NEVE ASTRONOMIE.

Von

IOHANNES KEPLER.

(Fortsetzung und Schluß.)[1]

IV. Teil. Aufsuchung des wahren Maßes der ersten Ungleichheit aus physischen Ursachen und auf Grund meiner eignen Ansicht.

45. Kapitel. Die natürlichen Ursachen dieser Abbiegung des Planeten vom Kreise: Prüfung der ersten Annahme. 215; *337.*

Als mich die sehr genauen Beobachtungen Brahes dahin belehrt hatten, daß die Planetenbahn nicht genau kreisförmig, sondern an den Seiten eingebogen sei, da glaubte ich auch sofort die natürliche Ursache dieser Abbiegung zu kennen. Ich war ja im Stoffe des 39. Kapitels außerordentlich bewandert, und ich ermahne den Leser, jenes ganze Kapitel, ehe er hier weitergeht, nochmals achtsam durchzulesen. Ich schrieb nämlich in jenem Kapitel die Ursache der Exzentrizität einer gewissen im Planetenkörper sitzenden Kraft zu.[2] Deshalb mußte ich folgerichtig auch die Ursache jener Abbiegung vom Kreise dem Planetenkörper zuschreiben. Es ging mir aber, wie das Sprichwort sagt: der eilende Hund werfe blinde Junge. Ich hatte mich ja im 39. Kapitel sehr dadurch bedrückt gefühlt, daß ich außerstande war, eine hinreichend wahrscheinliche Ursache für die vollkommene Kreisform der Planetenbahn anzugeben (denn in jedem Falle hatte ich jener Eigenkraft des Planetenkörpers irgend eine sonderbare Eigenschaft beizulegen).[3] Nun aber hatte ich aus den Beobachtungen gefunden,
daß die Planetenbahn nicht || vollkommen kreisförmig ist.[4] Deshalb sah ich mich durch diese *338.*
Überzeugung sofort zu der Annahme genötigt, es werde sich aus dem, was ich im 39. Kap. als zur Erzeugung eines Kreises ungeeignet bezeichnet hatte, nach Umwandlung in eine wahrscheinlichere Form die richtige und mit den Beobachtungen verträgliche Planetenbahn aufbauen lassen. Hätte ich nun diesen Weg mit etwas mehr Überlegung beschritten, so hätte ich sofort auf die volle Wahrheit kommen können. Ich war jedoch vor Eifer blind, hatte auch nicht auf alle Einzelfälle des 39. Kap. acht und blieb bei derjenigen Betrachtung hängen, die sich zuerst darbot und wegen der Gleichmäßigkeit der Epizykelbewegung außerordentliche Wahrscheinlichkeit besaß. So geriet ich in ein neues Labyrinth, und wir müssen uns nun daraus in diesem 45. Kap. und in den folgenden bis zum 50. mühsam herauswinden.[5]

[Sollte der Planet den Kreis B[6] beschreiben, so müßte sich ND um N von γ aus un- Fig. 12.
gleichförmig drehen, da sich auch AN vom Aphel A aus ungleichförmig dreht || und DN zu AC 216.
parallel bleiben muß. Dadurch würde aber dem von γ nach D laufenden Planeten eine unaus-

[1]) Leider wurde Herausgeber durch äußere Umstände behindert, diesen letzten, bis ans Ende des K.schen Werks vordringenden Teil des Auszugs bereits, wie versprochen, Ostern 1909 zu veröffentlichen. — [2]) Vgl. S. 68 Z. 14 f. — [3]) Vgl. S. 70 Z. 1 f. — [4]) Vgl. das 44. Kap. — [5]) Diese sechs Kapitel führen zwar zu keinem Ergebnis, aber sie sind für die weitere Entwicklung der Ideen K.s von solcher Bedeutung, daß sie wenigstens auszugsweise anzuführen sind. — [6]) Fig. 12 auf S. 82.

führbare Aufgabe gestellt. Liefe jedoch der Planet D von γ aus gleichförmig, so würde er in das Innere des Kreises A hineinrücken und zwar auf beiden Seiten von FC. Denn AC dreht sich vom Aphel A aus langsamer als mit der mittleren Drehgeschwindigkeit. Das würde zu den Ergebnissen des 44. Kap. stimmen, und so wurde denn K. zu der Annahme bewogen, die Eigenkraft des Planeten übertreffe in ihrer Wirkung zunächst die Sonnenkraft, und es sei
339. ihre Aufgabe, den Planeten im Epizykel herumzuführen. || K. beklagt es, daß er hierdurch davon abgekommen sei, die Bewegung in Tierkreislänge lediglich der Wirkung der Sonnenkraft zuzuschreiben und dem Planeten nur eine Pendelbewegung in dem nach der Sonne hin
217. gerichteten Durchmesser zu übertragen.] || Glaubte ich doch, ich könnte durch kein andres Mittel [als das der gleichförmigen Bewegung des Planeten im Epizykel] die ovale Form der Planetenbahn gewinnen. | Nach diesen Überlegungen hielt ich, ganz unbesorgt um das Maß dieses Einbiegens an den Seiten, ja sogar um die Übereinstimmung der Zahlen, schon den zweiten Triumph über den Mars. Und es schien mir nicht schwierig, einen geringen Unterschied, der etwa doch noch zwischen den Zahlen bestünde, mittels der Prosthaphäresen in sehr kleinen Teilen ringsum zu verteilen und so unmerklich zu machen. [Der Besprechung jener verlockenden, aber dennoch falschen Ansicht sind die folgenden fünf Kapitel gewidmet.]

46. Kapitel. Die Erzeugung der Bahnlinie des Planeten nach der Annahme des 45. Kapitel und ihre Beschaffenheit.

[Nach Beweisen im 2., 39. und 40. Kap. ist der Epizykel auf dem konzentrischen Kreise dem exzentrischen Kreise gleichwertig. Für letzteren gibt das 40. Kapitel eine Berechnung der Abstandssummen,[1] und es könnte sich daraus möglicherweise auch für den
218; *340.* Epizykel eine Berechnung finden lassen. || Nun soll der Planet nach dem Obigen den Epizykel gleichförmig umlaufen, also möge er sich auch auf dem Exzenter gleichförmig bewegen. Mithin entsprechen gleichen Bogen gleiche Zeiten vom Mittelpunkte des Kreises aus, aber nicht gleiche Abstände von der exzentrischen Sonne. Der Planet erreicht aber diese Abstände wegen seiner ungleichförmigen Fortbewegung durch die Sonne vom Aphel aus eher, als den durch die Bogen gemessenen Zeiten entspricht, und zu diesen Zeiten ist er der Sonne schon näher gerückt als der zugehörige Punkt auf dem Exzenter. Daher biegt der Planet vom Exzenter-
341. umfang nach innen ein, und nur im Aphel und Perihel befindet er sich auf jenem. || Und es wird annähernd der die Zeit messende Exzenterbogen den wirklichen Bahnbogen verhältnismäßig ebensoviel übertreffen als der von der Sonne aus abgeschnittene Teil der Exzenterfläche den zum Bogen gehörigen Sektor. Wird also die ganze Kreisfläche, ihr Umfang und die Umlaufszeit des Planeten gleichmäßig durch die Zahl 360 ausgedrückt, so ist die Maßzahl der Zeit sehr nahe das arithmetische oder auch das nur wenig davon verschiedene geometrische Mittel zwischen dem von der Sonne aus abgeschnittenen Teil der Exzenterfläche, als der Maßzahl der Abstandssumme, und der Maßzahl des wirklichen Bahnbogens. Freilich zeigen sich einige Mängel. Erstens ist die Maßzahl der Kreisfläche etwas verschieden von
219. der Maßzahl der Abstandssumme nach dem 40. und 43. Kap. || Zweitens besteht jenes geometrische Mittel zwar für die einzelnen Bahnteile, aber nicht für ihre Summen; das würde nur für das arithmetische Mittel stimmen,[2] das allerdings nach dem 32. Kap. hier von jenem nur wenig verschieden ist. Drittens müßte ein gewisser Sektor gleich einem gewissen Dreieck gemacht werden, und das verlangte die noch fehlende Lösung der Aufgabe, einen Winkel in

[1]) Dort findet sich kein Wert für die Abstandssumme, wohl aber weiter unten im 48. Kap. usw. — [2]) Vgl. S. 88 Anm. 8.

einem gegebenen Verhältnis zu teilen.[1] Viertens sind Kreis- und Bahnsektor ebenso wie Kreis-
und Bahnbogen von einander verschieden, || und es gibt kein geometrisches Mittel zur Be- *342.*
stimmung des letzteren.]

[Daher stellen wir einen andren Versuch an. Von der Sonne A[2] werden nach der
Bahn Gerade AM', AN' so gezogen, daß sie Flächen DAM', DAN' abschneiden von der Größe Fig. 17.
derjenigen Kreissektoren DBE, DBF, die der vom Aphel D aus gemessenen Zeit proportional
sind,[3] und auf diesen Geraden wird AM = AE, AN = AF abgetragen. Dann wird der Planet
zu den durch die Kreissektoren DBE, DBF bestimmten Zeiten ziemlich genau in M, N stehen.
Freilich ist die Fläche nicht genau gleich der Liniensumme, es läßt sich ein Halbkreis || von 220.
einem Durchmesserpunkte aus nicht geometrisch in einem gegebenen Verhältnis teilen,[3] und
es sind die jetzigen Zeitmaße, eben die Flächen DAM, DAN, kleiner als die früheren DAM',
DAN', ohne daß bekannt wäre, ob jene Flächen zu diesen in unveränderlichem Verhältnis
stehen. Wir ziehen also, um klar zu sehen, die stellvertretende Hypothese des 16. Kap.[4]
heran, die den Planeten wenigstens an die richtigen Tierkreisörter verlegte, und vereinigen
sie mit der Hypothese des 45. Kap., aus der sich die richtigen Sonnenabstände des Mars
ergeben. Dabei bleiben wir uns freilich der Unzulänglichkeit beider Hypothesen bewußt. —
C sei der Exzentermittelpunkt, CJ die Apsidenlinie, A die Sonne und D der Gleichheitspunkt Fig. 18.
nach dem 16. Kap., also AC : CD = 11332 : 7232. Dann ist für einen beliebigen Exzenter-
punkt H JDH die mittlere Anomalie oder das Zeitmaß || und JAH die ausgeglichene Anomalie, *343.*
also nach dem 16. und 18. Kap. AH die Richtung nach dem wahren Tierkreisort zur gegebenen
Anomalie JDH, aber nach dem 19., 20. und 42. Kap. || nicht der richtige Abstand. Andrerseits 221.
werde AD in B halbiert und um B mit CH der Exzenter geschlagen und durch BF || DH in F
geschnitten. Dann ist AF der richtige Abstand, aber nicht die richtige Richtung. Trägt man
nun auf AH AG = AF ab, so hat AG die richtige Richtung und auch die richtige Länge,
also ist G der richtige Ort des Planeten. So löst die stellvertretende Hypothese die geo-
metrisch unlösbare Aufgabe, die richtige Lage der Linie AG zu bestimmen. Das kann die
vorher betrachtete Figur auch bei Anbringung eines Gleichheitspunktes nicht leisten, || denn *344.*
sie würde die Abstände zu weit nach dem Aphel hin verlegen. | Durch die beiden Kon-
struktionen in diesem Kapitel erhält die Planetenbahn eine Eiform,[5] d. h. sie ist am Perihel
stärker gekrümmt als am Aphel und an den Seiten mehr nach innen geneigt als eine Ellipse.]

47. Kapitel. Versuch einer Quadratur der eiförmigen Fläche, die das 45. Kapitel schuf und deren Beschreibung uns im 46. Kapitel soviel Mühe machte, und ein Verfahren, die Gleichungen mit ihrer Hilfe zu finden. 222.

Das Bisherige nützt uns alles nichts, wenn wir nicht aus der angenommenen Hypothese und aus den von uns hier als richtig angesehenen physischen Hypothesen außer den Abständen auch noch die richtigen Gleichungen gewinnen. Nun setzt sich die Gleichung

---

[1]) Vgl. Anm. 3. — [2]) Wegen Raummangels mußten wiederholt mehrere K.sche Figuren in eine zusammengezogen und deshalb bisweilen die von K. an die Figuren gesetzten Buchstaben geändert werden. — [3]) Ist die (wie immer bei K. vom Aphel aus gerechnete) exzentrische Anomalie DBE $= \vartheta$ und der hier von K. als „wahre" Anomalie benutzte Winkel DAM' $= \varphi$ und wird der Hilfswinkel DBM' $= \alpha$ eingeführt, so ist Sektor DBE $= \frac{1}{2} a^2 \vartheta$ und Sektor DAM' $= \frac{1}{2} a^2 (\alpha + e \sin \alpha)$, also folgt aus der Gleichheit der Sektoren $\vartheta = \alpha + e \sin \alpha$. Diese transzendente Gleichung entspricht der von K. angeführten Aufgabe, einen gegebenen Winkel in einem gegebenen Verhältnisse zu teilen, denn sie bestimmt α als Teil von ϑ. Es folgt dann φ aus $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \sqrt{\{[1 - e + e^2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha] : [1 + e + e^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha]\}}$ unter Vernachlässigung höherer Potenzen von e als der zweiten. — [4]) Vgl. S. 44 Z. 26 f. — [5]) K. unterscheidet Eiform oder Oval von Ellipse oder länglichem Kreise.

345. aus der Parallaxe || der Exzenterpunkte und aus der zugehörigen Umlaufszeit zusammen, und ich pflege jene den optischen und diese den physischen Teil der Gleichung zu nennen.[1] Man kann aber die Bewegungszeit, wenn überhaupt durch eine andere Größe, so sicherlich am einfachsten (wenn auch nicht am vollkommensten) mittels der durch die Planetenbahn begrenzten Fläche messen. Deshalb werden wir wieder auf die Ausmessung der Fläche jenes exzentrischen Ovals hingewiesen, für dessen Zeichnung wir die Gesetze oben angegeben
223. haben. . . || . . Wie aber könnten wir diese Fläche anders messen, mit der Kreisfläche vergleichen und in die verlangten Teile zerlegen als durch Konstruktion eines Quadrats, das einem Ausschnitte oder einem abgeschnittenen Möndchen gleich ist? Hier heißt es also aus der Tragödie einen Gott herbeirufen oder besser noch einen Geist, aber ohne Maschine, der uns die Quadratur des Ovals oder des Saumes in der obigen Figur ausführen lehrt oder auch die des Möndchens, das wir von der Kreisfläche abtrennen müssen, um das Oval zu erhalten. Wie also schon früher im 40. Kap. bei der Konchoidenfläche, so rufe ich auch jetzt bei dem Ovale (oder, wenn's beliebt, bei der antlitzähnlichen Fläche[2]) die Geometer auf und bitte sie um Hilfe.

[Für eine vollkommene Ellipse hat Archimedes diese Aufgabe gelöst.[3] K. sieht also zunächst das Oval als Ellipse an, zumal es nur sehr wenig von einer Ellipse abweicht. Dann ist, wie K. behauptet, das vom Halbkreis abgetrennte Möndchen „nur unmerklich" größer
Fig. 17. als der Halbkreis, dessen Halbmesser die Exzentrizität der Marsbahn ist. Es sei nämlich C der Gleichheitspunkt, so daß AB = BC ist, und es seien auf dem um B laufenden Exzenter T und Z durch AT = BD und CZ || BT festgelegt. Endlich sei auf AZ Y durch AY = AT und auf BZ X durch AX = AT bestimmt. Dann ist T im Sinne der Araber, Y aber in K.s Übertragung der „Punkt des mittleren Abstands von der Sonne". „Es ist dann XZ nur unmerklich größer als YZ, d. h. als die Breite des abgeschnittenen Möndchens in der Nähe
346; 224. der mittleren Längen."[4] Fällt man noch BV || und XW ⊥ AT und TU ⊥ BZ, || so ist AV = TW = UX = UZ, also ist XZ = 2AV und somit $XZ \cdot BZ = UZ \cdot 2BZ = TZ^2 = AB^2$. Zugleich ist $XZ \cdot BZ = BZ^2 - BX \cdot BZ$ und die Möndchensumme = Exzenterfläche — Ellipsenfläche, sowie $BX \cdot BZ = BZ^2$ ungefähr[5] = Ellipsenfläche : Exzenterfläche. Also gilt $BZ^2 : XZ \cdot BZ$ oder $BZ^2 : AB^2$ = Exzenterfläche : Möndchensumme oder BZ^2 : Exzenterfläche = AB^2 : Möndchensumme. Aber BZ^2 : Exzenterfläche = AB^2 : Kreisfläche mit dem Halbmesser AB. Daher ist diese letztere Fläche „nur unmerklich" größer als die Möndchensumme, d. h. gleich der Summe der Ovalmöndchen mit der Breite XZ, die ja auch „nur unmerklich" größer als YZ ist. Voraus-
225; 347. gesetzt wird dabei, daß die Ellipse „nur unmerklich" von der Ovalfläche abweicht.[6] || Nun gibt BZ = 100000 und AB = 9264 XZ = 858, die Exzenterfläche = 31415900000, die

---

[1]) In Fig. 17 ist Winkel oder Sektor DBF die physische und Winkel oder Dreieck ANB die optische Gleichung. — [2]) ooides oder metopoides, in einem Briefe an D. Fabricius via facialis. — [3]) Archim. De Conoidibus et Sphaeroidibus IV. — [4]) Es ist $AZ = a\sqrt{(1+2e^2)} = a\,(1 + e^2 - \frac{1}{2}e^4)$ und AY = a, also $YZ = ae^2\,(1 - \frac{1}{2}e^2)$. Andrerseits ergibt sich weiter unten $XZ \cdot a = (ae)^2$ oder $XZ = ae^2$. Mithin ist XZ „nur unmerklich" größer als YZ (beim Mars noch nicht um 0,00004 a). — [5]) K. sagt „ungefähr", da BX „nicht ganz genau der kürzere Halbmesser" der Ellipse sei. — [6]) Als Ellipse mit den Halbachsen BZ = a und $BX = a\,(1 - e^2)$ hat das Oval die Fläche $\pi\, a^2\,(1 - e^2)$, mithin ist die Möndchensumme $\pi\,(ae)^2$, d. h. gleich dem Kreise mit der linearen Exzentrizität als Halbmesser. Nun steht aber BX schief gegen die Apsidenlinie (beim Mars weicht es $2^2/_3{}^0$ von der Senkrechten ab). Führt man also die Ellipse mit den Halbachsen BZ und $BK = a\sqrt{(1 - e^2)} = a\,(1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4)$ ein, so wird die Möndchensumme $\frac{1}{2}\pi\,(ae)^2\,(1 + \frac{1}{4}e^2)$, d. h. halb so groß wie vorher. Das stimmt zu der hier und da von K. geäußerten Bemerkung, die Wahrheit liege zwischen dem Exzenterkreise und dem durch das 45. Kap. geschaffenen Ovale in der Mitte. Obige „Ableitung behält (aber) ihren Nutzen auch für die ganz richtige physische Hypothese". (Anm. K.s.)

Kreisfläche mit AB = 269 500 000, die Möndchensumme ebensogroß, also die Ovalfläche = 31 146 400 000, „und das ist den 360 gleichen Teilen der Umlaufszeit gleichwertig".]

Das bisher Gesagte stimmt nun zwar zur Annahme des 45. Kap. Gleichwohl genügt zu seiner Anwendung die Kenntnis der Größe der Ovalfläche nicht, wir müßten vielmehr noch ein Verfahren beherrschen, jene Fläche vom Mittelpunkte B oder auch vom Punkte A aus in gegebenem Verhältnis zu teilen. [Hätte z. B. der Planet einen Bogen DF des exzentrischen Fig. 17.
Kreises durchlaufen, so wäre die Fläche DAF des Kreises das Maß der Bewegungsdauer. Nun durchläuft er aber einen Bogen des mehr nach innen zu gelegenen Ovals, also muß man von DAF einen Teil des Möndchens wegnehmen, um den entsprechenden Teil der Ovalfläche und durch seine Vergleichung mit der ganzen Ovalfläche die Zeitdauer der Bewegung im Ovalbogen zu erhalten.] Man spanne in der Linie EA von E aus eine gewisse Fig. 15.
Strecke (Eo) nach A hin aus, die sich zu BA[1] verhält wie BA zu BC.[2] So konstruiere man auch die übrigen $G\mu$, $H\nu$, $J\pi$ und $K\varrho$ in richtiger Größe, nach der Breite des Möndchens an jeder Stelle, so daß $G\mu$ ein wenig kürzer ist als $K\varrho$ und $H\nu$ kürzer als $J\pi$ (obgleich sie gleichweit von C und D entfernt sind) nach dem Beweise im 46. Kap. So ist das Möndchen abgezeichnet und Teil für Teil gerade gestreckt, soweit es die Abstände verkürzt. | Und weil der ganze Flächenraum zwischen CD und AA das Doppelte der ausgestreckten Fläche des Halbkreises CD ist, so mögen die Geometer überlegen, ob auch der kleine Raum zwischen der gekrümmten Linie $C\mu\nu o\pi\varrho D$ und der Geraden CED doppelt so groß ist als das von der Kreisfläche abgeschnittene Möndchen. || Gegen diese Möglichkeit scheint nichts zu sprechen. 226.
Solange nämlich das Möndchen tatsächlich ein solches ist, solange krümmt sich CD, und es ändert seine Länge nicht. $C\mu\nu o\pi\varrho D$ aber, das jetzt länger als CED geworden ist, ist dort viel kürzer, und es wird deshalb dann eine viel kleinere Möndchenfläche eingeschlossen als jetzt. Aber das heißt freilich nicht beweisen, ihr Geometer. Ihr werdet mir also helfen. Und ist dies als richtig || festgestellt, dann werdet ihr ein Verfahren lehren, nicht nur die *348.*
Größe des ganzen Stückchens zwischen der Geraden CED und der krummen Linie CoD zu finden [das jetzt gleich dem kleinen Exzentrizitätskreis wird], sondern auch jeden beliebigen Teil von ihm zu jeder beliebig gegebenen Länge der Flächen CG, CH zu finden und mit der Fläche zwischen CD und BB zu vergleichen.[3]

Wiederum werden wir wie früher im 46. Kap. mit einem weniger kunstgerechten Verfahren auszukommen suchen, da uns die Geometrie keinen zugänglichen Ausweg verschafft. Und man braucht sich darüber nicht zu verwundern, denn die im 45. Kap. gewonnene Meinung, die uns in diese Schwierigkeiten gestürzt hat, ist ja doch falsch. | [Wäre das Oval eine Ellipse, Fig. 17.
so errichte man auf der Apsidenlinie AD eine Ordinate GH des Exzenters, die die Ellipse in N schneide. Dann stehen die Ellipsenteile DGN zu den Kreisteilen DGH in unveränderlichem Verhältnisse, so daß man an Stelle der Ellipse oder des Ovals nur den Kreis zu teilen hätte. Dann gilt BX : BZ = GN : GH = Fläche ADN : Fläche ADH. Nimmt man also die seit dem Weggange des Planeten vom Aphel D verflossene Zeit beliebig an, so findet man zuerst den Winkel DBF aus der Proportion Umlaufszeit : gegebener Zeit = 4 Rechte : DBF, wo F der zum Bahnort N gehörige Exzenterort ist, für den AF = AN gilt. Aus AB, BF und DBF findet man dann AF oder AN. Weiter folgt die Fläche ADH aus der Proportion halbe Umlaufszeit : gegebener Zeit = Halbkreisfläche || : Fläche ADH. Nun ist der Winkel DBH 227.
so zu bestimmen, daß der Kreissektor DBH und das Dreieck ABH zusammen die schon oben aus der Zeit ermittelte Fläche ADH ergeben. „Dabei muß man probieren und die Regula falsi

[1]) der Exzentrizität. — [2]) dem Exzenterhalbmesser. — [3]) Vgl. S. 74 Anm. 1.

anwenden."[1] Dann bestimmt sich aus AB, BH und DBH der Winkel DAH[2] und mittels des bekannten Verhältnisses HN : HG der Winkel HAN, also endlich der ausgeglichene Winkel
228; *349.* DAN durch DAH — HAN.[3] || K. führt diese Berechnung für die einzelnen Achtel der Um-
350. laufszeit durch und findet dabei || bis zu 7′ Abweichung von der stellvertretenden Hypothese. Dann stellt er alle nach den verschiedenen, früher besprochenen Verfahren berechneten Werte der ausgeglichenen Anomalien zusammen. Die richtigen Werte, also die der stellvertretenden Hypothese, liegen, wie das Schema zeigt, genau in der Mitte zwischen den nach der obigen Annahme einer Ellipse und den aus der Annahme einer vollkommenen Kreisbahn berechneten Werten.[4]]

Daher fallen die Exzentergleichungen bei derjenigen von den zwei physischen Rechnungshypothesen, die auch oben im 45. Kap. genauere Abstände gab, nämlich bei der zweiten, am genauesten aus.[5] Und was wunderbar anmuten könnte, durch eine geringe Vergrößerung der Exzentrizität gibt sie dieselben Werte wie das Verfahren des Ptolemäus, das bei Halbierung der Exzentrizität einen feststehenden Gleichheitspunkt benutzt. | Wir haben aber oben dieses Verfahren des Ptolemäus als fehlerhaft erwiesen, also muß notwendigerweise auch jenes physische Verfahren wegen seiner gleichartigen Wirkung noch etwas von der Wahrheit abweichen . . .

229.

48. Kapitel. Über ein Verfahren zur Berechnung der Exzentergleichungen mittels zahlenmäßiger Messung und Teilung des Umfangs des im 40. Kapitel beschriebenen Ovals.

Es fehlt also der im vorigen Kapitel benutzten Rechnung an sehr zahlreichen Stellen die Unterstützung durch die Geometrie, und sie stand mithin im Verdachte, daran schuld zu sein, daß wir die Exzentergleichungen jenes Kapitels zu groß oder zu klein erhielten. Ich nahm deshalb schließlich meine Zuflucht zu einer[6] zahlenmäßigen Darstellung und wagte mit dieser jene Unbequemlichkeiten zu beseitigen, die uns im 46. Kap. bei der[7] Darstellung der
351. Planetenbahn hinderlich waren. Erstens war ja || die Fläche nicht das genaue Maß der Abstandssumme, also ließ ich die Fläche sein und berechnete die Abstände der einzelnen Teile des gleichmäßig geteilten Umfanges selbst. Zweitens blieb das Verhältnis bei der Zusammenziehung der Werte beliebig vieler geometrischer Verhältnisse nicht ungeändert,[8] deshalb untersuchte ich das Verhältnis jedes einzelnen Abstandes zu seinem Elementarbogen[9] für sich. Drittens konnte ich die Summe beliebig vieler Abstände im 40. Kap. nicht geometrisch darstellen, daher stellte ich sie hier arithmetisch dar, da mich daran nichts hinderte. Viertens hatte ich bei meiner jetzigen Aufgabe nichts mit den Sektoren des Kreises oder des Ovals zu tun, also konnte mir auch die Verschiedenheit dieser Sektoren von einander in keiner Weise hinderlich sein. Und so bemühte ich mich denn in einem neuen Anlaufe, endlich einmal zu erfahren, ob sich auch aus der für die richtigen Abstandsgrößen angenommenen Hypothese (also eben aus der Annahme des 45. Kap.) die uns durch die stellvertretende Hypothese gelieferten Gleichungen ergeben.

---

[1]) Ist DBH $= \vartheta$, so gilt $\frac{1}{2}a(\vartheta + e\sin\vartheta) =$ Fläche ADH, also $\vartheta + e\sin\vartheta = 2\pi t : T$, wo T die Umlaufszeit des Planeten und t die vom Aphel aus gerechnete Bewegungsdauer ist. Hier tritt also das berühmte Keplersche Problem zum erstenmal auf. — [2]) Nach früherem ist $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{DAH} = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\vartheta \cdot \sqrt{\{[1 - e + e^2\cos^2\frac{1}{2}\vartheta] : [1 + e + e^2\sin^2\frac{1}{2}\vartheta]\}}$. In den Summanden mit e^2 zeigt sich die Abweichung der Bahnform von der Ellipse. — [3]) Einfacher $\mathrm{tg}\,\mathrm{DAN} = \sqrt{(1 - e^2)} \cdot \mathrm{tg}\,\mathrm{DAH}$. „Dieses Gleichungsverfahren ist auch später bei der richtigen Bahnform verwendbar." (Anm. K.s.) — [4]) Vgl. S. 86 Anm. 6. — [5]) „Aus diesen Anzeigen erkennen wir mit Gewißheit, daß wir auf richtigem Wege sind." (Anm. K.s.) — [6]) rein. — [7]) geometrischen. — [8]) d. h. aus $a_1 : b_1 = b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 = b_2 : c_2$ usw. folgt nicht $\Sigma a : \Sigma b = \Sigma b : \Sigma c$. — [9]) arcus minimus.

[Es sei B der Mittelpunkt des Exzenters, N ein Punkt auf diesem, A die Sonne. Fig. 18.
Dann ist zunächst Winkel LAN das Zeitmaß, und es ist AN der richtige Abstand von der Sonne, aber in falscher Richtung gegen AL. || Der Kreisumfang wird nun in kleine Elementar- 230.
bogen von etwa je 1° geteilt, und es werden die zugehörigen Abstände wie im 29. Kap. berechnet und alle 360 summiert, wodurch sich bei der Exzentrizität 9165 der Wert 36075562 ergibt.[1] Der zum Abstand AN gehörige Bogen[2] des Ovals ist nun diesem Abstand umgekehrt proportional, es verhält sich die Länge des ganzen Ovalumfangs, für die K. einen Wert im voraus als bekannt annimmt, zur obigen Abstandssumme wie der Abstand AN zum zugehörigen Elementarbogen nach dem 33. und 46. Kap. Dabei wird zur Vorsicht als Abstand irgend eines Elementarbogens die halbe Summe der Abstände seiner Grenzpunkte eingesetzt. Denn der mit dem größeren Abstand um A beschriebene Sektor[3] ist etwas größer, der mit dem kleineren beschriebene etwas kleiner als der zugehörige Sektor des Bahnovals, und bei sehr kleinen Teilen gleicht sich das eine gegen das andre aus. || So möge der Ovalbogen LO[4] *352.*
der Zeit LN und dem Abstand AN entsprechen. Nun gilt es den Winkel LAO der ausgeglichenen Anomalie zu finden. Es schneide AO in P und BO in Q den Exzenter, || wobei 231.
man den sehr kleinen Bogen PQ zunächst vernachlässigen kann. Winkel LBO aber war durch LO (oder LP) gegeben, mithin konnte man aus dem Dreieck ABQ AQ und somit OQ (oder OP) = AQ — AO (oder AN) berechnen. OQ wurde halbiert[5] und dadurch die Annäherung des Ovals an A und der genauere Winkel LBO bestimmt. Jetzt gibt Dreieck ABO die gesuchte ausgeglichene Anomalie LAO.] Auf diese Weise konnte ich keine einzige Gleichung unabhängig festsetzen mit Ausnahme der allerersten zur mittleren Anomalie 1°. Die anderen alle bis zur 180ten setzten immer die Bekanntschaft der gerade vorhergehenden Gleichung voraus. Schwerlich wird dies einer lesen können, ohne schon beim bloßen Lesen Unbehagen zu empfinden. Gerade daraus aber möge der Leser ersehen, welche zahllose Beschwerden wir (ich und mein Rechner) zu erleiden hatten, die wir dieses Verfahren unter jedesmaliger Abänderung der Exzentrizität durch die 180° Anomalie dreimal durchgeführt haben!

[Der oben als richtig angenommene Wert der Ovallänge erlaubt jetzt eine Nachprüfung durch Addition der 360 Elementarbogen. Im voraus aber hat ihn K. gewonnen aus einer Vergleichung || des Ovals und der ihm der Fläche nach gleichen Ellipse mit einem Kreise, *353.*
dessen Halbmesser sich von dem des Exzenters um die halbe Mondbreite unterscheidet, und mit einem zweiten, dessen Halbmesser das geometrische Mittel zwischen dem Exzenterhalbmesser selbst und dem um die ganze Mondbreite verminderten Exzenterhalbmesser ist. ||
Daraus ergibt sich der halbe Ovalumfang als um 46′ 20″ oder „wie ich nicht durch Beweis, 232.
aber durch die mühevollste und langwierigste Rechnung fand" um 45′ 45″ kleiner als der Umfang des Halbkreises, also gleich 179° 14′ 15″. Dieser Verkürzung entspricht eine entgegengesetzte optische Vergrößerung von gleicher Größe, denn das Halboval erscheint ja trotz seiner geringeren Länge von B oder A aus auch unter 180°. || Man könnte daraus schließen, 233; *354.*
daß sich die Rechnung abkürzen ließe, doch stellt sich diese Vermutung als irrtümlich heraus, da die optische Verlängerung in den Apsiden fast unmerklich, in der mittleren Länge aber am größten ist, während sich die Verkürzung rundum fast gleichmäßig verteilt. Daher rechnete

[1]) Ist die exzentrische Anomalie LBN $= \vartheta$, so ist AN $= a\sqrt{(1 + 2e\cos\vartheta + e^2)} = a\,(1 + e\cos\vartheta + \frac{1}{2}e^2 \cdot \sin^2\vartheta - \frac{1}{2}e^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta + e^4\sin^2\vartheta\,(\cos^2\vartheta - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta))$ und mithin die Summe der AN für alle ganzen Grade des Winkels ϑ von 1° bis 360° $a\,(360 + 90e^2 + 11\frac{1}{4}e^4)$. Für den K.schen Wert $e = 0{,}09165$ gibt das $360{,}7568\,a$, also fast genau den K.schen Summenwert. — [2]) Elementarbogen. — [3]) Elementarsektor. — [4]) erhalten durch Addition der Elementarbogen. — [5]) Wie oben festgesetzt, sind die Möndchen nur halb so breit als nach der Annahme des 45. Kap. vom Exzenter abzuschneiden.

K. nach dem genauen Verfahren, allerdings das erstemal mit der fehlerhaften Exzentrizität 9165, denn diesen Wert glaubte er aus der Bearbeitung der Fläche ganz sicher gefunden zu haben,
234. und mit einem Halboval, das er versehentlich länger als 180° angenommen hatte. ‖ Das zweitemal nahm er das verkürzte Oval und fand in den Achteln der Umlaufszeit gegen die
355. stellvertretende Hypothese Abweichungen bis zu 9′. ‖ Daraus erkannte er, daß die Exzentrizität zu klein sei. Wegen des Überschusses von 3′ 50″ in den mittleren Längen legte er der optischen Gleichung die Hälfte, 1′ 55″, zu und fand nun 9227 oder rund 9230 als Exzentrizität[1] (also nahezu soviel wie den Wert 9264 im 42. Kap. und die Hälfte der Exzentrizität des
Fig. 18. Äquanten im 16. Kap., 9282). Er wiederholte dann die Rechnung zum drittenmal.] Zuerst suchte ich die Abstände AN oder AO für die einzelnen ganzen Grade der ausgeglichenen Abstandsanomalie LAN auf. Dann übertrug ich sie auf die ganzen Grade der mittleren Abstandsanomalie LN oder LBN. Drittens summierte ich je zwei benachbarte (Abstände). Viertens teilte ich durch die Summen als Divisoren 180 mal die Summe 358° 28′ 30″, eben die Länge des Bahnovals.[2] Fünftens summierte ich Stück für Stück zueinander die einzelnen Bogen des Bahnovals. Sechstens entnahm ich der früheren erfolglosen Rechnung die optischen Vergrößerungen, denn sie waren schon zweimal berechnet und wichen dabei ersichtlich nur noch wenig voneinander ab. Daher wurden auch sie Stück für Stück zu der Summe der vorausgehenden addiert. Siebentens vermehrte ich die Summen der Bogen um die der optischen Vergrößerungen. Achtens suchte ich aus dem so gefundenen Winkel LBO am Exzentermittelpunkte, aus dem Abstand AO . . . und aus der Exzentrizität AB . . . die Winkel der 180° der optischen Gleichung AOB, woraus sich alle Gleichungen und ausgeglichenen Anomalien ergaben. [Nunmehr zeigte die ausgeglichene Anomalie gegenüber den Werten der stellvertretenden Hypothese nur noch Abweichungen von höchstens 4½′. Diese ließen auf einen zu kleinen Wert der Exzentrizität und auf einen etwas zu langsamen Lauf des
235. Planeten in den Apsiden ‖ und einen zu schnellen in den mittleren Längen schließen.] Ich kam also ersichtlich stets um so näher an die durch die stellvertretende Hypothese des 16. Kap. gelieferten, richtigen Gleichungen heran, je genauer und passender ich die im 45. Kap. eingeführten physischen Ursachen zur Abänderung des Rechnungsverfahrens heranzog. Deshalb beglückwünschte ich mich selbst und bestärkte mich in der Meinung des 45. Kap. Umgekehrt verdrossen mich die vielerlei Schwierigkeiten, mit denen ich im jetzigen Kapitel zu kämpfen hatte. Deshalb beruhigte ich mich hierbei nicht, sondern ich schlug einen anderen, sichereren und bequemeren Weg ein, und zugleich fing ich an zu argwöhnen, daß ich auch sonst durch die Rechnung nicht ganz das gewonnen hätte, was die Voraussetzung des 45. Kap. gefordert hatte.

356.

49. Kapitel. Eine Untersuchung des früheren Verfahrens für die Gleichungen und ein kunstgerechteres Verfahren, das sich auf die Grundlagen stützt, auf denen sich das Bahnoval nach der Annahme des 45. Kapitels aufbaut.

[Das oben benutzte Verfahren setzt für die Berechnung irgend eines Ovalbogens den ganzen Ovalumfang, dieser aber wieder die Abweichung des Ovals vom Kreise als bekannt voraus. Hierüber kann man aber erst dann eine Aussage machen, wenn man den zu einer gegebenen Zeit gehörigen Ovalbogen angeben kann. Es stellt sich also eine petitio principii
236. heraus. ‖ Deshalb kehrt K. zu den im 45. Kap. angegebenen Grundeigenschaften des Bahn-
Fig. 12. ovals zurück. Man beschreibe um A mit AC den Aphelkreis des Mars, der dann auch durch

[1]) Wie im 47. Kap. rechnet K. folgendermaßen: 0,09165 = sin 5° 15′ 30″; addiert man zum Winkel 5° 15′ 30″ die 1′ 55″, so erhält man nunmehr sin 5° 17′ 25″ = 0,09220, also nach K.s Abmessung die Exzentrizität 9220. — [2]) Da K. die Summe der beiden Nachbarabstände nicht halbiert, so muß er den ganzen Umfang dividieren.

γ läuft. Das Maß der Zeit ist dann etwa der Winkel γND, der Mars hat sich also in seinem
Epizykel von γ nach D bewegt. Das Bahnoval selbst läuft dabei von C durch D nach einem
Punkt Z auf Nγ hin. || K. greift nun zunächst auf das Verhältnis der Eigenkraft des Planeten *357.*
zu der Kraft aus der Sonne zurück, um daraus zu schließen, daß auch jetzt der Winkel NAC
durch die Abstandsumme im Bahnoval bestimmt ist. || Es ist aber hierbei nicht mehr wie 237.
im 39. Kap. ND zu AC parallel. Denn soviel die Aphelabstände die mittleren Abstände
übertreffen, soviel ist auch verhältnismäßig der Winkel γND größer als NAC. Es gilt nun,
aus dem Zeitmaß γND den Winkel NAC zu bestimmen. Doch ist das jetzt nicht mehr durch
eine einfache Rechnung zu bewältigen, da sich weder der Ovalbogen CD noch der größere
Ovalbogen CZ zum ganzen Ovalumfang verhält wie der Kreisbogen Cγ zum ganzen Kreis-
umfang. Man bestimmt also nach dem früher schon öfters benutzten Verfahren die Abstände für
die ganzen Grade der mittleren Anomalie, || indem man sie erst für die gebrochenen Grade *358.*
bestimmt und dann ausgleicht. Oder man geht umgekehrt von dem Zeitmaße oder von den
ganzen Graden der mittleren Anomalie γND aus, die gegen Zeichenfolge zu rechnen sind.
Dann sind im Dreieck AND AN, ND und Winkel AND bekannt, also AD und NAD bestimmt.
Man legt dann eine erste Tafel an, die zu jedem ganzen Grade von γND die zugehörigen
Werte von AD und NAD angibt. Dann berechnet man den Mittelwert aller AD und setzt an:
jeder Abstand oder besser der Mittelwert zweier Nachbarabstände verhält sich zum Mittelwert
aller Abstände wie 60′ zu dem Bogen jenes Abstandes oder zwischen jenen Abständen. So
bestimmt man die Elementarbogen. || Nun werden alle diese Bogen in einem Halbkreis nach 238.
und nach summiert, wodurch sich nach und nach alle Winkel γAC aufbauen. Die Rechnung
ist dabei richtig durchgeführt, wenn sich zuletzt 180° ergibt. Diese Winkel γAC werden
wieder neben den mittleren Anomalien in eine Tafel eingeordnet. Soll man nun die aus-
geglichene Anomalie zu einer in ganzen Zahlen gegebenen mittleren berechnen, so entnimmt
man aus der zweiten Tafel γAC und aus der ersten NAD und findet dann durch Subtraktion
oder im andren Halbkreis durch Addition die ausgeglichene Anomalie DAC. K. führt die
Rechnung aus und stellt eine Tafel der Hauptwinkel her, aus der sich Abweichungen bis
zu $9^1/_2$′ gegen die stellvertretende Hypothese ergeben, || die den Planetenlauf in den Apsiden *359.*
zu langsam und in den mittleren Längen zu schnell erscheinen lassen.]

Man könnte meinen, wir hätten recht schlechte Fortschritte gemacht, denn im 48. Kap.
seien wir mit unsren Ergebnissen der Wahrheit näher gekommen. Aber, mein Lieber, wenn
mich dies Ergebnis beunruhigen sollte, so hätte ich mich ja mit der stellvertretenden Hypo-
these zufrieden geben und mir diese ganze Arbeit ersparen können. So wisse denn, daß
uns diese Irrtümer zur Wahrheit hinführen werden. Unterdeß aber wollen wir soviel als
sicher ansehen, daß wir endlich einmal die für uns im 45. Kap. noch hypothetischen phy-
sischen Ursachen ohne jeden Irrtum einer Berechnung unterworfen haben. Zugleich aber
wird hierdurch auch die frühere, der jetzigen gleichwertige Rechnung des 47. Kap. bestätigt,
und wir sind nun sicher, daß uns das, was wir dort als unmathematisch ansprachen, nicht
sonderlich hinderte. Bleibt also auch eine gewisse Abweichung der jetzigen Gleichungen von
den richtigen übrig, so ist das nicht dem Rechnungsverfahren zuzuschreiben, sondern der
Annahme des 45. Kap. als der Quelle dieser Zahlen. Doch ist nicht gleich die ganze Ansicht
an sich falsch, wir waren nur zu hastig und warteten nicht die vollständige Vergleichung der
Beobachtungen ab. Wir benutzten vielmehr zu vorschnell, nachdem wir die Planetenbahn
als Oval erkannt hatten, eine bestimmte Größe dieses Ovals || (auf Grund der bloßen Eben- 239.
mäßigkeit der physischen Ursachen und wegen der, freilich fälschlich, als gleichförmig an-
genommenen epizyklischen Bewegung) . . . .

50. Kapitel. Über die Versuche, mittels sechs andrer Verfahren die Exzentergleichungen zu gewinnen.

239—246; [K. kritisiert in diesem Kap. sechs verschiedene Verfahren, mittels deren er nach und
359—366. nach eine Berechnung der Exzentergleichungen versucht hatte. Diese Versuche beruhen auf
falschen Voraussetzungen und führen deshalb nicht näher an das Ziel heran. Sie sind auch
mit Ausnahme des sechsten für die weitere Entwicklung unwesentlich, so daß nur die wichtigsten Bemerkungen K.s angeführt werden. Wiederholt weisen die Rechnungen darauf hin,
241; *362.* daß „der Wert der Exzentrizität des Mars (9165) zu klein sei." (Zweites Verfahren.) Ein
aus falscher Voraussetzung richtig folgender Wert beweist, „daß man sich auf das Ergebnis (allein) nicht verlassen darf." „Und wieder wird man wie auch im 47. Kap. sehen, daß die Wahrheit zwischen diesen beiden Verfahren (dem ersten und dem zweiten, von denen das letztere einen vollkommenen Kreis, das erstere aber zufolge der Annahme des 45. Kap. ein Oval beschreibt) in der Mitte liegt.[1] Daraus kann man genau wie oben im 47. Kap. schließen, daß die Monde nur halb so breit wie nach der Annahme des 45. Kap. von dem vollkommenen
245; *365.* Kreise abzuschneiden sind."[2] „Zuletzt wollen wir uns zum sechsten Verfahren und zu den
Proportionalen wenden, die sich zum Beweise des 32. Kap. eignen. Es stehen nämlich die wahren Größen derjenigen Bahnbogen, die vom Sonnenmittelpunkte aus gleichgroß erscheinen, im Verhältnis der Abstände . . . Es stehen aber auch die Zeiten, während deren sich der Planet in wirklich gleichen Bahnbogen bewegt, im Verhältnis der Abstände . . . Daher stehen die Zeiten, während deren sich der Planet im Bogen bewegt, die vom Sonnenmittelpunkte
Fig. 17. aus gleich groß erscheinen, im quadratischen Verhältnis der Abstände."[3] Man ziehe nun
um die Sonne A den Konzenter durch J und um B den Exzenter durch D, schneide die Kreise durch den freien Schenkel der zu einem Bogen gehörigen exzentrischen Anomalie in P und F und suche die dritten Proportionalen AQ zu AP und AF. „Dann steht auch AQ zum Halbmesser AP im quadratischen Verhältnis des Abstandes AF zum mittleren Abstand AP. Daher sind die Maße derjenigen Zeiten, während deren sich der Planet in den gleichen Graden der (ausgeglichenen) Anomalie bei A bewegt, eben die jenen Graden entsprechenden Linien AQ."[4] „Doch kommt es (das sechste Verfahren) der Wahrheit nahe genug,[5] und es deckt sich mit dem Verfahren des 49. Kap. . . . Dort berechneten wir den optischen und den
246; *366.* physischen Teil der Gleichung je für sich, hier aber beide zusammen." „Wir können hier
eine zweite falsche Meinung über die epizyklische Bewegung des Planeten aufgeben und uns der wahren Ansicht über die physische Ursache um einen Schritt nähern, indem wir dem Epizykel nur noch die Schwankung im Halbmesser überlassen. Doch ist diese immer noch nicht fehlerfrei, wie auch aus den Gleichungen zu erkennen war." „Du findest also, eifriger Leser, unter der großen Zahl von Kapiteln und Verfahren nur zwei Ausgleichungsverfahren, die mit

---

[1]) Vgl. S. 86 Anm. 6. — [2]) Vgl. die Berechnung im 48. Kap. — [3]) Erscheint von der Sonne aus der im Abstand a liegende Bogen α genau so groß als der im Abstand b liegende Bogen β, so gilt 1) $\alpha : \beta = a : b$. Denkt man sich jetzt auf α einen Bogen γ von der Länge β abgetragen, so gilt 2) $t''' : t'' = a : b$ und zugleich, da jetzt α und γ gleichweit von der Sonne liegen, 3) $t' : t''' = \alpha : \gamma = \alpha : \beta$. Aus 2) und 3) folgt $t' : t'' = a\alpha : b\beta$ und nun mittels 1) $t' : t'' = a^2 : b^2$. Freilich nimmt K. hier keine Rücksicht auf den Winkel, den die Bogen mit den Abständen bilden. — [4]) K. bemerkt bei der Berechnung der Summen aus den AF und aus den AQ, er habe jene Summe kleiner als 360 a, diese aber gleich 360 a gefunden, und wünscht einen Beweis des letzten Ergebnisses. Nun ist $AF = a\,(e \cos \varphi + \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}) = a\,(1 + e \cos \varphi - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{8} e^4 \sin^4 \varphi)$, also $\Sigma AF = a\,(360 - 90\,e^2 - 19\tfrac{3}{8}\,e^4)$, d. h. sicher kleiner als 360 a. Weiter ist $AQ = AF^2 : AP = a\,(1 + e^2 \cos 2\varphi + 2\,e \cos \varphi \,.\, \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)})$, also genau $\Sigma AQ = 360\,a$. — [5]) „Dieses sechste Verfahren können wir nach ganz geringen Verbesserungen . . . auch bei der ganz genauen physischen Hypothese anwenden, und es ist kurz und klar." (Anm. K.s.)

der Annahme des 45. Kap. übereinstimmen. Das eine benutzt die physische Hypothese und ist mit dem der Länge zugeordneten Epizykel verknüpft und zwar im 49. Kap. Das andre findet sich in diesem Kapitel und zwar im sechsten Verfahren und steht an Stelle einer natürlicheren physischen Hypothese. Bei ihm bewirkt der Epizykel nur das Herabsteigen nach der Sonne hin, oder man könnte ihm nach Belieben auch die zur Ekliptikebene senkrechte Breite zuordnen. Und alle beide kommen sie auf verschiedenen Wegen zu demselben Erfolge. Um so sicherer wird man ihnen also bei der Prüfung der Annahme des 45. Kap. vertrauen dürfen."]

51. Kapitel. Prüfung und Vergleichung der Sonnenabstände des Mars in gleichem Aphelabstande in beiden Halbkreisen und eine damit verbundene Prüfung der Zuverlässigkeit der stellvertretenden Hypothese.[1]

Während ich so über die Bewegungen des Mars triumphiere und ihn als einen fast völlig besiegten Feind in den Tafeln einkerkere und mit den Exzentergleichungen fessele, wird an verschiedenen Orten verkündigt, der Sieg sei wertlos und der Krieg breche wieder mit voller Gewalt aus. Denn leider hat der Feind zu Hause, als Gefangener unterschätzt, alle Bande der Gleichungen gesprengt und die Kerker der Tafeln erbrochen. Konnte es doch keins von den Rechnungsverfahren, die ich nach den Vorschriften der Hypothese des 45. Kap. mathematisch durchführte, an Genauigkeit der Ergebnisse der stellvertretenden Hypothese des 16. Kap. gleichtun (und deren Gleichungen sind zwar richtig, gehen aber aus falschen Gründen hervor). ||
Draußen aber haben die über den ganzen Exzenterumkreis verteilten Kundschafter, d. h. die *367.*
wirklichen Abstände, meine aus dem 45. Kap. herbeigeholten || Truppen der physischen Ur- 247.
sachen in die Flucht geschlagen, ihr Joch abgeschüttelt und die Freiheit wiedererlangt. Und nicht viel fehlte, so hätte sich der flüchtige Feind mit seinen Rebellen vereinigt und mich aller Hoffnung beraubt. Doch sofort nach Zersprengung und Verjagung der alten Hilfstruppen sandte ich neue der physischen Gründe und folgte den genau erkundeten Spuren des eilig entflohenen Gefangenen ohne Rast und Ruh. Beides will ich so, wie es nach und nach geschah, in einigen nachfolgenden Kapiteln erzählen.

Und um von vorn anzufangen, möchte ich zuerst die Abstände mehrerer Exzenterörter bestimmen, damit das Vertrauen in meine Sache wächst. [K. stützt sich bei seinen Berechnungen auf den wahren Sonnenort und die aus dem 30. Kap. bekannten Abstände der Erde von der Sonne, sowie auf den für jede Beobachtung bestimmten Ekliptikort und die zugehörige Breite des Mars. Dazu tritt nach Bedarf die mittlere Anomalie und die mittlere Länge des Mars, woraus sich nach der stellvertretenden Hypothese der exzentrische Ort bestimmt. || In dem Dreieck Sonne-Erde-Ekliptikort des Mars oder ADM sind dann stets die 248; *368.*
Seite AD und der Winkel bei D bekannt. K. nimmt nun für die Seite AM aus dem Früheren Fig. 19.
einen Wert „gleichsam als bekannt" an und berechnet den Winkel bei M, wodurch der exzentrische Ort zum zweitenmal festgelegt wird. K. vergleicht dann die beiden so erhaltenen exzentrischen Örter, indem er zugleich, um genauer prüfen zu können, aus andren passend gelegenen Beobachtungen, wie E, weitere Vergleichswerte gewinnt. So gelingt es ihm, in einem einzigen Verfahren die Abstände wie auch die durch die stellvertretende Hypothese gegebenen exzentrischen Marsörter zu prüfen. — Zunächst sucht er unter Brahes Beobachtungen solche heraus, die den Mars in der mittleren Anomalie 90° oder 270° zeigen. Dafür stehen ihm nur drei Beobachtungen zur Verfügung, und er bedauert lebhaft, daß

[1]) Nunmehr führt die Entwicklung schnell zur Erkenntnis, daß nur die Ellipse als Bahnform möglich sei.

ungünstige Verhältnisse teils in der Stellung des Mars, teils in dem Interesse der Beobachter
249; *369.* eine häufigere Beobachtung des Mars an dieser Stelle verhindert hätten. || Die gefundenen Werte von AM stimmen sehr gut zusammen. „Nun will ich noch das Jahr 1597 hinzunehmen, nicht etwa, um das frühere zu bestätigen, denn das steht an sich schon fest genug, sondern um dem Leser Gelegenheit zu einer Vergleichung der Beobachtungen Tychos mit denen anderer zu bieten. Daraus wird er schließlich ersehen, mit wie großen Wohltaten uns dieser Mann beschenkt hat.“ Die Beobachtungen Brahes für diese Zeit sind nämlich unbrauchbar, weil in seinem Tagebuche bei den von einander stark abweichenden Beobachtungsreihen eine Bemerkung darüber fehlt, welches die ursprünglichen und welches die ausgeglichenen Beobachtungen sind. „Ich selbst aber beobachtete zu derselben Zeit fern in Steiermark und zwar wunderbar genug mit den Augen Tycho Brahes, der doch am Gestade des Baltischen
250; *370.* Meeres weilte. Folgendes ist die Beobachtungsreihe. Lacht nicht, ihr Freunde!“[1] || Das aus K.s Beobachtungen gewonnene Ergebnis ist nämlich, trotzdem er gewissermaßen mit Brahes Augen beobachtete, da er dessen Fixsternkatalog der Rechnung zugrunde legte, äußerst un-
251; *371.* sicher. — || Nun geht K. zur Untersuchung von Örtern über, die nur etwa 65° vom Aphel des Mars entfernt liegen, wobei der Fehler von AM etwas größer wird, aber noch weit unter der
252. Fehlergrenze bleibt. — || „Aber wir wollen noch höher nach dem Aphel hinaufsteigen und auch diejenigen Stellen untersuchen, wo die Verschiebung des exzentrischen Ortes nach dem im 6. Kap. gegebenen Beweise durch die Vertauschung der mittleren Sonnenbewegung mit der wahren am besten wahrnehmbar ist, nämlich in der Erdferne der Sonne und im Zeichen des
253; *372.* Krebses.“ || Auch hier, in etwa 35° Abstand vom Aphel des Mars, ergeben sich gut zusammen stimmende Werte von AM. — Ganz in der Nähe des Aphels finden sich viele Beobachtungen. Die aus ihnen bestimmten Werte von AM weichen mehr von einander ab als die obigen, ||
254; *373.* und zumal für den aufsteigenden Halbkreis der Marsbahn werden die Fehler recht groß. Aber auch sie bleiben noch unter der den Beobachtungen notwendigerweise anhaftenden Fehlergrenze. — Mehr nach dem Perihel des Mars zu liegende Örter geben in etwa 75° Abstand
255; *374.* von diesem auch etwas ungenaue Werte, || jedoch sind die zugehörigen Beobachtungen schon
Fig. 19. an sich recht ungenau. — Endlich verknüpft K. vier Erdörter F, G, H und K unter einander, für die der Mars N ungefähr an derselben Stelle seiner Bahn, in etwa 20° Abstand vom Perihel R, stand. Jetzt liegen vier Dreiecke AFN, AGN, AHN und AKN vor, von denen die Seiten AF, AG, AH und AK, sowie die Winkel bei F, G, H und K bekannt, dagegen die Seiten AN
256. unbekannt sind. || K. nimmt in dem ersten Dreieck für AN wieder eine gewisse Länge als gegeben an, woraus sich dann die Längen AN für die drei übrigen Dreiecke mittels der Winkelabweichung der Marsörter von einander im voraus angenähert bestimmen lassen. Nun berechnet er die Winkel bei N in allen vier Dreiecken und bestimmt daraus für jeden von den vier Fällen die Lage von AN. So gewinnt er vier Marsörter, die er mit den aus der stell-
375. vertretenden Hypothese gefundenen vergleicht. || Der zweite und vierte Fall zeigen den Mars an einer sehr günstigen Stelle seiner Bahn, nämlich etwa in Quadratur zur Sonne. Die hierzu gehörigen Marsörter, die nicht ganz zu den aus der stellvertretenden Hypothese folgenden stimmen, gleicht K. aus, worauf er umgekehrt aus den Seiten AG und AK und aus den nunmehr bekannten Winkeln der Dreiecke AGN und AKN die Länge von AN berechnet. Er findet es etwas kleiner als vorher, verkürzt AN auch in den beiden andren Dreiecken um ebensoviel und berechnet von neuem die Winkel bei N. Nunmehr rücken auch die beiden

[1]) Diese Stelle mit ihrer warmen Anerkennung der Verdienste Brahes und ihrer Selbstironie ist wieder ein Beweis für die wahrhaft vornehme Gesinnung, durch die K. über so viele von seinen Zeitgenossen hervorragt.

andren Örter nahe genug an die der stellvertretenden Hypothese heran, und es wird die
Rechnung noch besonders dadurch bestätigt, daß die kleinen Fehlerreste gleich und von ent-
gegengesetztem Vorzeichen sind. So sind die Abstände als richtig erwiesen, || und eine 257.
weitere Beobachtung aus dem absteigenden Halbkreis liefert ebenfalls eine dazu passende
Länge von AN. — Die stellvertretende Hypothese zeigt sich hierbei überall zuverlässig bis
auf eine Fehlergrenze von höchstens 3'.]

Wie diese ziemlich lange Induktion durch sehr viele Exzenterörter erkennen läßt, sind
diejenigen Sonnenabstände des Mars einander gleich, deren Bahnpunkte gleichweit von dem
im 16. und 17. Kap. bestimmten Aphel Q entfernt sind. Das ist ein zuverlässiger Beweisgrund Fig. 19.
für die richtige Lage jener Sonnenferne (Eukl. III 7). Zugleich wurden auch noch die Sonnen-
abstände der Erde bestätigt, denn wie sie oben im 29. Kap. gewonnen wurden, so taten sie
hier bei den verschiedenartigsten Verwendungen ihre Schuldigkeit, und es gab zwischen den
Zahlen keinen beachtlichen Widerspruch, der uns einen in ihnen enthaltenen Fehler hätte
bezeugen können . . .

52. Kapitel. Ich beweise mittels der Beobachtungen des 51. Kapitels, daß sich der Planetenexzenter nicht um den Mittelpunkt des Sonnenepizykels oder um den Punkt der mittleren Sonnenbewegung, sondern um den Sonnenkörper selbst herumlegt und daß die Apsidenlinie nicht durch jenen, sondern durch diesen läuft. *376.*

Die im 51. Kap. gefundenen Abstände belehren uns vorteilhafter Weise auch über
einen Punkt, den ich im 6., 26. und 33. Kap. zu behandeln versprach, aber absichtlich bis
hierher zurückgestellt habe. Habe ich nämlich recht || darin, den Marsexzenter auf den Sonnen- 258.
körper selbst aufzubauen, so muß der Planet auch wirklich an den Punkten in der Nähe des
29° ♌ am weitesten von der Sonne entfernt sein, und es müssen die Punkte, die in den
beiden Halbkreisen in gleichem (Winkel)abstande von diesem 29° ♌ liegen, gleichweit von
der Sonne entfernt sein, ungleichweit aber vom stellvertretenden Punkte der Sonne, also für
Brahe vom Mittelpunkte des Sonnenepizykels, und zwar müssen die im absteigenden Halb-
kreise liegenden einen kleineren Abstand haben. Wenn das stimmt, so können ferner die Punkte
in der Nähe des 24° ♌ unmöglich am weitesten vom Sonnenkörper oder vom Coppernicanischen Weltmittelpunkt — also für Brahe von dem Punkte, der der Mittelpunkt des
Sonnenepizykels und zugleich der Anheftungspunkt des Planetensystems ist — entfernt sein,
und es müssen die vom 24° ♌ in beiden Halbkreisen um gleiche Bogen entfernten Punkte
ungleiche Abstände von der Sonne und auch von ihrem stellvertretenden Punkte haben. [Es Fig. 19.
sei B der Mittelpunkt und L der Gleichheitspunkt der Marsbahn, und man mache Winkel
QLO = QLP, woraus nach früherem Beweise AO = AP folgt. Ferner sei AC die Richtung
der Apsidenlinie und C der Mittelpunkt der Erdbahn.] Dann ist AC nach $5^1/_2{}^0$ ♐ und AO
nach $15^1/_2{}^0$ ♏ gerichtet, also ist der Winkel OAC etwa 50° und somit spitz und ACO stumpf[1],
also AO länger als CO. Ferner ist . . . AP nach $12^1/_2{}^0$ ♊ gerichtet, also ist CAP 157° und somit
ACP bestimmt spitz; also ist AP oder das ihm gleiche AO kürzer als CP. Daher ist CO noch viel
kürzer als CP und zwar sicherlich um ein merkliches Stück. Denn wie könnten wir AC = 1800
oder noch mehr vernachlässigen, wo die Beobachtungen noch nicht einmal einen Fehler von
200 zulassen wollen? Daher haben die gleichweit von Q entfernten Punkte der nach ver-
schiedenen Seiten liegenden Exzenterhälften, nämlich O und P, von keinem Punkte außerhalb

[1]) Denn der Winkel AOC am Mars hat wie bekannt nur wenige Grad.

des Mittelpunktes gleichen Abstand, es sei denn von Punkten in der durch den Sonnenkörper laufenden Linie AB.

Man könnte einwenden: durch Verbindung der Punkte B und C und Verlängerung der Linie entsteht eine neue Apsis im Schnittpunkt der Linie mit dem Kreise, und diese
377. Apsis ist näher an P als an O; also ist es nicht || verwunderlich, daß CP auch länger ist[1]. Ich entgegne dem: welche Linien wir auch ziehen mögen, immer behalten AO und AP ihren Platz, denn ich habe sie nach den Beobachtungen unter dreierlei Form der Hypothesen festgelegt und bei dieser Festlegung durchaus nichts Anfechtbares benutzt. Wir lassen also AO und AP an ihrer Stelle und ziehen dem obigen Einwurf entsprechend eben BC. Trotz allem aber liefert dieses BC nach dem von mir im 6. Kap. gegebenen Beweise keineswegs eine zu den akronychischen Beobachtungen passende Hypothese. Wir müssen vielmehr an Stelle von BC, um den akronychischen Beobachtungen gerecht zu werden, durch L LS || BC legen, durch die Gleichheitspunkte L und S des Mars und der Erde. Hierdurch aber wird zugleich der Exzentermittelpunkt B nach T verschoben, und es liegt[2] mehr als ein Halbkreis nach O, weniger nach P zu. Es bleiben also AO und AP nicht erhalten, sondern es wird AO verlängert und AP verkürzt. Die Abänderung dieser Linien läßt uns aber nie den Beobachtungen außerhalb der akronychischen Lage gerecht werden, denn diese bezeugen die Gleichheit der Linien AO und AP. Und ich halte eine Rechnung nicht erst für nötig. . . .
259. Aber man kann den Schluß außerdem noch auf einer andren Grundlage aufbauen. Nach dem oben im 44. Kap. gegebenen Beweise ist die Planetenbahn kein Kreis, sondern ein Oval und zwar ein solches, daß sein längster Durchmesser die sogenannte Apsidenlinie ist. Aber nach dem Beweise im 51. Kap. rücken gleichweit vom Aphel Q entfernte Punkte an den Seiten auch gleichweit herein. Das Oval legt sich also in Wirklichkeit um die Linie AB, nicht aber um die Linie LS. . . .

53. Kapitel. Ein andres Verfahren zur Prüfung der Sonnenabstände durch einige fortlaufende Beobachtungen vor und nach der akronychischen Stellung zugleich mit einer Prüfung der exzentrischen Örter.

260; *378.* [Es sei α die Sonne, ferner β ein Erdort und ϑ der zugehörige ekliptische Marsort vor einer akronychischen Stellung des Mars, endlich γ ein Erdort und η der zugehörige ekliptische Marsort nach jener Stellung. $\beta\vartheta$ und $\gamma\eta$ mögen einander in ϑ schneiden (sie liegen beide in der Ekliptikebene). Sind dann die zugehörigen Zeitpunkte, also auch der Winkel $\beta\alpha\gamma$ gegeben, so entnimmt man $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ dem III. Teile und die Winkel $\alpha\beta\vartheta$ und $\alpha\gamma\eta$ der Beobachtung. Das Viereck $\alpha\beta\delta\gamma$ ist also völlig bestimmt. Zugleich ist durch die stellvertretende Hypothese die Richtung der Linien $\alpha\vartheta$ und $\alpha\eta$ festgelegt. Somit kennt man die Winkel $\beta\alpha\vartheta$ und $\gamma\alpha\eta$, und es sind somit auch die Strecken $\alpha\vartheta$ und $\alpha\eta$ bestimmt. Vergleicht man die so erhaltenen Längen mit den früheren Längenangaben, so kann man erkennen, wo sie oder auch die aus der stellvertretenden Hypothese entnommenen exzentrischen Marsörter noch fehlerhaft sind. „Hierbei darf aber der Winkel $\gamma\alpha\beta$ nicht zu klein sein, damit nicht ein wenn auch kleiner Beobachtungsfehler wegen seiner Lage nach entgegengesetzten Himmelsstrichen (und das kann vorkommen) eine große Wirkung hervorrufe.“ K. bestimmt nun wie im 6. Kap. durch einen die Erdbahn berührenden Kreis, der zugleich den Fahrstrahl Sonne-Mars im Mars berührt, diejenige Stellung der Erde, für die ein etwa im Abstand vor-
261. handener Fehler am größten erscheint. || Das gibt für den Winkel zwischen den Fahrstrahlen

[1]) als CO. — [2]) von BC aus.

des Mars und der Erde $22^1/_4{}^0$, also fast 45 Tage Zwischenzeit, und in dieser Zeit ändert sich der Fahrstrahl Sonne-Mars hinreichend. || K. sucht nun zahlreiche Beobachtungen heraus und rechnet mit ihnen unter sorgfältiger Abwägung etwa vorhandener Fehlerquellen, wobei er den Sonnenort von Brahe und den Sonnenabstand der Erde aus dem 30. Kap. entnimmt.] 261—263; *379—381.*

. . . Die scheinbaren (Mars)örter werden (hiernach), wenn der Mars in einer exzentrischen Bewegung im Krebs weilt, etwa 4′ zu weit vor-, im Schützen und Steinbock aber um ebensoweit zurückrücken. Und es folgen diese kleinen Fehler nicht etwa aus fehlerhaften Abständen, denn dann wären sie in den entgegengesetzten Himmelsstrichen nicht von der gegebenen, sondern von gerade entgegengesetzter Größe. Meiner Meinung nach lassen sich jene durch eine Verschiebung der Erdferne der Sonne um 1° an die richtige Stelle bringen, und das lassen ja die Beobachtungen Brahes gerne zu. . . . *382.*

54. Kapitel. Genauere Prüfung des Verhältnisses der Kreise. 264.

[Selbst die genauesten Beobachtungen würden dieses Verhältnis auf mehr als 100 Teilchen unbestimmt lassen. „Wir müssen also den Prozeß durch Abstimmung und nach der Zahl der Stimmen entscheiden." In einer mittleren Anomalie von 11° 52′, d. h. in 23° Abstand vom nördlichen Wendepunkte, hat nach dem 28. Kap. der ekliptische Marsort von der Sonne den Abstand 166180 oder 166208, also wegen der Neigung von 1° 43′ an dieser Stelle der Mars selbst den Abstand 166250 oder 166278. Nach dem 51. Kap. findet man in 9° 55′ 166208, in 11° 52′ also 166113, daher für den wahren Ort 166193; ebenso in 7° 48′ 166396, also in 11° 52′ 166204 und für den Mars selbst 166284. Das Mittel aus den beiden letzten Werten ist 166238. Im absteigenden Halbkreis aber gaben fünf Beobachtungen im Mittel 166260. Daher kann man in 11° 52′ mittlerer Anomalie den Abstand ziemlich sicher zu 166260 schätzen. Der Aphelabstand würde hiernach etwa 166510 sein, während sich oben im 42. Kap. 166780 ergab.

Bei einer mittleren Anomalie von $161^0\ 30^1/_2{}'$, d. h. in 35° Abstand vom südlichen Wendepunkte, findet man für den Ekliptikort 139000, also wegen der Neigung von $1^0\ 31^1/_2{}'$ für den Mars 139049 und somit für den Perihelabstand 138173 gegen 138500 im 41. Kap. Also ist der Exzenterhalbmesser die Hälfte von 166510 + 138173, d. h. 152342, und mithin die Exzentrizität 14169 oder auf den Halbmesser 100000 gebracht 9301. Nimmt man aber zum jetzigen Aphelabstand die Exzentrizität 9265 des 42. Kap., so wäre der Perihelabstand 138274 und der Halbmesser fast 152400.] Es hat uns aber vielfache Erfahrung schon dahin belehrt, daß die richtigste und mit den physischen Gleichungen am besten übereinstimmende Exzentrizität zwischen 9230 und 9300 liegt, und das ist gerade die des 42. Kap., nämlich 9265. Wollen wir also weder von dem in diesem Kapitel gefundenen Perihelabstand 138173 zu weit abrücken noch uns allzuviel auf den Aphelabstand 166510 verlassen, so wollen wir uns dahin entscheiden: der richtige Aphel- und Perihelabstand ist 166465 und 138234 bei einem Halbmesser 152350.[1] 265; *383.*

55. Kapitel. Aus den Beobachtungen des 51. und des 53. Kapitels und aus dem Kreisverhältnisse im 54. Kapitel beweise ich, daß die im 45. Kapitel zu schnell aufgestellte Hypothese fehlerhaft ist und in mittleren Längen zu kurze Abstände liefert.

Ich sprach das zwar bereits im 51. Kap. aus, es waren aber noch mehr und besser geeignete Beobachtungen durch das 53. Kap. über das von ihnen abzulegende Zeugnis zu belehren, und es mußte zudem mit ihnen im 52. Kap. noch etwas anderes vorgebracht werden.

[1]) K. gibt selbst in späterer Zeit zu, daß er sich hier an einigen Stellen versehen habe; vgl. O. o. III *500* Anm. 94 von Frisch.

266. Daher war der ausführliche Sachbeweis bis hierher zu verschieben. || Mehr zu sagen ist unnötig. Man berechne zu den mittleren Anomalien aller im Laufe des 51. und 53. Kap. auftretenden Beispiele die Abstände nach der Hypothese des 45. Kap.[1] und mittels des Kreisverhältnisses des 54. Kap. und zwar nach den von mir vom 46. bis zum 50. Kap. angewandten Verfahren. Und man vergleiche sie dann mit den aus unfehlbaren Beobachtungen gefundenen Abständen des 51. und 53. Kap. Dann werden sich die berechneten Abstände, je weiter man von den Apsiden herabsteigt, um so kleiner als die beobachteten ergeben, es wird also das Gegenteil von unserem Ergebnis oben im 44. Kap. eintreten. Dort waren nämlich die aus
384. dem Kreisgesetze berechneten Abstände || in den mittleren Längen länger als die beobachteten. Hier aber werden die Abstände kürzer, die sich aus der Hypothese ergeben, die eine ovale Planetenbahn lieferte. Also ist offenbar die Planetenbahn kein Kreis, aber sie biegt auch an den Seiten nicht soviel vom Kreise nach innen ab wie jenes aus der Annahme des 45. Kap. entspringende und im 46. Kap. beschriebene Oval, sondern sie verläuft in der Mitte. Und berechnet man umgekehrt unter Benutzung der Abstände des 45. Kap. die beobachteten Marsörter, zumal diejenigen, die im 53. Kap. beiderseits von der Opposition liegen, so wird man den Planeten vor der Opposition zuweit in Zeichenfolge, nach ihr zuweit gegen Zeichenfolge verschoben finden. Und zwar zeigt sich das besonders deutlich in den Jahren 1589 und 1591 im absteigenden und in den Jahren 1582 und 1595 im aufsteigenden Halbkreise. Denn an jener Stelle rückt dieses Oval des 45. Kap. fehlerhafterweise um 660 Teilchen zu weit nach innen, genau so viel wie der vollkommene Kreis zu weit nach außen rückt, und das kann bei der Beobachtung 20′ und noch mehr geben[2]. Daher konnte auch David Fabricius nach seinen Beobachtungen bei meiner Hypothese des 45. Kap., die ich ihm als richtig mitgeteilt hatte, diesen Fehler allzukurzer Abstände in den mittleren Längen nachweisen in den Briefen, die er zu der Zeit schrieb, wo ich selbst in neuer Sorge an der Aufsuchung der wahren Hypothese arbeitete. Und mit einem Haare wäre er mir bei der Entdeckung der Wahrheit zuvorgekommen.[3] Und da der vollkommene Kreis denselben Fehler nach der entgegengesetzten Seite begeht,[4] so schließen wir daraus mit Recht, daß die Wahrheit zwischen beiden in der Mitte liegt. | Und dies bezeugten auch im 49. und 50. Kap. die aus den physischen Ursachen berechneten Gleichungen. Es muß nämlich das vom vollkommenen Kreis abzuschneidende Möndchen nur halb so breit sein, als es nach der Annahme des 45. Kap. abzuschneiden war. Wir dürfen also frei behaupten, die Sache sei ganz sicher bewiesen. Es verfällt eben die Annahme des 45. Kap., indem sie den durch den vollkommenen Kreis gelieferten Überschuß beseitigen will, in den entgegengesetzten Fehler. | So gehen also auch die physischen Ursachen des 45. Kap. in Rauch auf.

56. Kapitel. Ich beweise aus den oben angegebenen Beobachtungen, daß man die Sonnenabstände des Mars gleichsam aus dem Epizykeldurchmesser entnehmen kann.

267. Oben im 46. Kap. ergab sich die Breite des Möndchens, das uns die Annahme des 45. Kap. schuf und von dem sie zeigte, daß es vom Halbkreis abzuschneiden sei, sie ergab sich, sage ich, zu 858 solcher Teilchen, von denen der Kreishalbmesser 100000 hat. Nun habe ich aus den beiden oben im 49., 50. und 55. Kap. gegebenen Beweisen fast bestimmt

[1]) daß sich in Fig. 12 AN um A ungleichförmig, aber ND um N gleichförmig dreht. — [2]) während K. einen Fehler von 8′ bereits als zu groß erklärt; vgl. S. 47 das Ende des 19. Kap. — [3]) Vgl. den Briefwechsel zwischen K. und David Fabricius, zumal O. o. III *95*. Wiederum ist die Selbstlosigkeit zu bewundern, mit der K. anderer Verdienste schätzt, ja wohl, wie hier, überschätzt. — [4]) Vgl. S. 80 das 44. Kap.

geschlossen, daß die Breite dieses Möndchens nur halb so groß anzunehmen sei, nämlich 429 oder verbessert 432, und in der Abmessung, wo der Halbmesser der Marsbahn 152350 ist, fast 660. Und so geriet ich denn auf Gedanken über die Ursachen, aus denen, und über die Art und Weise, in welcher ein Möndchen von solcher Breite abgeschnitten wird. | Während ich mich nun mit dieser Überlegung voll Unruhe beschäftige und erwäge, daß im 45. Kap. rein nichts gesagt und somit mein Triumph über den Mars nichtig gewesen sei, da verfalle ich ganz von ungefähr auf die Sekante des Winkels 5° 18′ als das Maß der größten optischen Gleichung. Als ich ihren Wert 100429 sah, da wurde ich gleichsam aus dem Schlafe zum Anblick neuen Lichtes erweckt, und ich begann folgendermaßen zu schließen. In den mittleren Längen wird der optische Teil der Gleichung am größten. In den mittleren Längen ist das Möndchen oder die Verkürzung der Abstände am größten, und zwar ist diese gleich dem Überschuß der größten optischen Gleichung, 100429, über den Halbmesser 100000. || Nimmt *385.*
man also in den mittleren Längen an Stelle der Sekante den Halbmesser, so kommt man dadurch den Lehren der Beobachtungen nach. Und in der Figur des 40. Kap. habe ich all- Fig. 14.
gemein geschlossen: nimmt man statt HA HR, statt VA aber VR und setzt man statt EA EB ein und entsprechend bei den übrigen, so wird das, was hier in den mittleren Längen geschah, auch an den übrigen Exzenterörtern geschehen. Und wegen der Gleichwertigkeit wird man in der kleinen Figur des 39. Kap. statt der Linien $\alpha\delta$ oder $\alpha\iota$ $\alpha\varkappa$, statt $\alpha\varepsilon$ oder $\alpha\lambda$ Fig. 13.
$\alpha\mu$ nehmen.

Der Leser möge also nochmals das 39. Kap. durchlaufen. Wie er dort finden wird, habe ich das, was hier die Beobachtungen von selbst bezeugen, schon früher aus natürlichen Ursachen erwogen. Es schien mir nämlich diesen zu entsprechen, daß der Planet eine Art Schwankung in dem beständig gegen die Sonne gerichteten Epizykeldurchmesser ausführe. (Der Leser) wird dort auch folgendes als Hauptgrund gegen diese Meinung finden. Nehmen wir als zu erzeugende Figur einen vollkommenen Kreis an, so müssen wir notwendigerweise die höchsten Teile $\gamma\iota$ und $\lambda\zeta$ der Schwankung von anderer Größe machen als die tiefsten (obgleich sie gleichen Exzenterbogen entsprechen) und die kurzen an die höchsten, die langen an die tiefsten Stellen verlegen.[1] Jetzt aber lehnen wir wie gesagt die Kreisform der Planetenbahn ab und nehmen wir $\varkappa\alpha$ und $\mu\alpha$ an Stelle von $\delta\alpha$ und $\varepsilon\alpha$, d. h. an Stelle von $\iota\alpha$ und $\lambda\alpha$.[2] Deshalb sind jene Teile der Schwankung, nämlich $\gamma\varkappa$ und $\mu\zeta$, von selbst gleich. So wird uns das, was uns im 39. Kap. lange gequält hat, nunmehr zum Beweisgrund für die entdeckte Wahrheit. | Dafür aber, daß die mittleren Teile $\varkappa\mu$ noch größer sind als die äußeren ||
$\gamma\varkappa$ und $\eta\zeta$, werden wir im folgenden 57. Kap. die Zustimmung der Natur nachweisen und zwar 268.
im Gegensatz zu der Ansicht, die wir im 39. Kap. haben konnten. | Aber auch die Schwierigkeit, die sich noch im 39. Kap. erhob, wenn der Planet das Wachstum des Sonnendurchmessers als Zeichen für seine Annäherung oder sein Zurückweichen erhalten sollte, wird nunmehr völlig beseitigt, wie sich im 57. Kap. ergeben wird. | Daher konnte ich bei der exzentrischen Anomalie 90° auf die oben angegebene Weise leicht entdecken, daß man an Stelle des Abstandes EA des vollkommenen Kreises den der ausgeglichenen EAB entsprechenden Fig. 14, 15.
EB zu nehmen hat. | Aber die Berechtigung meines allgemeinen Schlusses von dem Beispiele einer einzigen Anomalie auf alle übrigen folgt noch nicht aus dieser einen, sondern war notwendigerweise durch zahlreiche Beobachtungen zu bestätigen.

Man erkennt also jetzt den Hauptzweck der Beobachtungen des 51. und 53. Kap.,

[1]) Durchläuft der Planet die Bogen CD, DE, EF des Exzenters, so führt er dabei die Schwankungen $\gamma\iota$, $\iota\lambda$, $\lambda\zeta$ aus. — [2]) Jetzt führt der Planet die Schwankungen $\gamma\varkappa$, $\varkappa\mu$, $\mu\zeta$ aus.

nämlich hier Zeugnis abzulegen. | Daher wollen wir denn zu den in jenen Kapiteln gegebenen
Fig. 14. ausgeglichenen Anomalien, also zu den Winkeln CAG, CAH, die exzentrischen Anomalien CBG, CBH berechnen. Und man braucht dazu nicht bis auf Minuten zu gehen oder wegen der Ungenauigkeit der Exzentergleichungen, wie sie noch im 19., 29., 43. und 47. bis 50. Kap. geblieben ist, besorgt zu sein. Man benutze irgend eins von diesen Verfahren, zumal das des 43. Kap., und man wird dabei in den Gleichungen keinen größeren Fehler als 8′ erhalten. | Nach Bestimmung der Winkel suche man die den Winkeln HAC, VAC usw. der ausgeglichenen Anomalie entsprechenden Linien HR, RV usw., und man übertrage sie in das Maß der Kreise des 54. Kap. Dann wird man auf die folgende Tafel kommen.

386.

Aus den Beobachtungen des 51. Kap. folgt	im absteigenden Halbkreis	166 180 166 208	162 994 163 051	158 091 158 111	154 400	147 820 147 700	139 000[1]
	im aufsteigenden Halbkreis	166 401 166 296	163 100	158 217	154 278	147 743 148 000 148 050	138 984
Berechnung aus der Schwankung		166 228	163 160	158 074	154 338	147 918	139 093

Bei den Beobachtungen des 53. Kap. brauchen wir dies nicht erst auszuführen. Denn die von mir zur Berechnung der sichtbaren Marsörter verwandten Sonnenabstände des Mars habe ich ja früher gerade mittels dieses Verfahrens der Schwankung bestimmt. Und da jene Beobachtungen ihnen gerecht werden, so werden sie also richtig sein. | Wir haben also ersichtlich die Durchmesserabstände durch den ganzen Umfang des Exzenters mittels sehr häufiger und sicherer Beobachtungen bestätigt, so wie wir sie im 39. Kap. a priori gefunden haben.[2]

57. Kapitel. Über die Naturprinzipien, die den Planeten gleichsam im Epizykeldurchmesser schwanken lassen.[3]

269. Die Planetenbahn in der Himmelsluft ist also offenbar zufolge ganz sicherer Beobachtungen kein Kreis, sondern von ovaler Form, und der Planet schwankt folgendermaßen im Durchmesser eines kleinen Kreises hin und her. Er gewinnt nach Durchlaufung gleicher
Fig. 13. Exzenterbogen an Stelle der Umfangsabstände $\gamma\alpha$, $\delta\alpha$, $\varepsilon\alpha$, $\zeta\alpha$ oder $\gamma\alpha$, $\iota\alpha$, $\lambda\alpha$, $\zeta\alpha$, auf denen sich die vollkommene Kreisfigur aufbaut, die Durchmesserabstände $\gamma\alpha$, $\varkappa\alpha$, $\mu\alpha$, $\zeta\alpha$.[4] Dabei wird ersichtlich von dem vollkommenen exzentrischen Kreise ein Möndchen von solcher Breite abgeschnitten, wie der Unterschied der Abstände an jedem beliebigen Orte ist, nämlich $\iota\varkappa$, $\lambda\mu$. Nehmen wir dies nun, wie schon gesagt, nicht durch Schlüsse a priori, sondern zufolge der Beobachtungen als richtig an, dann werden wir in den physischen Überlegungen richtiger als bisher fortfahren können. Diese Schwankung paßt sich ja dem im Exzenter zurückgelegten Weg an und zwar nicht etwa auf irgend eine verstandes- oder vernunftmäßige Art, so daß
Fig. 12. der Planetengeist gleichen Teilen $\gamma\varkappa$, $\varkappa\mu$, $\mu\zeta$ der Schwankung gleiche Bogen CD, DE, EF des nicht durchlaufenen Exzenters zuordnet, denn jene sind ja ungleich, sondern auf eine natürliche Art, die sich nicht auf die Gleichheit der Winkel DBC, EBD, FBE stützt, sondern auf die Stärke des beständig wachsenden Winkels DBC, EBC, FBC. Diese Stärke bestimmt sich

[1]) Der mittlere Fehler ist im absteigenden Halbkreis 120 und im aufsteigenden 107, also in K.s Ausdrucksweise „unmerklich klein". — [2]) Hiermit ist die Bahn, wenn dies auch K. noch nicht ausspricht, als Ellipse erwiesen. — [3]) Vgl. zum Folgenden Siegmund Günther, Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus, worin über dieses 57. Kap. im III. Abschnitt gehandelt wird. — [4]) Die Winkel dieser Abstände mit der Abszissenachse läßt K. zunächst noch unbestimmt.

etwa nach dem sogenannten Sinus der Mathematiker, und es wandelt sich dabei das Hinauf-
steigen durch fortgesetzte Abschwächung allmählich in ein Hinabsteigen um, mit mehr Wahr-
scheinlichkeit, als wenn || man sagte, der Planet lege plötzlich das Steuer um. Letzteres *387.*
widerspricht ja auch, wie wir im 39. Kap. sagten, ganz offenbar den Proben durch die Be-
obachtung. Da sich also das Maß dieser Schwankung deutlich genug als ein natürliches er-
weist, so wird auch die Ursache eine natürliche sein, nämlich nicht ein Geist im Planeten,
sondern irgend ein natürliches oder vielleicht körperliches Vermögen.

Nun nahmen wir im 39. Kap. aus sehr guten Gründen unter die Hauptvoraussetzungen
die auf, der Planet könne unmöglich den Übergang von Ort zu Ort allein durch die Arbeit
seiner Eigenkräfte fertigbringen, sie müßten vielmehr durch eine Außenkraft unterstützt und
angeleitet werden. Daran ist also zu denken, wenn wir auch der Sonnenkraft selbst irgend
einen Anteil an dieser Schwankung zuschreiben. [K. läßt zunächst die Planeten in einer 270.
kreisförmigen Strömung um die Sonne treiben und dabei so gesteuert werden, daß sich das
Steuerruder während eines zweimaligen Umlaufs des Planeten gerade einmal ganz herumdreht.
Dann muß sich der Planet in der einen Hälfte des Umlaufs der Sonne nähern und in der
andern von ihr wieder entfernen. Möglich ist das, aber wenig wahrscheinlich, denn dann
könnte der Planet der Sonne[1] während seines Umlaufs nicht immer dieselbe Seite zukehren,
und doch belehrt uns der Mond in seinem Verhältnis zur Erde über die Notwendigkeit des
Gegenteils. Es stört auch die Körperlichkeit des Ruders bei der Unstofflichkeit der Aus-
strömung aus der Sonne. — K. fühlt sich nun durch Gilberts Schrift De Magnete angeregt, *388.*
sich die Planeten als riesige kugelförmige Magnete vorzustellen, || deren Achsen bei der Be- 271.
wegung der Planeten ganz oder fast ganz ungeänderte Richtung behalten.[2] Die Planeten
müssen sich also der auch magnetisch gedachten Sonne nähern oder von ihr wieder ent-
fernen, je nachdem sie ihr bei der Bewegung den freundlichen oder feindlichen Pol zukehren.[3]
Dabei könnte sich dann im Laufe der Jahrhunderte die Achsenrichtung des Planeten ändern,
wodurch sich das Fortschreiten der Sonnenfernen erklären ließe, in Rücksicht auf ähnliche
Verhältnisse bei der Erde. || Danach müßte der Planet die Richtung seiner Achse während der 272; *389.*
Bewegung von der Quadratur durch das Aphel zur zweiten Quadratur etwas gegen Zeichen-
folge, bei der Bewegung im andern Teile der Bahn aber in Zeichenfolge drehen und zwar
letzteres mehr wegen der größeren Nähe der Sonne. So bleibt schließlich nach Vollendung
des ganzen Umlaufs eine kleine Drehung der Achse in Zeichenfolge und damit eine kleine
Verschiebung des Aphels in gleichem Sinne übrig.[4] Im ganzen aber tritt eine „spiralische"
Bewegung des Aphels ein, so daß es nur für die Quadraturen an der richtigen Stelle liegt.]

[K. gibt nun einen mathematischen Beweis.] Es sei DFA entweder ein runder Magnet[5] 273.
oder eben der Körper des Mars, DM die Linie, längs der sich die magnetische Kraft richtet, Fig. 20.
D der nach der Sonne strebende, A der sie fliehende Pol. Dann merke man zuerst, daß es
bei dieser Überlegung ganz gleich ist, ob man die ganze Kugel des magnetischen Körpers

[1]) K. sagt fälschlich „einem irdischen Beobachter". — [2]) Von jetzt an tritt im Originale häufig eine der Fig. 12 ähnelnde, durch besondere Kennzeichen hervorgehobene Figur auf. Sie trägt an den Apsiden und Quadraturen zur Apsidenachse senkrechte Kompaßnadeln, hat in ihrem Innern fackelähnliche Gebilde (Kometen?) und zeigt am unteren Rande die Umschrift: Quorsum (wohin). — [3]) K. läßt die Sonne den einen Pol beständig anziehen und den entgegengesetzten beständig abstoßen, also scheint er sich die Sonne selbst einpolig vorzustellen. — [4]) Die Apsiden liegen jeweilig dort, wo die Richtung der magnetischen Planetenachse die Planetenbahn berührt. — [5]) Fig. 20 stellt bei K. eine auf Wasserwogen schwimmende schwarze Kugel dar, neben der ein Schiffer einen Kahn steuert. Am Blattrande findet sich ein Distichon folgenden Inhalts: Zeigst du, Magnet, auf der See unkenntliche Pfade den Schiffern, Sollte nicht auch der Planet wandeln auf deinen Befehl?

oder nur eine einzige, zu DA parallele physische Kraftlinie von ihm betrachtet. | Diese magnetische Kraft ist nämlich körperlich und mit dem Körper teilbar, wie der Engländer Gilbert, B. Porta[1] und andre bewiesen haben. Die Kugel aber besteht gleichsam aus unzähligen physischen, zu DA parallelen Linien, deren Kraft sich geradlinig und nach ein und derselben Weltrichtung hin erstreckt. Also wird für jede einzelne die Größe der Bewegung genau so abzuschätzen sein, wie für alle zusammen, und umgekehrt. Man stelle sich also an Stelle des ganzen Körpers und aller seiner Fäden seine mittlere Achse DA vor. Man halbiere DA
390. in B und ziehe zu DA senkrecht || FBJ. Ist also der Planet so aufgestellt, daß BJ nach dem Sonnenmittelpunkte zielt, so wird die Annäherung null sein. Denn die Winkel DBJ und ABJ sind gleich, daher auch gleich wirksam, jener zur Annäherung, dieser zum Fliehen. Das ist also genau dasselbe wie das Gleichgewicht der Wage in der Mechanik. Also bleibt auf diese Weise der Marsmittelpunkt B in der Apsis, d. h. in der Sonnenferne, am weitesten von der Sonne entfernt. Man nehme nun irgend einen Bogen JC, der einen Winkel der ausgeglichenen Anomalie mißt, ziehe BC und verlängere es nach K. Der Planet habe aber eine solche Lage, daß BC nach der hinter K angenommenen Sonne zielt. Zuerst fragen wir nach einem Maß für die Stärke der Annäherung des Planeten. Es findet nämlich eine Anziehung statt, da sich der anziehende Pol D um den Winkel DBK nach der Sonne K hinneigt. Der fliehende A aber neigt sich um den Winkel ABK von ihr weg. Nun ist aber die Stärke jenes Winkels eine natürliche, also werden die Verhältnisse der Wage gelten. Ist aber von C auf DA das Lot CB gezogen, so werden zwischen DP und PA die Verhältnisse der Wage gelten. Ist nämlich an der Zunge KB eine Wage aufgehängt und behalten dabei die Arme ihre Lage im Winkel DBK, so wird sich das Gewicht des Armes DB zu dem des Armes AB verhalten wie DP : PA, d. h. würde man die Arme an CP in P anhängen und das Gewicht von BA auf PD, das Gewicht des Armes BD aber auf PA verteilen, so würde DA mit der herabhängenden
274. Zunge rechte Winkel bilden. Man sehe || meine Optik[2] ein, und man wird sich durch diese nur angedeuteten Versuche nicht weiter gestört fühlen. Wie sich also DP zu PA verhält, so die Stärke des Winkels ABC zu der des Winkels DBC. Hier wird also die Fliehkraft durch DP, die Anziehungskraft durch PA gemessen. Man nehme nun von PA das ihm gleiche DP = AS weg. Dann ist also, nach Wegnahme des durch die Fliehkraft gegebenen Hindernisses, SP das Maß der Anziehungskraft allein und zwar in dem Größenverhältnis, in dem AD die größte Kraft allein mißt. Mißt aber die Hälfte DB die größte Kraft, so mißt auch die Hälfte von PS, nämlich PB, d. h. der Sinus CN der ausgeglichenen Anomalie CBJ, die Anziehungskraft allein in dieser Lage gegen die Sonne. Also mißt der Sinus der ausgeglichenen Anomalie die Stärke der Annäherung des Planeten an dieser Stelle, und zwar ist er das Maß des Zuwachses der Kraft.

Von ganz andrer Art ist das Maß der Schwankungsstrecke, die wegen dieses fortgesetzten Zuwachses der Kraft durchlaufen wird. Entspricht nämlich der ausgeglichenen Anomalie JC GJ als zugehörige exzentrische Anomalie, so weisen die Beobachtungen den Sinus versus JH des Bogens GJ als Maß der vollzogenen Schwankung nach. Läßt sich dies auch aus dem früher gegebenen Geschwindigkeitsmaß CN ableiten, so werden wir die Erfahrung mit dem Beweise an der Wage verbinden. Da nämlich der Sinus eines jeden Bogens das Maß der Stärke des zugehörigen Winkels ist, so wird die Summe der Sinus angenähert das

[1]) in seiner Magia naturalis. — [2]) O. o. II *139* f. Günther betont in seiner Schrift, K. habe sich dieser mühsamen Betrachtung der Wage bedienen müssen, weil das einfache Gesetz des Kräfteparallelogramms noch nicht bekannt war.

Maß der Summe der Stärken oder der Einwirkungen durch alle gleichen Teile des Kreises
sein, und die gemeinsame Wirkung von ihnen allen ist eben die ganze ausgeführte Schwankung.
Aber die Summe der Sinus des Bogens JG (es mögen nämlich jetzt die sonst verschiedenen
Anomalien JC und JG gleich groß sein zur Vermeidung von Verwirrung) verhält sich zur
Summe der Sinus eines Quadranten ziemlich wie der Sinus versus JH jenes Bogens JG zum
Sinus versus JB des Quadranten. [Denn setzt man die Summe der Sinus der 90 Grad des
Quadranten gleich 100000, so gibt die Summe für 1° 30, für 15° 3602, für 30° 13714 und *391.*
für 60° 50305, der Sinus versus aber ist 15, 3407, 13397 und 50000, kommt also jener im Verhältnis immer mehr gleich.[1]] Wird also ein beliebiger Magnet solchen Beziehungen unterworfen, wie wir sie am Himmel zwischen den Planetenkörpern und der Sonne annehmen, so
wird nach diesem Beweise die Schwankung des magnetischen Körpers derart sein, daß sie
dem zurückgelegten Wege nach durch den Sinus versus gemessen wird. Aber auch nach dem
Zeugnis der Beobachtungen wird die Schwankung des Planetenkörpers durch den Sinus versus
der ausgeglichenen Anomalie gemessen. Die Ansicht, die Planetenkörper seien magnetisch
und so, wie gesagt, gegen die Sonne gestellt, ist also ganz naturgemäß. || [Die Vertauschung 275.
von JG mit JC kann den oben noch vorhandenen Fehler nur verbessern.] Der Planetenkörper
nähert und entfernt sich also wie ein Magnet nach dem Gesetze der Wage in dem bloß gedachten, nach der Sonne zielenden Durchmesser des Epizykels, und der krafttragende und
wirkliche Durchmesser DA des Körpers liegt nach den mittleren Längen hin, nämlich BD
jetzt beim Mars nach 29° ♉, BA nach 29° ♏, wegen der in 29° ♌ gelegenen Sonnenferne.

[K. versucht weiter, einen Widerspruch der eben durchgeführten Betrachtungen gegen *392.*
das 39. Kap. zu beseitigen. Dann weist er auf die Abweichung der Erdachse von der magne- 276.
tischen Achse hin, die ja eigentlich dem Obigen zufolge nach den Nachtgleichepunkten gerichtet sein müßte, während es doch außer der Erdachse im Erdkörper keinen weiteren Durchmesser von unveränderlicher Richtung gibt. Er kommt also wieder auf einen Geist[2] zu, der
nach dem scheinbaren Durchmesser des Sonnenkörpers den Abstand des Planeten von der
Sonne regelt und die Planetenachse immer in derselben Stellung erhält. Dabei muß dieser
Geist nach dem Sinus versus der exzentrischen Anomalie die Größe der Schwankung im
Durchmesser bestimmen, während er nach dem Sinus versus der ausgeglichenen Anomalie *393.*
die scheinbare Größe der Sonne regelt.]

[K. sucht nun zu beweisen, daß der scheinbare Sonnendurchmesser gerade so wächst 277.
wie der Sinus versus der ausgeglichenen Anomalie. Dazu legt er den Sonnenmittelpunkt Fig. 13.

---

[1]) K. macht in seiner Epitome, O. o. VI *407*, auf den Fehler aufmerksam, aus dem die Abweichung der Verhältnisse von einander entspringt. Er habe die erste Pfeilhöhe nicht von einem „hinreichend kleinen" Bogen genommen, sondern von einem Bogen von 1°, und erst Pappus' Ausmessung der Kugeloberfläche habe ihn eines Besseren belehrt. — Auch in Frischs Anmerkung zu dieser Stelle; O. o. III *501*, Anm. 96, finden sich einige Fehler. So ist $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 90^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2}^\circ$ und $\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na = \frac{1}{2} \sin na + \frac{1}{2}(1 - \cos na) \cdot \cot \frac{1}{2} a$. Dann läßt Frisch in dem Verhältnisse $(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na) : (\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin 90^\circ)$ beim Grenzübergange wohl das a der ersten Summe unendlich klein werden, er hält aber das a der zweiten Summe auf dem Werte 1° fest. — Sind m und n zwei positive, ganze Zahlen und a ein beliebiger Winkel, so ist $(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin ma) : (\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na) = (\cos \frac{1}{2} a - \cos (m + \frac{1}{2}) a) : (\cos \frac{1}{2} a - \cos (n + \frac{1}{2}) a)$. Nimmt a unbegrenzt ab und wachsen gleichzeitig m und n so, daß $ma = b$ und $na = 90^\circ$ wird, so folgt $(\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin b) : (\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin 90^\circ) = 1 - \cos b = \sin \text{vers}\, b$, wie das K. behauptet. Einfacher ergibt sich dieser Wert durch das bestimmte Integral der Funktion sin x von 0 bis b. K. führt also hier eine Integrierung aus. — [2]) K. gibt hierzu die Randbemerkuug: „Über das geistige Prinzip dieser Schwankung. Ich scheue mich zu sagen „das vernünftige", damit man nicht etwa dabei an eine vernunftmäßige Überlegung denkt".

nach α und senkrecht zu $\gamma\alpha$ den Sonnenhalbmesser $\alpha\xi$[1] und denkt sich nun den Planeten
Fig. 12. in $\gamma\zeta$ von γ nach ζ laufend, während dieser gleichzeitig den Exzenterhalbkreis CEF durchläuft. In C ist die ausgeglichene Anomalie 0, ihr Sinus versus also 0, die Sonne erscheint aus γ am kleinsten und wächst zunächst um 0.[2] In F ist der Sinus versus am größten, 200000, und auch die Sonne erscheint aus ζ am größten, hat also den ganzen Zuwachs erhalten. | Für die ausgeglichene Anomalie 90° muß AE $\perp$ CF stehen und $\alpha\varepsilon$ Kreistangente sein.[3] Dann wäre $\varepsilon\beta : \beta\mu = EB : BA$, also $\gamma\mu : \mu\zeta = CA : AF$. Nun ist CA der Sinus versus der exzentrischen Anomalie CBE, also ist $\gamma\mu$ die zugehörige Schwankung, und infolgedessen ist bei dieser exzentrischen Anomalie oder bei der ausgeglichenen Anomalie CAE = 90° der Planet in μ[4]. | Der Sinus versus von CAE hat den Mittelwert 100000.[5] Also müßte auch die scheinbare Größe der Sonne für μ einen Mittelwert zwischen den scheinbaren Größen für γ und ζ haben. | Ist aber $\alpha\varepsilon$ Kreistangente, so gilt $\gamma\alpha : \alpha\zeta = \gamma\mu : \mu\zeta$, also ziemlich genau $\gamma\xi : \xi\zeta = \gamma\mu : \mu\zeta$[6], daher halbiert $\xi\mu$ den Winkel $\gamma\xi\zeta$, und es ist mithin $\gamma\xi\mu$ die Hälfte von dem ganzen Zuwachs $\gamma\xi\zeta$ des Sonnenhalbmessers.[7] Der behauptete Satz gilt also von dem äußersten und
394; 278. dem mittleren Punkte. || Endlich gilt er noch für den Nebenscheitel L der Ellipse. Denn es ist BL gleich der Tangente $\alpha\varepsilon$, also $BL > \alpha\mu$ und um so mehr $AL > \alpha\mu$, sodaß die Sonne aus L kleiner erscheinen muß als aus μ, d. h. von einer kleineren Größe als der mittleren. Für L ist aber auch die ausgeglichene Anomalie LAC kleiner als 90°, also ihr Sinus versus tatsächlich auch kleiner als die Hälfte.]

[Die exzentrische Anomalie würde mit ihrem Sinus versus nach dem Obigen ein falsches Maß geben, und sie wäre zudem für den Planetengeist unvorstellbar. Denn wenn dieser auch die Richtung nach dem Fixsternorte des Aphels unverändert festhalten könnte, so könnte er doch nicht die Richtung nach dem Exzentermittelpunkte bestimmen, da in diesem
279; *395.* Punkte kein Körper steht. || Dagegen ist die ausgeglichene Anomalie durch die Richtungen nach der Sonne und nach dem unveränderlichen Fixsternort des Aphels genau festgelegt. | Schließlich könnten ja auch noch die Strahlen des Fixstern- und des Sonnenlichtes durch ihr Zusammentreffen beim Planeten zu dieser Bestimmung beitragen.]

[Weshalb aber ist nicht die ausgeglichene Anomalie selbst, sondern ihr Sinus versus das Maß? Zur Festsetzung des Sinus versus gehört ja eine Denktätigkeit, und „es lag dem Planetengeiste bisher bei der Regelung der Himmelsbewegungen keine Aufgabe ob, die nicht ein von der Urschöpfung der Dinge bis heute waltender göttlicher Instinkt ohne jede Denktätigkeit hätte lösen können". | Nun ist nach dem oben Gesagten der Sinus versus das Maß
280; *396.* der Stärke des Winkels. || Um aber dem Planeten die Vorstellung von dieser Stärke zu ermöglichen, nehme man in ihm ein geistiges Vermögen an, dessen Aufgabe es ist, die magnetische Achse immer in derselben Stellung zu erhalten. Dann wird das geistige Vermögen mit dem magnetischen, das die Achse gegen die Sonne zu richten sucht, zu kämpfen haben, genau so, wie nach dem 34. Kap. die Sonnenkraft die Planetenkörper bewegt, trotzdem diese von Natur nach Ruhe streben, oder wie das geistige Vermögen des Fahnenträgers den Arm mit der Fahne gegen das natürliche Gewicht emporhebt. | Aus diesem Kampfe wird der Planetengeist die Stärke des Winkels erkennen und beurteilen können. | Wird doch auch der Mond

---

[1]) Man trage ihn noch in Fig. 13 ein. — [2]) In C bewegt sich der Planet parallel zu dem beobachteten Durchmesser. — [3]) Man zeichne in Fig. 12 und 13 AE, $\alpha\varepsilon$ und das später erwähnte L entsprechend ein. — [4]) d. h. in dem Fußpunkte des Lotes, das vom Berührungspunkte ε der Tangente auf $\alpha\beta$ gefällt wird. — [5]) Als Grenzwerte sind oben 0 und 200000 gegeben. — [6]) Man erinnere sich an die umgekehrte Vertauschung bei der Ableitung des Spiegelungsgesetzes für Kugelspiegel von kleinem Öffnungswinkel. — [7]) Von γ, μ, ζ aus erscheint $\alpha\xi$ in der Größe $\alpha\gamma\xi$, $\alpha\mu\xi$, $\alpha\zeta\xi$, und es ist, wie bewiesen, annähernd $\alpha\gamma\xi - \alpha\mu\xi = \alpha\mu\xi - \alpha\zeta\xi$.

in der durch den Sonnen- und den Erdmittelpunkt laufenden Linie stärker angetrieben, vielleicht eben wegen dieser Stärke der Winkel.]

Folgendes wird also das Endergebnis sein. Der im Aphel stehende Planet strebt Fig. 12.
nicht nach der Sonne hin, sondern wird im Verhältnis zum Abstand AC vorwärts getragen. Aus dieser Vorwärtsbewegung ergibt sich der Winkel NDA[1]. Im Verhältnis zur Stärke dieses Winkels vergrößert der Planet selbst den Sonnendurchmesser durch Annäherung an die Sonne. Durch die Annäherung vermindert er den Abstand, sodaß dieser AD ist. Nach Verminderung des Abstandes wird er schneller vorwärts getragen, also ändert sich der Winkel NDA schneller, also vergrößert der Planet (ohne Änderung des übrigen) schneller den Sonnendurchmesser. So wird der jährliche Kreislauf bewirkt, nicht sprungweise, wie wir das bei unserer Betrachtung und Rechnung durch Vernachlässigung sehr geringer Fehler festgesetzt haben, sondern ganz stetig.

[Die Schwankung ist nach den bisherigen Betrachtungen nur durch einen Planetengeist vollziehbar, und doch weist alles hin auf alleinige Herrschaft des magnetischen Vermögens, „einer natürlichen Sympathie zwischen den Körpern der Planeten und der Sonne“[2],
zumal da die Größe der Schwankung nicht der Veränderung des Sonnendurchmessers pro- 281.
portional ist. || Trotzdem entsprangen noch Schwierigkeiten aus der unerklärlichen Lage der *397.*
Erdachse, und doch] drängt uns die Wahrscheinlichkeit stark dazu, die Planetenschwankung wegen ihrer ganz unstreitigen Anpassung an die Naturgesetze vollständig der Natur zuzuschreiben, wie diese in den Planetenkörpern liegt. | Und so habe ich möglicherweise gerade dieses empfindungsmäßige Erkennen der Sonne und der Fixsterne, das ich ruhig annehme und dem Planetengeiste zuerkenne, dem philosophischen Leser nicht genügend begründet. [Eine mathematische Unsicherheit ergibt sich noch daraus, daß durch die wachsende Eigenkraft des Planeten auch die Kraft aus der Sonne wächst und umgekehrt, so daß] der eigene Schwung des Planeten für ihn teilweise zum Maße und bei dem immer schnelleren Laufe Ursache und Wirkung zugleich wird. So werden schließlich die Kräfte der beiden Vermögen in ihrem gegenseitigen Verhältnis nicht beweismäßig, sondern gewissermaßen durch die Regula falsi ermittelt, sodaß sie sich in derselben Zeit entwickeln, bei derselben Herumführung des Körpers.

[Möglicherweise aber wird dadurch, daß ein Planet zwischen die Sonne und einen 282.
andern Planeten tritt, die magnetische Eigenkraft jenes Planeten gerade so gehindert, wie die Wirkung eines Magneten auf eine Kompaßnadel durch eine dazwischentretende eiserne Platte, und so das Fortschreiten der Sonnenfernen bewirkt. Das läßt sich zwar ohne genaue Feststellung der magnetischen Natur der Planeten nicht sicher beantworten, aber die Planeten können, wie sofort einzusehen ist, durch dieses Sicheinschieben nur in ihrer Annäherung an die Sonne oder in ihrem Abrücken von dieser gehemmt werden, nicht aber in ihrer Fortbewegung durch den aus der Sonne stammenden Kreisstrom. Danach würde sich also nur der Umfang der Planetenbahn im Laufe der Jahrhunderte ändern, aber nicht das Aphel verschieben. || Ebensowenig würde einen die Bewegung regelnden Geist das Dazwischentreten *398.*
dauernd stören, denn nach dem Wiedererscheinen der Sonne könnte er allemal den fehlerhaften Abstand wieder verbessern. Im übrigen] können die Planetenkörper zwar nach ihrer magnetischen Beschaffenheit einander ähnlich sein, aber sie sind zu weit von einander entfernt, als

[1]) oder bei K. sein Nebenwinkel KDA, wobei K nach dem Fixsternorte des Aphels hinweist. — [2]) K. steht in den Betrachtungen im letzten Teile dieses Kapitels dicht an der Pforte zur Erkenntnis der allgemeinen Gravitation, und immer wieder ist zu beklagen, daß ihm die mangelhaften physikalischen Vorstellungen seiner Zeit den letzten Schritt durch diese Pforte verboten.

daß sich die Kraftkreise der Planeten gegenseitig begegnen könnten. Oder die aus der Sonne strömende Kraft ist zu stark (möge sie nun die Eigenkräfte der Planeten zur Wirkung anregen oder die Planeten im Kreise herumtreiben), als daß sie durch das Entgegentreten des
283. schwächeren Körperchens ganz gehindert werden könne. || Sie geht vielmehr hindurch wie das Licht durch eine Wasserkugel. Oder die Planetenkörper sind zu klein für eine Wirkung, und die Sonne wird niemals einem von ihr bewegten Planeten durch einen andern Planeten vollständig verdeckt, wie ja auch der Mond niemals der Erde die Sonne ganz verdeckt. Dem Monde freilich kann die ganze Sonne einige Stunden lang unsichtbar sein, aber er führt ja auch seine Schwankungen nicht gegen die Sonne, sondern gegen die Erde hin aus, und der Anblick der Erde kann ihm niemals ganz entzogen werden, da kein Körper zwischen Mond und Erde vorhanden ist.

[Der Versuch, die Lage der Sonnenfernen zufolge des Sicheinschiebens eines andern Planeten sprungweise geändert zu denken, führt auch zu keinem Ergebnis, und so mußte immer wieder ein Planetengeist eintreten, gegen den wieder andre Gründe sprechen.] Hält also im allgemeinen weder eine von den übrigen Ursachen noch auch ein Geist Stich, so übertragen wir alles ruhig der Natur. Denn diese leistete auch alles übrige ohne Schwierigkeit und zeigt zudem noch eine sehr günstige Möglichkeit für die Bewegung der Sonnenfernen an.

399. **58. Kapitel. Trotz der Richtigkeit der im 46. Kapitel nachgewiesenen und bestimmten Schwankung kann noch ein Irrtum unterlaufen bei einer unrichtigen Anwendung der Schwankung, und es kann dabei eine wangenförmige Planetenbahn entstehen.**

Nach mir wirft Galatea, das schelmische Mädchen, den Apfel,
Flieht in die Weiden sodann und wünscht vorher sich gesehen.[1]

In der Tat kennzeichne ich so die Natur richtig mit Vergils Worten. Denn je näher man ihr kommt, um so mutwilligere Spiele treibt sie, macht Seitensprung über Seitensprung und entschlüpft so dem, der sie eben haschen will oder schon festhält; und doch lockt sie weiter sie zu erhaschen, und mein Danebengreifen scheint ihr noch Spaß zu bereiten.

Ich suchte ja in diesem ganzen Werke nach einer physischen Hypothese, die nicht nur die Abstände in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, sondern auch noch Gleichungen von gleicher Trefflichkeit liefern sollte; mußten wir letztre doch bisher aus der stellvertretenden
284. Hypothese des 16. Kap. || entlehnen. Indem ich nun gleiches mittels unsrer sicherlich ganz richtigen Hypothese, aber nach einem falschen Verfahren versuchte, packte mich schließlich
Fig. 21. wieder Unsicherheit über den ganzen Gegenstand. Man beschreibe um die Mittelpunkte A und B auf der Apsidenlinie die gleichen Kreise GD und HK, und es möge AB die Exzentrizität des Kreises GD sein, der Bogen GD oder HK aber nach der im 3. Kap. festgestellten Gleichwertigkeit die exzentrische Anomalie oder die Anzahl ihrer Grade. Daher beschreibe man um den Mittelpunkt K im Abstande KD = AB den Epizykel LDF. Er wird zufolge der Gleichwertigkeit des 3. Kap. den Kreis GD in D schneiden. Man ziehe nun AK und verlängere es bis zum Schnittpunkt L mit dem Epizykel. Dann wird der Bogen LD gleich der exzentrischen Anomalie GD oder HK sein. Und man verbinde B mit D. Aus dem Punkte D aber fälle man Lote auf GA und LA, nämlich DC und DE. Dann wird nach dem Beweise des 56. Kap. AE unstreitig der richtige Abstand zu dieser exzentrischen Anomalie sein[2], und es fragt sich nun, wie lange Zeit der Planet in ihr verbrauchte. Nun gibt der Sinus versus GC

[1]) Vergil Eclog. 3, 64—65. — [2]) Denkt man sich noch AZ senkrecht auf BD gefällt, so ist AE = DZ, dies aber entspricht dem in Fig. 14 auftretenden „Durchmesserabstand" HR.

dieses Bogens, oder nach Multiplikation LE[1], von GA weggenommen den richtigen Abstand AE. Also gewann ich aus diesem Umstande die Überzeugung, der andre Endpunkt von AE sei nicht in der Linie DC zu suchen, wie das ganz richtig wäre, sondern im Punkte J der Linie DB, ich müßte also um den Mittelpunkt A im Abstande AE den Bogen EJF ziehen, der DB in J schneiden würde. Es sei also nach dieser Überzeugung AJ nach Lage und Länge der richtige Abstand und JAG die wirklich ausgeglichene Anomalie. Der Bogen EJF schneidet aber ersichtlich die Linie DC in einer weiter oben[2] gelegenen Stelle, etwa in F, und die Winkel JAG und FAG sind somit um die Größe JAF verschieden.

Also beruhte meine Annahme der Linie AJ an Stelle von AF auf einem Irrtume. Diesen Irrtum entdeckte ich zuerst beim Nachrechnen. Ich suchte nämlich die Größe der Fläche DAG sowohl durch alle Abstände als auch durch die kleine Fläche DAB zu ermitteln, ordnete aber dann dieser in Zeit umgewandelten Fläche DAG den Winkel JAG und nicht FAG zu. Dadurch gewann ich im oberen Halbkreis um $5\frac{1}{2}'$ mehr, im unteren um $4'$ weniger, als die hinreichend zuverlässige stellvertretende Hypothese gab. Wegen dieses Unterschieds der Gleichungen von den wahren Werten erhob ich wiederum Anklage gegen diese ganz richtigen Abstände AE und die Schwankung LE des Planeten, und doch war einzig und allein schuld mein falsches Verfahren, das J statt F ins Auge faßte. Was braucht es vieler Worte? Die verstoßene und hinausgejagte Naturwahrheit schlich sich heimlich zur Hintertür wieder herein und fand unter fremdem Gewande bei mir Aufnahme. Ich ging nämlich nach
Verwerfung der Durchmesserschwankungen LE wieder ‖ auf die Ellipsen zurück und glaubte *400.*
so bestimmt einer Hypothese zu folgen, die von der der Schwankungen weit verschieden sei, während sich doch beide nach dem im nächsten Kap. folgenden Beweise vollständig decken. Ich verbessere später nur, was bei meinem jetzigen Verfahren noch fehlerhaft ist, und nehme richtigerweise F statt J. | Meine Beweisführung entsprach der im 49., 50. und 56. Kap. Der Kreis des 43. Kap. gibt einen Fehler nach oben, die Ellipse des 45. Kap. einen solchen nach unten, und jenes Zuviel und dieses Zuwenig sind von gleicher Größe. Die Mitte zwischen
einem Kreise und einer Ellipse ‖ nimmt aber nur eine andre Ellipse ein. Daher ist die 285.
Planetenbahn eine Ellipse, und das vom Halbkreise abgeschnittene Möndchen hat nur die halbe Breite wie früher, nämlich ·429.

Ist aber die Planetenbahn tatsächlich eine Ellipse, so darf man sicherlich nicht J statt F nehmen, denn dadurch würde die Planetenbahn eine Wangenform erhalten. Es mögen nämlich den Winkeln GBD und HAK unten[3] QBP und SAR gleich sein. Und man beschreibe um den Mittelpunkt R wieder einen dem früheren gleichen Epizykel PT, fälle aus dem Schnittpunkt P des Epizykels mit dem Exzenter die Lote PV und PM auf BQ und AR, verbinde P mit B und beschreibe um den Mittelpunkt A im Abstande AM den Bogen MN, der PV in O und PB in N schneidet. Dem obigen entsprechend müssen wir dann, wie statt F J, so jetzt statt O N nehmen und AN, den der Länge nach richtigen Abstand, auch für den der Lage nach richtigen ansehen. Aber die Punkte J und N und ähnlich gelegene liefern eine Planetenbahn von Wangenform. Denn die Bogen GD und PQ sind gleich, und die von dem gemeinsamen Mittelpunkte aus gezogenen Linien BD und BP schneiden das abgeschnittene Möndchen. Aber die sich nach dem Mittelpunkt hin erstreckenden Breiten DJ und PN des Möndchens sind ungleich, und zwar ist DJ die kleinere und PN die größere. Es sind nämlich ED und MP gleich und EDJ und MPN Rechte. Es ist aber EJ der Kreis mit dem längeren Halbmesser

---

[1]) Dreieck DBC $\sim$ DKE, also BC : BD (BG) = KE : KD (KL) und somit GC : BG = LE : KL. — [2]) nach dem Aphel zu. — [3]) am Perihel.

AE, also der größere, und MN der mit dem kürzeren Halbmesser AM, also der kleinere. Daher wird bestimmt PN das größere und DJ das kleinere sein.[1] Das abgeschnittene Möndchen ist also weiter oben bei D schmäler, weiter unten bei P breiter. Bei der Ellipse aber ist dieses Möndchen gleichbreit an solchen Punkten, die von den Apsiden G und Q gleichweit entfernt sind. Hiernach ist also die Bahn offenbar von Wangenform, also keine Ellipse. Und da die Ellipse richtige Gleichungen gibt, so wird mithin diese wangenförmige Bahn tatsächlich unrichtige geben. | Und es erübrigt sich, die Gleichungen aus der Ellipse von neuem zu berechnen. Ich war sicher, sie würden ihre Schuldigkeit auch ohne das tun. Nur wegen der Abstände besorgte ich, die aus der Ellipse entnommenen könnten mir etwa noch zu schaffen machen. Aber selbst wenn dies eingetreten wäre, so hätte ich noch eine Zuflucht gehabt bei der Unsicherheit der Abstände auf 200 Teilchen. Daher hielt ich mich auch hierbei nicht lange auf. Bei weitem am schwersten aber wog ein Bedenken, aus dem ich mich trotz verzweifelten Überlegens und Umschauens nicht herausfinden konnte: weshalb der Planet, dem wir mit solcher Wahrscheinlichkeit und mit solcher Zustimmung der beobachteten Abstände die Schwankung LE im Durchmesser LK beilegten, trotzdem nach Anzeige der Gleichungen lieber die elliptische Bahn durchlaufen wolle. O über mich närrischen Kauz! Konnte denn die Schwankung im Durchmesser uns nicht auch auf die Ellipse bringen? Daher fand ich keine geringe Stütze an der Bemerkung, daß die Ellipse auch ohne jene Schwankung bestehen bleibt. Das wird das folgende Kapitel zeigen und dabei zugleich beweisen, daß dem Planeten als Bahnform einzig und allein eine vollkommene Ellipse übrigbleibt.[2] Denn die aus den physischen Grundlagen abgeleiteten Schlüsse stimmen mit den in diesem Kapitel den Beobachtungen und der stellvertretenden Hypothese entnommenen Proben überein.

401. **59. Kapitel. Nachweis, daß die Bahn des im Epizykeldurchmesser schwankenden Mars eine vollkommene Ellipse ist und daß die Kreisfläche die Summe der Abstände der Ellipsenpunkte mißt.**

286. Vorbetrachtungen.[3]

I. [Hat eine Ellipse einen Durchmesser eines Kreises zur Hauptachse, so stehen die Ordinaten[4] der Ellipse zu denen des Kreises in einem unveränderlichen Verhältnis, und]

II. [die Ellipsenfläche hat zur Kreisfläche auch dieses Verhältnis.]

III. Laufen von einem auf dem Durchmesser beliebig angenommenen Punkte Linien nach den Schnittpunkten ein und derselben Ordinate mit dem Kreis- und dem Ellipsenumfang, so stehen die durch sie abgeschnittenen Flächen wieder in jenem Verhältnis . . .[5]

---

[1]) Ist die exzentrische Anomalie GBD (GBJ) $= \vartheta$, so ist AJ $=$ AE $= a\,(1 + e\cos\vartheta)$, mithin bei kleiner Exzentrizität BJ $= a\,(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}e^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta)$ und DJ $= \frac{1}{2}ae^2\sin^2\vartheta\,(1 - e\cos\vartheta)$. Setzt man hierin für ϑ zwei zu einander supplementäre Winkel ein, so wird im Einklange mit K.s Behauptung der Wert von DJ für den stumpfen Winkel größer als für den spitzen. — [2]) Endlich, nach Überwindung all der aus den lückenhaften physikalischen Vorstellungen seiner Zeit und aus seiner eignen, fast übergroßen Gewissenhaftigkeit entspringenden Hindernisse, wagt K., endgültig als Bahnform die Ellipse festzusetzen. Nicht besser können wir seine Leistungen würdigen als mit den Worten Delambres: „Zu jenen Zeiten konnte man die eigentliche Form der Planetenbahnen noch nicht mathematisch nachweisen. Ehre dem kühnen und scharfsinnigen Astronomen, der mangels eines andern Weges die Gesetze der Himmelsbewegungen durch Rechnung fand." (Hist. de l'astron. I 456 f., angeführt von Frisch O. o. III *501*, Anm. 97.) — [3]) Gewisse Teile der beiden folgenden Kapitel sind im Originale durch großen Druck als besonders wichtig gekennzeichnet. — K. beruft sich im folgenden öfters auf die Kegelschnitte des Apollonius. — [4]) Das Wort „Ordinate" tritt im 59. und 60. Kap. nicht auf, doch wird es hier zur Abkürzung benutzt. — [5]) Kreisteil AKN : Ellipsenteil AMN $=$ AH : BH in Fig. 22. — Diese Figur trägt im Originale am

IV. [Zerfällt der Kreis durch die Ordinaten in gleiche Bogen, so die Ellipse in ungleiche, 287.
von denen die an den Scheiteln gelegenen die größten, die in der Mitte die kleinsten sind.]

V. Der ganze Ellipsenumfang ist nahezu das arithmetische Mittel zwischen dem Kreis mit dem längeren und dem mit dem kürzeren Durchmesser.[1] || Denn nach dem oben *402.*
im 48. Kap. gegebenen Beweise ist er länger als der Umfang (eines Kreises), dessen Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen den Ellipsendurchmessern ist, dessen Fläche also nach Archim. Sphär. 7 gleich der Ellipsenfläche ist. Es ist aber auch das arithmetische Mittel länger als die mittlere Proportionale. Also sind jene sehr nahe gleich groß.

VI. Die Gnomone proportional geteilter Quadrate verhalten sich zu einander wie die Quadrate. . . .[2]

VII. [Das Quadrat der Exzentrizität ist gleich der Differenz der Quadrate des längeren und des kürzeren Halbmessers.]

VIII. Teilt man einen Kreis in beliebig oder unzählig viele Teile und verbindet man 288.
die Teilpunkte mit irgend einem Punkte im Kreisinnern außerhalb des Mittelpunktes, aber außerdem noch mit dem Mittelpunkte, so wird die Summe der vom Mittelpunkte auslaufenden Linien kleiner sein als die Summe der von dem andern Punkte auslaufenden.[3] | Und zwei sehr nahe an der Apsidenlinie liegende, von dem exzentrischen Punkte aus nach Gegenpunkten gezogene Linien werden (zusammen) sehr nahe gleich sein (der Summe) zweier vom Mittelpunkte aus nach den Gegenpunkten gezogenen Linien; zwei in den mittleren Örtern werden aber (zusammen) viel größer sein als die vom Mittelpunkte aus nach denselben Punkten gezogenen Linien (zusammen). [Das ist im 40. Kap. bewiesen.] Die Kreisfläche ist also als Maß der Summe ihrer Umfangsabstände unbrauchbar.

IX. Setzt man aber an Stelle der vom exzentrischen Punkte auslaufenden Linien andre, die begrenzt werden durch die aus jenem Punkte auf die Mittelpunktslinien gefällten Lote, d. h. setzt man die Durchmesserabstände || an Stelle der Umfangsabstände nach der im 289.
39. und 57. Kap. eingeführten Bezeichnung, so ist die Summe gleich der Summe der vom Mittelpunkte auslaufenden Linien. . . .[4]

X. Zieht man Verbindungsstrecken von dem exzentrischen Punkte in der Ellipse nach *403.*
gleichen Ellipsenbogen hin, so ist deren Verhältnis genau so wie das des Kreises in der VIII. Vorbetrachtung entgegengesetzt zu dem in der IV. Vorbetrachtung entwickelten Verhältnis zwischen den Kreis- und den Ellipsenbogen. Denn zwei von dem exzentrischen Punkte nach Gegenpunkten gezogene Linien zusammengenommen übersteigen die Summe von zwei aus dem Mittelpunkte nach Gegenpunkten gezogenen Linien in der Nähe der Apsiden um ein verhältnismäßig sehr kleines Stück, ja fast gar nicht; in der Mitte aber übersteigen sie letztere um ein verhältnismäßig sehr großes Stück. | Das geht aus dem 40. Kap. hervor. Wiederum also ist wie in der VIII. Vorbetrachtung die Ellipsenfläche ungeeignet zur Messung der Summe derjenigen Abstände, die zu gleichen Bogen des Ellipsenumfangs gehören.

XI. [Fällt man vom Brennpunkte[5] der Ellipse auf einen beliebigen Durchmesser des Kreises das Lot, so teilt dessen Fußpunkt den Durchmesser in zwei Abschnitte, die einzeln

---

rechten oberen Rande eine auf dem Triumphwagen thronende Urania, kenntlich an der Himmelskugel in der Rechten und einem Stern als Kopfschmuck, die dem Beschauer einen Lorbeerkranz entgegenhält. — [1]) Ellipsenumfang $= \pi(a+b) \cdot (1 + c + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}c^3 + \ldots)$, wo $c = \frac{1}{4}(a-b)^2 : (a+b)^2$ ist. Beim Mars ($e = 0{,}09331$) ist $c = 0{,}000\,0012$, so daß der Umfang der Marsellipse tatsächlich „sehr nahe" der aufgestellten Behauptung entspricht. — [2]) In Fig. 22 Gnomon KOQ : Gnomon ARS $= KL^2 : AH^2$. — [3]) Letztere werden unten „Umfangsabstände" genannt. — [4]) Vgl. Anm. 1 auf Seite 110. — [5]) Den Begriff „Brennpunkt" wendet K. selbst hier nicht an, sondern er legt den Punkt durch die Bedingung $BN = EH$ fest.

den Verbindungslinien des Brennpunkts mit den Schnittpunkten des Durchmessers und der
290. Ellipse gleich sind. || Es ist $KL : AH = ML : BH$ nach I., also $KL^2 : AH^2 = (KL^2 - ML^2) :$
Fig. 22, 13. $(AH^2 - BH^2)$ nach VI. Aber $KL : AH = \delta\varkappa : \beta\gamma$ zufolge der Übertragung, daher auch $(KL^2$
404. $- ML^2) : (AH^2 - BH^2) = \delta\varkappa^2 : \beta\gamma^2$. Nun ist $HN = \beta\gamma$ und || $HN^2 = AH^2 - BH^2$ nach VII.,
also ist $\beta\gamma^2 = AH^2 - BH^2$ und somit $\delta\varkappa^2 = KL^2 - ML^2$. Aber $\delta\varkappa^2 = \delta\alpha^2 - \varkappa\alpha^2$, daher auch $\delta\alpha^2 - \varkappa\alpha^2 = KL^2 - ML^2$ oder wegen $\delta\alpha = KN$ $KN^2 - \varkappa\alpha^2 = KL^2 - ML^2$. Es ist aber $LN^2 = KN^2 - KL^2 = MN^2 - ML^2$, also ist $KL^2 - ML^2 = KN^2 - MN^2$ und folglich $KN^2 - \varkappa\alpha^2 = KN^2 - MN^2$. Folglich ist $\varkappa\alpha = MN$, zugleich aber nach früheren $\varkappa\alpha = KT$, also $MN = KT$ und entsprechend $NY = JT$[1].]

XII. Wie hieraus hervorgeht, ist weiterhin auch die Kreisfläche im ganzen oder in ihren Teilen das wahre Maß der Summe aller der Linien, um die die Bogen der elliptischen Planetenbahn vom Sonnenmittelpunkt entfernt sind. [Denn setzt man die Kreisfläche gleich
291. der Summe aller Durchmesserabstände, so ist nach XI. auch die Summe aller Ellipsenabstände, die zu gleichen Teilen des Kreises gehören, gleich der Kreisfläche, und es verhält sich die Kreisfläche zur Summe aller Ellipsenabstände wie irgend ein Kreisteil ANK zur Summe der Ellipsenabstände, die einem Bogen AM von ebensoviel Grad wie AK angehören.]

XIII. [Wo aber ist der Endpunkt dieses Bogens AM? Denn er scheint nicht notwendigerweise in der Ordinate KL liegen zu müssen, da gleichen Kreisbogen von A bis B wachsende Ellipsenbogen entsprechen. Für die Schätzung der Zeitdauer der Planetenbewegung scheint man aber gleiche Ellipsenbogen nehmen zu müssen, und andrerseits muß der M entsprechende Punkt auf KL von N den Abstand NM besitzen.] Ich erwidere, jener Ellipsenbogen, dessen Bewegungsdauer durch die Fläche AKN gemessen wird, muß überhaupt in ungleiche Teile zerfallen, und es sind die den Scheiteln benachbarten die kleineren. | Es möge nämlich die Planetenbahn ABC tatsächlich selbst in gleiche Bogen zu zerlegen sein. Nun bleibt der Planet im Bogen A länger als im Bogen C und zwar in demselben Verhältnis, als NA länger als NC ist. NA und NC sind aber zusammen gleich dem längeren Ellipsendurchmesser, und HB ist der kürzere Ellipsenhalbmesser. Also werden auch die Zeiten, während deren der Planet im Bogen bei B und im Gegenbogen weilt, in Summe kürzer sein[2] als die für die gleichen Bogen A und C zusammen. Um also die Zeit in der Nähe von A und C zu verkürzen, in der Nähe von B und seinem Gegenorte zu verlängern und somit immer die Summe der Zeiten für je zwei Gegenbogen gleich groß zu machen, muß man die Bogen bei A und C verkürzen, bei B und seinem Gegenorte verlängern. Das aber geschieht
405. durch die Lote KLM, und zwar geht das aus dem Einwande selbst hervor. || Wir sind freilich durch diese Lösung nur zu der Gewißheit gelangt, daß die Bogen in der Nähe von A und C etwas kleiner sein müssen. Es steht aber noch nicht fest, ob gerade die durch die Lote KLM begrenzten Bogen ganz genau die erforderlichen sind. Das aber wird sich auf folgende Weise als richtig erweisen.

XIV. [Teilt man die Ellipse in gleiche Bogen und setzt man dann die Ellipsenfläche
292. und ihre Teile wie AMN gleich der Summe der Abstände der Bogenteilpunkte von N, so ist das ein Fehler; denn man ersetzt die Linie MHY jedesmal durch die zu große Summe $MN + NY$. | Teilt man aber die Ellipse in ungleiche Teile durch die Ordinaten der End-

[1]) Ist in Fig. 22 $HL = x$, so ist $NM = KT = a + ex$ und $NY = JT = a - ex$, also $NM + NY = 2a$. — [2]) K. verbessert in seiner Epitome (O. o. VI *413*) diese Stelle, um sie verständlicher zu machen, in: „die Berechnung wird die Summe der Zeiten kleiner liefern als . . .". Doch bemerkt er zugleich, die Darstellung sei auch so noch unklar, und daran sei schuld, daß er die Abstände nicht wie Dreiecke, sondern wie Zahlen oder Linien angesehen habe. (O. o. III *502*, Anm. 99 von Frisch.)

punkte gleicher Kreisbogen, so werden jetzt die Ellipsenfläche und ihre Teile durch jene Abstandssummen richtig dargestellt.] Ich will dies von den Anfangspunkten A und C der Quadranten, von ihren Endpunkten B und von dem Zuwachs in den dazwischen liegenden Punkten beweisen.

Nimmt man an den Anfangspunkten A und C der Quadranten die beiden Linien NA und NC an Stelle der Linie AHC, so gibt das keinen Fehler. Nimmt man aber am Ende für BN oder EH BH, so zeigt sich der größte Fehler oder die größte Abweichung nach unten von der Größe BE nach der X. Vorbetrachtung. Und nach der VII. Vorbetrachtung dieses Kapitels verhält sich HE : EB wie die eigentliche Länge zum Fehler an dieser Stelle. Nun erhielt die volle Summe aller Abstände ein nach unten abweichendes, falsches Maß, nämlich die Ellipsenfläche. Daher wird nach Verteilung des Zuwenig auf die einzelnen Abstände kraft unsrer Arbeit oder Rechnung tatsächlich NA und NC zu kurz ausfallen im Verhältnis zu diesem Maße aller Linien. Dies läßt uns nämlich fälschlicherweise bei allen Linien einen gleichmäßig nach unten gerichteten Fehler annehmen, während doch NA und NC gar nicht fehlerhaft sind. Sie trugen zwar zu dieser Summe das richtige Maß bei, aber bei der Wiederverteilung der Summe erhielten sie nicht ihren richtigen Anteil, sondern sie beeinträchtigten[1] die Summe einer andern Linie bei B. | Man sehe nun, wie wir diesen Fehler in demselben Verhältnis wieder ausgleichen. | Es stehen nämlich nach der IV. Vorbetrachtung dieses Kapitels ganz kleine Bogen AK und AM in der Nähe der Apsiden A und C im Verhältnis KL : LM, d. h. EH : HB, und in demselben Verhältnis wich der oben durch die Linien in der Nähe von B gegebene Wert nach unten von der Wahrheit ab. Und umgekehrt sind in der Nähe von B ganz kleine Bogen des Kreises und der Ellipse, wie KE und MB,[2] gleich groß, gerade wie oben die Geraden AN und NC zusammen gleich der Linie AHC waren. Es tritt also jetzt bei der Aufgabe der Bogen dasselbe ein wie früher bei der Aufgabe der Geraden: inbezug auf die überall gleiche mittlere Größe der Bogen wird der Bogen nach dem Obigen bei den Apsiden A und B klein, || bei den mittleren Längen B groß sein. Und somit sind überall 293.
da, wo die Abstände im Hinblick auf die durch die unrichtige Ellipsenfläche gegebene fehlerhafte Summe zu kurz sind, die Bogen gegen ihre mittlere Größe klein, wie in A und C, [und umgekehrt]. Ergibt sich uns also bei der Summierung durch die etwas zu kleinen Abstände in der Nähe der Apsiden eine zu kurze Zeitdauer der Bewegung, so werden bei einem solchen Bogen um so mehr Abstände genommen; denn er ist ja in kleine Teile zerlegt, und jedem dieser Teile ist ein Abstand zugeordnet. [Umgekehrt bei den mittleren Längen. || So wird *406.*
der Fehler in den Abständen durch den gegenteiligen in den Bogen wieder aufgehoben.]

Nun muß ich Gleiches noch von dem Zuwachse in den Zwischenpunkten sagen. | Es übersteigen nämlich die Linien NA und NC (zusammen) von kleinen Anfängen aus durch schnellere Zuwüchse ziemlich beträchtlich die Linie AHC. Umgekehrt verschwinden an der Stelle des größten Überschusses, wie von BN über BH, die Zuwüchse sichtlich. In der Mitte, in der Nähe der exzentrischen Anomalie 45°, sind sie am größten. | Dies erkennt man in gewisser Weise aus dem Gleichungswinkel und seinen Sekanten. Der Unterschied zwischen der Sekante des Winkels der optischen Gleichung und dem Sinus totus ist nämlich fast gleich dem zwischen BN und BH, und es verhelfen sich die einander gegenüberliegenden Gleichungswinkel gegenseitig zu diesem Verhältnis. Es wachsen aber die Sekanten der optischen Gleichung in der Nähe von 45° am schnellsten, am Anfange und Ende des Quadranten aber langsam. Vgl. hierzu das Ende des 43. Kap. | Und in demselben Verhältnisse wachsen auch die

[1]) richtiger: „werden beeinträchtigt durch . . .“. — [2]) Man denke sich die Ordinate beliebig nahe an EH verlegt.

durch die Lote KL abgeschnittenen Ellipsenbogen. Denn an den Anfangspunkten A und C verhält sich der immer von A aus genommene Bogen AK[1] zu seinem Zuwachs wie LK : KM. Es ist aber dort der ganze Bogen, also auch sein Zuwachs klein. Am Ende, in der Nähe von B, ist das Verhältnis (der Bogen) AE : AB[2] fast gleich eins geworden, trotzdem der Bogen AB als Nachbarbogen des Quadranten groß ist; also ist der Zuwachs wiederum klein. Daher ist in der Mitte um 45° herum der Zuwachs der Bogen am merklichsten.[3] | Sicherlich sind also auch in den Zwischenpunkten die Verhältnisse gleich, soweit man das durch feinere Untersuchungen finden kann.

Der Beweis ist zwar ganz richtig, aber auch schwerfällig und unmathematisch, wenigstens betreffs des letzten Teiles, des Zuwachses in den Zwischenpunkten. Ich hätte gern, wie das übrige, so auch diesen kleinen Teil mathematisch und kunstgerecht erledigt, sodaß es auch die Jünger des Apollonius befriedigen könnte. Unterdessen aber, bis ein anderer den Beweis findet und kunstgerecht darstellt, müssen wir mit dem vorliegenden zufrieden sein.

294. XV. Aber wir wollen den Beweis zu Ende führen. || Der Ellipsenbogen, dessen Zeit durch die Fläche AKN gemessen wird, wird in LK seinen Endpunkt haben, also AM sein müssen. | Bisher haben wir es nämlich mit der folgenden Annahme zu tun: hätte einer so viel Zeit, um die (Teile der) Ellipsenfläche zu berechnen, so würde er sicherlich nicht das Ziel verfehlen, wenn er an Stelle so vieler Abstände in AM, als in AK gleiche Bogen sind, die Ellipsenfläche AMN benutzen würde.[4] Diesen Satz wollen wir als den schon bewiesenen Obersatz ansehen. | Als Untersatz will ich noch nach dem Beweise der III. Vorbetrachtung hinzufügen, daß sich die Fläche AKC zur Fläche AMC verhält wie die Fläche AKN zur Fläche AMN. Da sich das Verhältnis durch Erweitern mit gleichen Zahlen nicht ändert, so schließen wir daraus, daß auch die Kreisfläche AKN selbst die Summe ebensovieler Durchmesserabstände (wie KT und TJ) oder elliptischer Abstände, vom (Bogen) AM, mißt, als AK Teile hat. Danach werden also offenbar den Ellipsenteilen bei A und C ganz richtig enger gedrängte Abstände zuerteilt und zwar je ein Abstand für jeden von den Teilen, in die er durch die Lote KL von den gleichen Bogen auf AK zerlegt wird.

Es soll niemand an dieser Tatsache zweifeln aus Mißtrauen gegen die feine und verwickelte || Beweisführung. Ich kam auf das Obige einst durch Probieren und zwar auf folgende
407. Weise. Ich stellte zu den einzelnen Graden der exzentrischen Anomalie anstatt der Abstände von N die Durchmesserabstände KT und TJ auf. Ich summierte sie dann der Reihe nach Stück für Stück. Nach der Summierung von allen war die Summe 36 000 000, wie erforderlich. Ich verglich nun die Teilsummen mit der ganzen, ließ also (nach der Verhältnisregel) die Summe 36 000 000 zu 360° (dem fachmäßigen Ausdruck für die ganze Umlaufszeit) in demselben Verhältnis stehen wie die einzelnen Summen zu den durch sie bestimmten Umlaufszeiten. Dann ergab sich ganz genau dasselbe, selbst auf Sekunden, wie wenn ich die halbe Exzentrizität mit dem Sinus der exzentrischen Anomalie multipliziert und mit der Kreisfläche von ebenfalls 360° (dem fachmäßigen Ausdruck für die Umlaufszeit) verglichen hätte. | Ich war nun aber der Meinung, der richtige Abstand NM sei an die Linie KH anzulegen, sodaß diese zu ZN würde, und hatte so die ausgeglichene Anomalie ZNA bestimmt, indem ich sie der mittleren Anomalie AKN zuordnete. Dabei aber wichen die Gleichungen merklich von meiner stell-

[1]) Man nehme KML beliebig nahe an A an. — [2]) E und B sind als Nachbarpunkte der sonst mit diesen Buchstaben bezeichneten Punkte anzusehen. — [3]) Hält man sich nicht an den unbestimmten Begriff „Zuwachs", sondern an den wohlbestimmten Winkel KNM, den Unterschied der Sehwinkel des Kreis- und des Ellipsenbogens, so leuchtet die Richtigkeit der Betrachtungen K.s ein. Im 60. Kap. kommt er selbst darauf zu. — [4]) Das entspricht dem von K. im 40. Kap. aufgestellten Flächensatze.

vertretenden Hypothese des 16. Kap. ab, und zwar war bei 45° die Abweichung der ausgeglichenen Anomalie von dem durch die Probe an den Beobachtungen gefundenen, richtigen Werte — $5\frac{1}{2}'$, bei 135° etwa 4′. Legte ich aber AM so an, daß es auf KL endigte, dann stimmte die der mittleren AKN zugeordnete ausgeglichene Anomalie MNA ganz genau mit der stellvertretenden Hypothese, d. h. mit den Beobachtungen, überein. Durch diese Gewißheit über den Sachverhalt fühlte ich mich dann bewogen, aus den einmal angenommenen Grundsätzen auch noch die Ursache davon aufzusuchen, und ich habe sie in diesem Kapitel so kunstgerecht || und klar wie möglich dem Leser entwickelt. Wären aber die von mir am An- 295.
fange als Grundlagen angenommenen physischen Ursachen untauglich gewesen, so hätten sie bei der großen Feinheit der Untersuchung niemals standhalten können.

Sollte einer die Unverständlichkeit dieser Untersuchung etwa der Unklarheit meines Denkens zuschreiben wollen, so gebe ich ihm diesen Fehler insoweit zu, als ich jene nicht übergehen wollte, trotzdem sie sehr schwer verständlich und nicht gerade nötig zur Ausübung der Astrologie ist, und diese stellen ja die meisten als das einzige Ziel dieser Himmelsphilosophie hin. Inbezug auf den Stoff bitte ich den betreffenden, die Kegelschnitte des Apollonius zu lesen. Er wird sehen, daß es gewisse Stoffe gibt, die man selbst bei glücklichster Geistesanlage nicht so darstellen kann, daß sie beim schnellen Überlesen zu verstehen sind. Man muß eben nachdenken und das Vorgetragene sehr oft wiederholen.

60. Kapitel. Ein Verfahren, das aus jener physischen, d. h. wahren und richtigen, Hypothese beide Teile der Gleichung und die wahren Abstände gewinnen läßt, was beides auf einmal bisher durch die stellvertretende Hypothese nicht zu ermöglichen war, ein Beweis, daß diese Hypothese falsch ist.

Ich lasse im 56., 58. und 59. Kap. den Planeten in dem gegen die Sonne gerichteten Durchmesser nach der Sonne hin und von ihr weggehen und so eine elliptische Bahn beschreiben. Zugleich aber lasse ich ihn in den einzelnen Punkten der Bahn solange weilen, als dem Abstande jedes Punktes von der Sonne entspricht. Da treffen wir glücklicherweise auf das kurze Verfahren des vorausgeschickten 59. Kap., die Summe beliebig vieler Bewegungszeiten schnell zu berechnen. Geht nämlich vom Kreise ein Lot auf den längeren Durchmesser der dem Kreise einbeschriebenen Ellipse (das möge in der früheren Figur das auf AC gefällte Fig. 22.
Lot KL sein) und schneidet es die Ellipse in M, während die Sonne in N steht, so ist nach unsrem Beweise die Summe aller Abstände der Punkte auf dem Bogen AM von der Sonne N in der Fläche AKN enthalten.

Ist also der Ellipsenbogen AM gegeben, der aus dem Kreisbogen AK abgeleitet ist, ||
so ist die Fläche AHK, der Sektor des Bogens AK, gegeben, und durch den Bogen wird auch *408.*
dieser Sektor gemessen in dem Maße, in dem die ganze Kreisfläche gleich 360° ist. | Und durch den gegebenen Bogen AK ist auch sein Sinus KL gegeben. Es verhält sich aber KL zum Sinus totus EH wie die Fläche HKN zur Fläche HEN nach dem Beweis im 40. Kap.[1] Die Hälfte der uns gegebenen Exzentrizität wird also, mit HE multipliziert, die Fläche HEN bestimmen. Deren Flächeninhalt wird ein für allemal gleich am Anfang berechnet; denn man will den Inhalt dieser kleinen Fläche in dem Maße kennen, in dem die ganze Kreisfläche 360° Zeitmaß enthält.[2] | Es erlaubt uns also die ein für allemal bestimmte Fläche HEN eine sehr einfache Berechnung der Fläche HKN durch eine Proportion. Es verhält sich nämlich EH : KL

[1]) HKN : HEN = KL : EH = KL : KH = sin KHL. — [2]) Bei der Marsellipse ist dieses Dreieck $\frac{1}{2} \cdot 0{,}09331 \cdot 180^\circ : \pi = 2^\circ\, 40'\, 20''$.

= Fläche NEH : NKH, d. h. zu ihrem Inhalt in Graden, Minuten und Sekunden. Das gibt,
296. zum Inhalt von KAH addiert, || das Maß KNA der Zeit, während der sich der Planet in AM bewegt. Das ist also der eine Teil der Gleichung, den ich a) den **physischen** nenne, nämlich die Fläche AKN.[1] Nun ordne ich zwar die Tafeln so an, daß ich die Gleichung nicht anzuführen brauche. Trotzdem will ich die Spalte nicht weglassen, die b) den **optischen** Teil der Gleichung, d. h. den Winkel NKH, liefert. Mir sind die Ausdrücke mittlere Anomalie, exzentrische Anomalie und ausgeglichene Anomalie[2] geläufiger. c) **Mittlere Anomalie** ist die fachgemäß benannte Zeit, und ihr Maß ist die Fläche AKN. d) **Exzentrische Anomalie** ist der Planetenweg von dem Aphel aus, nämlich der Ellipsenbogen AM und der ihn bestimmende Kreisbogen AK. e) **Ausgeglichene Anomalie** ist die scheinbare Größe des Bogens AK, also der Winkel ANK.[3]

Den Winkel der ausgeglichenen Anomalie bestimmt man also wie folgt. Durch den gegebenen Bogen AK ist auch der Sinus LH seines Komplementwinkels gegeben. Es verhält sich aber der Sinus totus zu LH wie die ganze Exzentrizität zu ihrem zu 100000 zu addierenden (oder jenseit 90° zu subtrahierenden) Teile. Damit erhält man den wahren Abstand des Mars von der Sonne, nämlich NM. Im Dreiecke MLN ist nun der Winkel bei L ein rechter und MN wie auch LN gegeben. Letzteres setzt sich nämlich aus LH, dem Sinus des Komplements des Bogenabstandes AK vom Aphel oder der exzentrischen Anomalie, und aus der Exzentrizität HN zusammen. Jenseit 90° ist anstatt der Summe von LH und HN ihre Differenz zu nehmen und anstatt des Komplements der exzentrischen Anomalie ihr Überschuß über 90°. Also wird der Winkel LNM der ausgeglichenen Anomalie nunmehr bestimmt sein.[4] Hieraus kann jeder leicht abnehmen, was beim andern Halbkreis zu ändern ist.

Umgekehrt ist durch die Exzentrizität und die ausgeglichene Anomalie die exzentrische Anomalie gegeben, freilich mit etwas mehr Arbeit, ob wir nun beweismäßig oder analytisch vorgehen. | **Beweismäßig** kann man sie durch das folgende Verfahren bestimmen, nämlich durch Messung des Winkels, unter dem die Strecke KM, um die der Planet von einem beliebigen Kreispunkt aus hereinrückt, vom Sonnenmittelpunkt aus erscheint. Dies Verfahren ergibt sich aus einigen Vorbetrachtungen.

I. Die kleinen Strecken, um die der Planet nach der Apsidenachse heranrückt, wachsen im Verhältnis der Sinus der exzentrischen Anomalie. | Nämlich EH : KL = EB : KM. Benutzt wurde das im 59. Kap. und bewiesen in den Kegelschnitten[5].

II. Verbindet man die Endpunkte einer von den kleinen Strecken mit dem Mittelpunkte und nimmt man an, die kleine Strecke bleibe bei allen Exzenterpunkten gleich groß, so nimmt die Tangente des Zentriwinkels[6] fast ab im Verhältnis des Kosinus der exzentrischen
297. Anomalie. || Die kleine Strecke DF sei ein Teil des Sinus DV der exzentrischen Anomalie AD.
Fig. 23. Man verbinde ihre Endpunkte D und F mit H und verlängere HF; die Gerade ED berühre den Kreis in D und schneide HF in E. Wegen DVH = 1 R wird VDH der Komplementwinkel der exzentrischen Anomalie VHD sein. Und wegen EDH = 1 R wird HED um den Winkel EHD kleiner als 1 R sein; EHD aber ist von ganz unbedeutender Größe; denn selbst

---

[1]) Ist die exzentrische Anomalie AHK = ϑ und wird die große Halbachse der Bahn als Einheit angenommen, so ist die Fläche AKN = $\frac{1}{2}\vartheta + \frac{1}{2}e \sin\vartheta$. — [2]) Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß K. die Anomalien vom Aphel aus mißt. — [3]) K. nennt diese Anomalie später (in V.) die „bloß gedachte, auf den Kreis aufgebaute ausgeglichene Anomalie" im Gegensatz zu der „wahren, auf die Ellipse aufgebauten ausgeglichenen Anomalie" ANM. — [4]) Ist AHK = ϑ und ANM = φ, so ist LH = $\cos\vartheta$ und HT = $e\cos\vartheta$, also NM = $1 + e\cos\vartheta$ und LN = $e + \cos\vartheta$ und somit $\cos\varphi = (e + \cos\vartheta) : (1 + e\cos\vartheta)$. — [5]) des **Apollonius**. — Es ist KM = KL — ML = $(a - b)\sin\vartheta$. — [6]) Die nachher zu konstruierende Kreistangente DE, die für HD = 1 zugleich tg DHF darstellt.

bei seinem größten Werte wächst er nicht über 8′. Und aus derselben || Ursache ist VFH, 409.
d. h. EFD, größer als das Komplement FDH der exzentrischen Anomalie, aber nur um die
unbedeutende Größe FHD. Und da der spitze Winkel FED nur wenig kleiner als ein Rechter
ist, so wird auch der FED umbeschriebene Bogen nur wenig kleiner als ein Halbkreis sein,
und daher verhält sich ED : DF wie der Sinus des Winkels, der nur wenig größer ist als das
Komplement der exzentrischen Anomalie, zu einem Sinus, der nur wenig oder eigentlich fast
gar nicht kleiner ist als der Sinus totus. Bleibt also FD im ganzen Quadranten von der-
selben Länge, so wird ED nahezu proportional sein den Sinus der Komplemente der ex-
zentrischen Anomalie.[1] Bleibt nämlich die Länge FD erhalten und liegt der Endpunkt D in A,
so ist der Winkel FDH ein rechter und daher auch FHD am größten und somit DFH so
spitz als möglich und deshalb der Bogen über FD so lang als möglich. Von dort aus nimmt,
mit dem Herabsteigen der Strecke FD von A aus, der Bogen FED ab, und es wächst der
Winkel FED, bis in 90° FD ein Teil der Linie DH wird. Dann fällt also HA mit HD zu-
sammen, und ED verschwindet; und es ist dort (nach Analogie) der Bogen über FD gleich
einem Halbkreis und so klein als möglich.

III. Verbindet man die Endpunkte der kleinen Strecke, um die der Planet nach der
Apsidenachse heranrückt, so wie diese Strecke zu jeder beliebigen exzentrischen Anomalie
gehört, (mit dem Mittelpunkte), so wachsen die Tangenten der Zentriwinkel (und somit bei den
kleinsten Strecken auch die Winkel selbst) fast in einem Verhältnis, das sich aus dem Verhältnis
der Sinus und aus dem der Kosinus der exzentrischen Anomalie zusammensetzt, d. h. im Ver-
hältnis der Rechtecke des Quadranten, die man durch Multiplikation der Sinus der Winkel
mit den Kosinus erhält. Dabei verhält sich das größte Rechteck bei 45° zum größten Winkel
bei ebendieser exzentrischen Anomalie 45°[2] wie die übrigen Rechtecke zu den übrigen Winkeln
der exzentrischen Anomalie. | Denn auf die Größe dieser Winkel wie EHD ist zweierlei von
Einfluß: die Weglänge des Heranrückens selbst von 0 bis zur größten und der Sehwinkel
eines jeden von 0 bis zum größten. Es wächst aber nach I. die Strecke des Heranrückens
im Verhältnis der Sinus, und es nehmen nach II. die Tangenten der Winkel, durch die sich
die scheinbare Größe jener Strecken vom Mittelpunkt des Exzenters aus bestimmt, im Ver-
hältnis der Kosinus ab. Demzufolge ist der Winkel bei A 0, wo der Sinus 0 ist, und ebenso
der Winkel 0 bei der exzentrischen Anomalie 90°, || wo der Kosinus 0 ist, und infolgedessen 298.
verschwindet beidemal das Rechteck. Aber etwa bei der Anomalie 45° ergab sich FD schon
größer als die Hälfte; denn ihr Sinus 70711 ist größer als die Hälfte 50000 des Sinus totus.
Jedoch der zugehörige Winkel EHD ist noch größer als die Hälfte; denn der Kosinus ist auch
größer als die Hälfte, nämlich auch gerade 70711. Daher wird dieses Rechteck das größte
im Quadranten und zugleich ein Quadrat, und zwar ist es halb so groß wie das Quadrat
des Halbmessers, nämlich 5000000000.

IV. Der (Seh)winkel des Heranrückens des Planeten vom Kreisumfange nach dem
Apsidendurchmesser ist in der exzentrischen Anomalie, beim Exzentermittelpunkt, und in der
ausgeglichenen Kreisanomalie von ebensoviel Graden, beim Sonnenmittelpunkt, von gleicher
Größe. | Man konstruiere zur exzentrischen Anomalie AHD die gleiche ausgeglichene ANG
am Umfange G des Kreises, d. h. man ziehe NG parallel HD. Und es gehe von G GX $\perp$ AC,
und es sei auf GX GJ die richtige Länge für das Heranrücken || des Planeten; und man ver- 410.

[1]) Ist VHD $= \vartheta$ und VHF $= \chi$, so ist auch EDF $= \chi$ und somit tg DHF $=$ ED $=$ DF . cos $\chi = (a - b)$. sin ϑ cos χ. Bei der Kleinheit des Winkels DHF darf man hierfür schreiben DHF $= (a - b) \sin \vartheta \cos \vartheta$. — [2]) Nach Anm. 1 ist DHF $= \frac{1}{2}(a - b) \sin 2\vartheta$; es erreicht also seinen größten Wert für $\vartheta = 45^\circ$.

binde J mit N. Es ist also VD : DF = XG : GJ nach I., aber VD : DH = XG : GN wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke, also FD : DH = JG : GN, und es ist Winkel FDH = JGN. Daher sind auch FHD und JNG gleich. Und es ist H der Exzentermittelpunkt und N der Sonnenmittelpunkt. Also ist der Winkel usw., w. z. b. w.

V. Das wahre und ganz richtige Maß des Winkels, um den sich die bloß gedachte, auf den Kreis aufgebaute ausgeglichene Anomalie unterscheidet von der wahren, auf die Ellipse aufgebauten ausgeglichenen Anomalie, ist das Rechteck aus dem Sinus der bloß gedachten und dem Kosinus der wahren ausgeglichenen Anomalie. | In unsrer Figur mußte sich durch das Produkt des Sinus des Winkels AHD in den Sinus des Winkels VFH nach III. das eigentliche Maß des Winkels FHD ergeben. Nach IV. aber sind die Winkel VHD und XNG gleich groß, also haben sie gleiche Sinus, und ebenso haben auch VFH und XJN gleiche Sinus. Also ergibt sich nach Multiplikation des Sinus des Winkels XNG der bloß gedachten ausgeglichenen Anomalie mit dem Sinus des Winkels XJN, des Komplements des Winkels XNJ der wirklichen ausgeglichenen Anomalie, das eigentliche Maß des Winkels PHD, d. h. nach IV. des Winkels JNG, der Differenz zwischen XNG und XNJ.[1]

Zusatz. Da die Differenz JNG klein und nirgends größer als 8′ ist, so wird die Differenz zwischen den mittels des Sinus von XJN und mittels des Sinus von XGN gebildeten Rechtecken dem Werte nach noch viel kleiner sein.

299. Daher wird man die Rechnung folgendermaßen durchführen. Ist der Winkel der wahren ausgeglichenen Anomalie gegeben, so multipliziert man seinen Sinus mit seinem Kosinus. Das verdoppelte Produkt multipliziert man nach Abwerfung der letzten fünf Stellen mit dem größten (Seh)winkel der Strecke des Heranrückens, bei der Anomalie 45°. Dadurch erhält man den (Seh)winkel des Heranrückens bei der gegebenen Anomalie. Man fügt das zur wahren ausgeglichenen Anomalie XNJ hinzu und erhält die bloß gedachte Anomalie XNG. Mittels dieses Winkels und der bekannten Seiten NH und HG findet man die exzentrische Anomalie AHG und den Inhalt des Dreiecks HGN wie früher. | Die Bestimmung des zur Anomalie 45° gehörigen größten Sehwinkels aber ist nicht schwer. Es sei VHD 45°. Also verhält sich der Sinus totus zu 70711 wie die größte Strecke 429 oder besser 432 des Heranrückens, d. h. die größte Breite des Möndchens, zu FD = 305. Es ist aber bei 45° HV = VD. Nimmt man also von VD = 70711 FD = 305 weg, so bleibt VF = 70406, und das gibt mittels HV den Winkel VHF zu 44° 52′ 34″. Das aber unterscheidet sich von 45° 0′ 0″ nur um 7′ 26″, und das ist der größte Winkel JNG.[2]

Es folgt ein zweites Verfahren durch Analysis auf folgenden Grundlagen. In Fig. 22 ist durch den Winkel MNL das Verhältnis der Linien MN und NL gegeben, und ich weiß, daß MN und NL zusammengesetzt sind aus Teilen von einem bekannten und umgekehrten Verhältnis. Denn in MN ist der Sinus totus enthalten, eine bekannte Größe; in LN ist HN enthalten, die bekannte Exzentrizität. Der Rest von MN hat zum Rest von LN, d. h. zu LH, dasselbe Verhältnis wie die Exzentrizität HN zum Sinus totus. Man vergleiche, wenn man das vorzieht, auch die Figur 21. Also sei MN = 100000 + 1 R, LN sei aus dem Winkel MNL = 30° $\frac{8660300000 + 86603\ \mathrm{R}}{100000}$ und NH = 9265 oder $\frac{926500000}{100000}$, also HL =

[1]) Vgl. Anm. 1 auf Seite 115. — [2]) Einige kleine Fehler sind verbessert. — Man findet einfacher für VHD = 45° tg VHF = b : a, also in K.s Abmessung (e = 0,09265; im 48. Kap. hatte er 0,09165!) VHF = 44° 52′ 34″, was den größten Sehwinkel DHF = 446″ gibt. Ist dann irgend eine wahre Anomalie XNJ = φ gegeben, so ist annähernd GNJ = 223″. sin 2φ und XNG = XNJ + GNJ.

$\frac{7\,733\,800\,000 + 86\,603\ ℞}{100\,000}$. Es verhält sich aber HN = 9265 zu 1 ℞ wie 100000 : LH. Daher ist HL zweitens gleich $\frac{100\,000\ ℞}{9265}$, d. h. $\frac{1\,079\,320\ ℞}{100\,000}$; oben war es $\frac{7\,733\,800\,000 + 86\,603\ ℞}{100\,000}$. Nach Wegwerfen des Nenners und dessen, was man beiderseits als gleich wegnehmen kann, bleiben 992717 ℞ = 7733800000. Daher hat die Unbekannte den Wert 7791, und es ist MN = 107791. Und weil sich HN zu jener Unbekannten verhält wie der Sinus totus zu LH, so wird also LH = 84080 sein, gleich dem Sinus von KE = 57° 14′, dem Komplement der exzentrischen Anomalie AK = 32° 46′. Aus dem so gefundenen Winkel bestimmt man nun wie früher noch die Fläche AKN, das Maß der Zeit oder der mittleren Anomalie.[1] ‖ In Figur 21 *411.*
ist das am deutlichsten zu sehen. Es sei GQ der Exzenter, AB die Exzentrizität, GD oder LD die exzentrische Anomalie, FAC die ausgeglichene[2], FA oder EA der Abstand. Also[3] AK : AB = BC : KE; und bei der ausgeglichenen Anomalie CAO AR : AB = BV : RM. So wird also EK oder RM als die Unbekannte festgestellt. Das übrige wie oben.

Aber bei gegebener mittlerer Anomalie gibt es kein mathematisches Verfahren, das zur ausgeglichenen oder schließlich zur exzentrischen Anomalie führt. Denn die mittlere Anomalie ist zusammengesetzt aus den beiden Flächenstücken, dem Sektor und dem Dreieck. Von diesen wird jenes wohl mittels des Exzenterbogens berechnet, das andre aber mittels des Produktes des Sinus des Bogens in den größten Dreiecksinhalt ‖ unter Wegschneidung 300.
der letzten Stellen. Es gibt aber unzählig viele Verhältnisse zwischen den Bogen und ihren Sinus. Wenn also die Summe von beiden gegeben ist, so kann man nicht sagen, wie groß im Verhältnis zu dieser Summe der Bogen und wie groß sein Sinus ist. Wir müßten erst vorher ermitteln, wie groß bei gegebenem Bogen die Fläche ausfällt, d. h. wir müßten zuerst Tafeln aufstellen und dann erst mit ihrer Hilfe ans Werk gehen.

Das ist meine persönliche Meinung. Je weniger mathematische Schönheit ihr eigen zu sein scheint, um so dringender fordere ich die Mathematiker zur Lösung der folgenden Aufgabe auf:

Bei gegebener Fläche eines Teiles des Halbkreises und bei gegebenem Punkte des Durchmessers einen Bogen und einen Winkel an diesem Punkte so zu finden, daß die Schenkel des Winkels und der Bogen die gegebene Fläche einschließen. Oder: Die Halbkreisfläche von jedem beliebigen Punkte des Durchmessers aus in gegebenem Verhältnis zu teilen.[4]

Ich begnüge mich mit der Vermutung, daß sich das a priori nicht lösen läßt wegen der Verschiedenheit von Bogen und Sinus. Wer mir aber meinen Irrtum und einen Ausweg nachweist, den würde ich Apollonius gleich achten[5].

---

[1]) Auch hier sind Rechenfehler verbessert. — K. setzt HT = x, also ist NM = KT = 1 + x, NL = $(1 + x) \cos \varphi$ und somit HL = $(\cos \varphi - e) + x \cos \varphi$. Andrerseits ist Dreieck HND $\sim$ HKL, also HL = x : e. Aus den beiden Werten von HL folgt $x = e (\cos \varphi - e) : (1 - e \cos \varphi)$ und hieraus $NM = (1 - e^2) : (1 - e \cos \varphi)$. Ferner ist $HL = \cos \vartheta = (\cos \varphi - e) : (1 - e \cos \varphi)$. — [2]) wahre Anomalie. — [3]) aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD und KED. — Vgl. hierzu noch die Ausführungen in einem Brieffragment K.s, O. o. III *503*, Anm. 103 von Frisch. — [4]) Hier stellt K. sein berühmtes Problem in ausführlicher Fassung auf. Er ist sich, wie die nächsten Worte zeigen, vollkommen der Gründe gegen die Möglichkeit einer elementaren Lösung bewußt. — [5]) erit mihi magnus Apollonius.

301; *412.* V. Teil der Abhandlungen über die Bewegungen des Sternes Mars.

Über die Breite.[1]

302-303; 61. Kapitel. Nachprüfung des Ortes der Knoten.

412-413. [In der Nähe des einen Knotens ist der Mars in den Jahren 1590, 1592, 1593 und 1595 beobachtet worden, in der Nähe des andern nur 1589. Daraus findet K. als Ort der Knoten Ende 1595 $16^{0}\,46\frac{1}{3}'$ ♉, ♏.[2]]

303-305; 62. Kapitel. Nachprüfung des Neigungswinkels der Ebenen.

413-415. [K. stützt sich auf die akronychischen Beobachtungen des 15. Kap. oder auf nahe gelegene, um den Neigungswinkel der Marsbahnebene gegen die Ekliptik zu bestimmen. Dabei beweist und benutzt er den Hilfssatz: der Abstand des Mars von der Erde verhält sich zu dem von der Sonne wie der Sinus der Marsbreite zum Sinus jenes Neigungswinkels. So findet er für die südliche Neigung $1^{0}\,50'\,8''$ und für die nördliche $1^{0}\,50'\,45''$ mit „ganz unbedeutendem" Unterschied, also als Mittelwert $1^{0}\,50'\,25''$, wie im 13. Kap.[3] Er berechnet damit die akronychischen Breiten von neuem und findet „hinreichend genaue" Übereinstimmung mit den beobachteten Breiten über den ganzen Kreisumfang hin.]

305-310; 63. Kapitel. Physische Hypothese der Breite.

415-419. [Wie früher die Abweichung der Marsbahn vom Kreise, so sucht jetzt K. die Abweichung der Marsebene von der „Königsbahn", der Ekliptik,[4] also die Breite des Mars, durch Annahme einer magnetischen Planetenachse von unveränderlicher Richtung zu erklären. Diese müßte nach den Wendepunkten der Marsbahn hin gerichtet sein, also von der ersten magnetischen Achse abweichen, wodurch sich neue Schwierigkeiten ergeben, da nicht gut zwei Achsen festliegen können. K. schwankt wieder zwischen der Annahme eines geistigen und eines natürlichen Vermögens zur Festhaltung der Richtung der zweiten Achse. Um den Widerspruch der Achsendrehung der Erde gegen die Festlegung zweier Durchmesser zu beseitigen, stellt K. sogar die Vermutung auf, es könne im Innern der Erde eine zweite Kugel sitzen, die an der Umdrehung der äußeren Schale nicht teilnimmt, sondern unveränderliche Lage besitzt. Im übrigen tröstet sich K. damit, daß es ja noch unbekannte Bewegungsarten geben könne.]

310-311; 64. Kapitel. Nachprüfung der Marsparallaxen durch die Breite.

419-420. [Die berechneten Örter der Knoten der Marsbahn liegen einander genau gegenüber, die beiden Neigungen der Marsbahnebene nach Nord und Süd zeigen nur einen „unmerklichen" Unterschied, und auch die beobachteten Breiten stimmen mit den ohne Annahme einer Marsparallaxe berechneten überein.] Durch diese drei Verfahren haben wir die Unsicherheit der Marsparallaxe erwiesen, ihre völlige Unmerklichkeit haben wir aber nicht hinreichend bewiesen, denn es narrte uns die schwierig zu behandelnde Brechung, und die Beobachtungsgenauigkeit ging bisweilen nicht unter $2'$ oder $3'$ herab. Will also jemand dem Mars als größte Breitenparallaxe $2'$ oder $2\frac{1}{2}'$ beilegen, so werden ihn die Braheschen Beobachtungen

[1]) Der V. Teil ist am meisten zusammengezogen, da sich in ihm K.s astronomische Ideen nicht weiter entwickeln, sondern nur zur Nachprüfung der Daten der Marsbahn und gewisser Zahlen aus Ptolemäus' Syntaxis dienen. — [2]) Im 12. Kap. (1. Progr.-Abh. S. 35) findet sich $16\frac{1}{3}'$ ♉, ♏. — [3]) Die dort gegebenen Werte weichen sehr stark von einander ab, geben aber als Mittelwert $1^{0}\,48'$ (1. Progr.-Abh. S. 37). — [4]) oder einem andern größten Sonnenkreise; vgl. Kap. 68.

nicht leicht widerlegen. Denn auch die Neigung wird sich dem anpassen lassen, und zwar wird sie 1° 51′ 0″ werden.[1]

65. Kapitel. Aufsuchung der größten Breite nach beiden Seiten, sowohl in Konjunktion als auch in Opposition mit der Sonne. 311-313. *420-421.*

[Würden das Aphel des Mars und das Perihel der Erde gleiche Länge haben, so wäre die größte nördliche Marsbreite in Opposition 4° 29′ 10″ und in Konjunktion 1° 8′ 34″, und die entsprechenden südlichen Breiten wären 6° 58′ 24″ und 1° 4′ 36″. Hätten aber die Aphelien gleiche Länge, so würde sich ergeben 4° 44′ 12″, 1° 9′ 32″, 6° 20′ 50″ und 1° 3′ 32″. Nach Ptolemäus laufen nun die Knoten und die Apsiden gleich schnell um, so daß die obigen Fälle nie eintreten könnten, und K. findet die überlieferten Zahlen noch zu unsicher, um eine verschiedene Umlaufszeit festzustellen. Läßt man aber die Abweichungen der Apsidenachsen von einander und der Bahnen von der Kreisform bestehen, so läßt sich der Ort der größten Breite nicht genau bestimmen.[2] K. nimmt 19° ♌, ♒ als solche für die südliche Breite an und findet so für seine Zeit als größte südliche Marsbreite in Opposition 6° 52′ 50″ und in Konjunktion 2° 42′ 20″.]

66. Kapitel. Die größten seitlichen Abweichungen finden sich nicht immer gerade in der Opposition zur Sonne. 313; *421.*

Aber noch viel verwickelter ist die Aufgabe, die bestimmten Örter, die der Mars
während irgend eines || Umlaufs erreichen kann, mathematisch festzulegen. Und sie birgt in *422.*
sich jenes große Paradoxon, das ich unter den Beobachtungen Tycho Brahes aus dem Jahre 1593 fand, wo er eigenhändig mit folgenden Worten darauf hinwies: „Es ist der Beachtung wert, daß der Mars um den 10. August seine größte Breite hatte, und daß diese dann abnahm. Er wurde also am 24. in der Opposition etwa $\frac{1}{4}$° näher an die Ekliptik verschoben, und doch geben die Regeln das auch nach einer Verbesserung des Ortes der größten Breite niemals in 18° ♒, wie man auch dort die größte Breite annehmen mag. Die Ursache davon ist noch auf das sorgfältigste zu untersuchen“. Ich kam ja später zu ihm nach Böhmen und befragte ihn öfters wegen der Berechnung der Breiten. Da teilte er mir mit, die Knoten lägen an entgegengesetzten Örtern, und die Schnittgerade liefe durch den Punkt des mittleren Sonnenortes oder durch den Mittelpunkt des Sonnenexzenters (worüber weiteres im nachfolgenden 67. Kap.), und noch vieles andere. Und da er durch diese Erwähnung recht an die obige Aufgabe erinnert wurde, sprach er: „Es ist wunderbar, daß sich die größten Breiten vor oder nach der Opposition mit der Sonne finden“ . . .

Nun enthält zwar die durch diesen V. Teil befestigte wahre Hypothese der Breite auch 314.
die Ursache jenes Falles in sich. Trotzdem würde uns die mathematische Bestimmung der größten Breiten nicht leichter fallen als Apollonius von Pergae die Bestimmung der Umkehrpunkte. | Man kann nämlich bei dieser Aufgabe der Stillstände ein gewisses Merkzeichen angeben, aus dem man deren Ort erkennt (es geht aber dahin, daß die Sehlinie des Mars bei der Weiterbewegung der Erde zu sich selbst parallel bleibt); aber man kann aus diesem Kennzeichen den Ort des Stillstandes nicht ohne große Rechnung beweismäßig finden, da noch viele andre Ursachen mit unterlaufen. Ebenso liegt die Sache bei einer, im übrigen beliebigen, größten Breite. Denn es ist freilich die Breite dann am größten, wenn der Abstand des Mars von der Erde in demselben Verhältnis ab- oder zunimmt wie die Neigungs-

[1]) Die Abänderung betrüge nur etwa $\frac{1}{2}$′. [2]) Vgl. Kap. 66.

linien des Mars, und es wächst die Breite, wenn das Abstandsverhältnis schneller abnimmt als das Verhältnis der Neigungslinien, oder wenn jenes ab- und dieses im Gegenteil zunimmt. Umgekehrt nimmt die Breite ab, wenn der Abstand des Mars von der Erde verhältnismäßig schneller zunimmt als die Neigungslinie, oder wenn der Abstand wächst und die Neigungslinie abnimmt. | Das aber tritt unterschiedslos bald in der Opposition, bald vor oder nach ihr ein, je nachdem die Opposition gerade in den Wendepunkt oder vor oder hinter ihn fällt. | Meine Ephemeriden beweisen, daß sich das aus der Hypothese meines Werkes so ergibt . . . | Warum es aber in der alten Astronomie wunderbar anmutete, das folgt vor allem aus den verworrenen Bewegungen der Neigungen, Abbiegungen und Rückläufe, wie sie Ptolemäus und seine weiteren Nachfolger erdacht hatten.[1] Auf die ersten Schwierigkeiten stieß Ptolemäus bei der Ersinnung des Epizykels. Wie er sah, weicht der Planet in der beobachtbaren Opposition mit der Sonne nach der einen Seite ab. Deshalb gab er sofort einer Vermutung Raum, indem er den Mars in der nicht beobachtbaren Konjunktion mit der Sonne nach der andern Seite abweichen und ihn im allgemeinen das Gegenteil von dem tun ließ, was man ihn in der Opposition ausführen sehe. Natürlich wollte er damit eine gewisse Ausgleichung, eine Gleichmäßigkeit der Umlaufszeit und einen Zusammenhang mit der Sonne schaffen. Das
423. aber heißt nicht die Wahrheit durch Beobachten || finden, sondern nach einer falschen, voreingenommenen Meinung die Beobachtungen erfinden. Freilich muß man ihm das hingehen lassen, da er nur über wenige Beobachtungen verfügte. . . .[2]

315. [K. führt für eine bestimmte Beobachtung die Rechnung nach zwei verschiedenen Verfahren auf Grund seiner Theorie durch und erhält eine Breite, die der beobachteten fast genau gleich ist.] Es leistet also die durch mein Werk begründete Hypothese gerade das, wofür man nach Brahes Mahnung die Ursache sorgfältig aufsuchen sollte, und das konnte die alte Astronomie trotz ihres großen Apparates nicht leisten. Jene leistet dies, sage ich, gerade durch ihre Einfachheit. Sie gibt ja der Exzenterebene eine unveränderliche Neigung oder Schiefe und vermehrt oder vermindert diese abwechselnd nicht etwa in Wirklichkeit[3], sondern nur optisch . . .

67. Kapitel. Mit Hilfe der Örter der Knoten und der Neigung zwischen den Ebenen des Mars und der Ekliptik wird bewiesen, daß die Marsexzentrizität nicht vom Punkte des mittleren Sonnenortes (oder für Brahe vom Mittelpunkte des Sonnenepizykels), sondern vom Sonnenmittelpunkte selbst ausgeht.[4]

316-318; [Nimmt man statt des wahren Sonnenortes den mittleren an, so würde K.s Theorie den
424-426. einen Knoten um mehr als 2° vom Gegenorte des andern abweichen lassen, während sie doch nach den Beobachtungen genau in Gegenorten liegen, es würde die Schnittlinie der beiden Ebenen nicht durch den Ausgangspunkt der Exzentrizität laufen, wofür kein Grund vorhanden ist, und es läge die Marsbahn nicht in einer Ebene, sondern in einer geknickten Fläche. Diese Widersprüche ließen sich höchstens durch die Annahme einer großen Marsparallaxe heben, aber es wurde bereits im 64. Kap. bewiesen, daß der Mars keine merkliche Parallaxe besitzt.]

---

[1]) Im 69. Kap. (O. o. III *432*) weist K. darauf hin, daß Ptolemäus' Nachfolger bis zu zwölf Sphären durch die abenteuerlichsten Betrachtungen festgesetzt hätten und daß Brahe diese Vielgeschäftigkeit heftig getadelt habe. — [2]) Doch bemerkt K. andrerseits (O. o. III *433, 439*), Ptolemäus müsse weit mehr Beobachtungen, als er in der Syntaxis überliefert habe, zur Aufstellung seiner Theorien benutzt haben. — [3]) wie Coppernicus annimmt (vgl. Kap. 14, 1. Progr.-Abh. S. 38). — [4]) Diese Abweichung von Ptolemäus', Coppernicus' und Brahes Ansicht hat K. schon in den Kap. 6, 22, 23 und 52 behandelt. Er kommt immer wieder darauf zurück, da in ihr die zentrale Stellung der Sonne ganz besonders augenscheinlich wird.

68. Kapitel. Sind die Neigungen der Marsbahn und der Ekliptikebene in unserem Jahrhundert dieselben wie in dem des Ptolemäus? nebst Bemerkungen über die ekliptischen Breiten und über den ungleichförmigen Umlauf der Knoten.

[K. verneint die gestellte Frage im Anschluß an Brahes Ansicht. Seine weiteren 318-323;
Bemühungen gelten der Herstellung einer Harmonie zwischen den an sich verschiedenen und *426-430.*
dabei noch wechselnden Neigungen der Planetenbahnen. Er ersinnt dazu einen in die Ebene des unverrückbaren Sonnenäquators fallenden „Königskreis“[1] am Fixsternhimmel, gegen den jede Planetenbahnebene unter unveränderlichem Winkel geneigt ist, während sie sich im Laufe der Zeit unter Beibehaltung ihrer Neigung verschiebt. So erklärt sich für K. die Wanderung der Bahnknoten und die Änderung der Fixsternbreiten und der irdischen Breiten. Das Beispiel des Mondes scheint dem freilich zu widersprechen, da sich seine Bewegung nicht auf eine solche Ebene bezieht. Doch wird dieser Einwand hinfällig, da der Mond nicht um die Sonne, sondern um die Erde läuft. Auch der Wechsel der Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik läßt sich durch die obige Annahme erklären. — Zu einer rechnerischen Begründung dieser Annahme sind die Ptolemäischen Beobachtungen untauglich; denn die ihnen entspringenden Abweichungen liegen ganz nahe an dem Ptolemäischen Ablesungsfehler von 10′[2], und es ist zudem unsicher, ob die Beobachtungen richtig überliefert sind. Die weitere Prüfung der aufgestellten Ansicht muß also der Nachwelt überlassen bleiben.]

69. Kapitel. Untersuchung dreier Ptolemäischer Beobachtungen und Verbesserung der mittleren Bewegung und der Bewegung der Sonnenferne und der Knoten.

Aus dem Altertum sind uns insgesamt von den genauer aufgezeichneten Marsbeobachtungen nicht mehr als fünf erhalten. Außerdem hat noch eine und zwar die alleräIteste Aristoteles aufgezeichnet, der eine Bedeckung des Mars durch den zur Hälfte verfinsterten Mond sah. Aber er hat weder das Jahr noch || die Tagesstunde hinzugefügt. Ich fand jedoch *431.*
durch langwierige Rechnungen über 50 Jahre vom 15. Lebensjahre bis zum Lebensende des Aristoteles, es könne das einzig und allein am Abende des 4. April 357 vor der gewöhnlichen christlichen Zeitrechnung geschehen sein, während Aristoteles im Alter von 21 Jahren den Eudoxus hörte, wie aus Diogenes Laertius bekannt ist. Die zweite Beobachtung haben die Chaldäer || angestellt, und Ptolemäus hat sie uns gerettet.[3] Sie geschah im 324.
Jahre 272 v. Chr. am 18. Januar früh, und es bedeckte[4] dabei der Mars den nördlichen Stern in der Stirn des Skorpions. Hier ist wiederum keine genaue Zeitangabe hinzugefügt. Die übrigen vier hat Ptolemäus selbst ausgeführt, indem er mit dem Astrolabium die Stellung des Mars gegen die Fixsterne festlegte. Er gibt jedoch lediglich den Fixsternort an[5] und zwar genau zum Zeitpunkt der Opposition mit dem mittleren Sonnenorte. | Aus so wenig Beobachtungen sollen wir die Beweismittel für die wichtigsten Fragen entnehmen . . . Wir müssen zunächst mittels der vier Ptolemäischen Beobachtungen die Epoche der auf die Fixsterne bezogenen mittleren Bewegung suchen, wie sie der Zeit des Ptolemäus entspricht,

---

[1]) K. hat sich ja bereits früher (Kap. 33—36) der Drehung des Sonnenkörpers zur Erklärung des Umlaufs der Planeten um die Sonne bedient. Man beachte, daß noch zwei bis vier Jahre bis zur Entdeckung der Sonnenflecken und der wahren Sonnendrehung verfließen mußten. — [2]) K. begründet (O. o. III *438*) diese 10′ Ablesungsfehler durch die Bemerkung, Ptolemäus habe in seinem Fixsternverzeichnis den Abstand des Regulus von der Spica zu 54° 10′ angegeben, während er doch nur 53° 59′ betrage. — [3]) Claudii Ptolemaei Syntaxis Mathematica, edidit Heiberg, II 322. — [4]) Vgl. weiter unten im 70. Kap. die hiervon abweichende Ansicht K.s. — [5]) Ptolemaei Syntaxis (Heiberg), II 352.

und durch ihre Vergleichung mit den heutigen die mittlere Bewegung selbst festsetzen. Dann können wir möglicherweise mittels der Chaldäischen Beobachtung untersuchen, ob die Sonnenexzentrizität tatsächlich einst größer war als heute. Endlich könnten wir mit ihr und mit der Aristotelischen, wenn uns ihr Zeitpunkt bekannt wäre, eine Probe über die Marsbreite jener Zeiten anstellen. | Welchen Weg aber sollen wir, bei Gott! einschlagen? Ist uns doch fast nichts von Ptolemäus gegeben, das wir nicht mit vollem Rechte eher anfechten als zur Gewinnung wirklich genauer Ergebnisse benutzen könnten.

324-333; *431-439.* [K. kritisiert Ptolemäus' Beobachtungsverfahren und fällt schließlich das Urteil, es könne nur sehr fehlerhafte Ergebnisse geliefert haben.[1] Daran könne auch Ptolemäus' Versicherung, er habe seine Beobachtungen mehrmals wiederholt, nichts ändern. Die hauptsächlichsten Fehlerquellen sind nach K. falsche Zeitbestimmung und Benutzung von Instrumenten mit großen Fehlern (besonders durch die Strahlenbrechung). Dadurch wachsen die Fehler bei der Deklination und der Erdferne der Sonne bis auf 8′, bei dem Zeitpunkt der Nachtgleichen oder der Sonnenwenden bis auf 3 Stunden, ja auf $^1/_4$ Tag an. Diese Fehler übertragen sich natürlich auf den Mars, ja sie werden dort unter Umständen noch größer, da Ptolemäus zur Bestimmung des Fixsternortes des Mars noch den Mond mit hereinziehen und somit die Sonne nahe am Horizont beobachten mußte, wo die Strahlenbrechung Fehler lieferte, die Ptolemäus entgingen. So sind die sogenannten akronychischen Marsörter des Ptolemäus keine solchen, sondern der Mars steht noch etwa $\frac{1}{2}^0$ vom Gegenorte der wahren oder der mittleren Sonne entfernt. Seine Bewegung ist sonach noch mit der zweiten Ungleichheit behaftet, kann also nicht zur genauen Bestimmung der ersten dienen. Dadurch aber ändern sich die Erdferne und die Exzentrizität des Mars ab. — Je nachdem nun die Exzentrizität der Sonne, ihre Erdferne und der Fixsternort des Mars beibehalten oder in den vermutlich richtigen Wert umgeändert wird, ergeben sich für K. acht Berechnungsverfahren zur Verbesserung der mittleren Bewegung und der Bewegung der Sonnenferne und der Knoten der Marsbahn. Er führt sie an dreien von den Ptolemäischen Beobachtungen durch, findet aber kein Ergebnis, auf das sich ein sicheres Urteil gründen ließe. — Durch Vergleichung zweier Sonnenbeobachtungen Ptolemäus' und Tycho Brahes bestimmt schließlich K. noch die mittlere Bewegung der Sonne in der Zwischenzeit.]

70. Kapitel. Untersuchung der beiden übrigen Beobachtungen des Ptolemäus zur Festlegung der Breite und des Verhältnisses der Kreise.

334-337; *439-442.* [Zur Bestimmung des Kreisverhältnisses benutzt Ptolemäus in seiner Syntaxis eine ganz ungeeignete, weil zu nahe an der Opposition gelegene Stellung des Mars; wächst doch dort, wie K. nachweist, ein Fehler von 2′ im exzentrischen Marsorte auf einen solchen von 7′ im wahren Orte an. Da nun bei einer solchen Stellung ein Fehler in der Exzentrizität ohne merklichen Einfluß ist, so greift K. auf jene Chaldäische Beobachtung zurück, bei der „der morgendliche Stern des Ares zur nördlichen Stirn des Skorpions hingestellt zu sein schien". K. führt die Rechnung erst mit der Ptolemäischen und dann mit der Braheschen Exzentrizität und Gleichung durch und findet hinreichende Übereinstimmung der Kreisverhältnisse. Er meint daher, Ptolemäus habe zweifellos nicht die erstgenannte, sondern die Chaldäische Beobachtung zur Feststellung des Kreisverhältnisses benutzt und jene nur deshalb vorgeschoben, um scheinbar verschiedene Größen auf verschiedene Beobachtungen zu

[1]) K. mißtraut der Gewissenhaftigkeit Ptolemäus' nicht nur betreffs der Ausführung, sondern sogar betreffs der Überlieferung seiner Beobachtungen. (Vgl. u. a. O. o. III *437*.)

stützen; die Chaldäische Beobachtung habe ihm aber auch zur Bestimmung der mittleren Bewegung dienen müssen, daher habe er die andre Beobachtung erst nachträglich eingesetzt. — K. sucht nun den unbestimmten Ausdruck „zur nördlichen Stirn des Skorpions hingestellt"[1] in einen bestimmteren zu verwandeln, indem er die möglicherweise in Betracht kommenden Sterne und Stellungen der Reihe nach in die Rechnung hereinzieht. Er muß aber schließlich bekennen, seinen Scharfsinn umsonst aufgewandt zu haben, da verschiedene Sterne und Stellungen der ungenauen Rechnung genügen. Für die Schätzung der Breite und des Kreisverhältnisses ist also diese Chaldäische Beobachtung wertlos. Doch zieht K. den Wahrscheinlichkeitsschluß, das Kreisverhältnis sei heute noch dasselbe wie zu Ptolemäus' Zeit, die größten Breiten aber hätten sich etwas geändert.[2]]

[1]) ἐδόκει προστεθεικέναι τῷ βορείῳ μετώπῳ. — [2]) Schon im 69. Kap. (O. o III *432*) spricht K. aus, es liege kein hinreichender Grund für die Annahme vor, das Kreisverhältnis sei heute ein andres als zu Ptolemäus' Zeiten. Daß die Astronomie unsrer Tage, die ja über ein ungeheuer mannigfaltigeres theoretisches und praktisches Rüstzeug verfügt, andrer Ansicht ist, braucht wohl nicht weiter erörtert zu werden. — Auf der beigegebenen Figurentafel sind leider zwei Figuren in unrichtiger Lage abgedruckt worden. Der Verfasser bittet, diese Unbequemlichkeit zu entschuldigen.

Schluß.

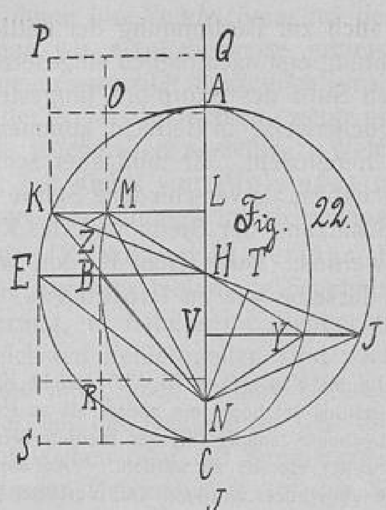
Fig. 22.
P
Q
A
O
K
M
L
Z
E
B
H
T
V
Y
J
R
N
S
C

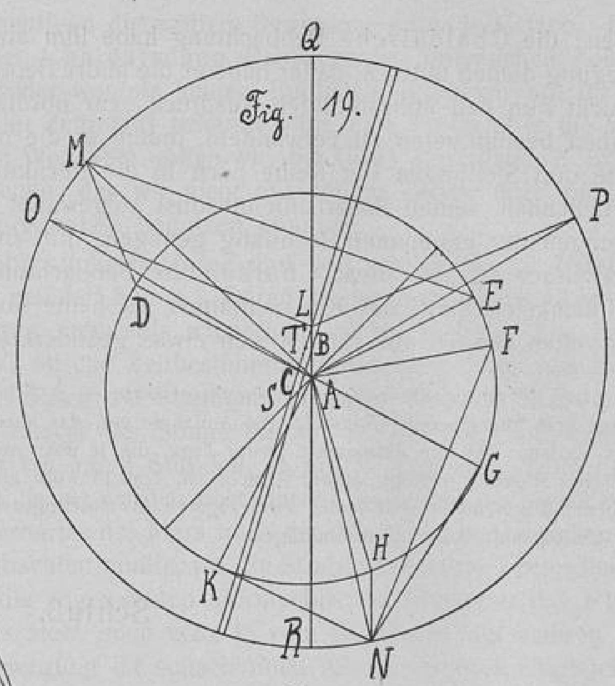
Fig. 19.
Q
M
O
P
D
L
E
T
B
F
S
C
A
G
H
K
R
N

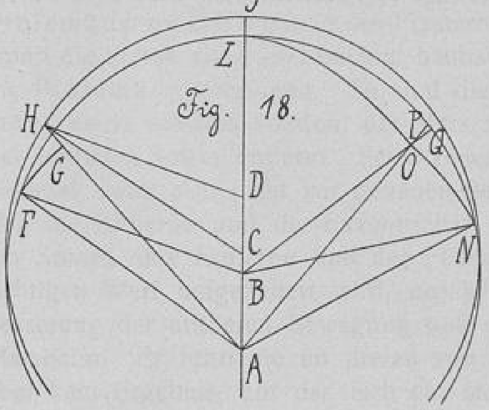
Fig. 18.
J
L
H
G
F
D
P
Q
O
C
N
B
A

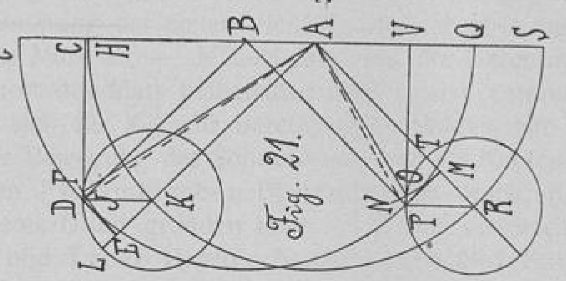
Fig. 21.
G
C
H
B
A
V
Q
S
D
I
J
K
E
L
N
O
T
M
P
R

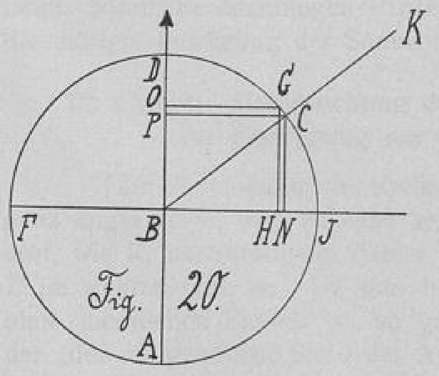
Fig. 20.
K
D
O
P
G
C
F
B
H
N
J
A

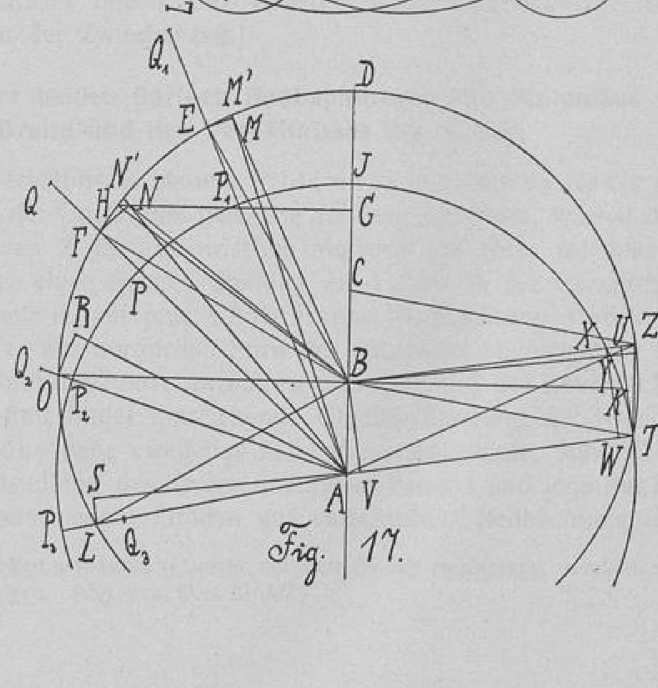
Fig. 17.
L
Q_1
D
E
M'
M
N'
H
N
J
P_1
G
Q'
F
P
C
R
X
U
Z
Q_2
O
P_2
B
Y
K
W
T
S
A
V
P_3
L
Q_3

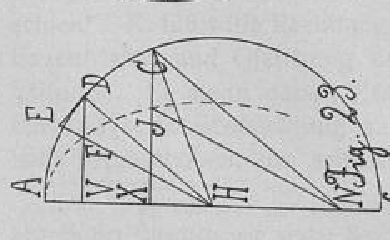
Fig. 23.
A
E
D
G
V
F
X
J
H
N
C