieraus mit Hülfe einer beliebigen Sehne unter Berücksichtigung des früher erörterten Wertes von $k$ ausführen. Für den Fall, dass $k = s$, wird $p = \pm 1$; es bildet dann $s$ mit den Achsen einen Winkel von $45^0$.

14. Verlegt man nun in der Gleichung $gx_1 x_2 - bx_1 - bx_2 - k = 0$ den Koordinatenanfang so, dass die neue Feste der $g$ parallel wird, wobei nach dem vorigen $x_1 = 2\,\frac{gy_1 y_2 + m\,(y_1 + y_2)}{y\,(y_1 + y_1) - g\,(y_1 - y_2)}$ und $x_2 = 2\,\frac{gy_1 y_2 + m\,(y_1 + y_2)}{s\,(y_1 + y_2) + g\,y_1 - y_2)}$ zu setzen ist, so entsteht die neue Gleichung:

$$4sg^2 y_1^2 y_2^2 + 4sg\,y_1^2 y_2\,(2\,m - b) + 4\,sg\,y_1 y_2^2\,(2m - b) + y_1^2\,(4sm^2 - 4bsm - ks^2 + kg^2)$$
$$+ 2y_1 y_2\,(4sm^2 - 4bsm - ks^2 - kg^2) + y_2^2\,(4sm^2 - 4bsm - ks^2 + kg^2) = 0.$$

Die Koeffizienten von $y_1^2 y_2$ und $y_1 y_2^2$ fallen weg, wenn $m = \frac{b}{2}$. In diesem Falle liegt die eine Achse des Kegelschnitts auf der Festen. Soll diese selbst die Feste werden, so muss der Koeffizient von $y_1^2$ und $y_2^2$ verschwinden, was für $g = \sqrt{\frac{s\,(ks + b^2)}{k}}$ stattfindet. Nach Einsetzung dieser Werte wird $gy_1 y_2 = \frac{gk}{s}$ die Gleichung des Kegelschnitts. Hieraus erhellt, dass für jeden Kegelschnitt der Schar, welche eine der Achse parallele Sehne gemeinsam und ein konstantes $k$ hat, das Produkt der Koordinaten irgend eines Punktes, auf diese Achse bezogen, konstant $= \frac{k}{s}$ ist.

15. Da bei jedem Kegelschnitt die durch den Mittelpunkt gehenden Sehnen in demselben halbiert werden, so entsteht, wenn die Durchmesser von den Endpunkten der Festen $O_1$ und $O_2$ gezogen werden, ein Parallelogramm, wenn jene als Diagonalen genommen werden. Die Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes möge nun darauf gegründet werden, dass zwei Ecken eines Parallelogramms von der gegenüberliegenden Seite gleichen Abstand haben. Die von $O_1$ ausgehende Seite bilde mit $s$ den Winkel $x_1 = p_1$, so ist die zweite Koordinate ihres Endpunktes bei der Kurvengleichung $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$ $\quad x_2 = \frac{a_1 p_1 + k}{sp_1 - a_2}$. Der Abstand dieses Punktes von $s$ ist also $\frac{sp_1\,(a_1 p_1 + k)}{sp_1^2 + a_1 p_1 - a_2 p_1 + k}$. Für die von $O_2$ ausgehende Seite ist $y_2 = -p_1$, die zweite Koordinate des Endpunktes also $y_1 = \frac{a_2 p_1 - k}{sp_1 + a_1}$, die Entfernung demnach

$\frac{sp_1(a_2 p_1 - k)}{sp_1^2 + a_1 p_1 - a_2 p_1 + k}$. Sollen diese Höhen gleich sein, so ist $a_1 p_1 + k = a_2 p_1 - k$; also $p_1 = \frac{2k}{a_2 - a_1}$. Der Winkel $p_1$, den $s$ mit der Seite des Parallelogramms bildet, ist zugleich der Winkel, den das Paar koordinierter Durchmesser einschliesst, die den beiden Linien parallel sind. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind also $z_1 = y_1 = \frac{k(a_1 + a_2)}{2sk - a_1(a_1 - a_2)}$, $z_2 = x_2 = \frac{k(a_1 + a_2)}{2sk + a_2(a_1 - a_2)}$. Hieraus folgt, dass $\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} = \frac{a_1 - a_2}{k}$, wo $\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}$ die Differenz der Kotangenten der Winkel ist, die eine Sehne mit den Radienvektoren bildet.

16. Ist in der Gleichung $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k$ $k$ variabel, so stellt diese eine Kegelschnittschar dar, welche die Punkte $O_1$ und $O_2$, ferner die Endpunkte von $a_1$ und $a_2$ gemeinsam haben. Soll nun untersucht werden, welche Kurve die Mittelpunkte dieser Schar beschreiben, so ist aus den Gleichungen für die Koordinaten des Mittelpunktes $k$ zu bestimmen und diese Werte gleichzusetzen. Es wird dann nach einigen Umformungen $sz_1 z_2 - \frac{a_1}{2} z_1 - \frac{a_2}{2} z_2 = 0$. Diese Gleichung stellt die gerade Linie dar, welche die Mitten von $a_1$ und $a_2$ verbindet. In der obigen Gleichung möge nun $a_1$ und $k$ konstant, $a_2$ veränderlich sein; sie repräsentiert dann eine Schar, die einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten $a_1$ und $s$ umschrieben ist und eine gegebene Gerade im Scheitelpunkt des rechten Winkels berührt. Eliminiert man aus den Koordinaten des Mittelpunktes $a_2$, so erhält man die Gleichung der Mittelpunktskurve. Da $a_2 = \frac{(2sk - a_1^2) z_1 - a_1 k}{k - a_1 z_1} = \frac{a_1 z_1 z_2 - k(z_1 - z_2)}{z_1 \cdot z_2}$ ist, so ist der Ort $2sz_1^2 z_2 - a_1 z_1^2 - a_1 z_1 z_2 + kz_1 - kz_2 = 0$. Um nun zu zeigen, dass diese Gleichung einen Kegelschnitt darstellt, verlege man die Feste so, dass dieselbe in der Mitte von $s$ senkrecht steht und $\frac{a_1}{2}$ gleich wird. Zu dieser Transformation hat man die Formeln $z_2 = \frac{a_1 x_1}{s(x_1 + x_2) - a_1 x_1 x_2}$ und $z_1 = \frac{z_2}{1 + 2z_2 x_2}$.

Durch Substitution wird zunächst

$$sz_2 - a_1 x_2 z_2 - 2k x_2^2 z_2 - kx_2 - a_1 = 0$$

und durch Einsetzen des Wertes von $z_2$

$$a_1 kx_1 x_2 + ks x_1 - ks x_2 - a_1 s = 0$$

$$\frac{a_1}{2} x_1 x_2 + \frac{s}{2} x_1 + \frac{s}{2} x_2 - \frac{a_1 s}{2k} = 0.$$

Der Ort des Mittelpunktes geht also durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels und durch die Mitten der drei Dreiecksseiten. Die Tangente in der Mitte von $s$ bildet mit der neuen Festen $\frac{a_1}{2}$ den Winkel $\frac{a_1}{k}$, also mit $s$ den Winkel $-\frac{k}{a_1}$. Es ist dies derselbe, den die gegebene Tangente an die Kegelschnittschar mit $s$ bildet. Für den Fall, dass $k$ positiv, ist die Kurve eine Ellipse; ist $k$ negativ, so ist sie Hyperbel.

17. Die Frage möge erörtert werden, ob es bei einem Kegelschnitte mehr Punkte gibt, für welche das Produkt der Koordinaten dasselbe ist. Seien die Koordinaten eines Kegelschnittpunktes $p_1$ und $p_2$, für welchen also $p_2 = \frac{a_1 p_1 + k}{sp_1 - a_2}$ ist, so soll $x_1 x_2 = p_1 p_2$ und zugleich $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$ sein. Setzt man in diese Gleichung $x_2 = \frac{p_1 p_2}{x_1}$, so wird $a_1 x_1^2 - (sp_1 p_2 - k) x_1 + a_2 kp_2 = 0$, also

$$x_1 = \frac{a_1 sp_1^2 + a_2 k \pm (a_1 sp_1^2 - 2a_1 a_2 p_1 - a_2 k)}{2a_1 (sp_1 - a_2)}.$$

Der eine Wert ist $p_1$, der andere $x_1 = \frac{a_2 (a_1 p_1 + k)}{a_1 (sp_1 - a_2)} = \frac{a_2 p_2}{a_1}$, für welchen $x_2 = \frac{a_1 p_1}{a_2}$. Die Verbindungslinie dieses Punktes $x_1 x_2$ mit $p_1 p_2$ hat also die Gleichung

$$sx_1 x_2 - \frac{s a_1 p_1 p_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} x_1 - \frac{s a_2 p_1 p_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} x_2 = 0,$$

woraus hervorgeht, dass diese Linie die Feste im Verhältnis von $a_1 : a_2$ schneidet. Es ist dies der Punkt $J$, in welchem die Verbindungslinie der Endpunkte von $a_1$ und $a_2$ die Feste trifft. Eine jede Sekante also, die von diesem Punkte $J$ zum Kegelschnitt zieht, schneidet ihn so, dass die Produkte der Koordinaten der Schnittpunkte gleich sind. Soll der Ort des Punktes $J$ für die Sehnenschar bestimmt werden, welche von einem Endpunkte eines Durchmessers der Kurve $sx_1 x_2 = k$ ausgehen, so sind zuerst die Koordinaten der Endpunkte der Senkrechten zu bestimmen, die in den Endpunkten einer von $O_1$ ausgehenden und mit $s$ den Winkel $p$ bildenden Sehne errichtet sind. Der Endpunkt der Senkrechten in $O_1$ hat die Koordinaten $-\frac{1}{p}$ und $-\frac{kp}{s}$. Der Endpunkt der Sehne, in welchem die zweite Senkrechte errichtet wird, hat die Koordinaten $p$ und $\frac{kp}{s}$. Der Endpunkt der Sehne, in welchem die zweite Senkrechte errichtet wird, hat die Koordinaten $p$ und $\frac{k}{sp}$. Da diese ausserdem mit $s$ den Winkel $-\frac{1}{p}$ bildet, so ist ihre Gleichung $sx_1 x_2 - \frac{sk(1 + p_2)}{p(sp^2 + k)} x_1 - \frac{sp_1(k - s)}{sp^2 + k} x_2 = 0$. Sie schneidet $sx_1 x_2 = k$, also in den Punkten $x_1 = p$, $x_2 = \frac{k}{sp}$ und $x_1 = \frac{p(k-s)}{s(1+p^2)}$, $x_2 = \frac{k(1+p^2)}{p(k-s)}$. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Senkrechten mit der Kurve wird also durch folgende Gleichung dargestellt:

$$sx_1 x_2 - \frac{ks\,p(1+p^2)(s+kp^2)}{kp^4(k-2s) - s^2(1+2p^2)} x_1 + \frac{sp(k-s)(s+kp^2)}{kp^4(k-2s) - s^2(1+2p^2)} x_2 = 0.$$

Der geometrische Ort des Durchschnittspunktes dieser Linie mit der Geraden $x_1 = p$ wird nun gefunden, wenn ich in dieser Gleichung $p$ durch $x_1$ ersetze. Es wird dann

$$x_2 \left[(kx_1^4 (k - 2s) - s^2 (1 + 2x_1^2) + (k - s)(s + kx^2)\right] - k(1 + x_1^2)(s + kx_1^2)\, x_1 = 0$$

oder nach Division durch $1 + x_1^2$

$$x_2 (k + 2s)(kx_1^2 - s) - kx_1 (kx_1^2 + s) = 0.$$

Diese Gleichung repräsentiert eine Kurve dritten Grades.

18. Ist die Kurve, in welche das Sehnenbüschel von $O_1$ ausgeht, eine Parabel, dargestellt durch $x_1 + x_2 = \frac{e}{s}$, so sind die Koordinaten des Endpunktes der Senkrechten in $O_1$ $-\frac{1}{p}$ und $\frac{ep + s}{ps}$. Der Endpunkt einer Sehne, welche mit $s$ den Winkel $p$ bildet, ist $x_1 = p$, $x_2 = \frac{e - sp}{s}$, mithin ist die Gleichung der Senkrechten in diesem Endpunkte, da dieselbe mit $s$ den Winkel $-\frac{1}{p}$ bildet:

$$sx_1 x_2 - \frac{s(e - sp)(1 + p^2)}{ep}\, x_1 + \frac{s(sp^2 - ep + s)}{e}\, x_2 = 0.$$

Als Koordinaten des zweiten Durchschnittspunktes dieser mit der Parabel erhält man $x_1 = \frac{ep - s(1 + p^2)}{sp}$, $x_2 = \frac{1 + p^2}{p}$. Da $x_2$ unabhängig von $e$ ist, so ergibt sich der Satz: Hat eine Parabelschar zwei Punkte gemeinsam, die die Endpunkte einer auf dem Durchmesser senkrechten Sehne sind, zieht man dann von einem dieser Punkte eine Sehne und errichtet in den Durchschnittspunkten die Senkrechten, so liegen die Schnittpunkte dieser mit der zugeordneten Parabel in einer Geraden, welche mit der Sehne den Winkel $\frac{1 + p^2}{p} = \frac{1}{2 \sin 2\varphi}$ bildet. Die durch die Endpunkte der Senkrechten gelegte Gerade hat demnach die Gleichung

$$sx_1 x_2 - \frac{s(ep + s)(1 + p^2)}{ep^2}\, x_1 - \frac{s\left[s(1 + p^2) - ep\right]}{ep^2}\, x_2 = 0.$$

Der Ort des Durchschnitts mit der Geraden $x_1 = p_1$ wird also gefunden, wenn in jener Gleichung für $p$ $x_1$ eingesetzt wird. Es wird alsdann $ex_1^3 x_2 - sx_1^2 x_2 + ex_1 x_2 - sx_2 - x_1 (ex_1 + s)(1 + x_1^2)$, oder nach Division durch $1 + x_1^2$

$$x_2 (ex_1 - s) = x_1 (ex_1 + s).$$

Unter Benutzung der Transformationsformeln

$$x_1 = \frac{y_1 + p}{1 - py_1}, \quad x_2 = \frac{y_2 (y_1 + p)(ep + s)}{2ep(y_1 + y_2) - y_2 (1 - py_1)(ep + s)},$$

wobei $g = \frac{s(ep + s)\sqrt{1 + p^2}}{2ep}$ gesetzt ist, wird diese Gleichung

$$y_1 y_2 + p\, \frac{e - ps}{ep + s}\, y_1 + \frac{ep^3 - s}{ep + s}\, y_2 + p = 0.$$

Wird $p = 1$ gewählt, dass also $g$ mit $s$ einen halben Rechten bildet, so wird

$$y_1 y_2 + \frac{e - s}{e + s} y_1 + \frac{e - s}{e + s} y_2 + 1 = 0.$$

Der geometrische Ort ist eine gleichseitige Hyperbel.

19. Wird $s x_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$ durch eine zu $s$ senkrechte Linie geschnitten, die die Feste im Verhältnis $m : n$ teilt, also durch eine Linie, deren Gleichung, wenn $m$ der an $O_1$ liegende Abschnitt ist, $m x_1 = n x_2$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte die Gleichung $m s x_1^2 - (n a_1 + m a_2) x_1 - k n = 0$, woraus folgt

$$x_1 = \frac{n a_1 + m a_2 \pm \sqrt{(n a_1 + m a_2)^2 + 4 m n k s}}{2 m s}.$$

Soll die Senkrechte Tangente sein, so muss $(n a_1 + m a_2)^2 - 4 m n k s$ verschwinden, also $\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2 \frac{m}{n} \cdot \frac{2 k s + a_1 a_2}{a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2} = 0.$

Hieraus geht hervor, dass das Produkt der beiden Wurzelwerte $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$ ist, oder $\frac{m_1}{n_1} : \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} : \frac{m_2}{n_2}$. Der Exponent des Verhältnisses $\frac{a_1}{a_2}$ ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Exponenten der Verhältnisse, in welche die auf $s$ senkrechten Tangenten des Kegelschnitts $s$ teilen. Die Länge dieser Tangenten vom Berührungspunkte bis zur Festen ist $x_1 \frac{m s}{m + n} = \frac{n a_1 + m a_2}{2 (m + n)}$.

20. Die Verbindungslinie zweier Punkte $X$ und $Y$, deren Koordinaten $x_1 x_2$ und $y_1 y_2$ sein mögen, teilt die Feste so, dass das Verhältnis der Abschnitte $e_1 = - \frac{x_2 y_2 (x_1 - y_1)}{x_1 y_1 (x_2 - y_2)}$ ist. Für eine Gerade $XZ$ ist $e_2 = - \frac{x_2 z_2 (x_1 - z_1)}{x_1 z_1 (x_2 - z_2)}$. Soll $s$ nun in den Durchschnittspunkten harmonisch geteilt sein, so ist $e_1 = - e_2$, also $y_1 z_2 (x_1 - z_2)(x_2 - y_2) + y_2 z_1 (x_1 - y_1)(x_2 - z_2) = 0$. Werden in dieser Gleichung $x_1$ und $x_2$ als veränderlich genommen, so bezeichnet sie den Ort des Punktes, welcher mit zwei festen Punkten verbunden $s$ harmonisch teilt. In weiterer Ausführung wird $x_1 x_2 (y_1 z_2 + y_2 z_1) - x_1 y_2 z_2 (y_1 + z_1) - x_2 y_1 z_1 (y_1 + z_2) + 2 y_1 y_2 z_1 z_2 = 0$. Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Endpunkte der Festen und durch die Punkte $Y$ und $Z$ geht. Die Tangente in $O_1$ bildet mit $s$ den Winkel $\frac{2 y_1 z_1}{y_1 + z_1}$ in $O_2$ $\frac{2 y_2 z_2}{y_2 + z_2}$. Er ist also das harmonische Mittel zwischen $y_1 z_1$, beziehungsweise $y_2 z_2$. Die Kurve, welche obige Gleichung darstellt, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $[y_1 z_1 (y_2 + z_2) - y_2 z_2 (y_1 + z_1)]^2 + 8 y_1 y_2 z_1 z_2 (y_1 z_2 + y_2 z_1)$ kleiner, gleich oder grösser als 0 ist. Sind die Punkte $Y$ und $Z$ symmetrisch zur Mittelsenkrechten von $s$ gelegen, ist also $y_1 = z_2$ und $y_2 = z_1$, so wird die Diskriminante $8 y_1^2 y_2^2 (y_1^2 + y_2^2)$. In diesem Falle ist

die Kurve eine Hyperbel, deren Gleichung

$$x_1 x_2 - x_1 \frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{y_1^2 + y_2^2} - x_2 \frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{y_1^2 + y_2^2} + \frac{2 y_1^2 y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} = 0.$$

Ist ausserdem $Y$ auf der in $O_1$, $Z$ auf der in $O_2$ errichteten Senkrechten gelegen, so ist $y_1 = z_2 = \infty$, die Gleichung hat die Form $x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_2 + 2y_2^2 = 0$. Sind $Y$ und $Z$ symmetrisch gegen die Feste, ist also $z_1 = -y_1$ und $z_2 = -y_2$, so wird die Diskriminante $-16 y_1^3 y_2^3$. Diese Grösse ist negativ, die Kurve also Ellipse, wenn sowohl $y_1$ als auch $y_2$ positiv oder negativ sind, positiv, die Kurve also Hyperbel, wenn eine der Koordinaten negativ ist. Liegen also $Y$ und $Z$ zwischen den in $O_1$ und $O_2$ auf $s$ errichteten Senkrechten, so ist der Ort eine Ellipse, sind sie ausserhalb dieses Raumes, so ist der Ort Hyperbel. Die Gleichung des Kegelschnitts ist alsdann $x_1 x_2 = y_1 y_2$, welche zeigt, dass $s$ eine Achse des Kegelschnitts ist. Hieraus ergibt sich der Satz: Wird bei einer Ellipse oder Hyperbel eine auf einer Achse senkrecht stehende Sehne errichtet, und werden ihre Endpunkte mit einem Punkte $A$ des Kegelschnitts verbunden, so ist die Achse in den Punkten, in welchen diese Linien sie schneiden, harmonisch geteilt. Ist der Punkt $A$ der Kurve ein Endpunkt der Sehne selbst, so ist die eine Verbindungslinie diese Sehne, die andere die Tangente im Punkte $A$. Hieraus geht folgende Konstruktion der Tangente im Punkte $A$ hervor. Man fälle von $A$ auf die eine Achse die Senkrechte, suche den dem Fusspunkte zugeordneten harmonischen Punkt und verbinde ihn mit $A$.

21. Wird in der ersten Gleichung der vorigen Nummer der Koeffizient von $x_1 x_2$ der Null gleich, was für $z_2 = -\frac{y_2 z_1}{y_1}$ der Fall ist, so wird $x_1 y_2 (y_1 + z_1) - x_2 y_1 (y_1 - z_1) - 2y_1 y_2 z_1 = 0$. Soll dieses die Gleichung einer Parabel sein, bei welcher $s$ auf der Achse senkrecht steht, so muss $y_2 (y_1 + z_1) = -y_1 (y_1 - z_1)$ sein, also $z_1 = \frac{y_1 (y_1 + y_2)}{y_1 - y_2}$, demnach $z_2 = -\frac{y_2 (y_1 + y_2)}{y_1 - y_2}$. Hierdurch erhält die Gleichung die Form $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Ist von den beiden Parabelpunkten $Y$ und $Z$, durch deren Verbindung mit einem beliebigen anderen Punkte der Parabel eine auf der Achse senkrechte Sehne harmonisch geteilt wird, etwa $Y$ gegeben, so findet man den entsprechenden Punkt $Z$, indem man von $Y$ auf die Sehne die Senkrechte $YJ$ fällt, dann $L$, die Mitte von $s$, mit $Y$ verbindet, von $JL$ $JM = \frac{s}{2}$ abträgt und durch $M$ zu $LY$ die Parallele zieht, welche $JY$ in $N$ schneide. $NO_1$ bildet dann mit $s$ den Winkel $z_1$, $NO_2$ mit $s$ den Winkel $-z_2$. Der korrespondierende Punkt zum Scheitel der Parabel ist der unendlich ferne Punkt, woraus der Satz hervorgeht: Zieht man durch einen Punkt einer Parabel zur Achse die Parallele und verbindet ihn mit dem Scheitel, so teilen diese Linien eine jede der Achse senkrechte Sehne harmonisch. Sie und die Verbindungslinien des Parabelpunktes mit den Endpunkten einer solchen Sehne sind harmonische Strahlen.

22. Haben zwei Kegelschnitte $sx_1 x_2 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - k = 0$ und $sx_1 x_2 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - k = 0$ ein gleiches Absolutglied, sind also die Produkte der Abschnitte der Sehnen gleich, die in der Mitte von $s$ auf dieser senkrecht stehen, so steht die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der beiden Kurven auf $s$ senkrecht. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen wird nämlich erhalten $(a_1 - b_1)\, x_1 + (a_2 - b_2)\, x_2 = 0$. Diese Senkrechte teilt $s$ im Verhältnis von $-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$. Setzt man $x_2 = -\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} x_1$ in eine der Kegelschnittsgleichungen ein, so wird $sx_1^2 - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - b_1} x_1 + \frac{k(a_2 - b_2)}{a_1 - b_1} = 0$. Die Summe der beiden Wurzelwerte $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{s(a_1 - b_1)}$ ist unabhängig von $k$. Entsprechende Kegelschnittpaare der Scharen, die durch obige Gleichungen für veränderliche $k$ bezeichnet werden, schneiden sich also in einer zu $s$ senkrechten Geraden, so dass die Summe der Abschnitte dieser Sehne konstant ist, und zwar gleich dem Abstand des Punktes, in welchem die Verbindungen der Endpunkte von $a_1\, a_2$ und $b_1\, b_2$ sich schneiden, von $O_1\, O_2$. Liegt dieser Durchschnittspunkt auf $s$, gilt also die Proportion $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, so wird,

da $x_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1 \pm \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - 4ks(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}}{2s(a_1 - b_1)}$ ist, $x_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_2}{a_1}}$.

In diesem Falle sind also die Durchschnittspunkte der Kurven symmetrisch zur Festen. Da der Wert von $x_1$ nicht abhängig von der Länge der Senkrechten $a_1$, $a_2$, $b_1$ oder $b_2$ ist, sondern nur von dem Exponenten des Verhältnisses $a_2 : a_1$, so geht die Kegelschnittschar, welche ein konstantes $k$ hat und deren Koeffizienten der $x_1$ und $x_2$ dasselbe Verhältnis haben, durch die 4 Punkte $O_1$ und $O_2$, $x_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_2}{a_1}}$, $x_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_1}{a_2}}$.

22. Haben zw … $x_2 - k = 0$ und $sx_1 x_2 - b_1 x_1$ $- b_2 x_2 - k = 0$ ein … e Produkte der Abschnitte der Sehnen gleich, die … echt stehen, so steht die Verbindungslinie der D … ven auf $s$ senkrecht. Durch Subtraktion der beid … $(a_1 - b_1) x_1 + (a_2 - b_2) x_2 = 0.$

Diese Senkrechte te … Setzt man $x_2 = - \frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} x_1$

in eine der Kegelschn … $\frac{\ldots b_2 - a_2 b_1}{a_1 - b_1} x_1 + \frac{k (a_2 - b_2)}{a_1 - b_1} = 0.$

Die Summe der beid … abhängig von $k$. Entsprechende

Kegelschnittpaare d … ungen für veränderliche $k$ bezeichnet werden, sc … rechten Geraden, so dass die Summe der Abschnit … zwar gleich dem Abstand des Punktes, in welchem … $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ sich schneiden, von $O_1 O_2$. Liegt die … o die Proportion $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$, so wird,

da $x_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1 \ldots}{\ldots}$ … $a_2 - b_2)$ ist, $x_1 = \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_2}{a_1}}.$

In diesem Falle sind … urven symmetrisch zur Festen. Da der Wert von $x_1$ … Senkrechten $a_1$, $a_2$, $b_1$ oder $b_2$ ist, sondern nur vo … s $a_2 : a_1$, so geht die Kegelschnittschar, welche … effizienten der $x_1$ und $x_2$ dasselbe Verhältnis habe … $= \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_2}{a_1}}$, $x_2 = \pm \sqrt{\frac{k}{s} \cdot \frac{a_1}{a_2}}.$

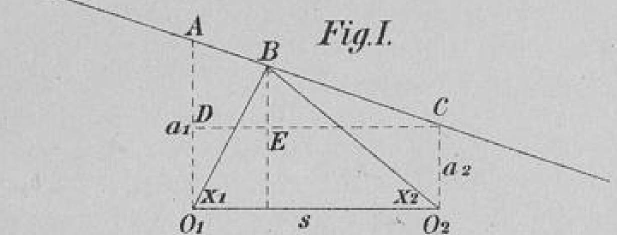



Fig. I.

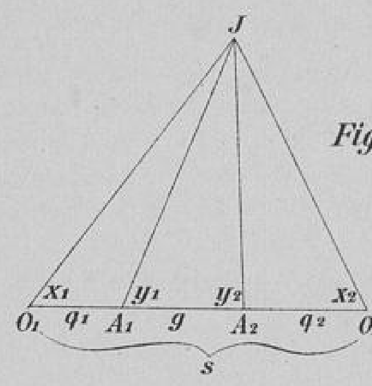



Fig. II.

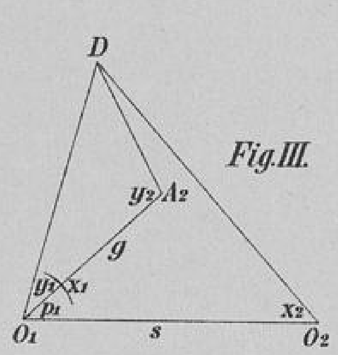



Fig. III.

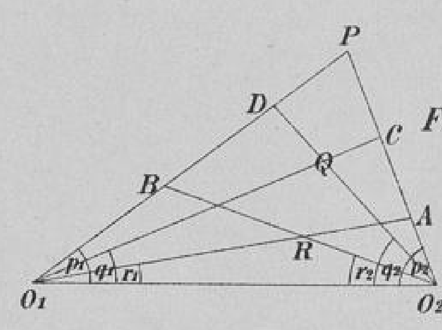



Fig. IV.