

Geometrische Untersuchungen.

- I. Darstellung sämtlicher Aufgaben des Tactionsproblems durch die Ponceletsche und Steinersche Lösung der allgemeinsten Berührungsaufgabe.
- II. Der Feuerbachsche Kreis in seinem Zusammenhange mit dieser Lösung.

I.

Der erste Teil der folgenden Arbeit ist lediglich aus Rücksicht auf die Bedürfnisse der Schule zusammengestellt. Doch möge es mir, ehe wir zu diesem speziellen Thema übergehen, gestattet sein, einige allgemeinere Bemerkungen vorzuschicken.

Die Thatsache, daß ein Buch wie die Geschichte der Civilisation in England von Buckle in deutscher Übersetzung jetzt in 6. Auflage vorliegt, giebt sicher zu denken. Sie zeigt, daß dieses von der wissenschaftlichen Fachkritik einmütig abgelehnte Werk bei den gebildeten Laien eines großen Ansehens und Einflusses sich erfreuen muß. Verrät dieser Umstand auf der einen Seite die geringe Verbreitung der Fähigkeit zu wirklicher geschichtlicher Auffassung, der das oben genannte Werk und die ganze Zeitrichtung, deren sprechender Ausdruck es ist, völlig ins Gesicht schlägt, so zeigt er auf der andern Seite den Einfluß einer zu geringen naturwissenschaftlichen Schulung. Diese beiden Thatsachen sind die Folgen eines sehr verwickelten Ursachen-Komplexes, von dem einen nicht geringen Teil die weite Verbreitung der Herbart'schen mechanischen Psychologie in Deutschland und der entsprechenden sensualistischen Systeme in England und Frankreich ausmacht, und von dem wir im folgenden nur eine der anderen Bedingungen, die allerdings mit der eben genannten in enger Wechselbeziehung steht, herausheben. Es kommt sehr auf den Sinn an, in welchem Naturwissenschaft getrieben und gelehrt wird; man kann zu wenig Kritik üben, wenn man nicht weiß, was die Naturforschung wirklich leisten kann, was nicht. Ein Teil der Anhänger jener Lehren kann als von naturwissenschaftlicher Halb-bildung angekränkt bezeichnet werden, die sich, unfähig zur Kritik, von allem gefangen nehmen läßt, was mit der gehörigen selbstbewußten Sicherheit vorgetragen wird; von dem andern Teile, der etwa die volle naturwissenschaftliche Bildung genossen hat, muß behauptet werden, daß er sie sicher nicht in der rechten Weise erhalten hat. Nur so ist es doch zu erklären, daß so weite Schichten sich in den blinden Glauben stürzen können, daß die lediglich mechanischen Gesetze der materiellen Natur ausreichen zur Erklärung aller geschichtlichen Erscheinungen innerhalb der Menschenwelt. Mechanik ist Mechanik und hat als solche einen sehr hohen Wert; Erweiterung der Mechanik aber auf alle organischen Gebiete und zuhächst auf diejenigen des geistigen Lebens der Menschheit ist eine Hypothese, die als solche aufstellen und verteidigen mag, wer sich dazu berufen fühlt. Daß aber diese Hypothese nicht als solche, sondern als ein neues

Evangelium der Wahrheit so allgemein gepriesen und gelehrt werden kann, ist ein krankhafter Zug der Zeit und man möchte mehr Augen wünschen, die zu sehen verständen, anstatt bloß ein äußerer Schein von Augen zu sein. In dieser Richtung haben die Realgymnasien für die Nation sicher eine wichtige Kulturaufgabe zu erfüllen: möglichst selbständig denkende Geister heranzubilden durch die richtig betriebene Naturforschung gegenüber den etwaigen Irrlehren innerhalb der Naturwissenschaft! Ein Geschlecht, gestählt in frühzeitigem selbständigen Sehen und Urteilen an den natürlichen Dingen, ein Geschlecht, das nicht mit Theorien überfüttert worden ist! Erreicht werden wird dieses Ziel ohne Zweifel nur, wenn gleichzeitig in der verwandten Fundamentalwissenschaft der unerschütterliche Grund gelegt worden ist, d. h. wenn die Köpfe von der frühesten Zeit an zum selbständigen mathematischen Denken angehalten und gebildet wurden, so daß es ihnen hier schon gleichsam zur zweiten Natur geworden ist.

Freilich besteht heute in gewisser Weise für die Mathematik selbst die große Gefahr, mechanisch zu werden, und mechanisch betrieben zu werden. Ich möchte eine prägnante Stelle jenes scharfsinnigsten Denkers des englischen Volkes hier citieren, dem niemand Sachverständnis absprechen wird, da er lange auch mathematische Studien betrieben hat und sogar einige Jahre am Anfange seiner Laufbahn in Edinburg mathematischer Lehrer war. Carlyle äußert sich in einem seiner Essays darüber so: „Die Wissenschaft unserer Zeit ist Physik, Chemie, Physiologie — vom mechanischen Gesichtspunkt aus betrachtet. Unsere Lieblingswissenschaft, die Mathematik, die hochgepriesene Erklärerin dieser anderen Wissenschaften, ist mehr und mehr mechanisch geworden. Eine hervorragende Stellung in den höheren Gebieten der Mathematik hängt jetzt weniger von der natürlichen Begabung, als von einer gewissen Erfahrung und Routine ab. Ohne die großartigen Resultate, zu denen ein Lagrange und Laplace mit diesen Hilfsmitteln gekommen ist, zu unterschätzen, müssen wir doch gestehen, daß der differentiale und integrale Kalkulus wenig mehr als eine höchst fein ersonnene arithmetische Mahlmühle ist, wo man die Faktoren auf der einen Seite hineinschiebt und wenn sie nachher zu dem gehörigen Produkte gemahlen sind, wieder erhält, ohne viel andere Mühe, als diejenige, die Mahlmühle eifrig gedreht zu haben. Wir haben mehr Mathematik als je, aber weniger Mathesis; Archimedes und Plato hätten nicht die *Mécanique céleste* lesen können, aber das ganze Institut Français ist seinerseits außer Stande, in dem Satze: ‚Gott verfährt nach geometrischen Regeln‘ etwas anderes als eine sentimentale Rodomontade zu sehen.“ — Es ist dasselbe Entwicklungsgesetz, welches wir auch in vielen anderen Fächern menschlicher Wissenschaft und Kunst beobachten können, und die Mathematik bildet durchaus keine Ausnahme: die Technik, die Routine tritt mehr und mehr an die Stelle des Erfindungsgeistes; glücklich, wenn sie ihn wenigstens nicht ganz verschlingt. Die Schule aber hat sich nicht an das Technische zu halten, sondern vor allem den Geist zu pflegen, der die Wissenschaft aus sich heraus geboren hat, und den wir hier in Übereinstimmung mit Carlyle Mathesis nennen. Mehr Mathesis ist, was uns not thut! Nur zu oft wird vor allem heut vergessen, daß die Geometrie eine Sachwissenschaft, die Algebra großenteils nur eine Formalwissenschaft ist; daß sie lediglich ein Instrument ist, die Geometrie aber ein Objekt für das Instrument. Hat doch in der letzten Zeit für manche die Algebra gar eine Art von metaphysischem Schlüssel zum Eingang dahinein, wohin keine Geometrie reicht, bilden sollen: in die ‚metamathematischen‘ Räume von vier und mehr Dimensionen! Ein ebenso verhängnisvoller Irrtum, wie auf dem Gebiete der Philosophie das Verkennen der Stellung der reinen Logik! Als ob auch diese mehr wäre, als ein bloßes Instrument des geschickten Ordners einmal erlangter objektiver Einsichten. Daher das Vergebliche der Versuche, durch endlose formalistische Begriffsspaltereien in den Besitz der Wahrheit zu gelangen, deren gänzliche Unfruchtbarkeit die heutige untergeordnete Stellung der Philosophie gegenüber der Naturforschung bewirkt hat. —

Lediglich technisch und mechanisch kann auch jedes andere Fach gelehrt werden, seien es alte oder neue Sprachen, sei es Geschichte oder selbst Religionslehre. Es kommt eben überall auf die Lehrer hierbei an und nicht auf den toten Buchstaben von Satzungen und Einrichtungen. Wenn man dies nicht so oft vergessen hätte, so wäre der heutige Streit um die höhere Schule mit seinen gegenseitigen Beschuldigungen niemals zu so akuten Formen gediehen, die ihn zu einem wenig erquicklichen Schauspiel machen. In jenem wahren Sinne betrieben, leistet ihrerseits die Mathesis — auch in erzieherlicher Hinsicht, was nach mancher Seite hin noch einer besonderen Betonung bedarf — voll das, was das Ziel aller wahren Pädagogik sein und bleiben muß:

alere flammam!

Von diesen allgemeinen Gesichtspunkten, die wir hier abbrechen müssen, da sie für sich Stoff zu einer eigenen Abhandlung bieten würden, findet sich der Übergang zu dem ersten Teil unseres Spezialthemas. Das Schwergewicht des mathematischen Unterrichts ist sicher in der Geometrie gelegen, sei es der reinen, sei es der durch Algebra gestützten (analytischen). Nur darf der Unterricht nicht selbst wieder in algebraische Gewohnheiten zurückfallen, nicht bloß in einem Einüben von Aufgabenschematen bestehen, unter die dann der Lernende jede Einzelaufgabe lediglich mechanisch zu subsumieren hat. Auf diesem Wege werden wir sicher nicht viel selbständig denkende Köpfe bekommen! Bestenfalls vielleicht einige Gehilfen, die mehr oder weniger geschickt an der „Mahlmühle“ mit zu drehen gelernt haben!

Am meisten werden zu selbständigem Denken anregen zusammenhängende Untersuchungsgebiete; damit erhält zugleich der Schüler einen Vorgeschmack von dem, was ihm später die Wissenschaft in ihren großen zusammenhängenden Untersuchungsobjekten vorführt. Als ein besonders vorzügliches Unterrichtsmaterial in dieser Hinsicht hat für die oberste Unterrichtsstufe in der Geometrie sicher die Berührungsaufgabe des Apollonius zu gelten. Diese spaltet sich bekanntlich in 10 Spezialfälle. Ein Kreis soll berühren:

	Punkte.	Linien.	Kreise.	
1)	3	—	—	und liefert 1 Lösung,
2)	2	1	—	» » 2 Lösungen,
3)	2	—	1	» » 2 »
4)	1	2	—	» » 2 »
5)	1	1	1	» » 4 »
6)	1	—	2	» » 4 »
7)	—	3	—	» » 4 »
8)	—	2	1	» » 8 »
9)	—	1	2	» » 8 »
10)	—	—	3	» » 8 »

Nur wird dieses Problem immer noch in der Weise behandelt, daß den alten Vietaschen Lösungen der breitere Raum dabei gegönnt wird; Aufgabe 10) wird auf 6), diese auf 3); 9) auf 5), diese auf 2); 8) auf 4), diese auch auf 2) zurückgeführt. Es wäre nun endlich Zeit, diese Lösungen völlig zu beseitigen; der ganze innere Zusammenhang der geometrischen Gebilde wird verhüllt und diese ganze Art der Darstellung kann gradezu als ein Beispiel dafür gelten, wie es nicht zu machen ist.

Nun ist in neuerer Zeit auch die Ponceletsche und Steinersche Lösung für die allgemeinste Aufgabe Nr. 10) in den Lehrbüchern berücksichtigt worden. Allein daneben findet sich der breitere Raum den alten Vietaschen Lösungen eingeräumt selbst in dem sonst so vorzüglichen Lehrbuche von Spicker (vergl. 17. Aufl., pag. 219—223), während von der Steinerschen allgemeinen Lösung nur behauptet wird, daß sie sich leicht durch alle Aufgaben durchführen lasse. Indes wird grade diese Behauptung hinfällig durch pag. 239 sich findende irrtümliche Äußerungen über einige spezielle Fälle der Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkte, welche die Durchführung unmöglich machen, wie unten gezeigt werden wird. Andererseits finden sich z. B. in der bekannten Aufgabensammlung von Gandtner und Junghans (3. Aufl., 2. Teil, pag. 165—172) eine größere Reihe verschiedener unzusammenhängender Lösungen bei jeder der 10 Aufgaben angegeben, während die im folgenden mitgeteilten sachgemäßen einfachsten Lösungen sich nicht darin finden. Es schien mir daher, neben dem Zwecke der Anregung des Schülers, wünschenswert, an diesem Orte die Frage zu besprechen, um diejenigen Herren Kollegen, welche gangbare Lehrbücher verfaßt haben, anzuregen, diese Lösungen endlich zu ihrem Rechte gelangen zu lassen und an Stelle der alten Vietaschen in die Lehrbücher an der betreffenden Stelle einzufügen, da mir nicht bekannt ist, daß die nachfolgende Durchführung des Problems in dieser Form schon anderweitig gegeben wäre.

Zwei Umstände scheinen mir bisher die Durchführung aufgehalten zu haben: einmal der Umstand, daß über die Begriffe von Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkten in den Spezialfällen noch einige Unsicherheit herrscht (vergl. Spicker pag. 239; siehe unten), sodann daß es an dem Grundgedanken gefehlt hat, welcher beim Vorschreiten zu den einfacheren Aufgaben von der kompliziertesten aus auch die Lösung entsprechend aus der Allgemeinlösung schrittweise zu vereinfachen gestattet, wobei es dann von besonderem Interesse sein wird zu beobachten, wie die bekannten Lösungen der einfachsten Aufgaben 2), 3) etc. doch in der allgemeinsten Lösung enthalten sind. Beide Punkte werden zunächst erledigt werden müssen. Vorausgesetzt wird als allgemein bekannt die allgemeine Ponceletsche Lösung resp. ihre Steinersche Modifikation; doch möge mit wenigen Worten hier zunächst an dieselben erinnert werden.

Die 8 Mittelpunkte der Berührungskreise liegen paarweise auf den Loten, welche vom Potenzzentrum C auf die 4 Ähnlichkeitsachsen von M_1, M_2, M_3 , nämlich $A_1 A_2 A_3, A_1 J_2 J_3, A_2 J_1 J_3, A_3 J_1 J_2$ gefällt werden; und zwar werden sie entweder mit Hilfe [des] Potenzkreises erhalten, indem durch dessen Schnitt z. B. mit M_1 die gemeinsame Sehne beider Kreise, der Schnitt dieser mit den 4 Linien $A_1 A_2 A_3$ etc. und durch die Tangenten von den 4 Schnittpunkten an M_1 die 8 Berührungspunkte auf M_1 gefunden werden, welche dann paarweise zu den entsprechenden Loten auf die betreffenden Ähnlichkeitsachsen zugeordnet sind und so durch ihre Verbindung mit M_1 die Mitten liefern; oder aber die 8 Berührungspunkte auf M_1 werden durch die Verbindung von C mit den 4 Polen der Linien $A_1 A_2 A_3, A_1 J_2 J_3$ etc. in bezug auf den Kreis M_1 erhalten und dann wie oben verfahren.

Es sind dann für unseren Zweck zunächst die Spezialisierungen der Ähnlichkeitspunkte und Potenzlinien der folgenden Kombinationen zu berücksichtigen; bei wenigen wird es weiterer Ausführung bedürfen; nur da, wo bisher etwas Irrfürliches angenommen wurde.

1) Kreis K und Linie L.

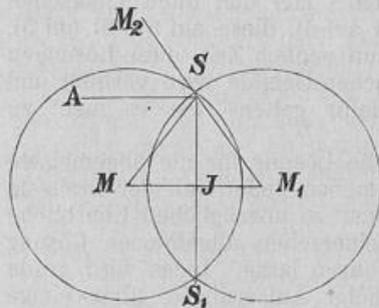
Die Ähnlichkeitspunkte sind die Schnitte des von K auf L gefällten Lotes mit dem Kreise K. Die Potenzlinie ist die Linie L selbst. Wichtig hierbei ist, daß (wenn auch von Gleichheit der Tangenten von einem Punkte der Potenzlinie aus nicht mehr gesprochen werden kann) doch der rechtwinklige Schnitt von Kreisen, die um Punkte von L mit der Tangente an K geschlagen werden, in bezug auf K und L erhalten bleibt.

2) Kreis K und ein Punkt P.

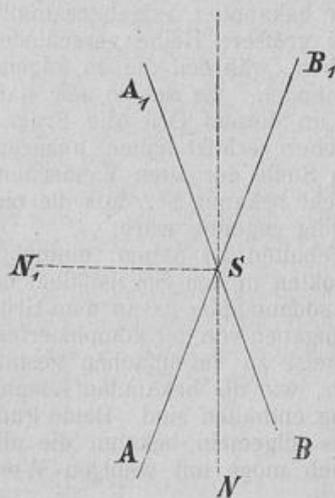
Beide Ähnlichkeitspunkte fallen mit P zusammen. Die Potenzlinie ist die durch die Mitten der von P an K gelegten Tangenten gehenden Geraden und der Ort für die Mitten aller Kreise, die durch P gehen und K rechtwinklig schneiden.

3) Linie und Linie.

Hierbei macht nun Spieker die mir unerfindliche Bemerkung: „die Chordale zweier Geraden ist eine unbestimmbare Gerade durch ihren Schnittpunkt; die Ähnlichkeitspunkte zweier gerader Linien sind unbestimmbar“ (vergl. pag. 239, 16e und 17e).



Offenbar müssen die beiden Geraden als Grenzfall zweier gleich großer sich schneidender Kreise angesehen werden, für $r = \infty$. Für zwei solche Kreise ist die Potenzlinie SS_1 (wegen $MS = M_1S$) offenbar die Halbierungslinie des Winkels MSM_1 ; außerdem tritt hier noch eine besondere Eigenschaft aller Punkte der Potenzlinie ein: daß sie von den beiden Kreisperipherien, sobald die Strahlen nach M und M_1 gezogen werden, gleichen Abstand haben. In diesem besonderen Falle ist somit die Potenzlinie zugleich der Ort für die Mitten der die beiden Kreise gleichartig berührenden (sowohl beide ausschließenden, als einschließenden) Kreise. Außerdem ist noch bemerkenswert, daß der eine Ähnlichkeitspunkt J. auf SS_1 liegend, die Mitte von MM_1 ist und daß der äußere Ähnlichkeitspunkt A im Unendlichen in der Richtung \parallel zu MM_1 , d. h. \perp zu SS_1 sich befindet.



Nun kann der Übergang zu den sich in S schneidenden Linien auf doppelte Art geschehen. Entweder gehen M und M_1 beide in der Richtung SM und SM_1 ins Unendliche, oder in der Richtung SM und SM_2 , der Verlängerung von SM_1 nach der andern Seite (die übrigen noch möglichen Kombinationen ergeben gleichwertiges). Im ersteren Falle ist die Halbierungslinie von ASB die Potenzlinie und die Ähnlichkeitspunkte sind in den Richtungen SN und SN_1 zu suchen im Unendlichen; oder es ist im zweiten Falle SN_1 die Potenzlinie, während für die Ähnlichkeitspunkte dasselbe zu sagen ist, wie vorher. Es treten also hier nicht etwa 2 Potenzlinien auf, sondern die Linien lassen sich in 2facher Weise als unendlich groß gewordene gleichgroße Kreise auffassen und darum sind 2 Fälle von Potenzlinien möglich. Wenn man dies Verhältnis nicht genau beachtet (wie offenbar an den oben citierten Stellen von Spieker), so ist

eben die allgemeine Lösung trotz der entgegenstehenden allgemeinen Behauptung des Gegenteils gar nicht durch alle Fälle durchführbar, wenigstens scheidet sie sofort, wo 2 Linien gegeben sind. Wichtig ist noch, daß hier die andere oben erwähnte Eigenschaft der Potenzlinien von gleichen Kreisen erhalten bleibt: daß nämlich alle Punkte jener gleiche Abstände haben von den Kreisen, d. h. eben hier von den geraden Linien.

4) Linie L und Punkt P.

P enthält beide Ähnlichkeitspunkte; L ist Potenzlinie.

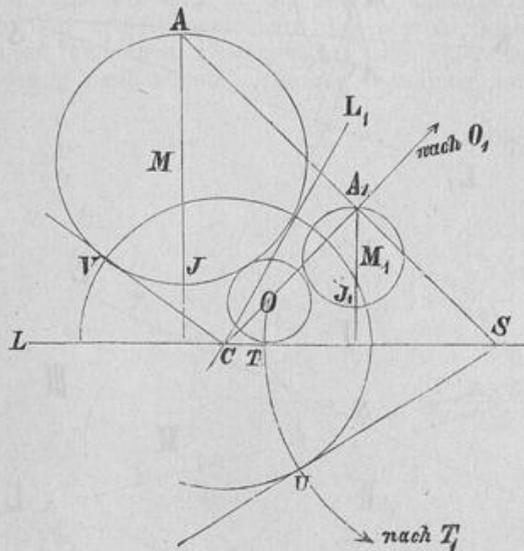
5) Punkt und Punkt.

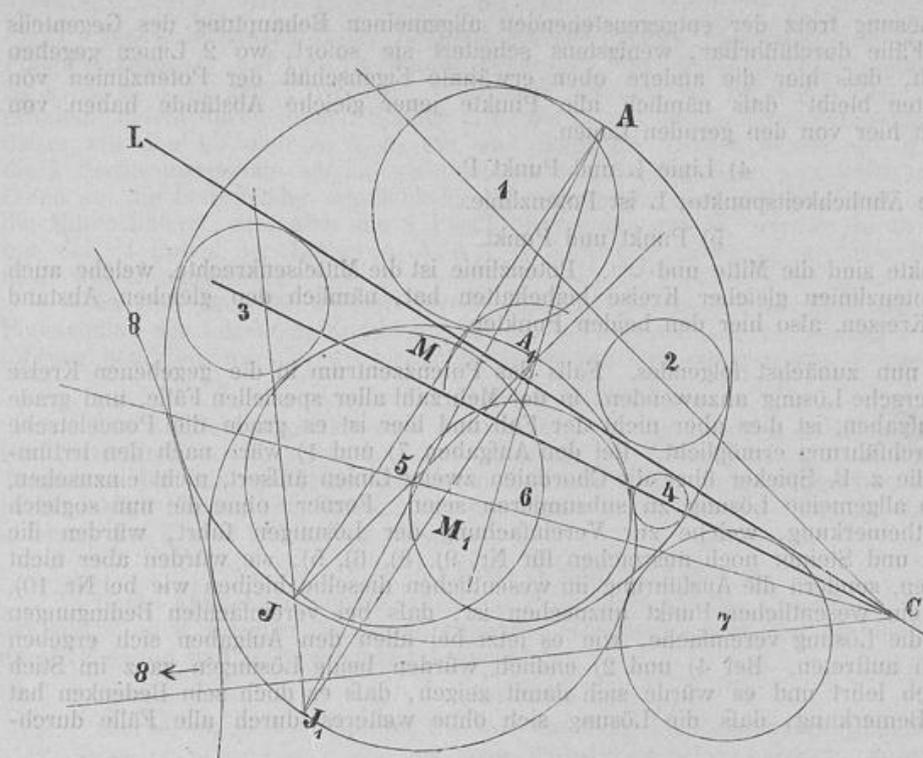
Ähnlichkeitspunkte sind die Mitte und ∞ . Potenzlinie ist die Mittelsenkrechte, welche auch die Eigenschaft der Potenzlinien gleicher Kreise beibehalten hat, nämlich den gleichen Abstand ihrer Punkte von den Kreisen, also hier den beiden Punkten. —

Wir bemerken nun zunächst folgendes. Falls das Potenzzentrum in die gegebenen Kreise hineinfällt, ist die Steinersche Lösung anzuwenden; in der Mehrzahl aller speziellen Fälle, und grade bei den einfacheren Aufgaben, ist dies aber nicht der Fall und hier ist es grade die Ponceletsche Lösung, welche die Durchführung ermöglicht. Bei den Aufgaben 7) und 1) wäre nach den irrthümlichen Anschauungen, die z. B. Spieker über die Chordalen zweier Linien äußert, nicht einzusehen, wie dieselben unter die allgemeine Lösung zu subsumieren seien. Ferner: ohne die nun sogleich auszusprechende Hauptbemerkung, welche zur Vereinfachung der Lösungen führt, würden die Lösungen von Poncelet und Steiner noch ausreichen für Nr. 9), 8), 6), 5); sie würden aber nicht zur Vereinfachung führen, sondern die Ausführung im wesentlichen dieselbe bleiben wie bei Nr. 10), während es doch als ein wesentlicher Punkt anzusehen ist, daß bei vereinfachten Bedingungen auch schrittweise sich die Lösung vereinfache, wie es jetzt bei allen den Aufgaben sich ergeben wird, bei denen Linien auftreten. Bei 4) und 2) endlich würden beide Lösungen ganz im Stich lassen, wie ein Versuch lehrt und es würde sich damit zeigen, daß es doch sein Bedenken hat mit der unbesehenen Bemerkung, daß die Lösung sich ohne weiteres durch alle Fälle durchführen lasse. —

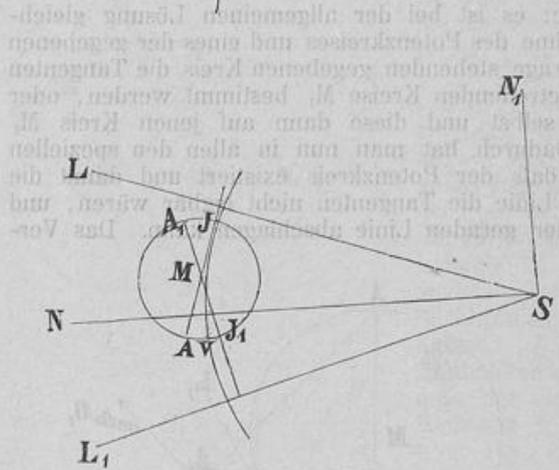
Jene zu machende Bemerkung ist nun diese: es ist bei der allgemeinen Lösung gleichgültig, ob von dem Schnittpunkt der gemeinsamen Sehne des Potenzkreises und eines der gegebenen Kreise, z. B. M_1 mit der Ähnlichkeitsaxe an den in Frage stehenden gegebenen Kreis die Tangenten gelegt und dadurch die Berührungspunkte auf dem betreffenden Kreise M_1 bestimmt werden, oder ob die Tangente gelegt wird an den Potenzkreis selbst und diese dann auf jenen Kreis M_1 abgeschlagen wird von jenem Schnittpunkte aus. Dadurch hat man nun in allen den speziellen Fällen, wo Linien auftreten, den großen Vorteil, daß der Potenzkreis existiert und damit die an ihn zu legende Tangente, während an die gerade Linie die Tangenten nicht legbar wären, und daß man doch die betreffende Tangente nun auf der geraden Linie abschlagen kann. Das Verfahren wird sofort deutlich werden, wenn wir an die Lösung der Aufgabe 9) (2 Kreise und eine Linie gegeben) herantreten.

A, J, A_1 und J_1 sind die Ähnlichkeitspunkte (der 5. und 6. für M und M_1 selbst können nun außer Acht bleiben), AA_1 , JJ_1 , AJ_1 und JA_1 die 4 Ähnlichkeitsachsen. Wir wählen für unsere Darlegung die Axe AA_1 ; genau das Gleiche gilt für die übrigen drei. $L_1 \perp MM_1$, und auf dem bekannten Wege konstruierbar, ist Potenzlinie von M und M_1 , also (mit Beachtung des im vorhergehenden über die speziellen Fälle Dargelegten) C Potenzzentrum, und der Kreis um C mit CV Potenzkreis. Dieser und L werden nun kombiniert, Schnitt beider ist L selbst. Also ist AA_1 mit S zum Schnitt zu bringen, von S nun (nach der oben gemachten Hauptbemerkung für die jetzigen Speziallösungen) an Kreis C die Tangente SU zu legen und $SU = ST = ST_1$ von S aus auf L abzutragen. Dann erhält man die Mittelpunkte zweier Berührungskreise ohne weiteres durch den Schnitt der Lote in T und T_1 auf L mit dem Lote von C auf AA_1 .

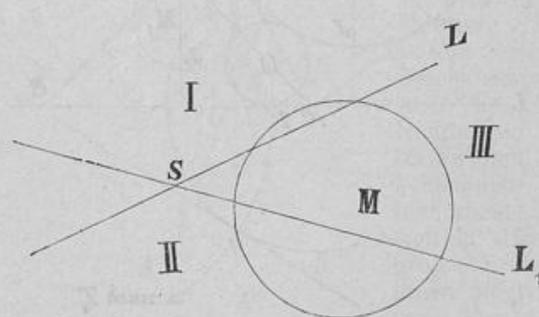




Die übrigen 6 Kreise ergeben sich durch dasselbe Verfahren mit den anderen 3 Achsen JJ_1 , AJ_1 und JA_1 und ihre Schnittpunkte auf L , die an die Stelle von S treten, und von denen aus dann die Tangenten an Kreis C zu legen sind. — Hingewiesen möge besonders werden auf die hübschen speziellen Fälle; das z. B. die beiden gegebenen Kreise sich schneiden und beide Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von L liegen, doch so, daß die Kreisschnittpunkte auf einer Seite von L liegen. Dann befinden sich 6 Kreise im Innern, 2 außen (vergl. die beifolgende Skizze).



Es ist nun unnötig, jede einzelne Aufgabe mit derselben Ausführlichkeit zu besprechen; es genügt großenteils ein kurzer Hinweis. Auch Aufgabe 8) gestaltet sich nach dem neuen Prinzip besonders einfach. Steht $AJ \perp SL$ und $A_1J_1 \perp SL_1$, so sind AA_1 , JJ_1 , AJ_1 und A_1J Ähnlichkeitsachsen, S Potenzzentrum, der Kreis mit der Tangente SV von S an M Potenzkreis; also ist AA_1 bis zum Schnitt mit SL zu verlängern, von diesem Punkte aus die Tangente an Kreis S auf SL zu beiden Seiten abzutragen und Lote bis zur Halbierungslinie von $\angle S$ zu errichten. Dies stimmt auch damit überein, daß aus leicht ersichtlichen geometrischen Gründen $AA_1 \perp SN$ sein muß und daß andererseits der eine Ähnlichkeitspunkt von SL und SL_1 in der Richtung SN_1 zu suchen ist, d. h. wirklich in der Richtung von AA_1 im Unendlichen liegt. JJ_1 liefert noch 2 Kreise; A_1J und AJ_1 schneiden dagegen die Linie SL (resp. SL_1) im Innern des Kreises S , liefern keine Tangenten und somit keine Kreise. — Sehr hübsch ist für diese Aufgabe der allgemeinere, seltener untersuchte Fall, daß die Linien SL und SL_1 beide den Kreis M schneiden und S außerhalb des Kreises liegt. Die Lösung bleibt natürlich dieselbe wie vorstehend; es erscheinen aber 8 Kreise als Lösung: 4 Kreise innerhalb des Winkelraumes III, je 2 in den Räumen I und II (vergl. die beifolgende Skizze).



Die Aufgaben 7) und 1) werden am besten zusammenbetrachtet und erledigen sich dadurch als spezielle Fälle der allgemeinen Lösung, daß hier die obige Bemerkung von Bedeutung wird, daß für gleich große Kreise die Potenzlinien selbst den Ort für die Mittelpunkte der gleichartig berührenden Kreise (und andere sind hier gar nicht vorhanden) bilden. Da die schneidenden Linien auf doppelte Weise durch Unendlichwerden der Radien entstanden gedacht werden können (vergl. oben), so ergeben sich also in 7) die 4 Kreise durch Schnitt der Halbierungslinien der Innen- und Außenwinkel, für 1) der eine Kreis durch die Mittellote; die allbekannten alten Auflösungen.

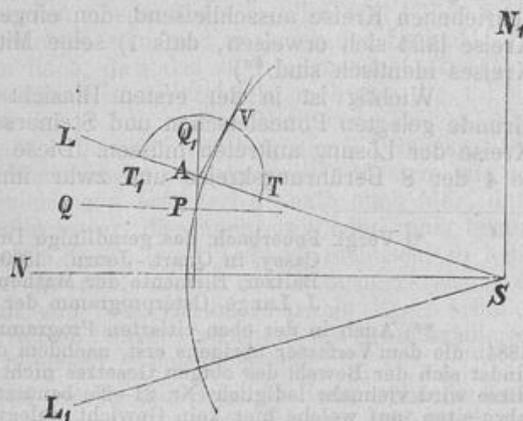
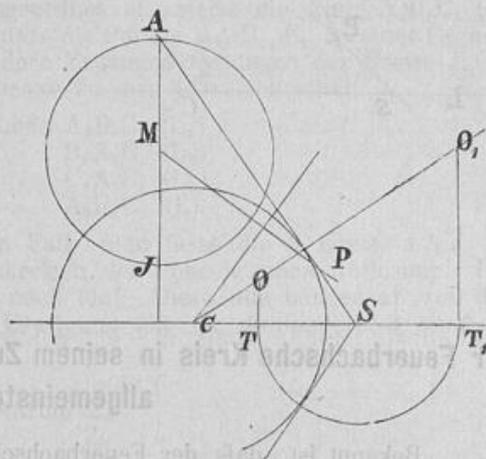
Aufgabe 6) ist nahe verwandt mit 9), nur wieder um einen Schritt einfacher. JP und AP sind hier die Ähnlichkeitsachsen; C Potenzzentrum und der Kreis mit CP Potenzkreis. Man hat also nur AP mit L zu schneiden, von da die Tangente an Kreis C zu legen und auf L abzuschneiden, und die Lote in den so entstandenen Punkten auf L mit dem Lote von C auf AP zu schneiden; dasselbe für JP. Man sieht hier überall, wie erheblich einfacher diese Lösungen sind gegenüber den älteren, welche hier z. B. mit Hilfe von Proportionen einen Hilfspunkt P_1 suchen und die Aufgabe damit auf 2) zurückführen.

Aufgabe 5) enthält keine Linien und schließt sich damit eng an 10) an; die Lösung ist daraus ersichtlich und kann hier übergangen werden. Des Vorteils der Vereinfachung der Konstruktion durch den obigen Grundgedanken gehen wir hier verlustig, weil eben keine Linien auftreten.

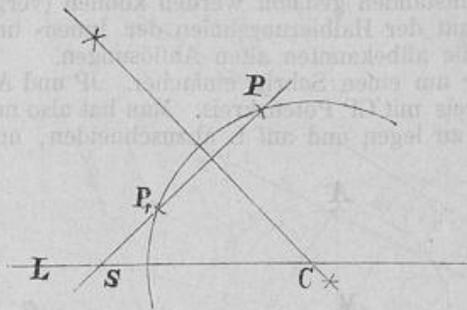
Am besten wird hier auch gleich Aufgabe 3) angeschlossen. Man könnte das Potenzzentrum finden und einen Kreis um dasselbe legen, der P und P_1 trifft und M rechtwinklig schneidet, dann die gemeinsame Sehne mit M ziehen und deren Schnitt S mit PP_1 finden etc. Man bemerkt aber sofort, daß hier dieser Potenzkreis überflüssig ist; daß in diesem Falle infolge elementarer Sätze über die Sekanten jeder Kreis, der durch P und P_1 geht und M schneidet, dasselbe leisten, d. h. sobald seine Chordale mit M gezogen wird, zu demselben Punkte S auf PP_1 führen muß, von dem aus dann an M die Tangenten zu legen sind etc., welches die bekannte, auch durch selbständige Analysis dieser Aufgabe zu erhaltende Lösung ist.

Zuletzt bleiben uns noch die besonders interessierenden Fälle der Aufgaben 4) und 2), bei welchen die unmodifizierte Ponceletsche sowohl als auch Steinersche Lösung im Stich lassen müssen, wie leicht zu sehen ist. Jetzt sind wir infolge des allgemeinen oben vorangestellten Prinzips im Stande, auch diese Fälle unter die allgemeine Lösung zu subsumieren und zu zeigen, daß die allbekannten Lösungen dieser Aufgaben tatsächlich nichts Anderes sind, als die nun im einfachsten Gewande erscheinende allgemeine Ponceletsche Lösung. Für den Anfänger wird dies sowohl überraschend als auch besonders fruchtbringend sein, diese einfachen Lösungen als die Hülle zu erkennen, in der nun der Gedanke der allgemeinen Lösung nach so mannigfacher Wandlung auftreten muß.

In Aufgabe 4) ist S Potenzzentrum; Kreis um S mit SP Potenzkreis. P ist Ähnlichkeitspunkt für P und SL sowohl als für P und SL_1 . Somit wären wir hier hilflos, wenn die Spiekersche Bemerkung zu Recht bestände, daß die Ähnlichkeitspunkte von SL und SL_1 nicht angebar seien (vergl. pag. 6). In Wahrheit kennen wir aber nach dem oben Dargelegten die Richtungen, in denen sie liegen, und das ist hier auch alles, was wir brauchen. Der eine liegt im Unendlichen in der Richtung der Halbierungslinie SN, der andere in der Richtung der Halbierungslinie SN_1 . Ähnlichkeitsachsen sind also hier $PQ \parallel SN$, und $PQ_1 \parallel SN_1$. PQ schneidet die Linien innerhalb des Potenzkreises, liefert also keine Lösungen. PQ_1 schneidet SL in A, von A die Tangente an Kreis SP ist auf SL abzutragen, $AT = AT_1 = AV$; die Lote in T und T_1 auf SL liefern auf SN die Kreismitten. Man sieht, daß



$SN \perp PQ_1$ ist und daß die Lösung also identisch ist mit der bekannten, daß zu P der Spiegel-
punkt in bezug auf SN gesucht und nun ein Kreis durch diesen, durch P und SL berührend
[nach Aufgabe 2)] konstruiert wird.



Es bleibt schliesslich Aufgabe 2). PP_1 ist Ähnlichkeitsaxe. C, der Schnittpunkt des Mittellotes von PP_1 mit L, ist Potenzzentrum, Kreis mit CP Potenzkreis. Die Ähnlichkeitsaxe PP_1 schneidet L in S; es ist die Tangente an den Potenzkreis C zu legen und auf beiden Seiten von S aus auf L abzuschlagen. Die Lote in den erhaltenen Punkten auf L liefern im Verein mit dem Mittellote (das ist ja jetzt das Lot vom Potenzzentrum auf die Ähnlichkeitsaxe) die beiden Kreismitten. Auch hier bemerkt man wieder die Identität mit der bekannten elementaren Auflösung, wonach zu SP und SP_1 die mittlere Proportionale zu suchen und von S nach beiden Seiten auf L abzutragen ist.

II.

Der Feuerbachsche Kreis in seinem Zusammenhange mit der Steinerschen Lösung der allgemeinsten Berührungsaufgabe.

Bekannt ist, daß der Feuerbachsche Kreis (O) im Dreieck die 4 Berührungskreise (J, J_a, J_b, J_c) des Dreiecks berührt. Der Beweis dafür wird entweder rechnend geführt, oder auch rein geometrisch,* ist aber in beiden Fällen nur in dem Sinne gegeben worden, daß der Nachweis einzeln geführt wurde, daß O den Kreis J berührt, dann daß O den Kreis J_a etc. berührt, also lauter Einzelkreise, welche den innern Zusammenhang, in welchem O in bezug auf die 4 Kreise J, J_a, J_b, J_c auftritt, nicht hervortreten lassen. Gerade aber die Stellung des Feuerbachschen Kreises unter den Berührungskreisen der Berührungskreise des Dreiecks auf Grund der Steinerschen Lösung giebt eine wahre Einsicht in diesen Zusammenhang und den sachgemältesten Beweis des Satzes. Es wird sich zugleich damit eine Fülle neuer, bisher nicht beachteter Beziehungen am ebenen Dreiecke herausstellen. Der Feuerbachsche Kreis ist z. B. nicht bloß ein Neunpunktekreis, sondern ein Fünfzehnpunktekreis und berührt nicht bloß die 4 Kreise J, sondern 8 Kreise. Alle diese Beziehungen werden vermittelt durch das im folgenden auftretende Dreieck $Z_a Z_b Z_c$, für welches ein vierter Punkt Z Höhenpunkt ist, und welches das eigentliche Zwischenglied zwischen den Kreisen J und dem Kreise O ist. Der Gedankengang des folgenden ist also: es ergiebt sich zunächst die allgemeine Überzeugung von der Notwendigkeit der Existenz eines Kreises, der, die drei angeschriebenen Kreise ausschließend, den eingeschriebenen Kreis einschließend berührt. Von diesem Kreise läßt sich erweisen, daß 1) seine Mitte, 2) sein Radius mit denjenigen des Feuerbachschen Kreises identisch sind.**)

Wichtig ist in der ersten Hinsicht vor allem bei der oben (vergl. Teil I, pag. 5) zu Grunde gelegten Ponceletschen und Steinerschen Auflösung die Duplizität, in welcher unbedingt die Kreise der Lösung auftreten müssen. Diese Duplizität berechtigt bekanntlich zu dem Schlusse, daß je 4 der 8 Berührungskreise und zwar immer je 2 Paar zusammengehöriger von einem neuen

*) Vergl. Feuerbach, das geradlinige Dreieck. 1822. pag. 57 flg.

Casey, in Quart.-Journ. 1860. Vol. 4. pag. 152.

Baltzer, Elemente der Mathematik. 3. Aufl. tom 2. pag. 92.

J. Lange, Osterprogramm der Friedrich-Werderschen Oberrealschule. 1884.

***) Auch in der oben citierten Programmabhandlung des Herrn Dr. J. Lange (Osterprogramm Nr. 97, 1884), die dem Verfasser übrigens erst, nachdem die vorliegende Arbeit druckfertig war, bekannt geworden ist, findet sich der Beweis des obigen Gesetzes nicht auf die Steinersche Lösung des Tactionsproblems gegründet, diese wird vielmehr lediglich (Nr. 21—25) benützt, um weitere Beziehungen der übrigen 16 Berührungskreise abzuleiten, auf welche hier kein Gewicht gelegt worden ist und worauf zur Vergleichung und Ergänzung hingewiesen sein mag.

Kreise berührt werden und daß somit 6 solcher neuer Kreise für die Gruppierung jener 4 Paare zu je zweien auftreten. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, daß die Hoffnung trügerisch wäre, den Feuerbachschen Kreis etwa als einen von diesen 6 Kreisen auftreten zu sehen (beim Verschwinden der übrigen fünf), falls man für M_1, M_2 und M_3 $r = \infty$ wählt, d. h. die Kreise in Linien übergehen läßt. Man kann sich im Gegenteil überzeugen, daß in dem angedeuteten speziellen Falle jene 6 Kreise übergehen sämtlich in gerade Linien und zwar in die zu den Dreiecksseiten zugeordneten zweiten Tangenten an die 4 Berührungskreise J, J_a, J_b, J_c . —

Zunächst bemerken wir (vergl. Fig. 1, Taf. I), daß wenn wir die 3 Kreise J, J_b und J_c zusammennehmen und wenn die Schnitte der Innenwinkelhalbierenden mit den Gegenseiten entsprechend mit A_1, B_1, C_1 , die der Außenwinkelhalbierenden mit A_2, B_2 und C_2 bezeichnet werden, dann für jene 3 Kreise die Punkte A, B, C, B_1, C_1 und A_2 die 6 Ähnlichkeitspunkte sind, daß also Ähnlichkeitsachsen hier die 3 Dreiecksseiten sind und ihnen zugeordnet als vierte die Linie $A_2B_1C_1$ (L_a) auftritt (worin zugleich der kürzeste Beweis dafür liegt, daß die Punkte A_2, B_1, C_1 in einer Geraden liegen). Entsprechend ergibt sich das Gleiche für andere Zusammenfassungen der Kreise J . So tritt nun auf als jedesmal zugeordnete vierte Ähnlichkeitsaxe zu den 3 Dreiecksseiten:

für die Kreise	J	J_b	J_c	die Linie	$A_2B_1C_1$	(L_a)		
>	>	>	J	J_c	J_a	>	$B_2A_1C_1$	(L_b)
>	>	>	J	J_a	J_b	>	$C_2A_1B_1$	(L_c)
>	>	>	J_a	J_b	J_c	>	$A_2B_2C_2$	(L)

Gehen wir nun wieder zurück auf den ersten Fall: man fasse die 3 Kreise J, J_b, J_c zusammen. Für diese fragen wir nach den 8 Berührungskreisen der Ponceletschen Auflösung. Drei davon sind offenbar die Dreiecksseiten; es bleiben also noch fünf. Diese alle hängen ab von dem Potenzzentrum der Kreise J, J_b, J_c . Ganz dieselbe Erwägung gilt für die andern 3 oben genannten Fälle.

Es ist für die Kreise:

J	J_b	J_c	das	Potenzzentrum	Z_a
J	J_c	J_a	>	>	Z_b
J	J_a	J_b	>	>	Z_c
J_a	J_b	J_c	>	>	Z

Die gesetzmäßige Beziehung dieser 4 Potenzzentren zum Urdreieck und zu dem Dreiecke der 4 Mittelpunkte J, J_a, J_b, J_c wird uns nachher beschäftigen; zunächst möge das Hauptresultat vorangestellt werden bezüglich der Berührungskreise. Für die Kreise J, J_b, J_c bleiben außer den Linien AB, AC, BC noch 5 Kreise übrig. Nun sind AB, AC und BC zugleich Ähnlichkeitsachsen; folglich wird auf den Loten $Z_a \perp AB, Z_a \perp AC$ und $Z_a \perp BC$ noch je ein Mittelpunkt der Kreise liegen, welche je einer Seite in ihrer Eigenschaft als Berührungskreis zugeordnet sind und zwar auf diese selbe Seite als Ähnlichkeitsaxe bezogen. Der der Linie BC zugeordnete Kreis muß J, J_b, J_c gleichartig, d. h. alle drei ausschließend berühren. Dann bleiben noch 2 Berührungskreise übrig, welche zur Ähnlichkeitsaxe L_a ($A_2B_1C_1$) gehören. Der Umstand, daß $A_2B_1C_1$ eine innere Ähnlichkeitsaxe ist und daß A_2 äußerer Ähnlichkeitspunkt von J_b und J_c ist, bedingt, daß die beiden Kreise, die zu L_1 gehören, J_b und J_c gleichartig, J ungleichartig berühren, und wie man sich aus den Bedingungen der Figur überzeugt, J einschließend, J_b und J_c ausschließend.

Eine solche Gruppierung der fünf in Frage stehenden Kreise findet in allen vier Fällen statt. Immer wird zu je einer Dreiecksseite ein Kreis zugeordnet sein und zu jeder der Linien L, L_a, L_b, L_c ein Paar von Kreisen. Bemerkenswert ist dabei noch, daß das zu L zugeordnete Kreispaar J_a, J_b, J_c gleichartig berührt, weil L äußere Ähnlichkeitsaxe ist. Vergleicht man nun die 4 Fälle untereinander, so bemerkt man, daß bei dreien von den 4 Paaren von Berührungskreisen jedes Falles der eine identisch ist in allen 4 Kombinationen; das sind nämlich die 3 Dreiecksseiten. Nun können an der Ponceletschen Figur alle Kreise und Beziehungen nur paarweise auftreten, wie wir schon mehrfach betont haben. Die Duplizität aller Beziehungen erfordert deshalb auch hier, daß, da bei drei Paaren in allen 4 Fällen je ein Exemplar identisch war, dies auch stattfinden muß bezüglich der vierten Kreispaares; wären bloß zwei berührende Kreise (resp. Gerade) identisch, so ließe sich über weitere Übereinstimmung nichts ausmachen; da aber von drei Berührungskreispaaren je einer gemeinsam ist, so wird sich notwendig auch von dem vierten Paar ein Kreis erhalten haben, der allen 4 Fällen gemeinsam ist. Von diesem vierten Paare wird somit ein Kreis existieren, der nun alle 4 Kreise berührt, nämlich J_a, J_b, J_c ausschließend, J einschließend.

Eine solche und keine andere Beziehung zu den vieren muß der in Rede stehende Kreis haben, weil er für die Kombination J_a, J_b, J_c der Ähnlichkeitsaxe L zugeordnet ist und diese eine

äußere ist, während andererseits durch die gegenseitige Lage der 4 Kreise J_a, J_b, J_c und J der Fall ausgeschlossen ist, daß er J_a, J_b, J_c einschließend und J ausschließend berühren könnte.

Die 4 Gruppen von je 3 Kreisen J liefern 32 Berührungskreise, und da 12 davon durch die 3 Dreiecksseiten repräsentiert werden, so hätte man, wären alle übrigen Berührungskreise vollständig auseinander fallend, $20 + 3$, d. h. 23 Berührungskreise. Eine solche Zahl ist völlig unmöglich, aus inneren Gründen der Symmetrie der Figur infolge der Duplizität aller Beziehungen. Dieser wird nur genügt dadurch, daß für je drei der Kreise J, J_a, J_b, J_c von den 8 Berührungskreisen vier (und nicht drei) zugleich für die übrigen möglichen Kombinationen der J -Kreise gelten, so daß dann nur 16 verschiedene Berührungskreise für je drei der J -Kreise vorhanden sind, vier aber für alle 4 Gruppen und zwar sind dies 3 Linien (die Dreiecksseiten) und ein Kreis, so daß dann also im ganzen 20 Berührungskreise auftreten, die obigen 16, sodann die 3 Dreiecksseiten und der eine fragliche, eine ganz besondere Stellung einnehmende Kreis.

Es giebt also einen Kreis, der J einschließend, J_a, J_b und J_c ausschließend berührt. Daß dieser identisch ist mit dem Feuerbachschen Kreise, d. h. daß er durch die Seitenmitten und Höhenfußpunkte des $\triangle ABC$ geht, soll im folgenden gezeigt werden; und zwar ergibt es sich aus der Beziehung der Punkte Z, Z_a, Z_b, Z_c zum $\triangle ABC$. Zunächst folgt aus dem vorhergesagten und aus der Ponceletschen Lösung, daß der Mittelpunkt O des fraglichen Kreises liegen muß auf dem Schnitte der 4 Lote:

$$\begin{array}{l} Z_a \perp L_a \\ Z_b \perp L_b \\ Z_c \perp L_c \\ Z \perp L. \end{array}$$

Diese schneiden sich also in einem Punkte O , dem Mittelpunkte des Kreises.

Da nun aber auch noch von anderer Seite her, wie sich zeigen wird, sich einsehen läßt, daß jene 4 Lote sich in einem Punkte schneiden müssen, so wird somit auch dadurch bekräftigt, daß es einen solchen Kreis geben muß, der J einschließend, J_a, J_b und J_c ausschließend berührt.

Zu zeigen bleibt dann, daß dieser so festgestellte Berührungskreis mit dem Feuerbachschen Kreise (d. h. mit dem Kreise, von dem man weiß, daß er die bekannte Eigenschaft hat, durch die Seitenmitten und Höhenfußpunkte zu laufen) identisch ist. Dies geschieht dadurch, daß nachgewiesen wird: 1) daß der auf obigem Wege erhaltene Punkt O wirklich die Mitte des Feuerbachschen Kreises ist und daß 2) auch der Radius des Berührungskreises mit dem des Feuerbachschen Kreises übereinstimmt. Dann haben die beiden Kreise also Zentrum und Radius gemeinsam. —

Wir haben zu dem Zwecke die Lage der Punkte Z, Z_a etc. genauer zu betrachten. Es ist bekannt, daß auf BC die Mitte a dieser Seite gleichen Abstand hat von den Berührungspunkten der Kreise J und J_a mit derselben; desgleichen, daß a die Mitte zwischen den Berührungspunkten der Kreise J_b und J_c mit BC ist. Das Entsprechende gilt für die Seiten AB und AC und ihre Mitten c und b . Ferner ist bekannt, daß die Potenzlinie zweier Kreise senkrecht auf der Zentrale steht und durch die Mittelpunkte der 4 gemeinsamen äußeren und inneren Tangenten geht. Die Potenzlinie von J_b und J_c wird also durch a gehen und $\perp J_b J_c$ stehen, also $\parallel AJ$, der Halbierungslinie des $\angle A$, sein. Ebenso ist die Potenzlinie von J und J_c ein Lot von c auf CJ_c oder eine Parallele zu CJ_b , und die Potenzlinie von J und J_b die Parallele durch b zu JB . Diese 3 Potenzlinien schneiden sich in Z_a . Vervollständigt man die Figur für die übrigen 3 Fälle, so ergibt sich:

Zieht man durch die 3 Seitenmitten Parallelen zu den Halbierungslinien der gegenüberliegenden Dreiecks-Innen- und Außenwinkel, so schneiden sich diese 6 Linien zu je dreien in 4 Punkten, den 4 Potenzzentren Z, Z_a, Z_b, Z_c , und es muß Z für das $\triangle Z_a Z_b Z_c$ der Höhenpunkt sein.

Dadurch ist nun zugleich das $\triangle Z_a Z_b Z_c$ ähnlich und ähnlich liegend zu dem $\triangle J_a J_b J_c$, für welches J der Höhenpunkt ist; und zwar in ähnlicher Lage für einen inneren Ähnlichkeitspunkt, von dessen Lage zunächst abgesehen werden mag. Es werden dann also die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Figuren durch diesen Ähnlichkeitspunkt laufen müssen, Linien von derselben Bedeutung in beiden Figuren werden parallel laufen müssen und durch entsprechende Punkte parallel gezogene Linien werden in beiden Dreiecken dieselben Eigenschaften zeigen müssen, z. B. durch einen Punkt laufen etc. Wir beziehen uns nun auf folgenden Satz vom Dreieck, den wir, um hier den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, im Anhang darstellen und beweisen (vergl. Anhang I): Verbindet man im Dreieck die Mitte des umgeschriebenen Kreises M mit den

Mitten der 4 Berührungskreise J, J_a, J_b, J_c , so stehen diese Verbindungslinien senkrecht auf den Linien L, L_a, L_b, L_c , d. h.

$$MJ \perp L \quad (A_2B_2C_2)$$

$$MJ_a \perp L_a \quad (A_2B_1C_1)$$

$$MJ_b \perp L_b \quad (B_2A_1C_1)$$

$$MJ_c \perp L_c \quad (C_2A_1B_1).$$

Nun kehren wir die Auffassung um. Füllen wir von den Punkten

$$\begin{array}{ccccccc} & J_a & \text{und} & Z_a & \text{Lote auf} & L_a & \\ \text{desgleichen von} & J_b & & Z_b & & & L_b \\ & & & & & & \\ & J_c & & Z_c & & & L_c \\ & & & & & & \\ & J & & Z & & & L, \end{array}$$

so werden die Lote der 2. Reihe, da sie von homologen Punkten der ähnlichen und ähnlich liegenden Figur ausgehen, das Gleiche leisten, wie die Lote der 1. Reihe. Diese Lote aber schneiden sich in einem Punkte M , folglich werden sich auch jene in einem Punkte, O , schneiden müssen und der Punkt O wird für $\triangle Z_aZ_bZ_c$ dieselbe Bedeutung haben wie der Punkt M für $J_aJ_bJ_c$. Nun ist M für das $\triangle J_aJ_bJ_c$ der Mittelpunkt des dem Höhenfußpunktdreieck ABC umschriebenen Kreises; folglich — und dies ist nun der Kardinalpunkt — ist auch O der Mittelpunkt des dem Höhenfußpunktdreieck von $Z_aZ_bZ_c$, d. h. dem $\triangle abc$ umgeschriebenen Kreises. Die Punkte a, b und c sind aber für das $\triangle ABC$ die Seitenmitten, folglich ist der auf die oben angegebene Weise erhaltene Punkt O thatsächlich der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Seitenmitten geht, d. h. des Feuerbachschen Kreises.

Es wäre nun voreilig, zu schliessen, daß dieser letztere Kreis um O identisch sei mit dem zuerst erhaltenen. Nur so viel ist bis jetzt gezeigt, daß beide Kreise denselben Mittelpunkt O besitzen; es könnte sich aber immer noch um 2 verschiedene konzentrische Kreise handeln. Die weitere Untersuchung zeigt aber, daß in der That beide Kreise zusammen fallen müssen, und zwar zeigt sich dies daran, daß beide Kreise denselben Radius haben. Der Feuerbachsche Kreis (also der zuletzt erhaltene um O) hat bekanntlich zum Radius $\frac{R}{2}$, wo R den Radius des dem $\triangle ABC$

umgeschriebenen Kreises bedeutet. Wir werden nun im folgenden nachweisen, daß auch der nach der Steinerschen Lösung konstruierte Berührungskreis diesen Radius besitzen muß, wobei sich zugleich eine Fülle von neuen Beziehungen am ebenen Dreieck ergeben wird.

Die Dreiecke $Z_aZ_bZ_c$ und $J_aJ_bJ_c$ waren ähnlich und ähnlich liegend und zwar invers, also für einen innern Ähnlichkeitspunkt. Richten wir nun auf diesen unser Augenmerk, so zeigt sich, daß dies der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist. $ZJ, Z_aJ_a, Z_bJ_b, Z_cJ_c$ laufen durch einen Punkt; daß es S , der Schwerpunkt sein muß, sieht man daran, daß auch die Verbindungslinien homologer anderer Punkte durch denselben Punkt laufen müssen. Nun ist C in $J_aJ_bJ_c$ Höhenfußpunkt und Ecke von $\triangle ABC$, c aber entsprechender Höhenfußpunkt in $Z_aZ_bZ_c$ und zugleich Mitte von AB . Also ist Cc Schwerlinie für $\triangle ABC$ und zugleich Verbindungslinie homologer Punkte von $J_aJ_bJ_c$ und $Z_aZ_bZ_c$; dasselbe gilt von Aa, Bb . S ist also der innere Ähnlichkeitspunkt für diese ähnlich liegenden Dreiecke. Es werden somit alle Verbindungslinien homologer Punkte in demselben Verhältnisse geteilt werden durch S wie Aa, Bb und Cc , d. h. im Verhältnis $1:2$, d. h. es ist

$$JS = 2 ZS$$

$$J_aS = 2 Z_aS$$

$$J_bS = 2 Z_bS$$

$$J_cS = 2 Z_cS$$

und, was noch wichtiger ist, da dasselbe Verhältnis für die Verbindungslinien homologer Punkte gilt:

$$JM = 2 ZO$$

$$J_aM = 2 Z_aO$$

$$J_bM = 2 Z_bO$$

$$J_cM = 2 Z_cO.$$

Weil zugleich $MJ \parallel ZO$, so sieht man auch, daß $MS = 2 SO$ ist; die bekannte Beziehung zwischen dem Schwerpunkte in $\triangle ABC$ und den Mitten des umgeschriebenen und des Feuerbachschen Kreises. Auf weitere Beziehungen, daß auch (da H und M Höhenpunkte der Höhenfußpunktdreiecke für $J_aJ_bJ_c$ und $Z_aZ_bZ_c$ sind):

$$HJ \parallel MZ \text{ und } HJ = 2 MZ$$

$$HJ_a \parallel MZ_a \text{ und } HJ_a = 2 MZ_a$$

etc.

möge hier nur nebenbei hingewiesen werden.

Kehren wir nun zur Steinerschen Lösung zurück, zunächst für den Fall $J_b J_c J$, so wird (vergl. für das folgende Fig. 2, Taf. II) der Punkt O im weiteren Verfolg derselben folgendermaßen erhalten: es ist der Pol von $B_1 C_1$ (L_a) in bezug auf J zu bestimmen. Ist nun $Jx \perp B_1 C_1$ und x_1 dieser Pol, so liefert $Z_a x_1$ mit dem Kreise J 2 Schnittpunkte, deren einer t mit J und O in gerader Linie liegt, d. h. tJ muß eben das Lot $Z_a \perp L_a$ in O treffen. Dann ist also $x_1 J \parallel Z_a O$. Wird für den Augenblick der Radius des Kreises um O, der J einschließend, J_a und J_b ausschließend berührt, ρ genannt, während r der Radius des eingeschriebenen Kreises ist, so erhält man also:

$$\frac{Ot}{Jt} = \frac{OZ_a}{Jx_1}.$$

Da nun $OZ_a = \frac{1}{2} MJ_a$, so folgt:

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{2} r \cdot \frac{MJ_a}{Jx_1}.$$

Nun ist x_1 der Pol zu L_a in bezug auf den Kreis J, also J die Mitte des einen konjugierten Punktepaars, demnach

$$(2) \quad Jx_1 \cdot Jx = r^2.$$

Es läßt sich nun zeigen und zwar im engen Zusammenhange mit dem im Anhang I dargelegten (vergl. Anhang II), worauf wir uns oben gestützt haben, daß:

$$(3) \quad Jx \cdot MJ_a = Rr,$$

also aus der Vereinigung von (2) und (3):

$$\frac{MJ_a}{Jx_1} = \frac{R}{r}$$

und durch Eintragung in (1):

$$\rho = \frac{1}{2} r \cdot \frac{R}{r} = \frac{1}{2} R.$$

Auch in dem breiteren Rahmen des Gesamtzusammenhanges aller Lösungen läßt sich dasselbe zeigen.

Fällt man noch

$$\begin{aligned} Jy \perp C_1 A_1 \quad (L_b) \\ \text{und } Jz \perp A_1 B_1 \quad (L_c) \end{aligned}$$

und bestimmt die Pole von L_b und L_c in bezug auf J in den Punkten y_1 und z_1 , so ist nun:

$$\left. \begin{aligned} Jx \cdot MJ_a &= Rr \\ Jy \cdot MJ_b &= Rr \\ Jz \cdot MJ_c &= Rr \end{aligned} \right\} \text{(vergl. Anhang II)}$$

und durch Hinzunahme der entsprechenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} Jx \cdot Jx_1 &= r^2 \\ Jy \cdot Jy_1 &= r^2 \\ Jz \cdot Jz_1 &= r^2 \end{aligned}$$

folgt:

$$(4) \quad \frac{MJ_a}{Jx_1} = \frac{MJ_b}{Jy_1} = \frac{MJ_c}{Jz_1} = \frac{R}{r},$$

also z. B.

$$\frac{Jx_1}{Jy_1} = \frac{MJ_a}{MJ_b} = \frac{OZ_a}{OZ_b},$$

resp.

$$\frac{Jx_1}{Jz_1} = \frac{OZ_a}{OZ_c}.$$

Nun ist auch

$$\begin{aligned} OZ_a &\parallel Jx_1 \\ OZ_b &\parallel Jy_1 \\ OZ_c &\parallel Jz_1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \triangle OZ_aZ_c &\sim J_{x_1}z_1 \text{ und \u00e4hnlich liegend,} \\ \triangle OZ_aZ_b &\sim J_{x_1}y_1 \text{ , , ,} \\ \triangle OZ_bZ_c &\sim J_{y_1}z_1 \text{ , , ,} \end{aligned}$$

Also laufen

$$\begin{aligned} &Z_a x_1 \\ &Z_b y_1 \\ &Z_c z_1 \text{ und} \\ &OJ \end{aligned}$$

durch denselben Punkt Q auf OJ und zwar verh\u00e4lt sich:

$$\frac{OQ}{OJ} = \frac{Z_a O}{J_{x_1}} = \frac{\frac{1}{2}R}{r},$$

wie aus (4) folgt. Man sieht also, da\u00df diese wichtigen Konstruktionslinien, die zu 3 ganz verschiedenen F\u00e4llen geh\u00f6ren, sich in der That in einem Punkte schneiden.

Aus der Steinerschen L\u00f6sung folgt dann, da\u00df dieser Punkt Q nur auf der Peripherie von J liegen kann, d. h. mit t identisch ist, da\u00df also $o = \frac{1}{2}R$. Genau dasselbe lie\u00df sich zeigen, wenn man den Pol von L_a und L_c f\u00fcr J_b bestimmt h\u00e4tte, da (vergl. Anhang II) ganz gleichartige Beziehungen f\u00fcr die angeschriebenen Kreise bestehen: $J_b q \cdot J_c m = Rr$, etc. Damit ist also nach den weiter oben gemachten Bemerkungen bewiesen, da\u00df die beiden Kreise um O, die vorher m\u00f6glicherweise blo\u00df konzentrisch sein konnten, thats\u00e4chlich identisch sind, indem sie denselben Radius besitzen.

Bemerkenswert ist, da\u00df also nun, da a, b und c f\u00fcr $\triangle ABC$ Seitenmitten, f\u00fcr $\triangle Z_a Z_b Z_c$ H\u00f6henfu\u00dfpunkte sind, die beiden Dreiecke ABC und $Z_a Z_b Z_c$ denselben Neunpunktekreis haben, d. h. der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ABC geht zugleich durch die Mitten der Entfernung je zweier Potenzzentren und ber\u00fchrt im ganzen 8 Kreise, n\u00e4mlich J_a, J_b, J_c und die 4 Ber\u00fchrungskreise des Dreiecks $Z_a Z_b Z_c$.

Dasselbe gilt auch von dem dem $\triangle ABC$ umgeschriebenen Kreise; auch er ber\u00fchrt 8 Kreise, denn er ist ja f\u00fcr $\triangle J_a J_b J_c$ und $\triangle A^1 B^1 C^1$ (wo $A^1 B^1$ durch $C \perp AB$ etc.) der Feuerbachsche Kreis. \u00dcberhaupt sei von den reichhaltigen in der Figur enthaltenen Beziehungen nur noch hingewiesen auf die Vertauschbarkeit des Charakters der in Frage kommenden Hauptpunkte. Aus der Konstruktion, durch welche die Punkte Z_a, Z_b etc. erhalten wurden, ergibt sich, da\u00df diese Punkte Z, Z_a, Z_b, Z_c f\u00fcr das $\triangle abc$ dieselbe Rolle spielen, wie die Punkte J, J_a etc. f\u00fcr das $\triangle ABC$, d. h. die Punkte, welche Potenzzentren f\u00fcr $\triangle ABC$ sind, sind die Mitten der ber\u00fchrenden Kreise f\u00fcr $\triangle abc$. Dieselbe Vertauschbarkeit der Charaktere ergibt sich f\u00fcr die Punkte H, M und O, w\u00e4hrend der Punkt S f\u00fcr alle der folgenden Dreiecke als Schwerpunkt erhalten bleibt. Bezeichnet also $A^1 B^1 C^1, A'' B'' C'' \dots$ dieselbe Reihe der Dreiecke nach oben vom $\triangle ABC$ aus, wie abc, $a^1 b^1 c^1$ etc. nach unten, so giebt folgendes Schema die beste \u00dcbersicht \u00fcber die fraglichen Verh\u00e4ltnisse:

	H\u00f6henpunkt.	Mitte des umschriebenen Kreises.	Mitte des Neunpunktekreises.	Mittelpunktedreieck der angeschriebenen Kreise.	Potenzzentrendreieck.
$\triangle A'' B'' C''$	(H ₂)	(H ₁)	H	$J_a^1 J_b^1 J_c^1$	$Z_a^1 Z_b^1 Z_c^1$
$\triangle A^1 B^1 C^1$	(H ₁)	H	M	$Z_a^1 Z_b^1 Z_c^1$	$J_a J_b J_c$
$\triangle ABC$	H	M	O	$J_a J_b J_c$	$Z_a Z_b Z_c$
$\triangle abc$	M	O	(M ₁)	$Z_a Z_b Z_c$	$i_a i_b i_c$
$\triangle a^1 b^1 c^1$	O	(M ₁)	(M ₂)	$i_a i_b i_c$	$z_a z_b z_c$
...
u. s. f.					

Die beiden am meisten links und am meisten rechts stehenden Dreiecke haben dabei jedesmal denselben Neunpunktekreis.

Anhang.

I.

Wir tragen im folgenden den Beweis für die interessante im vorhergehenden benützte Eigenschaft nach, daß:

$$\begin{array}{l}
 J_a M \perp L_a \text{ d. h. } \perp B_1 C_1 \\
 J_b M \perp L_b \text{ > > } \perp A_1 C_1 \\
 J_c M \perp L_c \text{ > > } \perp A_1 B_1 \\
 JM \perp L \text{ > > } \perp A_2 B_2 C_2
 \end{array}$$

und geben denselben für den dritten und vierten Fall, womit er auch für die beiden ersten Fälle geliefert ist. Wir entwickeln dabei eine sehr bekannte Figur in ihre verborgeneren Beziehungen weiter.

Es sei also M (vergl. hierbei Fig. 3, Tafel II) die Mitte für den dem $\triangle ABC$ umschriebenen Kreis, D die Mitte des Bogens AB, so schneidet bekanntlich der Kreis um D mit DA die Linie DC in J und J_c . Nimmt man noch E, den andern Endpunkt des Diameters DME und sind A_1 und B_1 die Schnitte von AJ und BJ auf den Gegenseiten, so schneiden sich

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} AJ \\ EC \\ J_c B \end{array} \right\} \text{ in } J_a, \\
 \left. \begin{array}{l} BJ \\ EC \\ J_c A \end{array} \right\} \text{ in } J_b, \\
 \left. \begin{array}{l} AB \\ A_1 B_1 \\ EC \end{array} \right\} \text{ in } C_2.
 \end{array}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $J_a J_b AB$ ein Sehnenviereck für einen Kreis ist, dessen Mitte E ist. Daraus folgt, daß:

$$\begin{array}{l}
 C_2 J \text{ Polare zu } J_c \text{ für Kreis E} \\
 C_2 J_c \text{ > > } J \text{ > > } E \\
 \text{(die dritte Polare } J_c J \text{ für } C_2 \text{ brauchen wir nicht),}
 \end{array}$$

also ist:

$$(1) \quad \begin{array}{l} C_2 J \perp J_c E \\ C_2 J_c \perp JE. \end{array}$$

Nun ist:

$$CC_2 \ CA \ CC_1 \ CB \text{ ein harmonisches Büschel,}$$

also

$$J_b \ B_1 \ J \ B \text{ eine harmonische Punktreihe,}$$

also

$$C_2 J_a \ C_2 B_1 \ C_2 J \ C_2 B \text{ ein harmonisches Büschel.}$$

Auf 2 zugeordnete Strahlen dieses Büschels sind von J_c aus Lote gefällt.

$$\begin{array}{l}
 J_c C \perp C_2 J_a \\
 J_c E \perp C_2 J.
 \end{array}$$

Denkt man sich auch auf die Strahlen des 2. Paares Lote gefällt, so entsteht auch bei J_c ein harmonisches Büschel. Durch dieses letztere Büschel ist die Linie ED hindurchgelegt, welche $\perp AB$ steht. Auf ihr wird somit eine harmonische Punktreihe entstehen müssen, von der das eine Paar von Punkten in E und D vorhanden ist. Das Lot von J_c auf den Strahl $C_2 B$ trifft DE im unendlichen, also muß der diesem Schnittpunkte im unendlichen zugeordnete 4. harmonische Punkt in M, der Mitte von ED, liegen, d. h. das Lot von J_c auf den 4. von C_2 kommenden Strahl, nämlich auf $B_1 A$, läuft durch den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

Auf gleiche Weise läßt sich dies für J_b und J_a zeigen. Es ist also:

$$\begin{array}{l}
 J_c M \perp B_1 A_1 \text{ d. h. } \perp L_c \\
 J_b M \perp C_1 A_1 \ (L_b) \\
 J_a M \perp B_1 C_1 \ (L_a).
 \end{array}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß JM auf der Linie L senkrecht steht.

Das harmonische Strahlenbüschel bei C:

$$CB \ CJ_c \ CA \ CC_2$$

schneidet auf $J_c A_2$ die 4 harmonischen Punkte ab:

$$A_2 \ J_c \ A \ J_b,$$

also ist auch ein harmonisches Büschel:

$$C_2 A_2 \ C_2 J_c \ C_2 A \ C_2 C.$$

Nun sind von J auf ein Paar konjugierte Strahlen die Lote gefällt:

$$\begin{aligned} EJ &\perp C_2 J_c \text{ [vergl. (1)]} \\ CJ &\perp C_2 C. \end{aligned}$$

Werden nun noch auf $C_2 A_2$ und $C_2 A$ die Lote gefällt, so entsteht bei J ein harmonisches Büschel, durch welches wieder die Linie ED hindurch gelegt ist. E und D sind konjugierte Punkte; das Lot von J auf $C_2 A$ schneidet, weil $\parallel ED$ diese Linie wieder im unendlichen; also muß das Lot von J auf $C_2 A_2$, d. h. auf L durch M gehen, dem 4. zugeordneten Punkt zu E, D und dem unendlich entfernten, da $EM = DM$.

II.

Fällt man nun

$$\begin{aligned} Jz &\perp A_1 B_1 \ (L_c) \\ \text{und } Ju &\perp AB, \end{aligned}$$

dann ist $C_2 z Ju$ Sehnenviereck,

$$\text{also } \angle Juz = \angle JC_2 z,$$

desgleichen ist $C_2 J_c v v_1$ Sehnenviereck,

weil $J_c v \perp C_2 A_1$ (Anhang I)

und $J_c E \perp C_2 v_1$ (> I),

$$\text{also } \angle JC_2 z = \angle v J_c v_1,$$

$$\text{also } \angle Juz = \angle M J_c E,$$

ferner $\angle z Ju = \angle EM J_c$ (da $Jz \parallel J_c M$, beide $\perp C_2 A_1$
und $Ju \parallel EM$, > $\perp AB$)

$$\text{also } \triangle z Ju \sim \triangle M E J_c,$$

$$\text{daher: } \frac{Jz}{Ju} = \frac{ME}{M J_c},$$

$$\text{d. h. } Jz \cdot M J_c = Rr.$$

Wird gezogen

$$\begin{aligned} Jy &\perp A_1 C_1 \\ Jx &\perp B_1 C_1, \end{aligned}$$

so ergibt sich ganz dieselbe Beziehung, die sich dadurch auszeichnet, daß rechts eine Konstante erscheint. Es ist also

$$\begin{aligned} Jx \cdot M J_a &= Rr \\ Jy \cdot M J_b &= Rr \\ Jz \cdot M J_c &= Rr. \end{aligned} \quad (2)$$

Beachtet man noch den angeschriebenen Kreis J_b , so ergibt sich eine ganz analoge Beziehung. Ist

$$\begin{aligned} J_b q &\perp A_1 B_1 \\ J_b q_1 &\perp AB, \end{aligned}$$

so folgt: $\frac{\angle qq_1 J_b}{\angle q C_2 J_b} = \frac{q C_2 J_b}{\angle v J_c J}$ (Sehnenviereck $C_2 J_b q q_1$)
 $\frac{\angle qq_1 J_b}{\angle q C_2 J_b} = \frac{\angle v J_c J}{\angle v J_c J}$ ($C_2 C v J_c$)

$\frac{\angle DM J_c}{\angle q_1 J q} = \frac{\angle q_1 J q}{\angle q_1 J q}$ ($J_b q \parallel J_c M$ und $J_b q_1 \parallel MD$)

$\Delta J_b q q_1 \sim \Delta M J_c D$

$\frac{J_b q}{r_2} = \frac{R}{J_c M}$,

(3) also $J_b q \cdot J_c M = R r_2$,

denkt man sich noch $J_a s \perp A_1 B_1$,

so ist ja: $\frac{J_b q}{r_2} = \frac{J_a s}{r_1}$,

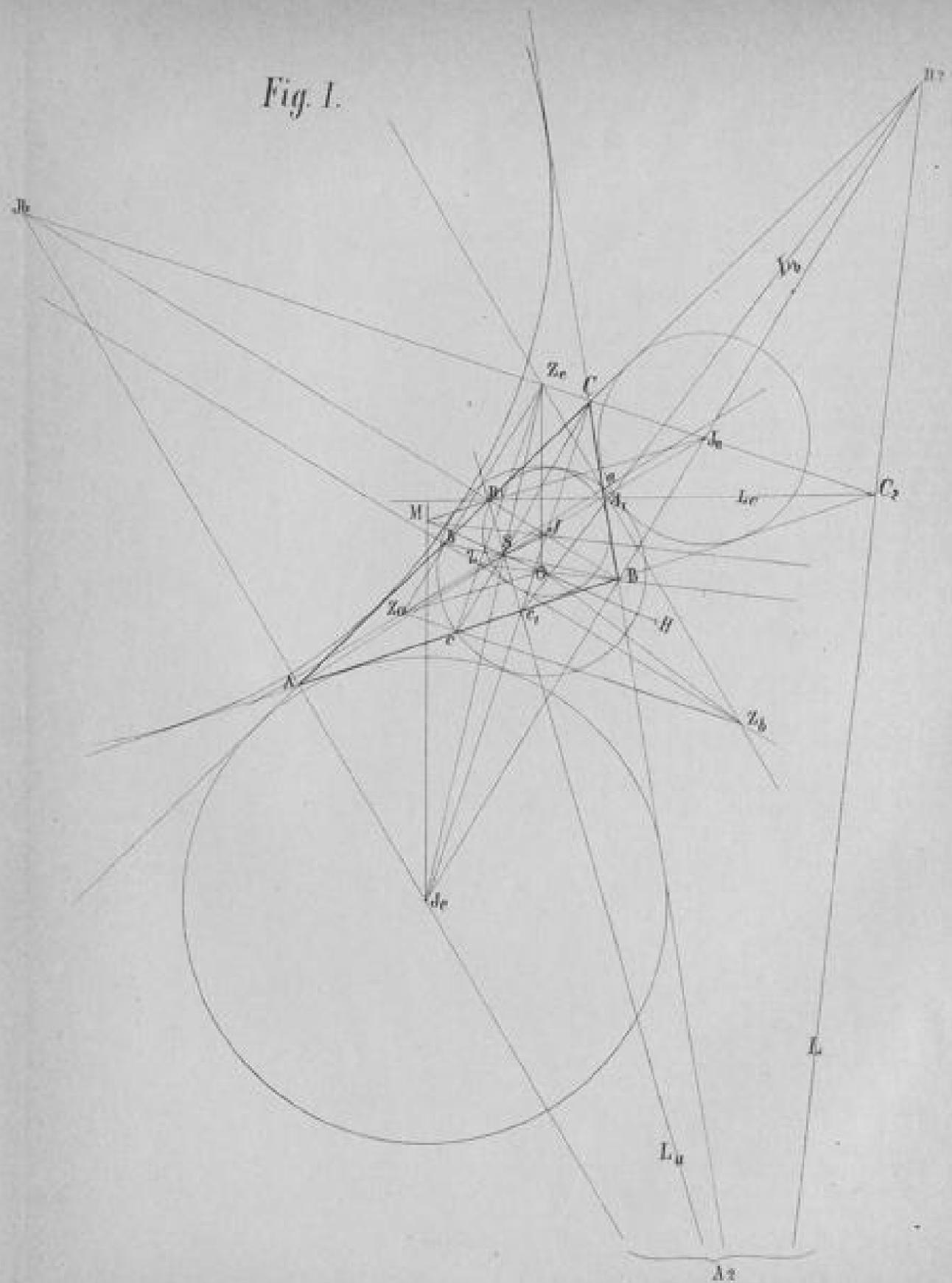
also auch $\frac{J_a s}{r_1} = \frac{R}{J_c M}$,

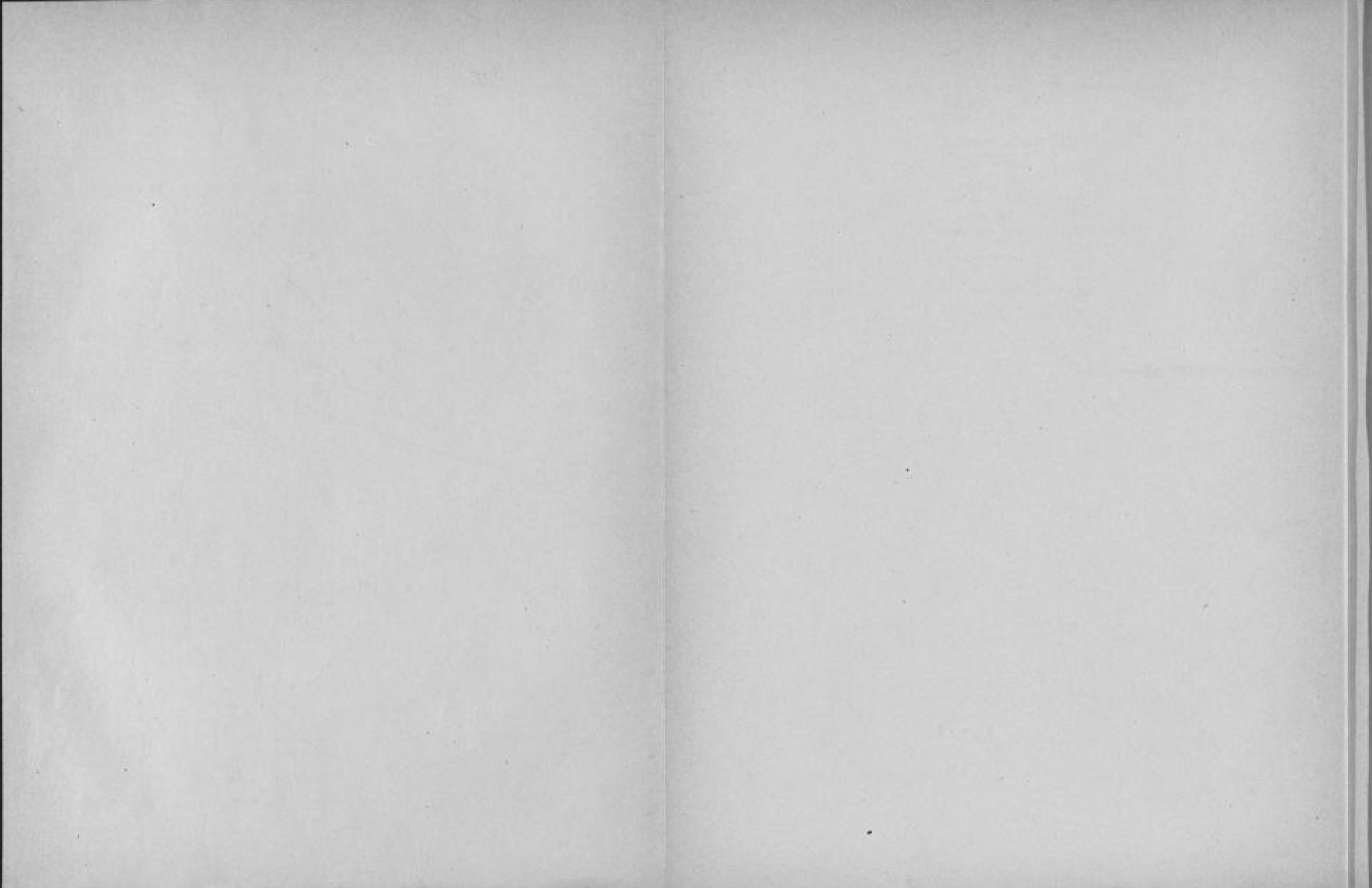
(4) also $J_a s \cdot J_c M = R r_1$.

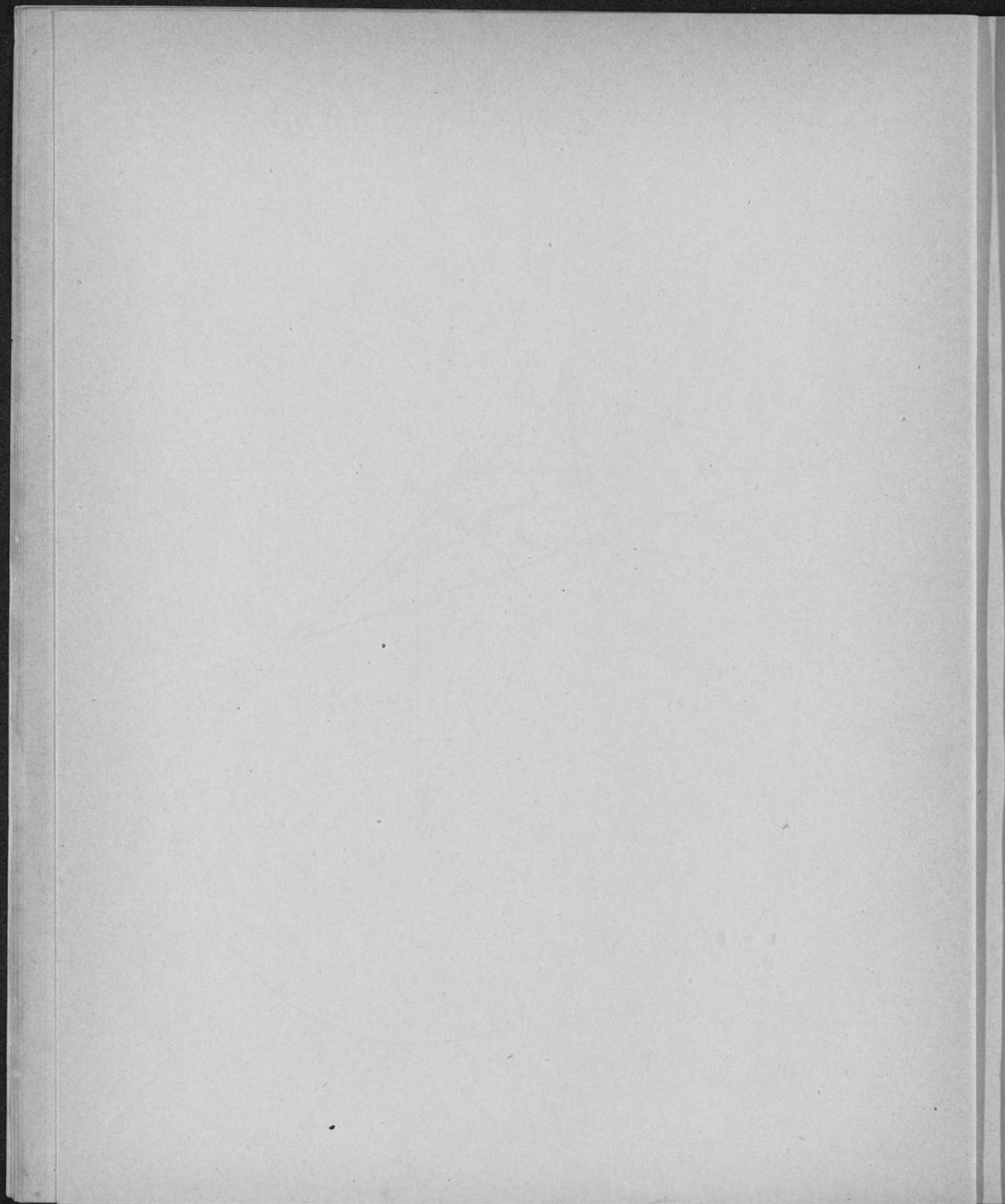
Oberlehrer **Dr. Wilhelm Goering.**



Fig. 1.







Stammesgeschichte

Plan
zum Leben



