Flächen des ersten, und der der vier andern Würfel bilden mit den Kanten des ersten zwei Gattungen Winkel; die einen sind gleich 45°; die andern haben zur Tangente ½."

Es ist keine genaue Bezeichnung, wenn F. Engel das dargestellte Gebilde eine „Verbindung von fünf Würfeln" nennt; unser Haloederstern ist die Verbindung von fünf Würfeln, jene Fig. 41 aber muß, wie oben erörtert worden, als eine Verbindung von vier Würfeln mit Einem bezeichnet werden, und zwar mit Einem, der lediglich als Hilfswürfel zu betrachten ist, so daß es belehrender gewesen wäre und auch zum Vorteil der Zeichnung gereicht haben würde, wenn der Verfaßer den Hilfswürfel A weggelaßen und bloß den Rhomboederstern gezeichnet hätte.

Bemerkungen
zur
geometrischen Bezeichnungsmethode.

1. Seit Carnot (1803) der Geometrie der Größe eine Geometrie der Lage gegenüberstellte und beide im Interesse der Analysis mit einander in Einklang zu bringen suchte, ist nicht nur je länger je mehr das Bedürfnis einer größeren Genauigkeit in der Bildung und Anwendung der Sprache der Geometrie fühlbar geworden, sondern Terminologie und Bezeichnungsmethode haben auch in originalen Lehrbüchern dieser Wißenschaft manche Verbeßerung erfahren; die neuere Geometrie ist geschäftig, sich mit der Euklidischen in dieser Beziehung aus einander zu setzen, resp. deren Härte und Unbeholfenheit zu überwinden. Was die Terminologie betrifft, so war A. Tellkampf in seiner Vorschule (1829) der erste, welcher dem Unterricht einige Neuerungen zuführte: er nahm von Münchow (1826) die Definition des Winkels als Größe der Drehung 2c. auf und gab zuerst die allein richtige Definition der Aehnlichkeit; das Scheibertsche Lehrbuch (1834) brauchte bei der Definition des Winkels das ebenfalls von Münchow vorgeschlagene Wort Schwenkung, nahm von Steiner (1832) die Unterscheidungen von Linie (Gerade), Stral und Strecke auf, folgte aber weder Gergonne (1826) noch A. Tellkampf in Beziehung auf die Definition der Aehnlichkeit. Eine neue Reihe von Lehrbüchern beginnt mit dem von J. H. T. Müller (1844), welches sich keinem Einfluße der neueren Geometrie verschließt, die Geometrie der Lage überall mit der des Maßes verwebt und an Schärfe der Definition und Genauigkeit der Terminologie alle früheren übertrifft; dankenswerthe Neuerungen sind der Ausdruck Kreuzen für das Verhältnis der Lage zweier Geraden, die nicht in derselben Ebene liegen, und der Name Keil für die Größe der Drehung einer Ebene um eine feste Gerade.

2. Wenn die Lage eines Punktes zu einer Linie bestimmt werden soll, ist vor Allem nöthig, daß angegeben werden könne, an welcher Seite der Linie er liegt. Ist eine Linie in einer Fläche gezeichnet, so hat sie zweierlei Seiten: die eine Art teilt sie mit den Seiten der Fläche, nämlich eine vordere und eine hintere Seite; die andere Art bestimmt sich durch die beiden Teile der Fläche, in welche diese durch die Linie zerfällt. Diese letzteren beiden Seiten, um die es sich in der Regel allein handeln wird, schlage ich vor, die linke und die rechte zu nennen und dabei ganz nach der Anweisung zu verfahren, welche uns die Geographie für die Bestimmung der linken und rechten Seite eines Flußes gibt. Der einfachste Fall ist der des Strals, weil mit diesem Worte eine Gerade bezeichnet wird, welche von einem gegebenen Punkte ausgeht und dadurch also in ihrer Richtung bestimmt ist; für eine Gerade, welche von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einem in unmeßbarer Entfernung liegenden Punkte herkommt und an einem gegebenen Punkte endigt, also für einen rückwärts gehenden Stral, haben wir noch keine Benennung. In allen anderen Fällen setze man zwei Punkte in der Linie und bezeichne dieselben mit Buchstaben, oder benutze zwei schon bezeichnete, und nehme an, daß die Linie den Punkt, bei welchem der im Alphabet früher kommende Buchstab steht, früher durchlaufen habe, denn den anderen, bei welchem der Buchstabe steht, der im Alphabet erst nach jenem folgt; dann ist durch ab oder dg, oder wie die zwei Buchstaben heißen mögen, nicht nur die Linie benannt, sondern auch der Lauf derselben und ihre rechte und linke Seite vollkommen bestimmt.

3. Das Wort Seite hat in der Geometrie zweierlei Bedeutung: wir brauchen es in dem eben angegebenen Sinne, den es in der Sprache des Lebens hat, und reden von der inneren und äußeren Seite des Schenkels eines Winkels, von der inneren und äußeren Seite einer Kreißlinie, einer Kugelfläche u. dgl.; und wir brauchen es für gewisse Teile des Umfangs einer Figur und reden von den Seiten eines Dreiecks, eines Prismas, einer Pyramide u. dgl. Ohne Zweifel ist die erstere Bedeutung die ursprüngliche und die letztere aus ihr abgeleitet: Seiten eines geometrischen Gebildes sind ursprünglich nichts anderes denn Seiten eines Gebäudes, Gegenden, nach welchen die Figur hingerichtet ist. Das Dreieck abc hat drei Seiten, aber die Strecken ab, ac und bc sind nicht diese Seiten, sondern sie bezeichnen dieselben nur: das Dreieck hat gerade so drei Seiten, wie man sagt, daß jedes Ding zwei Seiten habe. Genauer hat das Dreieck drei innere und drei äußere Seiten nach den Seiten der drei Strecken, die es bilden. Aber wir nehmen das Wort für die Strecke selbst und bringen uns dadurch in die übele Lage, von der innern und äußern Seite einer Seite reden zu müßen, sowohl an den ebenen Figuren als an dem pyramidalen und prismatischen Raume. Sollte es nicht rathsam sein, dem Worte bloß die eine Bedeutung, die des gemeinen Lebens, zu laßen und für dasselbe in der andern Bedeutung ein anderes Wort zu wählen?

Ich schlage Kante vor. Anfangs erschrickt man vor der concreten Bedeutung eines Wortes, das bestimmt sein soll, eine bloß formelle zu übernehmen; allein so gieng es mit allen Wörtern dieser Art und geht uns bei unsern Schülern bis auf den heutigen Tag so: an was alles denken die jungen Knaben, wenn ihnen in der Geometrie das Wort Winkel zuerst begegnet, hier an Kramläden, dort an das, was zwei Wände mit einander bilden, was J. H. T. Müller Keil nennt. Der Gebrauch des Wortes Kante in der Stereometrie ist nur scheinbar hinderlich.

4. Eine gute geometrische Bezeichnungsmethode muß folgende Bedingungen erfüllen:

a) Sie muß, in einer Wißenschaft, die mehr denn jede andere den Charakter exacter Bewegung und Gestaltung hat, alles Schwankende, in einer Wißenschaft, die mehr denn jede andere eine Wißenschaft der Ordnung ist, alle Willkühr ausschließen.

Die Hand freilich ist durch nichts gehindert, an diesen Punkt einen großen, an jenen einen kleinen Buchstaben zu setzen, mit demselben Buchstaben das einemal einen Punkt, das anderemal eine Linie zu bezeichnen, die Buchstaben nach Belieben aus den verschiedensten Regionen des Alphabets herbeizuholen: die Hand ist hieran durch nichts gehindert, aber der Verstand sollte es sein.

b) Eine gute Bezeichnungsmethode muß einerseits alle Mittel, die ihr zu Gebote stehen, benutzen, andererseits haushälterisch mit denselben umgehen und mit wenigen Mitteln viel zu erreichen suchen.

Freilich, eine lange Gewöhnung an einseitige Bezeichnungsmittel kann sich gegen die Benutzung anderer sträuben und es unbegreiflich finden, wenn sie hört, daß Steiner kleine deutsche Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten, Paucker (in seiner herlichen Bildlehre) gar Ziffern zur Bezeichnung von Linien verwendet: die Gewöhnung kann sich sträuben, aber Verstand und Studium sollten die Gewöhnung überwinden.

5. Zu bezeichnen sind Punkte, Linien, Flächen und Körper; als Bezeichnungsmittel bieten sich vier Alphabete dar, die in folgender Weise verwandt werden können:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a) die kleinen deutschen Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten,
b) die kleinen lateinischen zur Bezeichnung von Linien,
c) die großen deutschen zur Bezeichnung von Flächen,
d) die großen lateinischen zur Bezeichnung von Körpern.

Punkte mit kleinen deutschen Buchstaben und Linien mit kleinen lateinischen zu bezeichnen hat nach Steiners Vorgange, dem J. H. T. Müller gefolgt, nichts Auffallendes mehr; Müller bedient sich auch großer Buchstaben zur Bezeichnung von Flächen und redet von einer Geraden a, die senkrecht auf einer Ebene B stehe u. dgl. Aber ich habe drei Wünsche: der erste, daß die genannten Männer in der Anwendung ihrer Methode consequenter sein möchten; der andere, daß eine gute Bezeichnungsmethode dieser Art in den geometrischen Lehrbüchern allgemein werden möchte; der dritte, daß mein Vorschlag, die deutschen großen Buchstaben zur Bezeichnung von Flächen, die großen lateinischen zur Bezeichnung von Körpern zu verwenden, Beifall und Aufnahme finden möchte.

6. In der vorgeschlagenen Weise wird jedem der vier Elemente, um mich dieses Ausdrucks zu bedienen, das Recht gewahrt, unmittelbar bezeichnet zu werden, und vermieden, daß zwei an sich verschiedene Elemente, wie Punkte und Linien, einerlei Zeichen bekommen. Dieser Methode unmittelbarer Bezeichnung steht die ältere der mittelbaren gegenüber, wo lediglich an die Punkte Buchstaben gesetzt und durch Verbindung dieser Buchstaben die Linien, Flächen und Körper bezeichnet werden, welche zwischen den Punkten liegen. Die unmittelbare Bezeichnung schließt die mittelbare nicht aus; es ist unter Umständen durchaus nicht angemeßen, kaum ausführbar, Strecken oder Bogen oder Flächenteile in einer Figur unmittelbar zu bezeichnen, sondern einfach geboten, die Buchstaben der Punkte zu brauchen, zwischen denen sie liegen. Allein die unmittelbare Bezeichnung muß überall angewandt werden, wo es möglich erscheint: das Auge sieht dem Zeichen ohne Weiteres an, ob von Punkten oder von Linien oder von Flächen oder von körperlichen Räumen die Rede ist, die Beziehungen der Glider und Teile einer Construction zu einander bekommen einen einfachen Ausdruck, wodurch es dem äußeren und dem inneren Auge möglich wird, sie leichter aufzufinden, und dem Gedächtnis, sie fester zu behalten.

Wie vereinfacht sich der Ausdruck aller Beziehungen zweier Kreiße zu einander, deren Mittelpunkte a und b heißen, wenn ich nun die Kreißlinien **a** und **b**, die Kreißflächen A und B nenne.

Wie einfach ist der Ausdruck des ersten Doppelsatzes, der in der Geometrie vorkommt, wenn ich sage:

zwei Punkte a und b verbinden sich in Einer Geraden **c**,	zwei Gerade **a** und **b** verbinden sich in Einem Punkte c.

Bei der Bezeichnung des Dreiecks ist es Gebrauch, die Seiten mit denselben Buchstaben, nur aus einem andern Alphabet, zu benennen, welche an den gegenüberliegenden Ecken stehen: es heißt als Dreieck a b c, als Dreiseit **a b c**. Die anderen Figuren erfordern eine andere Behandlung, da man nur bei denen, die eine ungerade Anzahl Ecken haben, so verfahren könnte, wie beim Dreieck, aber ohne denselben Nutzen. In dem Fall, wo die Ecken einer Figur nach der einen oder der andern Seite herum mit Buchstaben bezeichnet sind, die nach dem Alphabet auf einander folgen, scheint es mir das Einfachste, jede Seite mit dem Buchstaben derjenigen Ecke zu bezeichnen, von welcher sie ausgeht; stehen also an den Ecken der Reihe nach die Buchstaben a, b, c, d..., so heißt die Seite, welche von a nach b geht, **a**, die von b nach c geht, **b** u. s. w. Wäre dann der Beweis zu führen, daß die Summe der Nebenwinkel aller Winkel einer ebenen Figur = 4 R sei, so würden die Stralen, welche man von einem beliebigen Punkt aus parallel den Seiten der Figur zu ziehen hat, mit denselben Buchstaben bezeichnet werden können, welche an den Seiten stehen, wenn man will, mit accentuieren, zur Unterscheidung.

7. Schon Carnot bedient sich bei zwei correlativen Systemen von Punkten beidemal derselben Buchstaben, das einemal „bloß accentuiert, um ihren Unterschied unter einerlei Benennungen beizubehalten."

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Die Erfahrung hat gelehrt, daß es beßer sei, den Accentstrich als die Ziffer 1 oder I zu faßen, so daß dem a^1 ein a^2, a^3, a^4..., dem a^{I} ein a^{II}, a^{III}, a^{IV}... folgen darf.

Wie einfach vergleichen sich zwei Dreiecke mit einander, wenn man das eine D^1, das andere D^{II} nennt und demzufolge die Ecken des einen mit a^1, b^1, c^1, des andern mit a^{II}, b^{II}, c^{II}, die Seiten des einen mit a^1, b^1, c^1, des andern mit a^{II}, b^{II}, c^{II} bezeichnet. Die Behandlung der Congrüenz- und Aehnlichkeits-Sätze wird dadurch erleichtert, und für die Sätze von dem Verhältnis des Flächeninhalts werden die Grundlinien wieder beziehungsweise g^1 und g^{II}, die Höhen h^1 und h^{II} genannt werden können. Beidemal oder, falls mehr denn zwei Figuren in dieser Weise behandelt werden, jedesmal Marken verwenden ist passender, denn bei der einen Figur die reinen Buchstaben und bloß bei den andern markierte setzen, weil dann der Gebrauch des reinen Buchstaben für das zusammenfaßende Sprechen vorbehalten bleibt: vergleichen wir die Seiten a, die Ecken b mit einander u. dgl.

Geht man weiter und läßt zu, daß die Marken an den Buchstaben wieder Buchstaben seien, so können dadurch noch andere Verhältnisse der Lage sehr einfach bezeichnet werden. Nehmen wir z. B. an, es giengen durch jede der zwei Ecken a und b einer Figur eine Transversale hindurch, so wird die eine sehr wohl mit t^a, die andere mit t^b bezeichnet werden können; oder es entspricht einer Ebene an dem Körper A einer Ebene an dem Körper B, so wird jene die Bezeichnung E^a oder E^A, diese die Bezeichnung E^b oder E^B bekommen, wo die Marke sich wieder auf eine Linie oder auf einen Punkt des Körpers und dadurch auf diesen selbst bezieht; oder es werden mehrere Kugeln A, B, C... auf einander bezogen, so werden die Radien derselben r^A, r^B, r^C... heißen. Und dgl. m.

8. Daß die mittelbare Bezeichnung nicht ausgeschloßen werden darf, sieht man an der Bezeichnung des Winkels. Die unmittelbare ist die herkömmliche durch einen griechischen Buchstaben, und zwar durch den, welcher dem an der Spitze des Winkels stehenden Buchstaben entspricht, so daß die Winkel eines Dreiecks, an dessen Ecken die Buchstaben a, b, c stehen, in derselben Ordnung α, β, γ heißen. Gehen von einem Punkte a mehrere Stralen f, g, h, i... aus, so können sämtliche einfache Winkel mit α bezeichnet werden, nämlich mit α^1, α^2, α^3.... Die mittelbare geschieht durch Nennung der Schenkel des Winkels; in dem eben angenommenen Falle würden wir fg für α^1, gh für α^2, hi für α^3 haben, oder, wenn jeder der Stralen durch zwei Buchstaben bezeichnet würde, f durch af, g durch ag, h durch ah, i durch ai, in doppelt vermittelter Weise fag für fg oder α^1, gah für gh oder α^2, hai für hi oder α^3. Die letztere Methode ist die kostspieligste für das Auge, was Zeit und Mühe betrifft, für die innere Veranschaulichung und Festhaltung einer Construction die beschwerlichste. Gleichwohl wird es Fälle geben, wo man sich ihrer bedienen muß: zusammengesetzte Winkel, dort zwischen den Stralen f, g, h und i, wird man nicht mehr mit einem einfachen griechischen Buchstaben bezeichnen dürfen, wir werden dieselben dort fh, fi, gi oder fah, fai, gai nennen müßen.

Was von den Winkeln gilt, gilt auch von den Keilen. Ihre unmittelbare Bezeichnung würde am besten durch große griechische Buchstaben geschehen; da diese aber zum Teil, und gerade die beiden ersten, mit den großen lateinischen übereinstimmen, so wird man auf ihre Anwendung verzichten und entweder zu einer mittelbaren Bezeichnung der Keile greifen oder dem Buchstaben der betreffenden Kante ein Zeichen beifügen müßen, welches die Bestimmung hat, Keil zu bedeuten. Die mittelbare Bezeichnung geschieht durch Nennung der beiden Ebenen, die sich in der Kante schneiden; heißen die Ebenen F und G, so heißt der Keil FG. Als Zeichen für Keil bedient sich J. H. T. Müller (Stereometrie, 1851) des Circumflexes über dem Buchstaben der Kante, so daß, wenn jene Ebenen F und G sich in der Geraden a schneiden, der Keil, den sie bilden, das Zeichen $\hat{a}$ bekommen würde. Gehen mehrere Ebenen F, G, H, J... von der Geraden a aus, so wird man für die einfachen Keile FG, GH, HJ beziehungsweise $\hat{a}^1$, $\hat{a}^2$, $\hat{a}^3$... schreiben dürfen, die zusammengesetzten aber nicht anders denn mit FH, FJ, GJ... bezeichnen können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Dem äußern wie dem innern Auge, die sich in einer Zeichnung zurechtfinden sollen, muß besonders durch eine gute **Verwendung** der Bezeichnungsmittel geholfen werden. Unter einer guten Verwendung verstehe ich zweierlei. Das eine ist, daß den Buchstaben, die man benutzt, Beziehungen auf einander gegeben werden, welche den in Betracht kommenden Beziehungen der Construction entsprechen. Mehrere der oben angeführten Beispiele eignen sich auch hier; ich will aber andre geben.

Es sollen die Sätze gedacht werden, welche gelten, wenn die Schenkel eines Winkels durch zwei parallele Gerade geschnitten werden. Ich nenne die Schenkel des Winkels $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, die beiden Parallelen $\mathbf{c}$, so daß $\mathbf{c}^1$ die dem Scheitelpunkt $\mathfrak{o}$ nähere, $\mathbf{c}^{II}$ die entferntere ist; $\mathbf{c}^1$ schneidet die beiden Schenkel in $\mathfrak{a}^1$ und $\mathfrak{b}^1$, $\mathbf{c}^{II}$ in $\mathfrak{a}^{II}$ und $\mathfrak{b}^{II}$, und in weiterm Zusammenhang damit heißen die von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke, vom Scheitelpunkt angerechnet, $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^{II}$, $\mathbf{b}^1$ und $\mathbf{b}^{II}$. Hier ist alles mit wenigen Mitteln ausgerichtet; die Beziehungen der Construction sind durch die Beziehungen der Buchstaben auf einander wiedergegeben; auch der schwächste Schüler behält dieselben, ohne daß sein äußeres Auge eine Zeichnung sieht, und versteht die betreffenden Proportionen, die erwiesen werden sollen, mit jenen einfachen Mitteln auszudrücken:

$$\mathbf{a}^1 : \mathbf{a}^{II} = \mathbf{b}^1 : \mathbf{b}^{II}$$
$$\mathbf{a}^1 : \mathbf{a}^{II} = \mathbf{c}^1 : \mathbf{c}^{II}.$$

Dieß Beispiel, wo Strecken, die von einem gemeinschaftlichen Punkt ausgehen, durch diejenigen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, welche mit den deutschen Buchstaben an dem andern Endpunkte übereinkommen, führt mich auf ein andres. Ich entnehme dasselbe aus dem 1. Teil der Mechanik von J. J. A. Ide (1802) S. 23. An einer unbiegsamen geraden Linie $\mathfrak{ab}$ ziehen mehrere Kräfte in senkrechter Richtung, es soll der gemeinschaftliche Schwerpunkt $\mathfrak{c}$ in der Linie, nämlich der Punkt, an welchem die Summe jener Kräfte in entgegengesetzter Richtung angebracht ihnen allen das Gleichgewicht hält, gefunden werden. Nenne ich nun die Kräfte $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3 \ldots \mathbf{p}^n$, und bezeichne die Punkte, in welchen sie an der Linie wirken, mit $\mathfrak{d}$, so daß $\mathfrak{d}^1$ dem $\mathbf{p}^1$, $\mathfrak{d}^2$ dem $\mathbf{p}^2$, $\ldots \mathfrak{d}^n$ dem $\mathbf{p}^n$ zugeordnet ist, so werde ich die Entfernungen dieser Punkte $\mathfrak{d}$ von dem einen Endpunkt der Linie, wie $\mathfrak{a}$, mit $\mathbf{d}$ bezeichnen können, so daß $\mathbf{d}^1 = \mathfrak{d}^1\mathfrak{a}$, $\mathbf{d}^2 = \mathfrak{d}^2\mathfrak{a}$, $\ldots \mathbf{d}^n = \mathfrak{d}^n\mathfrak{a}$ ist. Nun ist die Bezeichnung so einfach als die Sache selbst ist, die Beziehungen sind leicht zu übersehen und zu behalten und demgemäß auch der Satz, daß $\mathbf{c}$, nämlich $\mathfrak{ca}$,

$$= \frac{\mathbf{p}^1\,\mathbf{d}^1 + \mathbf{p}^2\,\mathbf{d}^2 + \mathbf{p}^3\,\mathbf{d}^3 \ldots + \mathbf{p}^n\,\mathbf{d}^n}{\mathbf{p}^1 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \ldots + \mathbf{p}^n}.$$

Wie sehr es zu einer anschaulichen Darstellung gehört und der Vorstellungskraft hilft, wenn man Punkte, die in einer Linie liegen, mit dem Buchstaben benennt, welchen die Linie führt, das kann ein Beispiel aus der Stereometrie erläutern. Ein pyramidaler Raum werde von zwei Ebenen durchschnitten; es soll die Verwandtschaft der beiden Durchschnittsfiguren besprochen werden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Kanten des pyramidalen Raums der Reihe nach, links oder rechts herum, mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \ldots$, nennen jene beiden Ebenen $\mathfrak{E}^1$ und $\mathfrak{E}^2$, so daß $\mathfrak{E}^1$ die der Spitze $\mathfrak{o}$ des pyramidalen Raums näher gelegene ist; die Punkte, in welchen beide Ebenen die Kanten des pyramidalen Raums schneiden, werden mit den Buchstaben der Kanten und mit den Marken, welche die Buchstaben der beiden Ebenen haben, bezeichnet, also die, welche $\mathfrak{E}^1$ bildet, mit $\mathfrak{a}^1, \mathfrak{b}^1, \mathfrak{c}^1, \mathfrak{d}^1 \ldots$, die, welche $\mathfrak{E}^2$ bildet, mit $\mathfrak{a}^2, \mathfrak{b}^2, \mathfrak{c}^2, \mathfrak{d}^2 \ldots$. Wie einfach kann man nun von den einander entsprechenden Geraden, Stralen und Strecken beider Räume handeln: davon, daß $\mathfrak{a}^1\mathfrak{d}^1$ und $\mathfrak{c}^1\mathfrak{f}^1$ in der einen Figur und $\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}^2$ und $\mathfrak{c}^2\mathfrak{f}^2$ in der andern sich in Punkten schneiden, die mit der Spitze $\mathfrak{o}$ in eine Gerade fallen, u. s. w. von den Eigenschaften collinearer Figuren.

Ich führe noch ein Beispiel aus der Stereometrie an, um zu zeigen, wie durch eine geschickte Verwendung der Bezeichnungsmittel sich die Behandlung schwieriger Gegenstände vereinfacht. Das Tetraeder, welches bald als dreiseitige Pyramide, bald als Durchdringungskörper zweier Keile, bald als vollständiges Viereck im Raume, angesehen werden kann, teilt mit dem Dreieck die Eigenschaft ungleichartiger Gegenstücke, mit dem Viereck die Eigenschaft gleichartiger: je einer Fläche steht eine Ecke, je einer Kante eine Kante gegenüber. Heißen also die Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, so heißen die Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nennen wir die von $\mathfrak{d}$ aus nach den drei andern Ecken gehenden Kanten $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{c}^1$, so werden ihre Gegenkanten beziehungsweise $\mathfrak{a}^2$, $\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{c}^2$, die Keile der Kanten also $\hat{\mathfrak{a}}^1$ und $\hat{\mathfrak{a}}^2$, $\hat{\mathfrak{b}}^1$ und $\hat{\mathfrak{b}}^2$, $\hat{\mathfrak{c}}^1$ und $\hat{\mathfrak{c}}^2$ heißen. Dem Winkel, unter welchem sich zwei Gegenkanten kreuzen, geben wir den Namen der betreffenden Kanten und bezeichnen also die Kreuzungen $\mathfrak{a}^1\mathfrak{a}^2$ mit α, $\mathfrak{b}^1\mathfrak{b}^2$ mit β, $\mathfrak{c}^1\mathfrak{c}^2$ mit γ. Für die ebnen Winkel an den Ecken sind wir genöthigt, die nämlichen Buchstaben zu verwenden; da dieselben aber Marken bekommen, so unterscheiden sie sich dadurch von jenen reinen. Wir bezeichnen also die ebnen Winkel mit dem Buchstaben der Ecke, an der sie liegen, und geben diesem die Marke der Fläche, auf der sie liegen, und haben also

an der Ecke $\mathfrak{a}$ die Winkel α^b, α^c, α^d,
an der Ecke $\mathfrak{b}$ die Winkel β^a, β^c, β^d,
an der Ecke $\mathfrak{c}$ die Winkel γ^a, γ^b, γ^d,
an der Ecke $\mathfrak{d}$ die Winkel δ^a, δ^b, δ^c.

Die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenkanten bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{b}^0$, $\mathfrak{c}^0$ und die Winkel, unter denen sie sich schneiden, $\mathfrak{b}^0\mathfrak{c}^0$ mit α^0, $\mathfrak{c}^0\mathfrak{a}^0$ mit β^0, $\mathfrak{a}^0\mathfrak{b}^0$ mit γ^0. Die Neigungswinkel der an einer Ecke liegenden Flächen und Kanten gegen einander und gegen die Stralen, welche aus diesen Ecken normal auf die Gegenfläche und nach deren Schwerpunkt gezogen werden, können nur mittelbar bezeichnet werden.

Ich habe dieses Beispiel aus J. H. T. Müllers „Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der Tetraedrometrie", Halle 1852. Seite 307 entnommen, und überlaße es dem Leser, sich daselbst weiter sowohl von der einfachen und klaren Entwickelung als der anschaulichen Symbolisierung der Sätze, welche auf dem Grunde dieser Bezeichnung möglich wird, zu überzeugen.

10. Unter einer guten Verwendung der Bezeichnungsmittel verstehe ich zweitens eine ordinale, chronologische: was bei einer Construction zuerst gesetzt wird oder sich zuerst bildet, bekommt auch den ersten Buchstaben des Alphabets, und so der Ordnung nach weiter. Unter der Voraussetzung einer so geschehenen Bezeichnung ist es möglich, auch in einem fertig vorliegenden Gebilde seine Entstehung und den Gang seiner Entwicklung zu erkennen und zu verfolgen. Während es gar nichts für sich haben kann, in der Setzung der Zeichen willkührlich zu verfahren, ist der Nutzen einer ordnungsmäßigen Bezeichnung für das Auge, für das Verständnis und für die Festhaltungs- und Wiederbildungskraft der Seele sehr groß. Das natürlich wird nicht Willkühr genannt werden dürfen, wenn in wohlüberlegter Weise Punkte oder Linien oder Flächen, die zu einem Gebilde hinzutreten und ein besonderes Verhältnis zu demselben bewahren, auch in auszeichnender, etwa den Anfangsbuchstaben des Wortes wiedergebender Weise benannt werden: eine Gerade $\mathfrak{g}$, eine Transversale $\mathfrak{t}$, die Leitlinie bei Kegelschnitten rc. $\mathfrak{l}$, eine Ebene $\mathfrak{E}$; so wird man sich für Punkte, von denen Stralen oder Vectoren an ein Gebilde ausgehen, constante Buchstaben reservieren, etwa die ferner liegenden $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$, um den vorangehenden Teil des Alphabets für die Beziehungen des Gebildes selbst beisammen zu behalten; man wird bei der Lehre von den Kegelschnitten die feste Bezeichnung $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ für die Axen, $\mathfrak{c}^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{c}^{\mathrm{II}}$ für die Brennpunkte vorziehen, und dergl.

11. Hiemit schließe ich, mit der Ueberzeugung einerseits, daß ich vielen Lehrern der Geometrie nichts Neues gesagt habe, daß sie es längst also oder beßer üben, andrerseits, daß ich manchen in willkommener Weise aufmerksam gemacht auf ein bis dahin von ihm mehr oder weniger vernachläßigtes Moment des geometrischen Unterrichts. Ich empfehle, unter herzlichen Grüßen zu dieser programmatischen Herbstzeit, die gemachten Vorschläge und Anträge besonders meinen teuren Freunden und Collegen J. H. T. Müller in Wisbaden und A. Tellkampf in Hannover, auch den thüringischen Herrn Collegen, Professor Dr. Unger in Erfurt und Professor Dr. Kunze in Weimar, dessen vortrefflichem Lehrbuche der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geometrie ich viel verdanke, zur Prüfung und gelegentlichen Begutachtung. Irre ich nicht, so eignet sich die Angelegenheit auch zu einer Besprechung in der Versammlung der Realschullehrer, und ich bitte, in dem Fall, daß ich wieder verhindert sein sollte, dieselbe zu besuchen, einen meiner Herren Collegen, sie daselbst in Anregung bringen zu wollen.

Elberfeld, den 5. August 1856.

P. W.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf