Geometrische Untersuchungen.

I. Darstellung sämtlicher Aufgaben des Tactionsproblems durch die Ponceletsche und Steinersche Lösung der allgemeinsten Berührungsaufgabe.

II. Der Feuerbachsche Kreis in seinem Zusammenhange mit dieser Lösung.

I.

Der erste Teil der folgenden Arbeit ist lediglich aus Rücksicht auf die Bedürfnisse der Schule zusammengestellt. Doch möge es mir, ehe wir zu diesem speziellen Thema übergehen, gestattet sein, einige allgemeinere Bemerkungen vorauszuschicken.

Die Thatsache, daſs ein Buch wie die Geschichte der Civilisation in England von Buckle in deutscher Übersetzung jetzt in 6. Auflage vorliegt, giebt sicher zu denken. Sie zeigt, daſs dieses von der wissenschaftlichen Fachkritik einmütig abgelehnte Werk bei den gebildeten Laien eines groſsen Ansehens und Einflusses sich erfreuen muſs. Verrät dieser Umstand auf der einen Seite die geringe Verbreitung der Fähigkeit zu wirklicher geschichtlicher Auffassung, der das oben genannte Werk und die ganze Zeitrichtung, deren sprechender Ausdruck es ist, völlig ins Gesicht schlägt, so zeigt er auf der andern Seite den Einfluſs einer zu geringen naturwissenschaftlichen Schulung. Diese beiden Thatsachen sind die Folgen eines sehr verwickelten Ursachen-Komplexes, von dem einen nicht geringen Teil die weite Verbreitung der Herbartschen mechanischen Psychologie in Deutschland und der entsprechenden sensualistischen Systeme in England und Frankreich ausmacht, und von dem wir im folgenden nur eine der anderen Bedingungen, die allerdings mit der eben genannten in enger Wechselbeziehung steht, herausheben. Es kommt sehr auf den Sinn an, in welchem Naturwissenschaft getrieben und gelehrt wird; man kann zu wenig Kritik üben, wenn man nicht weiſs, was die Naturforschung wirklich leisten kann, was nicht. Ein Teil der Anhänger jener Lehren kann als von naturwissenschaftlicher Halbbildung angekränkelt bezeichnet werden, die sich, unfähig zur Kritik, von allem gefangen nehmen läſst, was mit der gehörigen selbstbewuſsten Sicherheit vorgetragen wird; von dem andern Teile, der etwa die volle naturwissenschaftliche Bildung genossen hat, muſs behauptet werden, daſs er sie sicher nicht in der rechten Weise erhalten hat. Nur so ist es doch zu erklären, daſs so weite Schichten sich in den blinden Glauben stürzen können, daſs die lediglich mechanischen Gesetze der materiellen Natur ausreichen zur Erklärung aller geschichtlichen Erscheinungen innerhalb der Menschenwelt. Mechanik ist Mechanik und hat als solche einen sehr hohen Wert; Erweiterung der Mechanik aber auf alle organischen Gebiete und zuhöchst auf diejenigen des geistigen Lebens der Menschheit ist eine Hypothese, die als solche aufstellen und verteidigen mag, wer sich dazu berufen fühlt. Daſs aber diese Hypothese nicht als solche, sondern als ein neues

Evangelium der Wahrheit so allgemein gepriesen und gelehrt werden kann, ist ein krankhafter Zug der Zeit und man möchte mehr Augen wünschen, die zu sehen verständen, anstatt bloſs ein äuſserer Schein von Augen zu sein. In dieser Richtung haben die Realgymnasien für die Nation sicher eine wichtige Kulturaufgabe zu erfüllen: möglichst selbständig denkende Geister heranzubilden durch die richtig betriebene Naturforschung gegenüber den etwaigen Irrlehren innerhalb der Naturwissenschaft! Ein Geschlecht, gestählt in frühzeitigem selbständigen Sehen und Urteilen an den natürlichen Dingen, ein Geschlecht, das nicht mit Theorien überfüttert worden ist! Erreicht werden wird dieses Ziel ohne Zweifel nur, wenn gleichzeitig in der verwandten Fundamentalwissenschaft der unerschütterliche Grund gelegt worden ist, d. h. wenn die Köpfe von der frühesten Zeit an zum selbständigen mathematischen Denken angehalten und gebildet wurden, so daſs es ihnen hier schon gleichsam zur zweiten Natur geworden ist.

Freilich besteht heute in gewisser Weise für die Mathematik selbst die groſse Gefahr, mechanisch zu werden, und mechanisch betrieben zu werden. Ich möchte eine prägnante Stelle jenes scharfsinnigsten Denkers des englischen Volkes hier citieren, dem niemand Sachverständnis absprechen wird, da er lange auch mathematische Studien betrieben hat und sogar einige Jahre am Anfange seiner Laufbahn in Edinburg mathematischer Lehrer war. Carlyle äuſsert sich in einem seiner Essays darüber so: „Die Wissenschaft unserer Zeit ist Physik, Chemie, Physiologie — vom mechanischen Gesichtspunkt aus betrachtet. Unsere Lieblingswissenschaft, die Mathematik, die hochgepriesene Erklärerin dieser anderen Wissenschaften, ist mehr und mehr mechanisch geworden. Eine hervorragende Stellung in den höheren Gebieten der Mathematik hängt jetzt weniger von der natürlichen Begabung, als von einer gewissen Erfahrung und Routine ab. Ohne die groſsartigen Resultate, zu denen ein Lagrange und Laplace mit diesen Hilfsmitteln gekommen ist, zu unterschätzen, müssen wir doch gestehen, daſs der differentiale und integrale Kalkulus wenig mehr als eine höchst fein ersonnene arithmetische Mahlmühle ist, wo man die Faktoren auf der einen Seite hineinschiebt und wenn sie nachher zu dem gehörigen Produkte gemahlen sind, wieder erhält, ohne viel andere Mühe, als diejenige, die Mahlmühle eifrig gedreht zu haben. Wir haben mehr Mathematik als je, aber weniger Mathesis; Archimedes und Plato hätten nicht die Mécanique céleste lesen können, aber das ganze Institut Français ist seinerseits auſser stande, in dem Satze: ‚Gott verfährt nach geometrischen Regeln' etwas anderes als eine sentimentale Rodomontade zu sehen." — Es ist dasselbe Entwickelungsgesetz, welches wir auch in vielen anderen Fächern menschlicher Wissenschaft und Kunst beobachten können, und die Mathematik bildet durchaus keine Ausnahme: die Technik, die Routine tritt mehr und mehr an die Stelle des Erfindungsgeistes; glücklich, wenn sie ihn wenigstens nicht ganz verschlingt. Die Schule aber hat sich nicht an das Technische zu halten, sondern vor allem den Geist zu pflegen, der die Wissenschaft aus sich heraus geboren hat, und den wir hier in Übereinstimmung mit Carlyle Mathesis nennen. Mehr Mathesis ists, was uns not thut! Nur zu oft wird vor allem heut vergessen, daſs die Geometrie eine Sachwissenschaft, die Algebra groſsenteils nur eine Formalwissenschaft ist; daſs sie lediglich ein Instrument ist, die Geometrie aber ein Objekt für das Instrument. Hat doch in der letzten Zeit für manche die Algebra gar eine Art von metaphysischem Schlüssel zum Eingang dahinein, wohin keine Geometrie reicht, bilden sollen: in die ‚metamathematischen' Räume von vier und mehr Dimensionen! Ein ebenso verhängnisvoller Irrtum, wie auf dem Gebiete der Philosophie das Verkennen der Stellung der reinen Logik! Als ob auch diese mehr wäre, als ein bloſses Instrument des geschickten Ordnens einmal erlangter objektiver Einsichten. Daher das Vergebliche der Versuche, durch endlose formalistische Begriffsspaltereien in den Besitz der Wahrheit zu gelangen, deren gänzliche Unfruchtbarkeit die heutige untergeordnete Stellung der Philosophie gegenüber der Naturforschung bewirkt hat. —

Lediglich technisch und mechanisch kann auch jedes andere Fach gelehrt werden, seien es alte oder neue Sprachen, sei es Geschichte oder selbst Religionslehre. Es kommt eben überall auf die Lehrer hierbei an und nicht auf den toten Buchstaben von Satzungen und Einrichtungen. Wenn man dies nicht so oft vergessen hätte, so wäre der heutige Streit um die höhere Schule mit seinen gegenseitigen Beschuldigungen niemals zu so akuten Formen gediehen, die ihn zu einem wenig erquicklichen Schauspiele machen. In jenem wahren Sinne betrieben, leistet ihrerseits die Mathesis — auch in erziehlicher Hinsicht, was nach mancher Seite hin noch einer besonderen Betonung bedarf — voll das, was das Ziel aller wahren Pädagogik sein und bleiben muſs:

alere flammam!

Von diesen allgemeinen Gesichtspunkten, die wir hier abbrechen müssen, da sie für sich Stoff zu einer eigenen Abhandlung bieten würden, findet sich der Übergang zu dem ersten Teil unseres Spezialthemas. Das Schwergewicht des mathematischen Unterrichts ist sicher in der Geometrie gelegen, sei es der reinen, sei es der durch Algebra gestützten (analytischen). Nur darf der Unterricht nicht selbst wieder in algebraische Gewohnheiten zurückfallen, nicht bloſs in einem Einüben von Aufgabenschematen bestehen, unter die dann der Lernende jede Einzelaufgabe lediglich mechanisch zu subsumieren hat. Auf diesem Wege werden wir sicher nicht viel selbständig denkende Köpfe bekommen! Bestenfalls vielleicht einige Gehilfen, die mehr oder weniger geschickt an der „Mahlmühle" mit zu drehen gelernt haben!

Am meisten werden zu selbständigem Denken anregen zusammenhängende Untersuchungsgebiete; damit erhält zugleich der Schüler einen Vorgeschmack von dem, was ihm später die Wissenschaft in ihren groſsen zusammenhängenden Untersuchungsobjekten vorführt. Als ein besonders vorzügliches Unterrichtsmaterial in dieser Hinsicht hat für die oberste Unterrichtsstufe in der Geometrie sicher die Berührungsaufgabe des Apollonius zu gelten. Diese spaltet sich bekanntlich in 10 Spezialfälle. Ein Kreis soll berühren:

	Punkte.	Linien.	Kreise.		
1)	3	—	—	und liefert	1 Lösung,
2)	2	1	—	» »	2 Lösungen,
3)	2	—	1	» »	2 »
4)	1	2	—	» »	2 »
5)	1	1	1	» »	4 »
6)	1	—	2	» »	4 »
7)	—	3	—	» »	4 »
8)	—	2	1	» »	8 »
9)	—	1	2	» »	8 »
10)	—	—	3	» »	8 »

Nur wird dieses Problem immer noch in der Weise behandelt, daſs den alten Vietaschen Lösungen der breiteste Raum dabei gegönnt wird; Aufgabe 10) wird auf 6), diese auf 3); 9) auf 5), diese auf 2); 8) auf 4), diese auch auf 2) zurückgeführt. Es wäre nun endlich Zeit, diese Lösungen völlig zu beseitigen; der ganze innere Zusammenhang der geometrischen Gebilde wird verhüllt und diese ganze Art der Darstellung kann gradezu als ein Beispiel dafür gelten, wie es nicht zu machen ist.

Nun ist in neuerer Zeit auch die Ponceletsche und Steinersche Lösung für die allgemeinste Aufgabe Nr. 10) in den Lehrbüchern berücksichtigt worden. Allein daneben findet sich der breiteste Raum den alten Vietaschen Lösungen eingeräumt selbst in dem sonst so vorzüglichen Lehrbuche von Spieker (vergl. 17. Aufl., pag. 219—223), während von der Steinerschen allgemeinen Lösung nur behauptet wird, daſs sie sich leicht durch alle Aufgaben durchführen lasse. Indes wird grade diese Behauptung hinfällig durch pag. 239 sich findende irrtümliche Äuſserungen über einige spezielle Fälle der Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkte, welche die Durchführung unmöglich machen, wie unten gezeigt werden wird. Anderseits finden sich z. B. in der bekannten Aufgabensammlung von Gandtner und Junghans (3. Aufl., 2. Teil, pag. 165—172) eine gröſsere Reihe verschiedener unzusammenhängender Lösungen bei jeder der 10 Aufgaben angegeben, während die im folgenden mitgeteilten sachgemäſsen einfachsten Lösungen sich nicht darin finden. Es schien mir daher, neben dem Zwecke der Anregung des Schülers, wünschenswert, an diesem Orte die Frage zu besprechen, um diejenigen Herren Kollegen, welche gangbare Lehrbücher verfaſst haben, anzuregen, diese Lösungen endlich zu ihrem Rechte gelangen zu lassen und an Stelle der alten Vietaschen in die Lehrbücher an der betreffenden Stelle einzufügen, da mir nicht bekannt ist, daſs die nachfolgende Durchführung des Problems in dieser Form schon anderweitig gegeben wäre.

Zwei Umstände scheinen mir bisher die Durchführung aufgehalten zu haben: einmal der Umstand, daſs über die Begriffe von Potenzlinien und Ähnlichkeitspunkten in den Spezialfällen noch einige Unsicherheit herrscht (vergl. Spieker pag. 239; siehe unten), sodann daſs es an dem Grundgedanken gefehlt hat, welcher beim Vorschreiten zu den einfacheren Aufgaben von der kompliziertesten aus auch die Lösung entsprechend aus der Allgemeinlösung schrittweise zu vereinfachen gestattet, wobei es dann von besonderem Interesse sein wird zu beobachten, wie die bekannten Lösungen der einfachsten Aufgaben 2), 3) etc. doch in der allgemeinsten Lösung enthalten sind. Beide Punkte werden zunächst erledigt werden müssen. Vorausgesetzt wird als allgemein bekannt die allgemeine Ponceletsche Lösung resp. ihre Steinersche Modifikation; doch möge mit wenigen Worten hier zunächst an dieselben erinnert werden.

Die 8 Mittelpunkte der Berührungskreise liegen paarweise auf den Loten, welche vom Potenzzentrum C auf die 4 Ähnlichkeitsaxen von M_1, M_2, M_3, nämlich $A_1 A_2 A_3$, $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_1 J_3$, $A_3 J_1 J_2$ gefällt werden; und zwar werden sie entweder mit Hilfe des Potenzkreises erhalten, indem durch dessen Schnitt z. B. mit M_1 die gemeinsame Sehne beider Kreise, der Schnitt dieser mit den 4 Linien $A_1 A_2 A_3$ etc. und durch die Tangenten von den 4 Schnittpunkten an M_1 die 8 Berührungspunkte auf M_1 gefunden werden, welche dann paarweise zu den entsprechenden Loten auf die betreffenden Ähnlichkeitsaxen zugeordnet sind und so durch ihre Verbindung mit M_1 die Mitten liefern; oder aber die 8 Berührungspunkte auf M_1 werden durch die Verbindung von C mit den 4 Polen der Linien $A_1 A_2 A_3$, $A_1 J_2 J_3$ etc. in bezug auf den Kreis M_1 erhalten und dann wie oben verfahren.

Es sind dann für unseren Zweck zunächst die Spezialisierungen der Ähnlichkeitspunkte und Potenzlinien der folgenden Kombinationen zu berücksichtigen; bei wenigen wird es weiterer Ausführung bedürfen; nur da, wo bisher etwas Irrtümliches angenommen wurde.

1) Kreis K und Linie L.

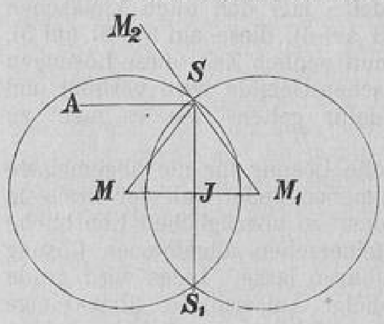
Die Ähnlichkeitspunkte sind die Schnitte des von K auf L gefällten Lotes mit dem Kreise K. Die Potenzlinie ist die Linie L selbst. Wichtig hierbei ist, dafs (wenn auch von Gleichheit der Tangenten von einem Punkte der Potenzlinie aus nicht mehr gesprochen werden kann) doch der rechtwinklige Schnitt von Kreisen, die um Punkte von L mit der Tangente an K geschlagen werden, in bezug auf K und L erhalten bleibt.

2) Kreis K und ein Punkt P.

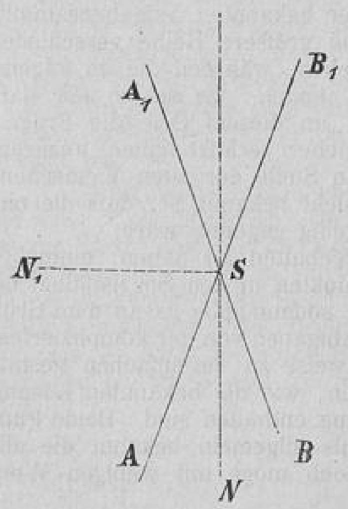
Beide Ähnlichkeitspunkte fallen mit P zusammen. Die Potenzlinie ist die durch die Mitten der von P an K gelegten Tangenten gehenden Geraden und der Ort für die Mitten aller Kreise, die durch P gehen und K rechtwinklig schneiden.

3) Linie und Linie.

Hierbei macht nun Spieker die mir unerfindliche Bemerkung: „die Chordale zweier Graden ist eine unbestimmbare Gerade durch ihren Schnittpunkt; die Ähnlichkeitspunkte zweier gerader Linien sind unbestimmbar" (vergl. pag. 239, 16e und 17e).



Offenbar müssen die beiden Geraden als Grenzfall zweier gleich grofser sich schneidender Kreise angesehen werden, für $r = \infty$. Für zwei solche Kreise ist die Potenzlinie SS_1 (wegen $MS = M_1S$) offenbar die Halbierungslinie des Winkels MSM_1; aufserdem tritt hier noch eine besondere Eigenschaft aller Punkte der Potenzlinie ein: dafs sie von den beiden Kreisperipherien, sobald die Strahlen nach M und M_1 gezogen werden, gleichen Abstand haben. In diesem besonderen Falle ist somit die Potenzlinie zugleich der Ort für die Mitten der die beiden Kreise gleichartig berührenden (sowohl beide ausschliefsenden, als einschliefsenden) Kreise. Aufserdem ist noch bemerkenswert, dafs der eine Ähnlichkeitspunkt J, auf SS_1 liegend, die Mitte von MM_1 ist und dafs der äufsere Ähnlichkeitspunkt A im Unendlichen in der Richtung $\parallel$ zu MM_1, d. h. $\perp$ zu SS_1 sich befindet.



Nun kann der Übergang zu den sich in S schneidenden Linien auf doppelte Art geschehen. Entweder gehen M und M_1 beide in der Richtung SM und SM_1 ins Unendliche, oder in der Richtung SM und SM_2, der Verlängerung von SM_1 nach der andern Seite (die übrigen noch möglichen Kombinationen ergeben gleichwertiges). Im ersteren Falle ist die Halbierungslinie von ASB die Potenzlinie und die Ähnlichkeitspunkte sind in den Richtungen SN und SN_1 zu suchen im Unendlichen; oder es ist im zweiten Falle SN_1 die Potenzlinie, während für die Ähnlichkeitspunkte dasselbe zu sagen ist, wie vorher. Es treten also hier nicht etwa 2 Potenzlinien auf, sondern die Linien lassen sich in 2facher Weise als unendlich grofs gewordene gleichgrofse Kreise auffassen und darum sind 2 Fälle von Potenzlinien möglich. Wenn man dies Verhältnis nicht genau beachtet (wie offenbar an den oben citierten Stellen von Spieker), so ist eben die allgemeine Lösung trotz der entgegenstehenden allgemeinen Behauptung des Gegenteils gar nicht durch alle Fälle durchführbar, wenigstens scheitert sie sofort, wo 2 Linien gegeben sind. Wichtig ist noch, daſs hier die andere oben erwähnte Eigenschaft der Potenzlinien von gleichen Kreisen erhalten bleibt: daſs nämlich alle Punkte jener gleiche Abstände haben von den Kreisen, d. h. eben hier von den geraden Linien.

4) Linie L und Punkt P.

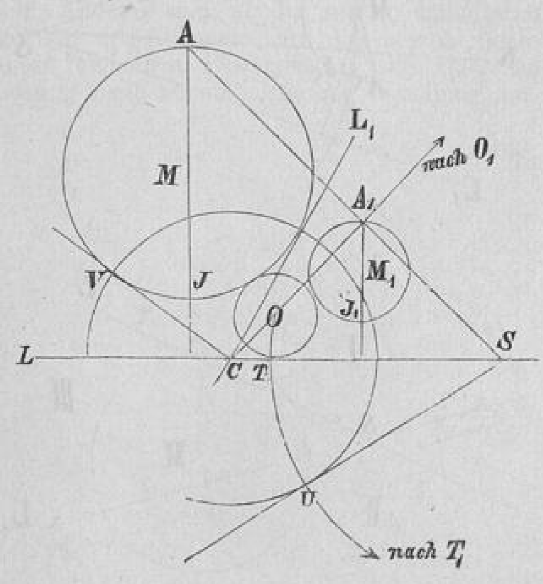
P enthält beide Ähnlichkeitspunkte; L ist Potenzlinie.

5) Punkt und Punkt.

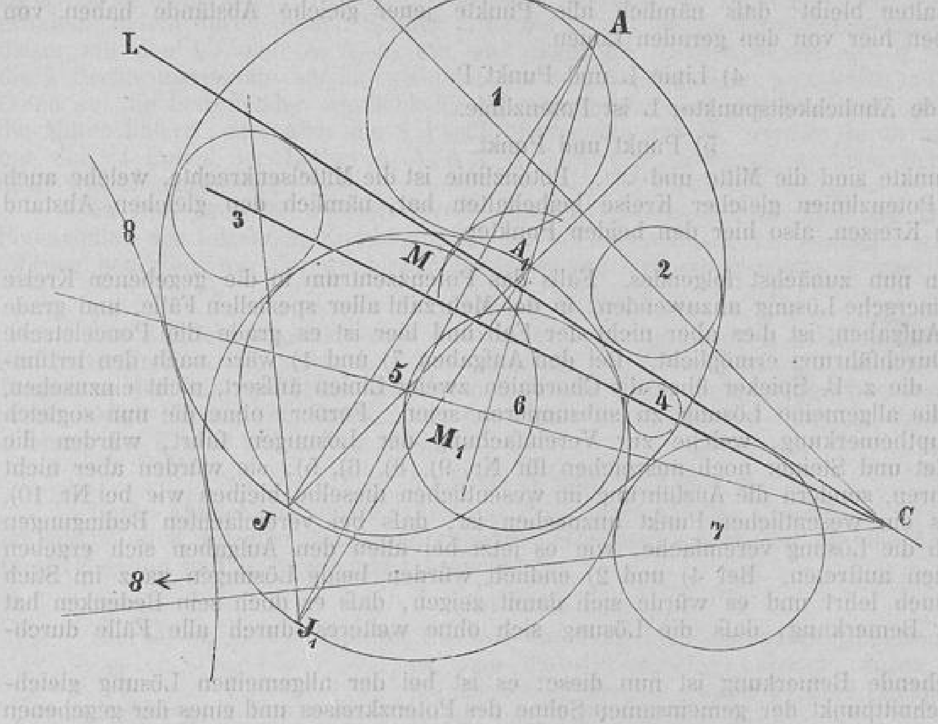
Ähnlichkeitspunkte sind die Mitte und ∞. Potenzlinie ist die Mittelsenkrechte, welche auch die Eigenschaft der Potenzlinien gleicher Kreise beibehalten hat, nämlich den gleichen Abstand ihrer Punkte von den Kreisen, also hier den beiden Punkten. —

Wir bemerken nun zunächst folgendes. Falls das Potenzzentrum in die gegebenen Kreise hineinfällt, ist die Steinersche Lösung anzuwenden; in der Mehrzahl aller speziellen Fälle, und grade bei den einfacheren Aufgaben, ist dies aber nicht der Fall und hier ist es grade die Ponceletsche Lösung, welche die Durchführung ermöglicht. Bei den Aufgaben 7) und 1) wäre nach den irrtümlichen Anschauungen, die z. B. Spieker über die Chordalen zweier Linien äuſsert, nicht einzusehen, wie dieselben unter die allgemeine Lösung zu subsumieren seien. Ferner: ohne die nun sogleich auszusprechende Hauptbemerkung, welche zur Vereinfachung der Lösungen führt, würden die Lösungen von Poncelet und Steiner noch ausreichen für Nr. 9), 8), 6), 5); sie würden aber nicht zur Vereinfachung führen, sondern die Ausführung im wesentlichen dieselbe bleiben wie bei Nr. 10), während es doch als ein wesentlicher Punkt anzusehen ist, daſs bei vereinfachten Bedingungen auch schrittweise sich die Lösung vereinfache, wie es jetzt bei allen den Aufgaben sich ergeben wird, bei denen Linien auftreten. Bei 4) und 2) endlich würden beide Lösungen ganz im Stich lassen, wie ein Versuch lehrt und es würde sich damit zeigen, daſs es doch sein Bedenken hat mit der unbesehenen Bemerkung, daſs die Lösung sich ohne weiteres durch alle Fälle durchführen lasse. —

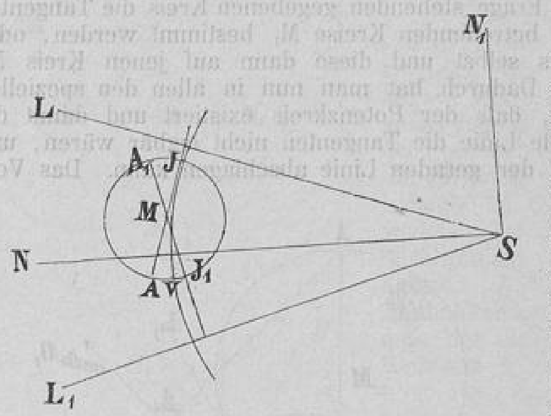
Jene zu machende Bemerkung ist nun diese: es ist bei der allgemeinen Lösung gleichgültig, ob von dem Schnittpunkt der gemeinsamen Sehne des Potenzkreises und eines der gegebenen Kreise, z. B. M_1 mit der Ähnlichkeitsaxe an den in Frage stehenden gegebenen Kreis die Tangenten gelegt und dadurch die Berührungspunkte auf dem betreffenden Kreise M_1 bestimmt werden, oder ob die Tangente gelegt wird an den Potenzkreis selbst und diese dann auf jenen Kreis M_1 abgeschlagen wird von jenem Schnittpunkte aus. Dadurch hat man nun in allen den speziellen Fällen, wo Linien auftreten, den groſsen Vorteil, daſs der Potenzkreis existiert und damit die an ihn zu legende Tangente, während an die gerade Linie die Tangenten nicht legbar wären, und daſs man doch die betreffende Tangente nun auf der geraden Linie abschlagen kann. Das Verfahren wird sofort deutlich werden, wenn wir an die Lösung der Aufgabe 9) (2 Kreise und eine Linie gegeben) herantreten.



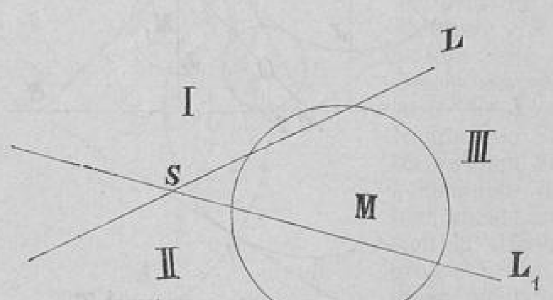
A, J, A_1 und J_1 sind die Ähnlichkeitspunkte (der 5. und 6. für M und M_1 selbst können nun auſser Acht bleiben), AA_1, JJ_1, AJ_1 und JA_1 die 4 Ähnlichkeitsaxen. Wir wählen für unsere Darlegung die Axe AA_1; genau das Gleiche gilt für die übrigen drei. $L_1 \perp MM_1$ und auf dem bekannten Wege konstruierbar, ist Potenzlinie von M und M_1, also (mit Beachtung des im vorhergehenden über die speziellen Fälle Dargelegten) C Potenzzentrum, und der Kreis um C mit CV Potenzkreis. Dieser und L werden nun kombiniert, Schnitt beider ist L selbst. Also ist AA_1 mit S zum Schnitt zu bringen, von S nun (nach der oben gemachten Hauptbemerkung für die jetzigen Speziallösungen) an Kreis C die Tangente SU zu legen und $SU = ST = ST_1$ von S aus auf L abzutragen. Dann erhält man die Mittelpunkte zweier Berührungskreise ohne weiteres durch den Schnitt der Lote in T und T_1 auf L mit dem Lote von C auf AA_1.



Die übrigen 6 Kreise ergeben sich durch dasselbe Verfahren mit den anderen 3 Achsen JJ_1, AJ_1 und JA_1 und ihre Schnittpunkte auf L, die an die Stelle von S treten, und von denen aus dann die Tangenten an Kreis C zu legen sind. — Hingewiesen möge besonders werden auf die hübschen speziellen Fälle; daſs z. B. die beiden gegebenen Kreise sich schneiden und beide Mittelpunkte auf verschiedenen Seiten von L liegen, doch so, daſs die Kreisschnittpunkte auf einer Seite von L liegen. Dann befinden sich 6 Kreise im Innern, 2 auſsen (vergl. die beifolgende Skizze).

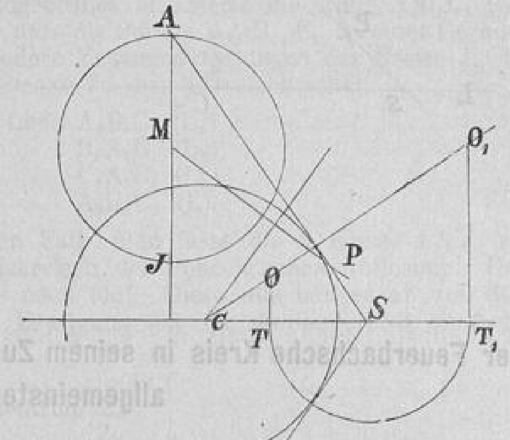


Es ist nun unnötig, jede einzelne Aufgabe mit derselben Ausführlichkeit zu besprechen; es genügt groſsenteils ein kurzer Hinweis. Auch Aufgabe 8) gestaltet sich nach dem neuen Prinzip besonders einfach. Steht $AJ \perp SL$ und $A_1J_1 \perp SL_1$, so sind AA_1, JJ_1, AJ_1 und A_1J Ähnlichkeitsaxen, S Potenzzentrum, der Kreis mit der Tangente SV von S an M Potenzkreis; also ist AA_1 bis zum Schnitt mit SL zu verlängern, von diesem Punkte aus die Tangente an Kreis S auf SL zu beiden Seiten abzutragen und Lote bis zur Halbierungslinie von $\angle$ S zu errichten. Dies stimmt auch damit überein, daſs aus leicht ersichtlichen geometrischen Gründen $AA_1 \perp SN$ sein muſs und daſs anderseits der eine Ähnlichkeitspunkt von SL und SL_1 in der Richtung SN_1 zu suchen ist, d. h. wirklich in der Richtung von AA_1 im Unendlichen liegt. JJ_1 liefert noch 2 Kreise; A_1J und AJ_1 schneiden dagegen die Linie SL (resp. SL_1) im Innern des Kreises S, liefern keine Tangenten und somit keine Kreise. — Sehr hübsch ist für diese Aufgabe der allgemeinere, seltener untersuchte Fall, daſs die Linien SL und SL_1 beide den Kreis M schneiden und S auſserhalb des Kreises liegt. Die Lösung bleibt natürlich dieselbe wie vorstehend; es erscheinen aber 8 Kreise als Lösung: 4 Kreise innerhalb des Winkelraumes III, je 2 in den Räumen I und II (vergl. die beifolgende Skizze).



Die Aufgaben 7) und 1) werden am besten zusammenbetrachtet und erledigen sich dadurch als spezielle Fälle der allgemeinen Lösung, daſs hier die obige Bemerkung von Bedeutung wird, daſs für gleich groſse Kreise die Potenzlinien selbst den Ort für die Mittelpunkte der gleichartig berührenden Kreise (und andere sind hier gar nicht vorhanden) bilden. Da die schneidenden Linien auf doppelte Weise durch Unendlichwerden der Radien entstanden gedacht werden können (vergl. oben), so ergeben sich also in 7) die 4 Kreise durch Schnitt der Halbierungslinien der Innen- und Auſsenwinkel, für 1) der eine Kreis durch die Mittellote; die allbekannten alten Auflösungen.

Aufgabe 6) ist nahe verwandt mit 9), nur wieder um einen Schritt einfacher. JP und AP sind hier die Ähnlichkeitsaxen; C Potenzzentrum und der Kreis mit CP Potenzkreis. Man hat also nur AP mit L zu schneiden, von da die Tangente an Kreis C zu legen und auf L abzuschneiden, und die Lote in den so entstandenen Punkten auf L mit dem Lote von C auf AP zu schneiden; dasselbe für JP. Man sieht hier überall, wie erheblich einfacher diese Lösungen sind gegenüber den älteren, welche hier z. B. mit Hilfe von Proportionen einen Hilfspunkt P_1 suchen und die Aufgabe damit auf 2) zurückführen.

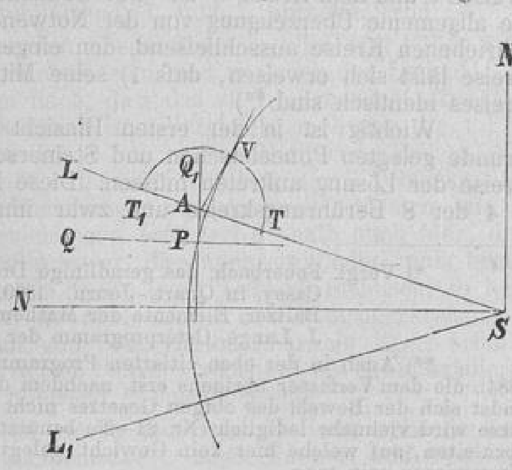


Aufgabe 5) enthält keine Linien und schlieſst sich damit eng an 10) an; die Lösung ist daraus ersichtlich und kann hier übergangen werden. Des Vorteils der Vereinfachung der Konstruktion durch den obigen Grundgedanken gehen wir hier verlustig, weil eben keine Linien auftreten.

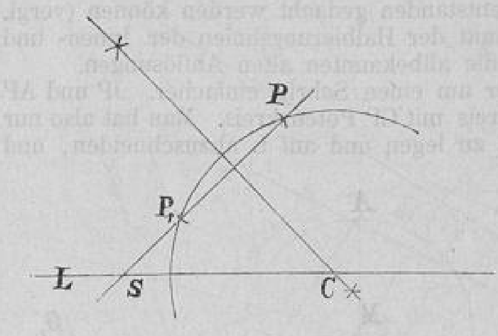
Am besten wird hier auch gleich Aufgabe 3) angeschlossen. Man könnte das Potenzzentrum finden und einen Kreis um dasselbe legen, der P und P_1 trifft und M rechtwinklig schneidet, dann die gemeinsame Sehne mit M ziehen und deren Schnitt S mit PP_1 finden etc. Man bemerkt aber sofort, daſs hier dieser Potenzkreis überflüssig ist; daſs in diesem Falle infolge elementarer Sätze über die Sekanten jeder Kreis, der durch P und P_1 geht und M schneidet, dasselbe leisten, d. h. sobald seine Chordale mit M gezogen wird, zu demselben Punkte S auf PP_1 führen muſs, von dem aus dann an M die Tangenten zu legen sind etc., welches die bekannte, auch durch selbständige Analysis dieser Aufgabe zu erhaltende Lösung ist.

Zuletzt bleiben uns noch die besonders interessirenden Fälle der Aufgaben 4) und 2), bei welchen die unmodifizierte Ponceletsche sowohl als auch Steinersche Lösung im Stich lassen müssen, wie leicht zu sehen ist. Jetzt sind wir infolge des allgemeinen oben vorangestellten Prinzips im Stande, auch diese Fälle unter die allgemeine Lösung zu subsumieren und zu zeigen, daſs die allbekannten Lösungen dieser Aufgaben thatsächlich nichts Anderes sind, als die nun im einfachsten Gewande erscheinende allgemeine Ponceletsche Lösung. Für den Anfänger wird dies sowohl überraschend als auch besonders fruchtbringend sein, diese einfachen Lösungen als die Hülle zu erkennen, in der nun der Gedanke der allgemeinen Lösung nach so mannigfacher Wandlung auftreten muſs.

In Aufgabe 4) ist S Potenzzentrum; Kreis um S mit SP Potenzkreis. P ist Ähnlichkeitspunkt für P und SL sowohl als für P und SL_1. Somit wären wir hier hilflos, wenn die Spiekersche Bemerkung zu Recht bestände, daſs die Ähnlichkeitspunkte von SL und SL_1 nicht angebbar seien (vergl. pag. 6). In Wahrheit kennen wir aber nach dem oben Dargelegten die Richtungen, in denen sie liegen, und das ist hier auch alles, was wir brauchen. Der eine liegt im Unendlichen in der Richtung der Halbierungslinie SN, der andere in der Richtung der Halbierungslinie SN_1. Ähnlichkeitsaxen sind also hier $PQ_1 \parallel SN_1$ und $PQ \parallel SN$. PQ schneidet die Linien innerhalb des Potenzkreises, liefert also keine Lösungen. PQ_1 schneidet SL in A, von A die Tangente an Kreis SP ist auf SL abzutragen, $AT = AT_1 = AV$; die Lote in T und T_1 auf SL liefern auf SN die Kreismitten. Man sieht, daſs



$SN \perp PQ_1$ ist und dafs die Lösung also identisch ist mit der bekannten, dafs zu P der Spiegelpunkt in bezug auf SN gesucht und nun ein Kreis durch diesen, durch P und SL berührend [nach Aufgabe 2)] konstruiert wird.



Es bleibt schliefslich Aufgabe 2). PP_1 ist Ähnlichkeitsaxe. C, der Schnittpunkt des Mittellotes von PP_1 mit L, ist Potenzzentrum, Kreis mit CP Potenzkreis. Die Ähnlichkeitsaxe PP_1 schneidet L in S; es ist die Tangente an den Potenzkreis C zu legen und auf beiden Seiten von S aus auf L abzuschlagen. Die Lote in den erhaltenen Punkten auf L liefern im Verein mit dem Mittellote (das ist ja jetzt das Lot vom Potenzzentrum auf die Ähnlichkeitsaxe) die beiden Kreismitten. Auch hier bemerkt man wieder die Identität mit der bekannten elementaren Auflösung, wonach zu SP und SP_1 die mittlere Proportionale zu suchen und von S nach beiden Seiten auf L abzutragen ist.

II.

Der Feuerbachsche Kreis in seinem Zusammenhange mit der Steinerschen Lösung der allgemeinsten Berührungsaufgabe.

Bekannt ist, dafs der Feuerbachsche Kreis (O) im Dreieck die 4 Berührungskreise (J, J_a, J_b, J_c) des Dreiecks berührt. Der Beweis dafür wird entweder rechnend geführt, oder auch rein geometrisch,*) ist aber in beiden Fällen nur in dem Sinne gegeben worden, dafs der Nachweis einzeln geführt wurde, dafs O den Kreis J berührt, dann dafs O den Kreis J_a etc. berührt, also lauter Einzelkreise, welche den innern Zusammenhang, in welchem O in bezug auf die 4 Kreise J, J_a, J_b, J_c auftritt, nicht hervortreten lassen. Grade aber die Stellung des Feuerbachschen Kreises unter den Berührungskreisen der Berührungskreise des Dreiecks auf Grund der Steinerschen Lösung giebt eine wahre Einsicht in diesen Zusammenhang und den sachgemäfsesten Beweis des Satzes. Es wird sich zugleich damit eine Fülle neuer, bisher nicht beachteter Beziehungen am ebenen Dreiecke herausstellen. Der Feuerbachsche Kreis ist z. B. nicht blofs ein Neunpunktekreis, sondern ein Fünfzehnpunktekreis und berührt nicht blofs die 4 Kreise J, sondern 8 Kreise. Alle diese Beziehungen werden vermittelt durch das im folgenden auftretende Dreieck $Z_a Z_b Z_c$, für welches ein vierter Punkt Z Höhenpunkt ist, und welches das eigentliche Zwischenglied zwischen den Kreisen J und dem Kreise O ist. Der Gedankengang des folgenden ist also: es ergiebt sich zunächst die allgemeine Überzeugung von der Notwendigkeit der Existenz eines Kreises, der, die drei angeschriebenen Kreise ausschliefsend, den eingeschriebenen Kreis einschliefsend berührt. Von diesem Kreise läfst sich erweisen, dafs 1) seine Mitte, 2) sein Radius mit denjenigen des Feuerbachschen Kreises identisch sind.**)

Wichtig ist in der ersten Hinsicht vor allem bei der oben (vergl. Teil I, pag. 5) zu Grunde gelegten Ponceletschen und Steinerschen Auflösung die Duplizität, in welcher unbedingt die Kreise der Lösung auftreten müssen. Diese Duplizität berechtigt bekanntlich zu dem Schlusse, dafs je 4 der 8 Berührungskreise und zwar immer je 2 Paar zusammengehöriger von einem neuen

---

*) Vergl. Feuerbach, das geradlinige Dreieck. 1822. pag. 57 flg.
Casey, in Quart.-Journ. 1860. Vol. 4. pag. 152.
Baltzer, Elemente der Mathematik. 3. Aufl. tom 2. pag. 92.
J. Lange, Osterprogramm der Friedrich-Werderschen Oberrealschule. 1884.

**) Auch in der oben citierten Programmabhandlung des Herrn Dr. J. Lange (Osterprogramm Nr. 97, 1884), die dem Verfasser übrigens erst, nachdem die vorliegende Arbeit druckfertig war, bekannt geworden ist, findet sich der Beweis des obigen Gesetzes nicht auf die Steinersche Lösung des Tactionsproblems gegründet, diese wird vielmehr lediglich (Nr. 21—25) benützt, um weitere Beziehungen der übrigen 16 Berührungskreise abzuleiten, auf welche hier kein Gewicht gelegt worden ist und worauf zur Vergleichung und Ergänzung hingewiesen sein mag.

Kreise berührt werden und daſs somit 6 solcher neuer Kreise für die Gruppierung jener 4 Paare zu je zweien auftreten. Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, daſs die Hoffnung trügerisch wäre, den Feuerbachschen Kreis etwa als einen von diesen 6 Kreisen auftreten zu sehen (beim Verschwinden der übrigen fünf), falls man für M_1, M_2 und M_3 $r = \infty$ wählt, d. h. die Kreise in Linien übergehen läſst. Man kann sich im Gegenteil überzeugen, daſs in dem angedeuteten speziellen Falle jene 6 Kreise übergehen sämtlich in gerade Linien und zwar in die zu den Dreiecksseiten zugeordneten zweiten Tangenten an die 4 Berührungskreise J, J_a, J_b, J_c. —

Zunächst bemerken wir (vergl. Fig. 1, Taf. I), daſs wenn wir die 3 Kreise J, J_b und J_c zusammennehmen und wenn die Schnitte der Innenwinkelhalbierenden mit den Gegenseiten entsprechend mit A_1, B_1, C_1, die der Auſsenwinkelhalbierenden mit A_2, B_2 und C_2 bezeichnet werden, dann für jene 3 Kreise die Punkte A, B, C, B_1, C_1 und A_2 die 6 Ähnlichkeitspunkte sind, daſs also Ähnlichkeitsaxen hier die 3 Dreiecksseiten sind und ihnen zugeordnet als vierte die Linie $A_2B_1C_1$ (L_a) auftritt (worin zugleich der kürzeste Beweis dafür liegt, daſs die Punkte A_2, B_1, C_1 in einer Geraden liegen). Entsprechend ergiebt sich das Gleiche für andere Zusammenfassungen der Kreise J. So tritt nun auf als jedesmal zugeordnete vierte Ähnlichkeitsaxe zu den 3 Dreiecksseiten:

für die Kreise	$J\ J_b\ J_c$	die Linie	$A_2B_1C_1$	(L_a)
» »	$J\ J_c\ J_a$	» »	$B_2A_1C_1$	(L_b)
» »	$J\ J_a\ J_b$	» »	$C_2A_1B_1$	(L_c)
» »	$J_a\ J_b\ J_c$	» »	$A_2B_2C_2$	(L).

Gehen wir nun wieder zurück auf den ersten Fall: man fasse die 3 Kreise $J\,J_b\,J_c$ zusammen. Für diese fragen wir nach den 8 Berührungskreisen der Ponceletschen Auflösung. Drei davon sind offenbar die Dreiecksseiten; es bleiben also noch fünf. Diese alle hängen ab von dem Potenzzentrum der Kreise J, J_b, J_c. Ganz dieselbe Erwägung gilt für die andern 3 oben genannten Fälle.

Es ist für die Kreise:

$J\ J_b\ J_c$	das Potenzzentrum	Z_a
$J\ J_c\ J_a$	» »	Z_b
$J\ J_a\ J_b$	» »	Z_c
$J_a\ J_b\ J_c$	» »	Z.

Die gesetzmäſsige Beziehung dieser 4 Potenzzentren zum Urdreieck und zu dem Dreiecke der 4 Mittelpunkte $J\ J_a\ J_b\ J_c$ wird uns nachher beschäftigen; zunächst möge das Hauptresultat vorangestellt werden bezüglich der Berührungskreise. Für die Kreise J, J_b, J_c bleiben auſser den Linien AB, AC, BC noch 5 Kreise übrig. Nun sind AB, AC und BC zugleich Ähnlichkeitsaxen; folglich wird auf den Loten $Z_a \perp AB$, $Z_a \perp AC$ und $Z_a \perp BC$ noch je ein Mittelpunkt der Kreise liegen, welche je einer Seite in ihrer Eigenschaft als Berührungskreis zugeordnet sind und zwar auf diese selbe Seite als Ähnlichkeitsaxe bezogen. Der der Linie BC zugeordnete Kreis muſs $J\ J_b\ J_c$ gleichartig, d. h. alle drei ausschlieſsend berühren. Dann bleiben noch 2 Berührungskreise übrig, welche zur Ähnlichkeitsaxe L_a ($A_2B_1C_1$) gehören. Der Umstand, daſs $A_2B_1C_1$ eine innere Ähnlichkeitsaxe ist und daſs A_2 äuſserer Ähnlichkeitspunkt von J_b und J_c ist, bedingt, daſs die beiden Kreise, die zu L_1 gehören, J_b und J_c gleichartig, J ungleichartig berühren, und wie man sich aus den Bedingungen der Figur überzeugt, J einschlieſsend, J_b und J_c ausschlieſsend.

Eine solche Gruppierung der fünf in Frage stehenden Kreise findet in allen vier Fällen statt. Immer wird zu je einer Dreiecksseite e i n Kreis zugeordnet sein und zu jeder der Linien L, L_a, L_b, L_c ein Paar von Kreisen. Bemerkenswert ist dabei noch, daſs das zu L zugeordnete Kreispaar J_a, J_b, J_c gleichartig berührt, weil L äuſsere Ähnlichkeitsaxe ist. Vergleicht man nun die 4 Fälle untereinander, so bemerkt man, daſs bei d r e i e n von den 4 Paaren von Berührungskreisen jedes Falles der eine identisch ist in allen 4 Kombinationen; das sind nämlich die 3 Dreiecksseiten. Nun können an der Ponceletschen Figur alle Kreise und Beziehungen nur paarweise auftreten, wie wir schon mehrfach betont haben. Die Duplizität aller Beziehungen erfordert deshalb auch hier, daſs, da bei d r e i Paaren in allen 4 Fällen je ein Exemplar identisch war, dies auch stattfinden muſs bezüglich der vierten Kreispaare; wären bloſs z w e i berührende Kreise (resp. Gerade) identisch, so lieſse sich über weitere Übereinstimmung nichts ausmachen; da aber von d r e i Berührungskreispaaren je einer gemeinsam ist, so wird sich notwendig auch von dem vierten Paar ein Kreis erhalten haben, der allen 4 Fällen gemeinsam ist. Von diesem vierten Paare wird somit ein Kreis existieren, der nun alle 4 Kreise berührt, nämlich $J_a\ J_b\ J_c$ ausschlieſsend, J einschlieſsend.

Eine solche und keine andere Beziehung zu den vieren muſs der in Rede stehende Kreis haben, weil er für die Kombination $J_a\ J_b\ J_c$ der Ähnlichkeitsaxe L zugeordnet ist und diese eine äufsere ist, während anderseits durch die gegenseitige Lage der 4 Kreise J_a, J_b, J_c und J der Fall ausgeschlossen ist, daſs er J_a, J_b, J_c einschlieſsend und J ausschlieſsend berühren könnte.

Die 4 Gruppen von je 3 Kreisen J liefern 32 Berührungskreise, und da 12 davon durch die 3 Dreiecksseiten repräsentiert werden, so hätte man, wären alle übrigen Berührungskreise vollständig auseinander fallend, 20 + 3, d. h. 23 Berührungskreise. Eine solche Zahl ist völlig unmöglich, aus inneren Gründen der Symmetrie der Figur infolge der Duplizität aller Beziehungen. Dieser wird nur genügt dadurch, daſs für je drei der Kreise J, J_a, J_b, J_c von den 8 Berührungskreisen vier (und nicht drei) zugleich für die übrigen möglichen Kombinationen der J-Kreise gelten, so daſs dann nur 16 verschiedene Berührungskreise für je drei der J-Kreise vorhanden sind, vier aber für alle 4 Gruppen und zwar sind dies 3 Linien (die Dreiecksseiten) und ein Kreis, so daſs dann also im ganzen 20 Berührungskreise auftreten, die obigen 16, sodann die 3 Dreiecksseiten und der eine fragliche, eine ganz besondere Stellung einnehmende Kreis.

Es giebt also einen Kreis, der J einschlieſsend, J_a, J_b und J_c ausschlieſsend berührt. Daſs dieser identisch ist mit dem Feuerbachschen Kreise, d. h. daſs er durch die Seitenmitten und Höhenfuſspunkte des $\triangle$ ABC geht, soll im folgenden gezeigt werden; und zwar ergiebt es sich aus der Beziehung der Punkte Z, Z_a, Z_b, Z_c zum $\triangle$ ABC. Zunächst folgt aus dem vorhergesagten und aus der Ponceletschen Lösung, daſs der Mittelpunkt O des fraglichen Kreises liegen muſs auf dem Schnitte der 4 Lote:

$$Z_a \perp L_a$$
$$Z_b \perp L_b$$
$$Z_c \perp L_c$$
$$Z \perp L.$$

Diese schneiden sich also in einem Punkte O, dem Mittelpunkte des Kreises.

Da nun aber auch noch von anderer Seite her, wie sich zeigen wird, sich einsehen läſst, daſs jene 4 Lote sich in einem Punkte schneiden müssen, so wird somit auch dadurch bekräftigt, daſs es einen solchen Kreis geben muſs, der J einschlieſsend, J_a, J_b und $_c$ ausschlieſsend berührt.

Zu zeigen bleibt dann, daſs dieser so festgestellte Berührungskreis mit dem Feuerbachschen Kreise (d. h. mit dem Kreise, von dem man weiſs, daſs er die bekannte Eigenschaft hat, durch die Seitenmitten und Höhenfuſspunkte zu laufen) identisch ist. Dies geschieht dadurch, daſs nachgewiesen wird: 1) daſs der auf obigem Wege erhaltene Punkt O wirklich die Mitte des Feuerbachschen Kreises ist und daſs 2) auch der Radius des Berührungskreises mit dem des Feuerbachschen Kreises übereinstimmt. Dann haben die beiden Kreise also Zentrum und Radius gemeinsam. —

Wir haben zu dem Zwecke die Lage der Punkte Z, Z_a etc. genauer zu betrachten. Es ist bekannt, daſs auf BC die Mitte a dieser Seite gleichen Abstand hat von den Berührungspunkten der Kreise J und J_a mit derselben; desgleichen, daſs a die Mitte zwischen den Berührungspunkten der Kreise J_b und J_c mit BC ist. Das Entsprechende gilt für die Seiten AB und AC und ihre Mitten c und b. Ferner ist bekannt, daſs die Potenzlinie zweier Kreise senkrecht auf der Zentrale steht und durch die Mittelpunkte der 4 gemeinsamen äuſseren und inneren Tangenten geht. Die Potenzlinie von J_b und J_c wird also durch a gehen und $\perp$ J_bJ_c stehen, also $\parallel$ AJ, der Halbierungslinie des $\angle$ A, sein. Ebenso ist die Potenzlinie von J und J_c ein Lot von c auf CJ_c oder eine Parallele zu CJ_b und die Potenzlinie von J und J_b die Parallele durch b zu JB. Diese 3 Potenzlinien schneiden sich in Z_a. Vervollständigt man die Figur für die übrigen 3 Fälle, so ergiebt sich:

Zieht man durch die 3 Seitenmitten Parallelen zu den Halbierungslinien der gegenüberliegenden Dreiecks-Innen- und Auſsenwinkel, so schneiden sich diese 6 Linien zu je dreien in 4 Punkten, den 4 Potenzzentren Z, Z_a, Z_b, Z_c, und es muſs Z für das $\triangle$ $Z_aZ_bZ_c$ der Höhenpunkt sein.

Dadurch ist nun zugleich das $\triangle$ $Z_aZ_bZ_b$ ähnlich und ähnlich liegend zu dem $\triangle$ $J_aJ_bJ_c$, für welches J der Höhenpunkt ist; und zwar in ähnlicher Lage für einen inneren Ähnlichkeitspunkt, von dessen Lage zunächst abgesehen werden mag. Es werden dann also die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Figuren durch diesen Ähnlichkeitspunkt laufen müssen, Linien von derselben Bedeutung in beiden Figuren werden parallel laufen müssen und durch entsprechende Punkte parallel gezogene Linien werden in beiden Dreiecken dieselben Eigenschaften zeigen müssen, z. B. durch einen Punkt laufen etc. Wir beziehen uns nun auf folgenden Satz vom Dreieck, den wir, um hier den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, im Anhange darstellen und beweisen (vergl. Anhang I): Verbindet man im Dreieck die Mitte des umgeschriebenen Kreises M mit den

Mitten der 4 Berührungskreise J, J_a, J_b, J_c, so stehen diese Verbindungslinien senkrecht auf den Linien L, L_a, L_b, L_c, d. h.

$$MJ \perp L \; (A_2B_2C_2)$$
$$MJ_a \perp L_a \; (A_2B_1C_1)$$
$$MJ_b \perp L_b \; (B_2A_1C_1)$$
$$MJ_c \perp L_c \; (C_2A_1B_1).$$

Nun kehren wir die Auffassung um. Fällen wir von den Punkten

J_a und Z_a Lote auf L_a
desgleichen von J_b » Z_b » » L_b
» J_c » Z_c » » L_c
» J » Z » » L,

so werden die Lote der 2. Reihe, da sie von homologen Punkten der ähnlichen und ähnlich liegenden Figur ausgehen, das Gleiche leisten, wie die Lote der 1. Reihe. Diese Lote aber schneiden sich in einem Punkte M, folglich werden sich auch jene in einem Punkte, O, schneiden müssen und der Punkt O wird für $\triangle\, Z_aZ_bZ_c$ dieselbe Bedeutung haben wie der Punkt M für $J_aJ_bJ_c$. Nun ist M für das $\triangle\, J_aJ_bJ_c$ der Mittelpunkt des dem Höhenfuſspunktedreieck ABC umschriebenen Kreises; folglich — und dies ist nun der Kardinalpunkt — ist auch O der Mittelpunkt des dem Höhenfuſspunktedreieck von $Z_aZ_bZ_c$, d. h. dem $\triangle$ abc umgeschriebenen Kreises. Die Punkte a, b und c sind aber für das $\triangle$ ABC die Seitenmitten, folglich ist der auf die oben angegebene Weise erhaltene Punkt O thatsächlich der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Seitenmitten geht, d. h. des Feuerbachschen Kreises.

Es wäre nun voreilig, zu schlieſsen, daſs dieser letztere Kreis um O identisch sei mit dem zuerst erhaltenen. Nur so viel ist bis jetzt gezeigt, daſs beide Kreise denselben Mittelpunkt O besitzen; es könnte sich aber immer noch um 2 verschiedene konzentrische Kreise handeln. Die weitere Untersuchung zeigt aber, daſs in der That beide Kreise zusammen fallen müssen, und zwar zeigt sich dies daran, daſs beide Kreise denselben Radius haben. Der Feuerbachsche Kreis (also der zuletzt erhaltene um O) hat bekanntlich zum Radius $\frac{R}{2}$, wo R den Radius des dem $\triangle$ ABC umgeschriebenen Kreises bedeutet. Wir werden nun im folgenden nachweisen, daſs auch der nach der Steinerschen Lösung konstruierte Berührungskreis diesen Radius besitzen muſs, wobei sich zugleich eine Fülle von neuen Beziehungen am ebenen Dreieck ergeben wird.

Die Dreiecke $Z_aZ_bZ_c$ und $J_aJ_bJ_c$ waren ähnlich und ähnlich liegend und zwar invers, also für einen innern Ähnlichkeitspunkt. Richten wir nun auf diesen unser Augenmerk, so zeigt sich, daſs dies der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist. ZJ, Z_aJ_a, Z_bJ_b, Z_cJ_c laufen durch einen Punkt; daſs es S, der Schwerpunkt sein muſs, sieht man daran, daſs auch die Verbindungslinien homologer anderer Punkte durch denselben Punkt laufen müssen. Nun ist C in $J_aJ_bJ_c$ Höhenfuſspunkt und Ecke von $\triangle$ ABC, c aber entsprechender Höhenfuſspunkt in $Z_aZ_bZ_c$ und zugleich Mitte von AB. Also ist Cc Schwerlinie für $\triangle$ ABC und zugleich Verbindungslinie homologer Punkte von $J_aJ_bJ_c$ und $Z_aZ_bZ_c$; dasselbe gilt von Aa, Bb. S ist also der innere Ähnlichkeitspunkt für diese ähnlich liegenden Dreiecke. Es werden somit alle Verbindungslinien homologer Punkte in demselben Verhältnisse geteilt werden durch S wie Aa, Bb und Cc, d. h. im Verhältnis 1 : 2, d. h. es ist

$$JS = 2\ ZS$$
$$J_aS = 2\ Z_aS$$
$$J_bS = 2\ Z_bS$$
$$J_cS = 2\ Z_cS$$

und, was noch wichtiger ist, da dasselbe Verhältnis für die Verbindungslinien homologer Punkte gilt:

$$JM = 2\ ZO$$
$$J_aM = 2\ Z_aO$$
$$J_bM = 2\ Z_bO$$
$$J_cM = 2\ Z_cO.$$

Weil zugleich MJ ∥ ZO, so sieht man auch, daſs MS = 2 SO ist; die bekannte Beziehung zwischen dem Schwerpunkte in $\triangle$ ABC und den Mitten des umgeschriebenen und des Feuerbachschen Kreises. Auf weitere Beziehungen, daſs auch (da H und M Höhenpunkte der Höhenfuſspunktedreiecke für $J_aJ_bJ_c$ und $Z_aZ_bZ_c$ sind):

$$HJ \parallel MZ \text{ und } HJ = 2\ MZ$$
$$HJ_a \parallel MZ_a \text{ » } HJ_a = 2\ MZ_a$$
etc.

möge hier nur nebenbei hingewiesen werden.

Kehren wir nun zur Steinerschen Lösung zurück, zunächst für den Fall $J_b\, J_c\, J$, so wird (vergl. für das folgende Fig. 2, Taf. II) der Punkt O im weiteren Verfolg derselben folgendermaaßen erhalten: es ist der Pol von B_1C_1 (L_a) in bezug auf J zu bestimmen. Ist nun $Jx \perp B_1C_1$ und x_1 dieser Pol, so liefert $Z_a x_1$ mit dem Kreise J 2 Schnittpunkte, deren einer t mit J und O in gerader Linie liegt, d. h. tJ muß eben das Lot $Z_a \perp L_a$ in O treffen. Dann ist also $x_1 J \parallel Z_a O$. Wird für den Augenblick der Radius des Kreises um O, der J einschließend, J_a und J_b ausschließend berührt, ϱ genannt, während r der Radius des eingeschriebenen Kreises ist, so erhält man also:

$$\frac{Ot}{Jt} = \frac{OZ_a}{Jx_1}.$$

Da nun $OZ_a = \frac{1}{2} MJ_a$, so folgt:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{1}{2} r \cdot \frac{MJ_a}{Jx_1}.$$

Nun ist x_1 der Pol zu L_a in bezug auf den Kreis J, also J die Mitte des einen konjugierten Punktepaares, demnach

$$(2) \qquad Jx_1 \,.\, Jx = r^2.$$

Es läßt sich nun zeigen und zwar im engen Zusammenhange mit dem im Anhang I dargelegten (vergl. Anhang II), worauf wir uns oben gestützt haben, daß:

$$(3) \qquad Jx \,.\, MJ_a = Rr,$$

also aus der Vereinigung von (2) und (3):

$$\frac{MJ_a}{Jx_1} = \frac{R}{r}$$

und durch Eintragung in (1):

$$\varrho = \frac{1}{2} r \,.\, \frac{R}{r} = \frac{1}{2} R.$$

Auch in dem breiteren Rahmen des Gesamtzusammenhanges aller Lösungen läßt sich dasselbe zeigen.

Fällt man noch

$$Jy \perp C_1A_1 \; (L_b)$$
$$\text{und } Jz \perp A_1B_1 \; (L_c)$$

und bestimmt die Pole von L_b und L_c in bezug auf J in den Punkten y_1 und z_1, so ist nun:

$$\left.\begin{aligned} Jx \,.\, MJ_a &= Rr \\ Jy \,.\, MJ_b &= Rr \\ Jz \,.\, MJ_c &= Rr \end{aligned}\right\} \text{(vergl. Anhang II)}$$

und durch Hinzunahme der entsprechenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} Jx \,.\, Jx_1 &= r^2 \\ Jy \,.\, Jy_1 &= r^2 \\ Jz \,.\, Jz_1 &= r^2 \end{aligned}$$

folgt:

$$(4) \qquad \frac{MJ_a}{Jx_1} = \frac{MJ_b}{Jy_1} = \frac{MJ_c}{Jz_1} = \frac{R}{r},$$

also z. B.

$$\frac{Jx_1}{Jy_1} = \frac{MJ_a}{MJ_b} = \frac{OZ_a}{OZ_b},$$

resp.

$$\frac{Jx_1}{Jz_1} = \frac{OZ_a}{OZ_c}.$$

Nun ist auch

$$\begin{aligned} OZ_a &\parallel Jx_1 \\ OZ_b &\parallel Jy_1 \\ OZ_c &\parallel Jz_1, \end{aligned}$$

also

$$\triangle\, OZ_aZ_c \sim Jx_1z_1 \text{ und ähnlich liegend,}$$
$$\triangle\, OZ_aZ_b \sim Jx_1y_1 \quad » \quad » \quad »$$
$$\triangle\, OZ_bZ_c \sim Jy_1z_1 \quad » \quad » \quad »$$

Also laufen

$$Z_ax_1$$
$$Z_by_1$$
$$Z_cz_1 \text{ und}$$
$$OJ$$

durch denselben Punkt Q auf OJ und zwar verhält sich:

$$\frac{QO}{QJ} = \frac{Z_aO}{Jx_1} = \frac{\frac{1}{2}R}{r},$$

wie aus (4) folgt. Man sieht also, daſs diese wichtigen Konstruktionslinien, die zu 3 ganz verschiedenen Fällen gehören, sich in der That in einem Punkte schneiden.

Aus der Steinerschen Lösung folgt dann, daſs dieser Punkt Q nur auf der Peripherie von J liegen kann, d. h. mit t identisch ist, daſs also $\varrho = \frac{1}{2}R$. Genau dasselbe lieſse sich zeigen, wenn man den Pol von L_a und L_c für J_b bestimmt hätte, da (vergl. Anhang II) ganz gleichartige Beziehungen für die angeschriebenen Kreise bestehen: $J_bq \,.\, J_cM = Rr_2$ etc. Damit ist also nach den weiter oben gemachten Bemerkungen bewiesen, daſs die beiden Kreise um O, die vorher möglicherweise bloſs konzentrisch sein konnten, thatsächlich identisch sind, indem sie denselben Radius besitzen.

Bemerkenswert ist, daſs also nun, da a, b und c für $\triangle$ ABC Seitenmitten, für $\triangle\, Z_aZ_bZ_c$ Höhenfuſspunkte sind, die beiden Dreiecke ABC und $Z_aZ_bZ_c$ denselben Neunpunktekreis haben, d. h. der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ABC geht zugleich durch die Mitten der Entfernung je zweier Potenzzentren und berührt im ganzen 8 Kreise, nämlich J_a, J_b, J_c und die 4 Berührungskreise des Dreiecks $Z_aZ_bZ_c$.

Dasselbe gilt auch von dem dem $\triangle$ ABC umgeschriebenen Kreise; auch er berührt 8 Kreise, denn er ist ja für $\triangle\, J_aJ_bJ_c$ und $\triangle\, A^1B^1C^1$ (wo A^1B^1 durch C ∥ AB etc.) der Feuerbachsche Kreis. Überhaupt sei von den reichhaltigen in der Figur enthaltenen Beziehungen nur noch hingewiesen auf die Vertauschbarkeit des Charakters der in Frage kommenden Hauptpunkte. Aus der Konstruktion, durch welche die Punkte Z_a, Z_b etc. erhalten wurden, ergiebt sich, daſs diese Punkte Z, Z_a, Z_b, Z_c für das $\triangle$ abc dieselbe Rolle spielen, wie die Punkte J, J_a etc. für das $\triangle$ ABC, d. h. die Punkte, welche Potenzzentren für $\triangle$ ABC sind, sind die Mitten der berührenden Kreise für $\triangle$ abc. Dieselbe Vertauschbarkeit der Charaktere ergiebt sich für die Punkte H, M und O, während der Punkt S für alle der folgenden Dreiecke als Schwerpunkt erhalten bleibt. Bezeichnet also $A^1B^1C^1$, $A''B''C''$ . . . dieselbe Reihe der Dreiecke nach oben vom $\triangle$ ABC aus, wie abc, $a^1b^1c^1$ etc. nach unten, so giebt folgendes Schema die beste Übersicht über die fraglichen Verhältnisse:

	Höhenpunkt.	Mitte des umschriebenen Kreises.	Mitte des Neunpunktekreises.	Mittelpunktedreieck der angeschriebenen Kreise.	Potenzzentrendreieck.
:	:	:	:		
$\triangle\, A''B''C''$	(H_2)	(H_1)	H	$J_a{}^1J_b{}^1J_c{}^1$	$Z_a{}^1Z_b{}^1Z_c{}^1$
$\triangle\, A^1B^1C^1$	(H_1)	H	M	$Z_a{}^1Z_b{}^1Z_c{}^1$	$J_aJ_bJ_c$
$\triangle$ **ABC**	**H**	**M**	**O**	$\mathbf{J_aJ_bJ_c}$	$\mathbf{Z_aZ_bZ_c}$
$\triangle$ abc	M	O	(M_1)	$Z_aZ_bZ_c$	$i_ai_bi_c$
$\triangle\, a^1b^1c^1$	O	(M_1)	(M_2)	$i_ai_bi_c$	$z_az_bz_c$
:	:	:	:	:	:
u. s. f.					

Die beiden am meisten links und am meisten rechts stehenden Dreiecke haben dabei jedesmal denselben Neunpunktekreis.

Anhang.

I.

Wir tragen im folgenden den Beweis für die interessante im vorhergehenden benützte Eigenschaft nach, daſs:

$$\begin{array}{llll} J_aM \perp L_a & \text{d. h.} & \perp & B_1C_1 \\ J_bM \perp L_b & » & » \perp & A_1C_1 \\ J_cM \perp L_c & » & » \perp & A_1B_1 \\ JM \perp L & » & » \perp & A_2B_2C_2 \end{array}$$

und geben denselben für den dritten und vierten Fall, womit er auch für die beiden ersten Fälle geliefert ist. Wir entwickeln dabei eine sehr bekannte Figur in ihre verborgeneren Beziehungen weiter.

Es sei also M (vergl. hierbei Fig. 3, Tafel II) die Mitte für den dem $\triangle$ ABC umschriebenen Kreis, D die Mitte des Bogens AB, so schneidet bekanntlich der Kreis um D mit DA die Linie DC in J und J_c. Nimmt man noch E, den andern Endpunkt des Diameters DME und sind A_1 und B_1 die Schnitte von AJ und BJ auf den Gegenseiten, so schneiden sich

$$\left.\begin{array}{c} AJ \\ EC \\ J_cB \end{array}\right\} \text{ in } J_a,$$

$$\left.\begin{array}{c} BJ \\ EC \\ J_cA \end{array}\right\} \text{ in } J_b,$$

$$\left.\begin{array}{c} AB \\ A_1B_1 \\ EC \end{array}\right\} \text{ in } C_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daſs J_aJ_bAB ein Sehnenviereck für einen Kreis ist, dessen Mitte E ist.

Daraus folgt, daſs:

C_2J Polare zu J_c für Kreis E

C_2J_c » » J » » E

(die dritte Polare J_cJ für C_2 brauchen wir nicht),

also ist:

$$C_2J \perp J_cE$$
$$(1) \qquad C_2J_c \perp JE.$$

Nun ist:

CC_2 CA CC_1 CB ein harmonisches Büschel,

also

J_b B_1 J B eine harmonische Punktreihe,

also

C_2J_a C_2B_1 C_2J C_2B ein harmonisches Büschel.

Auf 2 zugeordnete Strahlen dieses Büschels sind von J_c aus Lote gefällt.

$$J_cC \perp C_2J_a$$
$$J_cE \perp C_2J.$$

Denkt man sich auch auf die Strahlen des 2. Paares Lote gefällt, so entsteht auch bei J_c ein harmonisches Büschel. Durch dieses letztere Büschel ist die Linie ED hindurchgelegt, welche $\perp$ AB steht. Auf ihr wird somit eine harmonische Punktreihe entstehen müssen, von der das eine Paar von Punkten in E und D vorhanden ist. Das Lot von J_c auf den Strahl C_2B trifft DE im unendlichen, also muſs der diesem Schnittpunkte im unendlichen zugeordnete 4. harmonische Punkt in M, der Mitte von ED, liegen, d. h. das Lot von J_c auf den 4. von C_2 kommenden Strahl, nämlich auf B_1A, läuft durch den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises.

Auf gleiche Weise läſst sich dies für J_b und J_a zeigen. Es ist also:

$$J_cM \perp B_1A_1 \text{ d. h. } \perp L_c$$
$$J_bM \perp C_1A_1 \ (L_b)$$
$$J_aM \perp B_1C_1 \ (L_a).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daſs JM auf der Linie L senkrecht steht.

Das harmonische Strahlenbüschel bei C:

$$CB\ CJ_c\ CA\ CC_2$$

schneidet auf J_cA_2 die 4 harmonischen Punkte ab:

$$A_2\ J_c\ A\ J_b,$$

also ist auch ein harmonisches Büschel:

$$C_2A_2\ C_2J_c\ C_2A\ C_2C.$$

Nun sind von J auf ein Paar konjugierte Strahlen die Lote gefällt:

$$EJ \perp C_2J_c \text{ [vergl. (1)]}$$
$$CJ \perp C_2C.$$

Werden nun noch auf C_2A_2 und C_2A die Lote gefällt, so entsteht bei J ein harmonisches Büschel, durch welches wieder die Linie ED hindurch gelegt ist. E und D sind konjugierte Punkte; das Lot von J auf C_2A schneidet, weil $\parallel$ ED diese Linie wieder im unendlichen; also muſs das Lot von J auf C_2A_2, d. h. auf L durch M gehen, dem 4. zugeordneten Punkt zu E, D und dem unendlich entfernten, da EM = DM.

II.

Fällt man nun

$$Jz \perp A_1B_1\ (L_c)$$
$$\text{und } Ju \perp AB,$$

dann ist C_2zJu Sehnenviereck,

$$\text{also } \angle Juz = JC_2z,$$

desgleichen ist $C_2J_cvv_1$ Sehnenviereck,

$$\text{weil } J_cv \perp C_2A_1 \text{ (Anhang I)}$$
$$\text{und } J_cE \perp C_2v_1 \text{ (» I)},$$
$$\text{also } \angle JC_2z = vJ_cv_1,$$
$$\text{also } \angle Juz = MJ_cE,$$
$$\text{ferner } \angle zJu = EMJ_c \left(\begin{array}{l}\text{da } Jz \parallel J_cM, \text{ beide } \perp C_2A_1\\ \text{und } Ju \parallel EM, \text{ » } \perp AB\end{array}\right)$$
$$\text{also } \triangle zJu \sim \triangle MEJ_c,$$
$$\text{daher: } \frac{Jz}{Ju} = \frac{ME}{MJ_c},$$
$$\text{d. h. } Jz \,.\, MJ_c = Rr.$$

Wird gezogen

$$Jy \perp A_1C_1$$
$$Jx \perp B_1C_1,$$

so ergiebt sich ganz dieselbe Beziehung, die sich dadurch auszeichnet, daſs rechts eine Konstante erscheint. Es ist also

$$\begin{aligned} Jx \,.\, MJ_a &= Rr \\ Jy \,.\, MJ_b &= Rr \qquad (2)\\ Jz \,.\, MJ_c &= Rr. \end{aligned}$$

Beachtet man noch den angeschriebenen Kreis J_b, so ergiebt sich eine ganz analoge Beziehung. Ist

$$J_bq \perp A_1B_1$$
$$J_bq_1 \perp AB,$$

$$\begin{aligned}
\text{so folgt: } \angle\, qq_1J_b &= qC_2J_b \quad \text{(Sehnenviereck } C_2J_bqq_1)\\
\underline{\angle\, qC_2J_b} &= \underline{\angle\, vJ_cJ} \quad (\quad \text{»} \qquad C_2CvJ_c\ )\\
\angle\, qq_1J_b &= \angle\, vJ_cJ\\
\underline{\angle\, DMJ_c} &= \underline{\angle\, q_1Jq} \quad \begin{pmatrix} J_bq \parallel J_cM \text{ und} \\ J_bq_1 \parallel MD \end{pmatrix}\\
\triangle\, J_bqq_1 &\sim MJ_cD\\
\frac{J_bq}{r_2} &= \frac{R}{J_cM},
\end{aligned}$$

(3) also $J_bq \,.\, J_cM = Rr_2$,

denkt man sich noch $J_as \perp A_1B_1$,

$$\text{so ist ja: } \frac{J_bq}{r_2} = \frac{J_as}{r_1},$$

$$\text{also auch } \frac{J_as}{r_1} = \frac{R}{J_cM},$$

(4) also $J_as \,.\, J_cM = Rr_1$.

Oberlehrer **Dr. Wilhelm Goering.**

Fig. 1.

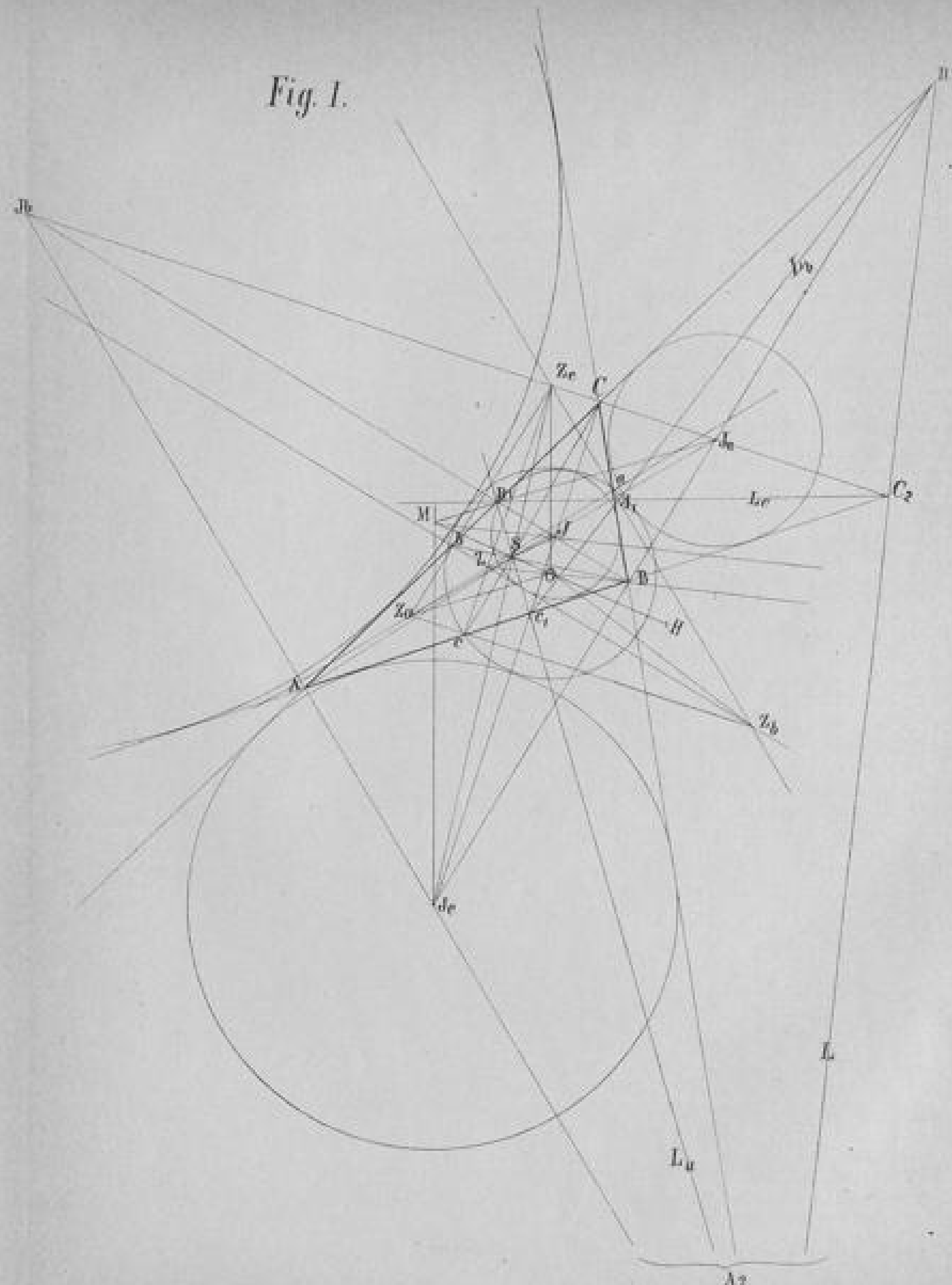
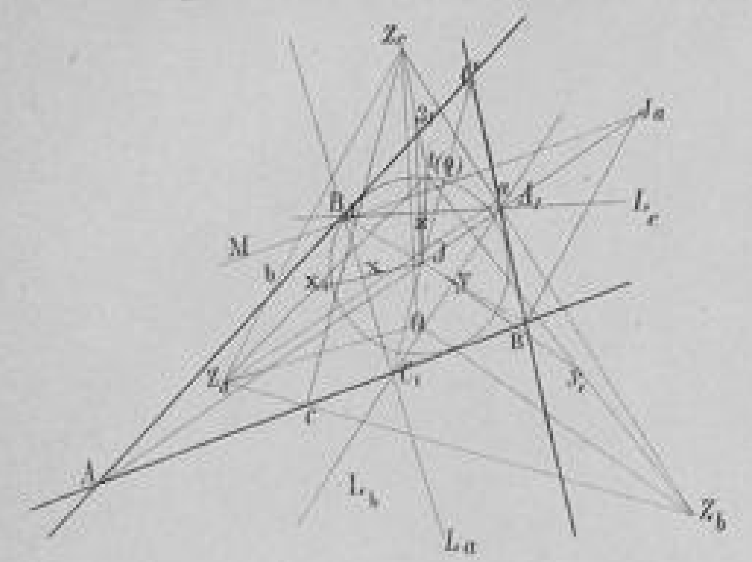
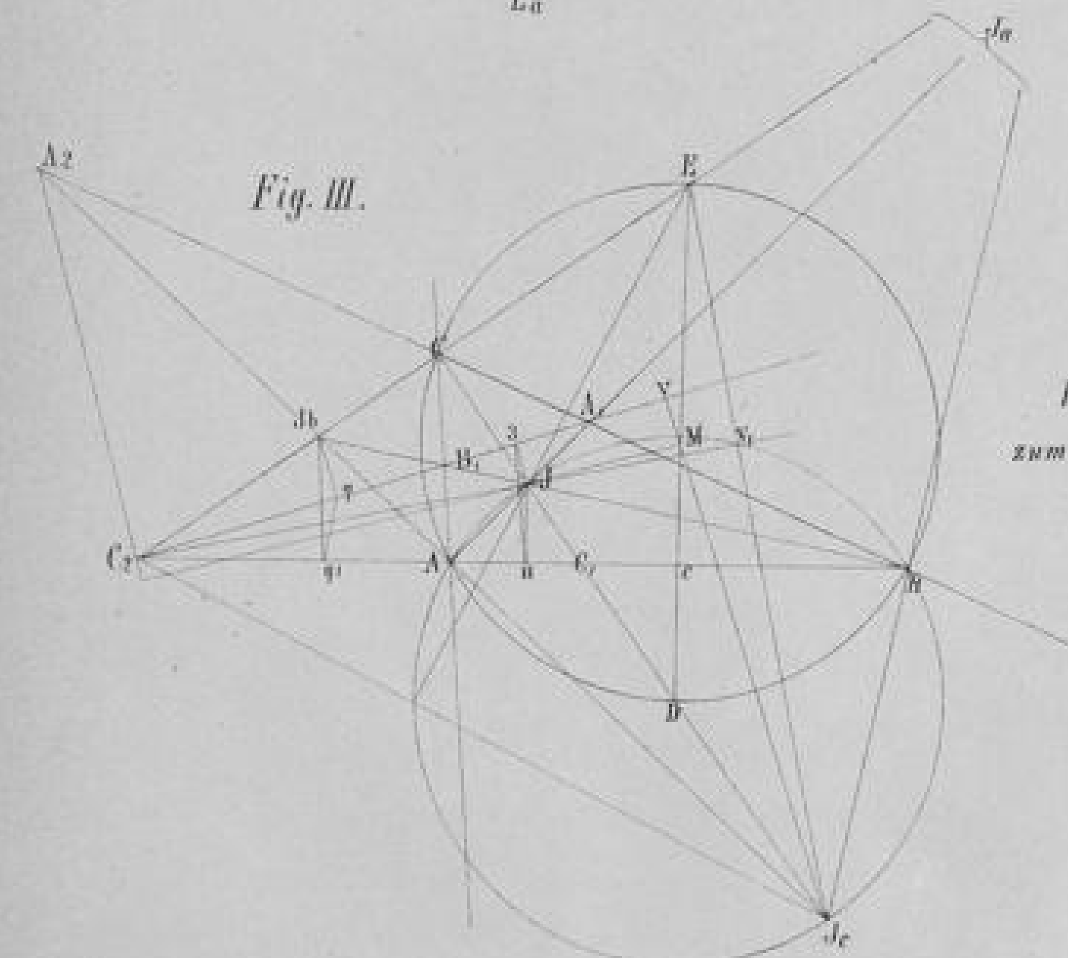


Fig. II.



Spezialfigur zu pag. 14-15.

Fig. III.



Figur
zum Anhang.