Über einige Trisektionskurven.

Als im Jahre 1872 Herr Hippauf im III. Bande des III. Jahrgangs der Hoffmannschen Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht seine Abhandlung „über die Trisektion mittelst der Konchoide auf cirkularer Basis“ veröffentlichte, hat er wohl schwerlich vorausgesehen, dass alsbald von verschiedenen gewichtigen Seiten die Priorität seiner Erfindung bestritten werden würde. Solches geschah aber bereits im V. Jahrgange, Heft III, pag. 226 derselben Zeitschrift von Seite des Herrn Curtze-Thorn. Derselbe sagt: „Die erste Spur der von Herrn H. gegebenen Lösung findet sich bestimmt bei Archimedes (Lemma 8), es ist aber wahrscheinlich, dass sie noch weiter zurück auf den Erfinder der Konchoiden überhaupt, auf Nikomedes, zurückgeht.“ Und an einer anderen Stelle sagt Curtze: „Wahrscheinlich aus arabischer Quelle stammt die Lösung, welche Campanus seiner Übersetzung des Euklid am Ende des IV. Buches beigiebt. Sie ist identisch mit der der drei Brüder und mit der des Herrn Hippauf.“ Auch die Erfindung des Trisektionszirkels des Herrn H. findet bei Curtze keine Gnade, da er den Beweis führen kann, dass dieselbe Erfindung leider schon früher von einem anderen gemacht worden ist.

Im VII. Jahrgange, Heft II, pag. 107 f. der Hoffmannschen Zeitschrift kommt Herr Emsmann-Frankfurt a. d. O. nochmals auf die Trisektion zurück, indem er die Resultate einer in Grunerts Archiv von v. Wasserschleben veröffentlichten Abhandlung mitteilt, welche, soweit die Dreiteilung in Frage kommt, das folium Cartesii anwendet. Dass ausserdem zur Lösung des Problems der Trisektion in alter und neuer Zeit noch andere Kurven angewendet sind (Parabel, Hyperbel, Quadratrix u. s. w.), ist dem Verfasser dieser Abhandlung wohl bekannt. Wenn er es trotzdem wagt über das uralte Problem hier noch einige Worte zu sagen, so thut er dieses zwar auf die Gefahr hin, dass auch seinen Mitteilungen die Priorität abgesprochen werden kann, aber doch in der Hoffnung, dass vielleicht die eine oder die andere seiner Bemerkungen bei dem nachsichtigen Leser einiges Interesse hervorrufen werde.

Zunächst muss es auffallen, dass man beim Wiederausgraben dieses alten Problems der Trisektion in neuerer Zeit zwei so gänzlich verschiedene Kurven wie die Kreiskonchoide und das folium Cartesii so dicht neben einander gestellt findet. Das Auffallende dieser Thatsache verschwindet indes sofort, wenn man als Ausgangspunkt der Betrachtung ein Dreieck annimmt mit den Winkeln α, 2a und $180^\circ - 3\alpha$, dessen eine Seite als bekannt angesehen wird, und für welches man den geometrischen Ort für die der gegebenen Seite gegenüberliegende Ecke sucht. Hier sind offenbar d r e i Fälle möglich.

Erster Fall. Fig. 1.

Gegeben die dem Winkel α gegenüberliegende Seite, gesucht der geom. Ort für den Scheitelpunkt des $\angle\ \alpha$. In jedem Dreiecke dieser Art gilt der Satz, dass $c^2 = a^2 + ab$ ist. Denn es ist:

$$c : a = \sin 2\alpha : \sin\alpha = 2\cos\alpha : 1 \text{ oder } \cos\alpha = \frac{c}{2a}.$$

Ferner ist: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha$. Nun ist aber:

$$\cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1, \text{ daher } \cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{c^2}{4a^2} - 1 \text{ oder}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{c^2 - 2a^2}{2a^2}.$$ Durch Einsetzen dieses Wertes erhalten wir:

$$c^2 = a^2 + b^2 - b\left(\frac{c^2 - 2a^2}{a}\right) \text{ oder } ac^2 = a^3 + ab^2 - bc^2 + 2a^2b \text{ oder}$$

$$(a+b)\ c^2 = a\ (a^2 + b^2 + 2ab) \text{ oder } c^2 = a\ (a+b) = a^2 + ab.$$

Dieser Satz ist auch auf rein geometrischem Wege leicht nachweisbar. — Wird nun C zum Koordinatenanfange gemacht, $AD \perp CB$ gezogen, dann ist $CD = x$, $AD = y$, $BD = a - x$ und folglich:

$$c^2 = y^2 + (a-x)^2 \text{ oder } c^2 - a^2 = y^2 - 2ax + x^2 = ab = a\sqrt{y^2 + x^2} \text{ oder}$$

$$(y^2 + x^2)^2 - 4ax\ (x^2 + x^2) + 4a^2x^2 = a^2(y^2 + x^2) \text{ oder einfacher:}$$

$$y^2 = \frac{a^2 + 4ax - 2x^2 \pm a\sqrt{a(a+8x)}}{2}$$

Einfacher gestaltet sich die Gleichung bei Einführung von Polarkoordinaten, d. h. wenn $x = \varrho \cdot \cos\varphi$ und $y = \varrho \cdot \sin\varphi$ gesetzt wird in die Gleichung $y^2 + x^2 - 2ax = a\sqrt{y^2 + x^2}$. Dadurch wird: $\varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi = \pm a\varrho$ oder $\varrho = 2a\cos\varphi \pm a$ oder $\varrho = a(2\cos\varphi \pm 1)$ und dieses ist die Gleichung für die Konchoide des Herrn Hippauf oder die limaçon de Pascal (nach Roberval).*)

Zweiter Fall. Fig. 2.

Gegeben die dem Winkel 2α gegenüberliegende Seite $AB = c$; gesucht der geom. Ort für die der Seite c gegenüberliegende Ecke, d. h. für den Scheitelpunkt des $\angle\ 2\alpha$. — Es sei A Anfang der Koordinaten, $CD \perp AB$, $CD = y$, $AD = x$, $BD = c - x$. Nun ist

*) Cf. Hoffmanns Zeitschrift, Jahrgang III, Heft 3, pag. 223 f.

$c^2 = a^2 + ab$ und $a^2 = y^2 + (c-x)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2 = c^2 - ab$ oder einfacher: $y^2 + x^2 - 2cx = -ab = -\sqrt{y^2 + (c-x)^2} \cdot \sqrt{y^2 + x^2}$ und daraus folgt nach den nötigen Reduktionen:

$$y^2 = \frac{x^2(3c-2x)}{2x+c}$$

und das ist dieselbe Gleichung wie die von Emsmann*) für das folium Cartesii angegebene.

Auch die Gleichung dieser Kurve gestaltet sich einfacher in Polarkoordinaten, wenn $x = \varrho\cos\varphi$ und $y = \varrho\sin\varphi$ gesetzt wird. Denn dann wird $\frac{y^2}{x^2} = tg\varphi^2$ und folglich:

$$tg\varphi^2 = \frac{3c - 2\varrho\cos\varphi}{c + 2\varrho\cos\varphi} \text{ oder einfacher:}$$

$$\varrho = \frac{c}{3}\cos\varphi(3 - tg\varphi^2). \text{ —}$$

Vergleicht man die vorhin für rechtwinklige (wie in dieser Arbeit immer angenommen wird) Koordinaten erhaltene Gleichung des fol. Cart., welche identisch mit der von Emsmann ist, mit der von Schlömilch für dasselbe folium gegebenen:**) $(4a-3x)y^2 = x(a-x)^2$, so ist leicht zu sehen, dass dieses a entsprechend unserm $\frac{3c}{2}$ ist und dass, um den Koordinatenanfang bei Sch. mit dem unsrigen in Übereinstimmung zu bringen, $a - x = \frac{3c}{2} - x = x_1$ gesetzt werden muss. Dadurch geht die Gleichung von Sch. über in: $\left[6c - 3\left(\frac{3c}{2} - x_1\right)\right]y^2 = x_1^2 \cdot \left(\frac{3c}{2} - x_1\right)$ oder

$$\left(\frac{3c}{2} + 3x_1\right) y^2 = x_1^2 \left(\frac{3c}{2} - x_1\right) \text{ oder } y^2 = \frac{x_1(3c-2x_1)}{3(c+2x_1)}.$$

Werden nun beide Kurven als über derselben Seite c beschrieben angesehen und die Punkte gleicher Abscissen mit einander verglichen, dann ist das x_1 in der letzten Gleichung identisch mit dem x der obigen Gleichung. Bezeichnen wir dann ferner die Ordinate von Sch. mit y_1, so heissen die beiden Gleichungen

$$y^2 = \frac{x^2(3c-2x)}{c+2x} \text{ und } y_1^2 = \frac{x(3c-2x)}{3(c+2x)}.$$

Daraus folgt aber, dass $y^2 = 3y_1^2$ oder dass $y : y_1 = \sqrt{3} : 1$ ist.

Das heisst: die beiden Kurven, welche hier *beide* als folium Cartesii aufgeführt sind, sind keineswegs identisch, wenn auch ihre nahe Verwandtschaft nicht geleugnet werden kann. Sie sind vielmehr als *projektivische* Kurven zu bezeichnen, wie es z. B. Kreis und Ellipse über derselben Hauptaxe sind. Denkt man sich die erstere der beiden Kurven kon-

*) Cf. Hoffmanns Zeitschrift, Jahrgang VII, Heft 2, pag. 109.

**) Cf. Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Schlömilch, II. Teil, dritte Auflage, pag. 60, No. 9 und für die folgenden Bemerkungen ebendaselbst No. 17.

struiert, so ist für jeden Punkt derselben ein Punkt von gleicher Abscisse in der Schlömilchschen Kurve leicht zu bestimmen, wenn man nur die Ordinate der ersten Kurve zur Höhe eines gleichseitigen Dreiecks macht, denn dann ist die Ordinate der anderen Kurve die halbe Grundlinie dieses Dreiecks. Auch gilt natürlich für beide Kurven der Satz, dass Tangenten an zwei Punkte der beiden Kurven, welche gleiche Abscissen haben, sich in demselben Punkte der Abscissenaxe treffen müssen.

In dem Übungsbuche von Schlömilch findet sich unter No. 17, pag. 62 eine Aufgabe, welche offenbar mit dem hier behandelten zweiten Falle ganz identisch ist.

Die Gleichung der Kurve, welche Sch. giebt, lautet:

$$y = \pm \left(\frac{1}{2}\, c + x\right) \cdot \sqrt{\frac{c-x}{c+x}},$$

wo c dieselbe Bedeutung wie bei uns hat, aber der Koordinatenanfang in der Mitte von c liegt. Wird derselbe in Übereinstimmung mit dem unsrigen gebracht, d. h. nach dem in der Figur bei Sch. sich findenden Punkte A verlegt, dann wird diese Gleichung mit der unsrigen identisch.

Es muss auffallen, dass Schlömilch die beiden Kurven unter No. 9 und No. 17 seines, übrigens vortrefflichen, Übungsbuches besonders behandelt, da doch, wenn die Konstanten in beiden gleichgesetzt werden, die eine Kurve nur das projektivische Bild der andern ist. Die bei No. 17 von Schl. gemachte Angabe, dass die Fläche der Schlinge des folium d. h. des geschlossenen Teiles der Kurve $= \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot c$ sei, ist offenbar falsch, da dieses der Inhalt ihrer *halben* Fläche ist; richtig dagegen ist die Angabe, dass die Fläche der Schlinge ebenso gross ist wie dasjenige Flächenstück, welches zwischen der Asymptote und den beiden ins Unendliche verlaufenden Zweigen der Kurve liegt. Dieselbe Eigenschaft wird bei No. 9 auch der projektivischen Kurve zugeschrieben und zwar mit Recht. Die bei No. 9 angegebene Abscisse des Kulminationspunktes ist richtig und gilt selbstverständlich auch für die Kurve unter No. 17, dagegen ist der Wert der Ordinate des Kulminationspunktes ebenfalls unrichtig angegeben. —

In der Zeitschrift von Hoffmann VII, 2, pag. 109 giebt Emsmann eine Konstruktion des folium Cartesii. Eine andere, vielleicht noch elegantere Konstruktion ist die folgende, Fig. 2. Man beschreibe über der gegebenen Linie c = AB als Durchmesser einen Kreis, lege an A eine Tangente, ziehe von B aus einen beliebigen Strahl, der den Kreis in M und die Tangente in N trifft. Alsdann ist $AB^2 = BM(BM+MN)$. Beschreibt man dann ferner Kreise mit BM um B und mit MN um A, welche sich in C und C_1 schneiden, dann sind dieselben Punkte des folium, denn es ist $AB^2 = BC(BC+AC)$ oder $c^2 = a(a+b) = a^2+ab$ d. h. es hat das Dreieck ABC die schon beim ersten Falle besprochene Eigenschaft.

Eine andere ebenfalls sehr einfache Punktkonstruktion ist die folgende, Fig. 3. Man verlängere die gegebene Linie c = AB über beide Endpunkte hinaus um $\frac{1}{2}c$ bis A_1 und

B_1, beschreibe über $A_1B_1 = 2c$ als Durchmesser einen Kreis, nehme $x = AD$ beliebig an und errichte das Lot DH, ziehe A_1H und lege dazu durch A eine Parallele, welche DH in C trifft. Alsdann ist C ein Kurvenpunkt. Denn es ist $A_1H^2 : B_1H^2 = A_1D : B_1D = \frac{c}{2}+x : \frac{3c}{2} - x = c+2x : 3c-2x$. Ferner ist $A_1H : B_1H = A_1D : DH = AD : CD = x : y$ und also auch $A_1H^2 : B_1H^2 = x^2 : y^2$ und

folglich $c+2x : 3c-2x = x^2 : y^2$ oder $y^2(c+2x) = x^2(3c-2x)$.

Endlich sei noch eine dritte Punktkonstruktion erwähnt (Fig. 3). Errichte in der Mitte von c (in 0) ein Lot, ziehe von A aus einen beliebigen Strahl, der das Lot in G trifft, schlage mit AG um B einen Kreis, der AG in C trifft, dann ist C, sowie ein dazu symmetrisch nach unten liegender Punkt, auch ein Punkt der Kurve. Denn es ist $AG^2 : AO^2 = AC^2 : AD^2$ oder da $AG^2 = BC^2 = y^2+(c-x)^2$ ist : $y^2+(c-x)^2 : \frac{c^2}{4} = y^2+x^2 : x^2$ oder $4[y^2x^2+x^2(c-x)^2] = c^2(y^2+x^2)$ oder $y^2(4x^2-c^2) = x^2[c^2-4(c-x)^2]$ oder $y^2(4x^2-c^2) = x^2 . (2x-c)(3c-2x)$ oder einfacher: $y^2(2x+c) = x^2(3c-2x)$, womit die Richtigkeit der Konstruktion dargethan ist. Diese Konstruktion ist aber an die Voraussetzung geknüpft, dass der Winkel $GAB < 60^0$ (oder $> 120^0$) sein muss, weil sonst der mit AG um den Punkt B beschriebene Kreis den beliebigen von A ausgehenden Strahl nicht treffen würde. Ist der Winkel genau gleich 60^0 (oder 120^0), dann geht der Kreis durch den Punkt A, weil ABG dann ein gleichseitiges Dreieck werden muss.

Diese Strahlen, welche unter Winkeln von 60^0 oder 120^0 gegen die Grundlinie (Abscissenaxe) geneigt sind, haben ausser A keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein: sie sind die Tangenten im Schlingpunkte, d. h. sie berühren den einen Zweig der Kurve und durschneiden gleichzeitig den anderen Zweig.

Diese Thatsache ergiebt sich auch aus der Polargleichung

$$\varrho = \frac{c}{3}\cos\varphi\,(3-\operatorname{tg}\varphi^2);$$

denn für $\varphi = 60^0$ ist $\operatorname{tg}\varphi = +\sqrt{3}$ und für 120^0 ist $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, d. h. für beide Annahmen wird $\varrho = 0$. — Da uns das fol. Cart. hier nur als Trisektionskurve interessiert (d. h. die sub No. 17 bei Schlömilch aufgeführte Kurve, n i c h t die sub No. 9), so enthalten wir uns der Besprechung merkwürdiger geometrischer Beziehungen und heben nur noch hervor, dass die Verwendbarkeit unseres folium zur Trisektion mit dem bislang Gesagten noch keineswegs erschöpft ist.

Denn wenn man die gegebene Seite $c = AB$ über B hinaus (Fig. 3) um $\frac{c}{2}$ bis B_1 verlängert, um B mit $\frac{c}{2}$ einen Kreis beschreibt, in B einen senkrechten Durchmesser EF errichtet, von einem Punkte C_1 des folium an denselben die Tangente C_1M zieht, so ist der $\angle BC_1M$, welchen die Centrallinie mit der Tangente bildet, gleich dem dritten Teile des

$\angle$ CBF, welchen die Centrallinie mit dem Durchmesser EF bildet. Denn wenn $C_1D_1 = y$ und wieder A Anfang der Koordinaten ist, so ist $\angle C_1BF = BC_1D_1$ und folglich

$$\sin C_1BF = \frac{BD_1}{BC_1} \text{ und ferner } \sin BC_1M = \frac{BM}{BC_1} = \frac{c}{2BC_1}. \text{ Nun ist aber}$$

$$BC_1^2 = C_1D_1^2 + BD_1^2 = y^2 + (c-x)^2 = \frac{x^2(3c-2x)}{c+2x} + (c-x)^2 \text{ oder,}$$

wenn vereinfacht wird, $BC_1^2 = \frac{c^3}{c+2x}$ und $BC_1^2 = \frac{c \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{c+2x}}$.

Dadurch wird: $\sin C_1BF = \frac{c-x}{c}\sqrt{\frac{c+2x}{c}}$ und $\sin BC_1M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c+2x}{c}}$.

Da nun aber bekanntlich $\sin 3BC_1M = 3\sin BC_1M - 4 \cdot (\sin BC_1M)^3$ ist,

so ist $\sin 3BC_1M = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{c+2x}{c}} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{c+2x}{c} \cdot \sqrt{\frac{c+2x}{c}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{c+2x}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c+2x}{c}}$

oder $\sin 3BC_1M = \frac{c-x}{c} \cdot \sqrt{\frac{c+2x}{c}}$. Demnach ist $\sin C_1BF = \sin 3BC_1M$ und folglich $\angle C_1BF = \angle 3BC_1M$ q. e. d. — Der andere Fall, dass $\angle C_1BF + 3BC_1M = 180^0$, ist natürlich auch möglich, und gilt derselbe für einen Punkt C auf dem geschlossenen Teile der Kurve. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes: „Soll ein Punkt bestimmt werden von der Eigenschaft, dass, wenn man von demselben an einen gegebenen Kreis eine Tangente und die Centrallinie zieht, der von diesen Linien gebildete Winkel gleich dem dritten Teile desjenigen Winkels ist, welchen dieselbe Centrallinie mit einem festliegenden Durchmesser EF dieses Kreises bildet, so liegt dieser Punkt auf dem folium Cartesii."

Ist also das folium konstruiert und man will es zur Trisektion benutzen, dann hat man nur nötig den zu trisecierenden Winkel an BF in B anzulegen und von dem Punkte C_1 aus, in welchem der andere Schenkel des Winkels das folium (hier einen der unendlichen Zweige) trifft, an den mit $\frac{c}{2}$ um B beschriebenen Kreis eine Tangente zu legen. Denn dann ist BC_1M der gesuchte Winkel.

Aus dem zuletzt Gesagten lässt sich ebenfalls eine einfache Punktkonstruktion des folium herleiten. —

Es giebt noch einen anderen Fall, in dem das folium als Trisektionskurve auftritt. Wenn man nämlich in der Figur 2 die Grundlinie des Dreiecks über B hinaus um sich selbst verlängert bis L, diesen Punkt mit C verbindet und durch B zu AC eine Parallele legt BK, dann ist CK = LK und $\angle KBL = \frac{1}{2}CBK$. Mann kann also vom Dreiecke BLC ausgehend sagen: wenn man über der Grundlinie BL ein Dreieck konstruiert, in welchem die von B zur Gegenseite gezogene Mittellinie den Winkel an B so triseciert, dass $\angle KBL = \frac{1}{2}CBK$ ist, dann ist der geometrische Ort für die Spitze C das folium Cartesii, dessen

Schlingpunkt in A liegt. Dass auch Punkt K auf einem folium mit der Konstanten $\frac{c}{2}$ liegt, ist selbstverständlich.

Bevor wir das folium verlassen, sei noch erwähnt, dass in jedem Dreiecke ABC, in welchem $\angle C = 2 \angle A$ ist, die Seite CA mit den von C ausgehenden drei Haupttransversalen, d. h. mit der Seitenhalbierenden, der Winkelhalbierenden und der Höhe einen harmonischen Büschel bildet und zwar sind CA und die Winkelhalbierende zugeordnete Strahlen, denn ein in der Mitte von AB errichtetes Lot wird — wie leicht zu zeigen — durch AB halbiert, soweit es zwischen der Seite CA und der Winkelhalbierenden liegt.

Dritter Fall. Fig. 4.

Gegeben die dem Winkel $180^\circ - 3\alpha$ gegenüberliegende Seite AC = b, gesucht der geometrische Ort für die Spitze B des Dreiecks. Es ist wieder $c^2 = a^2 + ab$. Es sei A Anfang der Koordinaten, BD = y, AD = x, CD = b—x. Nun ist

$c^2 = y^2 + x^2$ und $a^2 = y^2 + (b-x)^2$, also $c^2 - a^2 = b(2x-b)$ und da
$c^2 - a^2$ auch $= ab$ ist, so ist $ab = b(2x-b)$ oder einfacher:
$a = 2x - b$ und folglich $a^2 = 4x^2 - 4xb + b^2 = y^2 + (b-x)^2$ oder
$4x^2 - 4xb + b^2 = y^2 + b^2 - 2bx + x^2$ oder $3x^2 - 2bx - y^2 = o$.

Da somit die Gleichung der Kurve vom II. Grade ist, so muss der gesuchte Ort ein Kegelschnitt sein. Verlegen wir den Koordinatenanfang von A nach O, so dass $AO = \frac{1}{3}b$ ist, dann ist $x = \frac{b}{3} + x_1$. Durch Einsetzen dieses Wertes geht die Gleichung über in $3x_1^2 - y^2 = \frac{b^2}{3}$ oder $\frac{x_1^2}{\left(\frac{b}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$, d. h. die Kurve ist eine Hyperbel, deren halbe grosse Axe $= \frac{b}{3}$ und deren halbe kleine Axe $\frac{b}{\sqrt{3}}$ ist. Nimmt man $\frac{b}{3}$ als Längeneinheit an, dann heisst die Gleichung einfacher:

$$x_1^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Ist e gleich der halben (linearen) Excentricität, so ist $e^2 = 1 + 3$, also $e = \pm 2 = OC$, d. h. C ist der Brennpunkt und, wenn $OC = OC_1$ ist, so ist C_1 der andere Brennpunkt. Ist ferner A_1 die Mitte von OC, dann sind A und A_1 die Scheitel der Hyperbel. Diese Hyperbel wird von Koppe*) erwähnt. —

Dass diese Hyperbel auf mehrere Weisen punktweise konstruiert werden kann, ist selbstverständlich. Will man, nachdem sie gezeichnet ist, dieselbe zur Trisektion verwenden, dann legt man an ihren einen Scheitel A den zu trisecierenden Winkel $= C_1AE$, errichtet

*) Koppe, Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Essen, Bädecker, 1868, pag. 129.

auf AE in A ein Lot, desgleichen eins auf AB in seiner Mitte M und beschreibt um den Schnittpunkt L derselben mit LA einen Kreis, der die Hyperbel in B trifft. Dann ist $\angle$ ABC gleich dem Supplementwinkel des gegebenen und $\angle \text{BAC} = \frac{1}{3}\text{C}_1\text{AE}$, wie leicht zu ersehen ist.

Dass diese Hyperbel ganz das nämliche Recht hat zur Trisektion verwendet zu werden, wie die Konchoide des Herrn Hippauf und wie das folium Cartesii, da ja alle drei Kurven demselben Dreiecke ihren Ursprung verdanken, ist nunmehr wohl einleuchtend.

II. Teil.

Im folgenden mögen noch einige andere Kurven als zur Trisektion geeignet angeführt werden, für welche ebenfalls einfache Punktkonstruktionen angegeben werden können und welche auch sonst vielleicht einiges Interesse zu bieten imstande sind.

No. 1. Fig. 5.

Gegeben ein Kreis und ein fester Durchmesser, gesucht der geometrische Ort für einen Punkt C, der die Eigenschaft hat, dass, wenn man von demselben die beiden Tangenten an den Kreis legt, welche den festen Durchmesser in A und B treffen, ein Dreieck entsteht, dessen Winkel C doppelt so gross wie ein Basiswinkel ist.

Der Mittelpunkt O sei Koordinatenanfang, der Radius = a, OE $\perp$ AC, CD = y und OD = x. Aldann ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ und folglich:} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} \text{also } \sin 2\alpha = \frac{2a\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2}.$$

Andererseits ist aber $\sin 2\alpha = \sin\text{COB} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; daraus folgt, dass

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2a\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2+y^2} \text{ oder } y\sqrt{x^2+y^2} = 2a\sqrt{x^2+y^2-a^2} \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{(y^2-2a^2)^2}{4a^2-y^2} \text{ und } x = \pm\frac{y^2-2a^2}{\sqrt{4a^2-y^2}}.$$

Einfacher wird die Gleichung für Polarkoordinaten, wenn OC = ϱ, x = $\varrho\cos 2\alpha$ und y = $\varrho \,.\, \sin 2\alpha$ gesetzt wird. Alsdann wird:

$$\varrho^2\sin 2\alpha = 2a\,.\,\sqrt{\varrho^2-a^2} \text{ oder } \varrho^4\,.\,(\sin 2\alpha)^2 = 4a^2\varrho^2-4a^4 \text{ oder}$$

$$\varrho^4-\frac{4a^2\varrho^2}{(\sin 2\alpha)^2} = -\frac{4a^4}{(\sin 2\alpha)^2} \text{ und daraus: } \varrho^2 = \frac{2a^2(1\pm\cos 2\alpha)}{(\sin 2\alpha)^2} \text{ oder getrennt:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho^2 = \dfrac{2a^2(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 2\alpha^2)} = \dfrac{4a^2\cos\alpha^2}{(\sin 2\alpha)^2} \\[2ex] \varrho_1{}^2 = \dfrac{2a^2(1-\cos 2\alpha)}{(\sin 2\alpha)^2} = \dfrac{4a^2\,.\,\sin\alpha^2}{(\sin 2\alpha)^2} \end{array}\right\} \text{also:} \left\{\begin{array}{l} \varrho = \pm\dfrac{2a\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \pm\dfrac{a}{\sin\alpha} \\[2ex] \varrho_1 = \pm\dfrac{2a\,.\,\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \pm\dfrac{a}{\cos\alpha}. \end{array}\right.$$

Punktkonstruktion: Man nehme A auf dem festen Durchmesser beliebig an, ziehe die Tangente AE, mache OC = OA und ziehe von C die zweite Tangente, wodurch ich B erhalte, dann ist C der gesuchte Punkt. Liegt A nahe an dem Kreise, so dass die von C aus gezogene zweite Tangente einen Punkt B auf derselben Seite von A giebt, dann ist der Aussenwinkel bei C doppelt so gross, wie der Aussenwinkel an A. Wird A so gewählt, dass $\angle\ \alpha = 60^0$ ist, dann liegt Punkt B in unendlicher Ferne. Wird A auf der Peripherie selbst angenommen, dann fällt A mit C zusammen, d. h. A ist selbst ein Punkt (Scheitel) der Kurve. Hätte man die entsprechenden Konstruktionen für den Punkt B vorgenommen, dann hätte man einen zweiten Zweig der Kurve erhalten. Beide Zweige verlaufen einander entgegengesetzt und umhüllen (Fig. 6) den Kreis. Die vier ins Unendliche verlaufenden Zweige der Doppelkurve lehnen sich an zwei der Axe AB parallele und von derselben um den Kreisdurchmesser 2a nach oben und unten abstehende Asymptoten LL_1 und MM_1. Wird das Flächenintegral $\int xdy = \int \frac{(y^2-2a^2)dy}{\sqrt{4a^2-y^2}}$ ausgerechnet, so wird $F = -\frac{y}{2}\sqrt{4a^2-y^2}+C$. Da nun für $y = o$ auch $F = o$ sein muss, so hat die Konstante C den Wert $= o$. Also ist: $F = -\frac{y}{2}\sqrt{4a^2-y^2}$. Wird das Integral zwischen $y = o$ und $y = a\sqrt{2}$ genommen, so wird $F = -a^2$. Da nun aber $a\sqrt{2}$ die Ordinate der Durchschnittspunkte E und F ist, wie leicht gezeigt werden kann, so heisst das: der Sector AOE ist (absolut genommen) $= a^2$, also der geschlossene Teil der Kurve AEBF $= 4a^2$. Bestimmt man in ähnlicher Weise die zwischen den unendlichen Kurvenzweigen auf beiden Seiten liegenden Flächengrenzwerte, so findet man, dass diese beiden (ganzen) Flächen ebenfalls $= 4a^2$ sind. Die Kurve hat also, ähnlich wie das folium Cartesii, die merkwürdige Eigenschaft, dass der geschlossene Teil der Kurve eben so gross an Fläche ist, wie die beiden zwischen den vier unendlichen Zweigen und den beiden Asymptoten liegenden Flächenstücke.

Wie die Kurve zur Trisektion verwendet werden kann, ist wohl überflüssig zu zeigen. —

No. 2. Fig. 7.

Ist eine Kurve durch die Gleichung $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ oder $(x^2+y^2)a^2 = x^2y^2$ charakterisiert, so ist $y^2 = \frac{a^2x^2}{x^2-a^2}$ und $x^2 = \frac{a^2y^2}{y^2-a^2}$, oder in Polarkoordinaten $\varrho = \pm \frac{2a}{\sin 2\varphi}$. Da auch $\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} = 1$ ist, so ist, wenn $\frac{a}{x} = \cos\gamma$ gesetzt wird, $\frac{a}{y} = \sin\gamma$ oder umgekehrt. Folglich ist

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{y}{x},\ \text{da aber auch}\ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{y}{x}\ \text{ist, so ist}\ \gamma = \varphi.$$

Punktkonstruktion: Beschreibe um O mit a einen Kreis, ziehe einen beliebigen Radius OM (also $\angle$ MOD $= \varphi$), lege an M eine Tangente, welche die Abscissenaxe in D und die Ordinatenaxe in E trifft, vervollständige EOD zum Rechteck, so ist die vierte Ecke C_1 desselben ein Punkt der Kurve. Denn da hier OD = x und OE = y sowie OM = a ist, so ist $\frac{OM}{OD} = \frac{a}{x} = \cos\varphi$, und da $\angle$ OEM = φ ist, so ist $\frac{OM}{OE} = \frac{a}{y} = \sin\varphi$, folglich ist $\frac{y}{x} = \cot g\varphi$. Da aber $C_1D = y$ ist, so ist $\cot g\varphi = \frac{C_1D}{OD}$ und folglich $\angle\, OC_1D = \varphi$, was auch sonst einleuchtend ist. Dass die Formel $\varrho = \pm \frac{2a}{\sin 2\varphi}$ eine andere einfache Punktkonstruktion ergiebt, ist leicht einzusehen. — Wird $2\varphi = 90^0$, also $\varphi = 45^0$ gesetzt, so wird $\sin 2\varphi = 1$ und folglich $\varrho = \pm 2a$, womit ϱ sein Minimum erreicht hat. Ist $\angle$ COD $= 45^0$ und OC = 2a, so ist C der Scheitel eines der vier Zweige der Kurve, denn für $\varphi = 135^0$ hat ϱ denselben Wert $= \pm 2a$. Alle vier Zweige kehren dem Kreise ihre konvexen Seiten zu, und die vier Tangenten des Kreises, welche gegen die Koordinatenaxen senkrecht stehen, sind Asymptoten für die vier Kurvenzweige und zwar je zwei von ihnen für jeden Zweig. Legt man von dem Kurvenpunkte C_1 aus eine Tangente an den um O mit 2a beschriebenen Kreis (der natürlich durch die vier Scheitel der Kurve hindurchgehen muss), welche C_1L heissen mag, und zieht den Radius OL = 2a, so ist $\frac{OL}{OC_1} = \frac{2a}{\varrho} = \sin OC_1L$ und folglich $\angle\, OC_1L = 2\varphi$ nach der Polargleichung. Nun ist aber $\angle\, EC_1O = C_1OD = \varphi$, und folglich ist $\angle\, EC_1L = 3\varphi$, d. h. der Radius vector OC_1 triseciert den $\angle\, EC_1L$. Um die Dreiteilung wirklich vorzunehmen, lege ich den gegebenen $\angle\, 3\varphi$ mit dem Scheitelpunkt irgendwo an die Abscissenaxe z. B. $= \angle$ PQR, lege an den mit dem Radius 2a beschriebenen Kreis eine zum Schenkel PQ parallele Tangente, welche den Kreis in L und die (als gezeichnet angenommene) Kurve in C_1 trifft, verbinde C_1 mit O, dann ist $\angle\, C_1OD = \varphi$.

NB. In dieser letzten Betrachtung ist einmal aus der Gleichheit zweier Kotangenten und einmal aus der Gleichheit zweier Sinus auf die Gleichheit der entsprechenden Winkel geschlossen worden. Nimmt man statt dieser Schlüsse die anderen goniometrischen Möglichkeiten an, so wird man dadurch nur genötigt einen Punkt auf einem der drei anderen Kurvenzweige ins Auge zu fassen.

Will man diese Kurve als geometrischen Ort definieren, so könnte man sagen:

Gegeben ein Kreis mit dem Radius OM = a und ein fester Durchmesser OE desselben, es soll ein Punkt C_1 so bestimmt werden, dass wenn man von demselben ein Lot C_1E auf den festen Durchmesser fällt und zugleich die nicht benachbarte Tangente C_1L zieht, der Winkel zwischen diesen beiden Linien durch die Centrallinie (radius rector) triseciert wird. Die besprochene Kurve ist dann der geometrische Ort dieses Punktes. Der Form der Gleichung nach $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ könnte man die Kurve als die reziproke Kreislinie bezeichnen. Noch sei bemerkt, dass, wenn man das Koordinatensystem um 45° verschiebt, d. h. wenn man $x = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}$ und $y = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}$ setzt, man die Gleichung für den Scheitel C der Kurve erhält

$$(x_1^2 - y_1^2)^2 = 4a^2(x_1^2 + y_1^2).$$

In dieser Form erinnert die Gleichung an die der Lemniscate.

No. 3. Fig. 8.

Gegeben von einem Dreieck die Grundlinie $AB = 2a$, gesucht der Ort für die Spitze des Dreiecks, wenn die Halbierungslinie CG des Winkels an der Spitze gleich einer Dreiecksseite BC ist, oder wenn CG den Winkel ACD — wo CD das Lot ist — triseciert, d. h. wenn gleichzeitig der ganze Winkel ACB in vier gleiche Teile geteilt wird. Die Kurve bietet daher ein erhöhtes Interesse, weil dieselbe gleichzeitig zur Dreiteilung und auch zur Vierteilung benutzt werden kann.

Es sei B Anfang der Koordinaten, $BD = x$, $CD = y$, $AD = 2a - x$. Nun ist $AC : BC = AG : BG$, oder da $BD = GD = x$ und $BG = 2x$ ist, so ist $AG = 2(a - x)$ und daher $AC : BC = a - x : x$ und folglich:

$$y^2 + (2a - x)^2 : y^2 + x^2 = (a - x)^2 : x^2 \text{ oder } 4a^2 - 4ax : a^2 - 2ax = y^2 + x^2 : x^2 \text{ oder}$$
$$4a - 4x : a - 2x = y^2 + x^2 : x^2 \text{ oder } 3a - 2x : y^2 = a - 2x : x^2 \text{ oder}$$
$$y^2 = \frac{x^2(3a - 2x)}{a - 2x} \text{ oder in Polarkoordinaten } \varrho = \frac{a(4\cos\varphi^2 - 1)}{2\cos\varphi(2\cos\varphi^2 - 1)}.$$

Die Kurve trifft die Abscissenaxe einmal in der Entfernung $x = \frac{3a}{2}$, d. h. im Punkte E (wenn $BE = \frac{3}{2}a$ ist) und ferner zweimal im Punkte B, d. h. durch B gehen zwei Zweige der Kurve. Für $\varrho = 0$ wird $4\cos\varphi^2 - 1 = 0$, d. h. $\varphi = 60°$ oder $120°$. Also zwei Linien, welche gegen die Abscissenaxe bei B unter 60° oder 120° geneigt sind, sind Tangenten an die beiden durch B gehenden Zweige (cf. folium Cartesii). Für $x = \frac{a}{2}$ wird $y = \infty$, d. h. ein in F errichtetes Lot $\left(BF = \frac{a}{2}\right)$ ist Asymptote an die beiden durch B gehenden Zweige. Für $\varphi = 45°$ wird $\varrho = \infty$, dasselbe gilt auch für $\varphi = 135°$, d. h. zwei unter 45° und 135° gegen die Abscissenaxe geneigte Linien sind Asymptoten für den durch E gehenden Kurvenzweig. Die drei Kurvenzweige kehren einander ihre konvexen Seiten zu. Zur Trisektion genügt ein durch B gehender Zweig. Der über AB als Durchmesser beschriebene Kreis trifft die drei Zweige so, dass Abscissen und Ordinaten (absolut gerechnet) gleich gross sind, und zwar ist $x = y = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

Punktkonstruktion: Beschreibe über AB irgend einen Kreis, bestimme die Mitte des Bogens AB in E (Fig. 9), mache $AE = AD$ und ziehe ED, dann ist der Punkt, in welchem die verlängerte ED den Kreis trifft, C ein Kurvenpunkt. Oder: Man nehme D auf AB beliebig an, bestimme zu ADB den vierten harmonischen Punkt D_1, beschreibe über DD_1 einen Halbkreis, dann trifft das in der Mitte von BD errichtete Lot den Halbkreis in den gesuchten Punkten.

Die Trisektion lässt sich folgendermassen erreichen.

Man lege an A (Fig. 8), nachdem der eine durch B gehende Kurvenzweig konstruiert ist, den Komplementwinkel des zu trisecierenden Winkels an, dessen freier Schenkel die Kurve in C treffen mag, fälle von C das Lot CD, beschreibe mit CB um C einen Kreis, der die Basis in G trifft, dann ist der gegebene Winkel ACD trisecierd durch CG. Will man dieselbe Kurve zur Vierteilung eines Winkels benutzen, dann beschreibt man über AB einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst und fällt das Lot CD, dann ist die gewünschte Teilung hervorgebracht.

No, 4. Fig. 10.

Gegeben die Linie AB = 2a, gesucht die Spitze C des Dreiecks unter der Voraussetzung, dass die Mittellinie CO den $\angle$ ACB triseciert, d. h. dass $\angle$ ACO $= \frac{1}{2}$BCO ist. — Ist AC = m, BC = n, OC = ϱ, $\angle$ COB = φ, $\angle$ ACO = γ und $\angle$ BCO = 2γ, dann ist: $a^2 = n^2+\varrho^2-2n\varrho\cos 2\gamma = (n+\varrho)^2-4n\varrho\cos\gamma^2$ und $m : n = \sin 2\gamma : \sin\gamma = 2\cos\gamma : 1$ oder $\cos\gamma = \frac{m}{2n}$ oder eingesetzt: $a^2 = (n+\varrho)^2-4n\varrho \cdot \frac{m^2}{4n^2} = (n+\varrho)^2-\frac{\varrho m^2}{n}$. Ferner ist $a^2 = m^2+\varrho^2-2m\varrho\cos\gamma$ oder $a^2 = m^2+\varrho^2-\frac{m^2\varrho}{n}$. Daraus folgt weiter $(n+\varrho)^2 = \varrho^2+m^2$ oder $n^2+2n\varrho = m^2$ oder $m^2-n^2 = 2n\varrho$. Andererseits ist aber bekanntlich auch $m^2-n^2 = 4a\varrho \cdot \cos\varphi$ und deshalb

$$n = 2a\cos\varphi \text{ oder } \cos\varphi = \frac{n}{2a}.$$

Ist nun O (Mitte von AB) der Koordinatenanfang, OD = x, CD = y, so ist: $m^2 = (a+x)^2+y^2$ und $n^2 = (a-x)^2+y^2$ und folglich:

$$m^2-n^2 = 4ax, \text{ also auch}$$

$$n\varrho = 2ax \text{ und } \varrho\cos\varphi = x \text{ oder } \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}.$$

Für rechtwinklige Koordinaten giebt dies die Gleichung:

$$[(a-x)^2+y^2](x^2+y^2) = 4a^2x^2 \text{ oder } y^2 = \frac{1}{2}\left[-(2x^2-2ax+a^2) \pm a\sqrt{20x^2-4ax+a^2}\right].$$

Für Polarkoordinaten erhalten wir mit Weglassung des gemeinsamen Faktors ϱ^2 die Gleichung:

$$\varrho = a \cdot \cos\varphi \pm a\sqrt{5\cos\varphi^2-1}.$$

Eine leichte Punktkonstruktion ergiebt sich aus $\cos\varphi = \frac{n}{2a}$. Fig. 10.

Beschreibe um O mit 2a einen Kreis, ziehe den Radius OE willkürlich, ziehe EF $\perp$ AB, beschreibe mit OF um B einen Kreis, der den Radius OE in C trifft, dann ist dieses ein Punkt der Kurve, dem natürlich unterhalb der Basis ein symmetrischer Punkt C_1 entspricht. Denn es ist BC = OF = n und folglich $\frac{OF}{OE} = \frac{n}{2a} = \cos\varphi$.

Dass jetzt wirklich im Dreiecke ABC die Mittellinie OC den Winkel an der Spitze triseciert, ist leicht zu beweisen. Es sei $\angle$ OCB = δ, $\angle$ OCA = ε, dann ist BC : OB = n : a = $\sin\varphi : \sin\delta$, da aber $\frac{n}{a} = 2\cos\varphi$ ist, so ist $\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$ oder $\operatorname{tg}\varphi = 2\sin\delta$.

Ferner ist BC : AB = n : 2a = $\sin(\varphi-\varepsilon) : \sin(\delta+\varepsilon) = \cos\varphi : 1$ oder

$\frac{\sin(\varphi-\varepsilon)}{\cos\varphi} = \sin(\delta+\varepsilon)$ oder $\operatorname{tg}\varphi \,.\, \cos\varepsilon - \sin\varepsilon = \sin\delta \,.\, \cos\varepsilon + \cos\delta \,.\, \sin\varepsilon$ oder,

wenn ich $\operatorname{tg}\varphi = 2\sin\delta$ einsetze:

$$2\sin\delta \,.\, \cos\varepsilon - \sin\varepsilon = \sin\delta \,.\, \cos\varepsilon + \cos\delta \,.\, \sin\varepsilon \text{ oder:}$$

$$\sin\delta \,.\, \cos\varepsilon - \cos\delta \,.\, \sin\varepsilon = \sin\varepsilon \text{ oder } \sin\varepsilon = \sin(\delta-\varepsilon).$$

Da nun hieraus $\varepsilon + \delta - \varepsilon = 180^\circ$ nicht folgen kann, so muss sein:

$$\varepsilon = \delta - \varepsilon \text{ und folglich } 2\varepsilon = \delta.$$

Der in der Gleichung $\varrho = a\cos\varphi \pm a\sqrt{5\cos\varphi^2 - 1}$ oben fortgelassene Faktor ϱ^2 lässt erkennen, dass für $\varrho = o$ die Kurve zunächst einen doppelten Punkt besitzt, d. h. die Kurve durchschneidet den Punkt O zweimal. Ausserdem wird für $\varphi = o$ oder 180° $\varrho = a \pm 2a$ $= +3a$ oder $= -a$, d. h. die Kurve durchschneidet die Abscissenaxe in den Punkten A, wo OA = $-a$, und in B_2, wo $OB_2 = +3a$ ist. Sie besteht aus zwei geschlossenen Schleifen, deren eine (die grössere) einen dreimal so grossen Durchmesser wie die andere besitzt. Für $\varrho = o$ wird $\cos\varphi = \pm \frac{1}{2}$ oder $\varphi = 60^\circ$ (oder 120°). Da aber hier ϱ nur verschwindet, wenn die Wurzel negativ angenommen wird, so heisst das: Strahlen, welche (oberhalb oder unterhalb der Axe) unter 60° gegen die Basis geneigt sind, treffen die kleinere Schleife gar nicht, sind also als Tangenten an dieselbe anzusehen. Für das +Zeichen wird aber dann $\varrho = a$, d. h. die grössere Schleife wird von einem unter 60° geneigten Strahle in einem Punkte G getroffen, der auf dem um O mit a beschriebenen Kreise liegt (natürlich existiert nach unten ein symmetrischer Punkt G_1). Ferner für $\cos\varphi = +\sqrt{\frac{1}{5}}$ ist $\varrho = a \,.\, \sqrt{\frac{1}{5}}$, und für $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ wird $\varrho = -a\sqrt{\frac{1}{5}}$, d. h. für $\varphi = 63^\circ\,26'\,6''$ wird ϱ nur eindeutig, desgleichen für den Nebenwinkel dieses Winkels. Wird $\varphi > 63^\circ\,26'\,6''$, so wird $\cos\varphi < \sqrt{\frac{1}{5}}$, also $5\cos\varphi^2 < 1$, d. h. für einen grösseren Wert von φ als der genannte, wird ϱ imaginär. Für einen wachsenden Winkel φ wird ϱ erst wieder reell, wenn der

Grenzwert $180^0 - 63^0\,26'\,6''$ erreicht ist. Liegt φ zwischen den Grenzen 60^0 und $63^0\,26'\,6''$, so hat ϱ zwei positive Werte, d. h. ein mit n um B beschriebener Kreis trifft dann den freien Schenkel von φ in zwei Punkten oberhalb der Axe, welche beide der grösseren Schleife angehören.

Zum Schlusse erwähnen wir noch, dass die grössere Schleife sich ganz auffallend der Gestalt eines Kreises nähert, der annäherungsweise ebenfalls als Trisektionskurve benutzt werden kann. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist L, wenn $LG = LB_2$ ist, und lässt sich der Radius desselben, wie folgt, finden.

Wenn H die Mitte von OB ist, so ist $HO = BO = \frac{a}{2}$. Ferner ist GH als Höhe des gleichseitigen Dreiecks $OGB = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $B_2H = 3a - \frac{a}{2} = \frac{5}{2}a$, folglich $B_2G^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{25}{4}a^2 = \frac{28}{4}a^2 = 7a^2$ und $B_2G = a\sqrt{7}$. Ist nun N die Mitte von B_2G, so ist, da GHLN ein Kreisviereck ist, $B_2L \,.\, B_2H = B_2N \,.\, B_2G$ oder $B_2L \,.\, \frac{5}{2}a = \frac{1}{2}\,BG^2 = \frac{7}{2}a^2$ oder $B_2L = LG = \frac{7}{5}a$; d. h. der Radius dieses Kreises ist gleich $\frac{7}{5}a$.

Will man diesen Kreis zur näherungsweisen Trisektion benutzen, dann hat man folgende Konstruktion vorzunehmen. Fig. 11.

Halbiere die gegebene Seite in O, mache $OL = \frac{8}{5}a$ (denn da $B_2L = \frac{7}{5}a$, also $B_1L = \frac{2}{5}a$ ist, so ist $OL = 2a - \frac{2}{5}a = \frac{8}{5}a$), beschreibe um L mit dem Radius $\frac{7}{5}a$ einen Kreis und desgleichen einen Kreis über AB, welcher den zu trisecierenden Winkel fasst $(\gamma = \delta + \varepsilon)$. Ist dann C der Schnittpunkt beider Kreise und CO die Mittellinie, so ist annähernd $\delta = 2\varepsilon$. — Ist Q der Mittelpunkt des um AB beschriebenen Kreises, so ist

$$QA = QB = QC = \frac{a}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(\delta+\varepsilon)} \text{ und } OQ = a \,.\, \operatorname{cotg}\gamma.$$

Nun ist $QL^2 = OQ^2 + OL^2 = QC^2 + LC^2 - 2 \,.\, QC \,.\, LC \,.\, \cos QCL$ oder

$$a^2\operatorname{cotg}\gamma^2 + \frac{64}{25}a^2 = \frac{a^2}{\sin\gamma^2} + \frac{49}{25}a^2 - 2 \,.\, \frac{a}{\sin\gamma} \,.\, \frac{7}{5}a \,.\, \cos QCL \text{ oder}$$

$$1)\quad \cos QCL = \frac{1}{7} \,.\, \sin\gamma.$$

Damit ist $\angle$ QCL gefunden. Es ist aber, wenn $\angle$ an $O = \varphi$ und $\angle\, BCL = \psi$ ist, $\angle\, CBL = \varphi + \delta$ und folglich $\angle\, QCL = QCA + \gamma + \psi$.

Nun ist $\angle\, QCA = QAC = QAO - (\varphi - \varepsilon)$ und $QAO = R - \gamma$, folglich:

$\angle\, QCA = R - \gamma - \varphi + \varepsilon$ und also $\angle\, QCL = R + \psi + \varepsilon - \varphi$ oder

$\psi + \varepsilon - \varphi = QCL - R$ oder, da $\varepsilon = \gamma - \delta$, so ist $\psi - \varphi - \delta = QCL - R - \gamma$ oder

$$2)\ \varphi+\delta-\psi = R+\gamma-QCL.$$

Im Dreieck BLC ist aber $\sin(\varphi+\delta):\sin\psi = 7:3$ und also:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\delta+\psi}{2} : \operatorname{tg}\frac{\varphi+\delta-\psi}{2} = 7+3 : 7-3 = 5:2 \text{ und folglich:}$$

$$3)\ \operatorname{tg}\frac{\varphi+\delta+\psi}{2} = 2{,}5 \,.\, \operatorname{tg}\frac{\varphi+\delta-\psi}{2}.$$

Ferner ist: $\sin\delta : \sin\varepsilon = \sin(\varphi+\delta) : \sin(\varphi-\varepsilon)$ oder:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta+\varepsilon}{2} : \operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}\frac{2\varphi+\delta-\varepsilon}{2} : \operatorname{tg}\frac{\delta+\varepsilon}{2} \text{ oder, da}$$

$$\frac{2\varphi+\delta-\varepsilon}{2} = \frac{2\varphi+\delta-\gamma+\delta}{2} = \frac{2\varphi+2\delta-\gamma}{2} = \varphi+\delta-\frac{\gamma}{2} \text{ ist:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma : \operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2} = \operatorname{tg}(\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma \text{ oder endlioh:}$$

$$4)\ \operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\right)^2}{\operatorname{tg}\left(\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma\right)}.$$

Aus 1) berechnet man QCL, aus 2) $\varphi+\delta-\psi$, aus 3) $\varphi+\delta+\psi$, aus 2) und 3) findet man $\varphi+\delta$ und endlich aus 4) $\delta-\varepsilon$. Da aber $\delta+\varepsilon = \gamma$ bekannt ist, so sind damit δ und ε gefunden.

Zahlenbeispiel.

Es sei $\gamma = 90^\circ$, also $\sin\gamma = 1$, also $\cos QCL = \frac{1}{7}$, $\angle\ QCL = 81^\circ\,47'\,16''$.

Ferner $\varphi+\delta-\psi = 98^\circ\,12'\,44''$ und $\frac{\varphi+\delta-\psi}{2} = 49^\circ\,6'\,22''$.

$$\begin{aligned}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\delta+\psi}{2}\right) &= \log 2{,}5 = 0{,}397940\\ \log\operatorname{tg} 49^\circ\,6'\,16'' &= \underline{0{,}062462}\\ &= 0{,}460402, \text{ daraus ergiebt sich:}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi+\delta+\psi}{2} &= 70^\circ\,53'\,35''\\ \frac{\varphi+\delta-\psi}{2} &= 49^\circ\ \ 6'\,22''\end{aligned}\right\} \text{ daraus folgt } \varphi+\delta = 119^\circ\,59'\,57''.$$

Ferner ist $\frac{1}{2}\gamma = 45^\circ$, daher $\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma = 74^\circ\,59'\,57''$.

Ferner wird nach 4) $\operatorname{tg}\frac{\delta-\varepsilon}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma\right)} = \operatorname{cotg}\left(\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma\right)$ und folglich $\frac{\delta-\varepsilon}{2}$ der Komplementwinkel von $\varphi+\delta-\frac{1}{2}\gamma$, d. h.

$$\frac{\delta-\varepsilon}{2} = 15^\circ\,0'\,3'', \text{ aber } \frac{\delta+\varepsilon}{2} = 45^\circ, \text{ folglich:}$$

$$\delta = 60^\circ\,0'\,3''$$

δ ist also nur um drei Sekunden zu gross. —

Ein anderes Beispiel, welches durchgerechnet wurde, ist:

$\gamma = 42^\circ$. Hier wird $\delta = 27^\circ\,56'\,2''$, d. h. δ ist um weniger als 4 Sekunden zu klein.

Für $\gamma = 72^\circ$ wurde $\delta = 47^\circ\,50'\,17,''7$ gefunden, also δ um $9'\,42,''3$ zu klein. — Für $\gamma = 102^\circ$ wurde gefunden $\delta = 68^\circ\,24'\,46''$, d. h. es ist δ um $24'\,26''$ zu gross. —

Der Grad der Annäherung, welcher mit Hülfe dieses Trisektionskreises erreicht wird, dürfte daher wohl im allgemeinen für die Praxis ausreichend sein.

Friedland in Mecklenburg im December 1885.

Eugen Marx,
Subrektor.

Fig. 2.

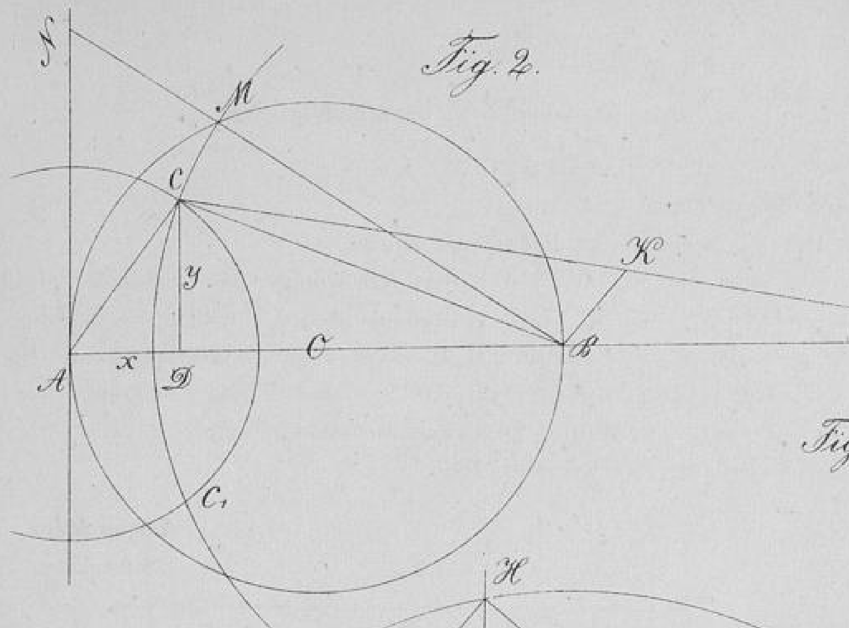

Fig. 1.

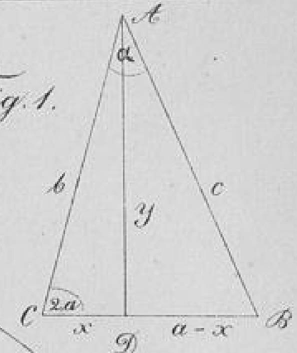

Fig. 3.

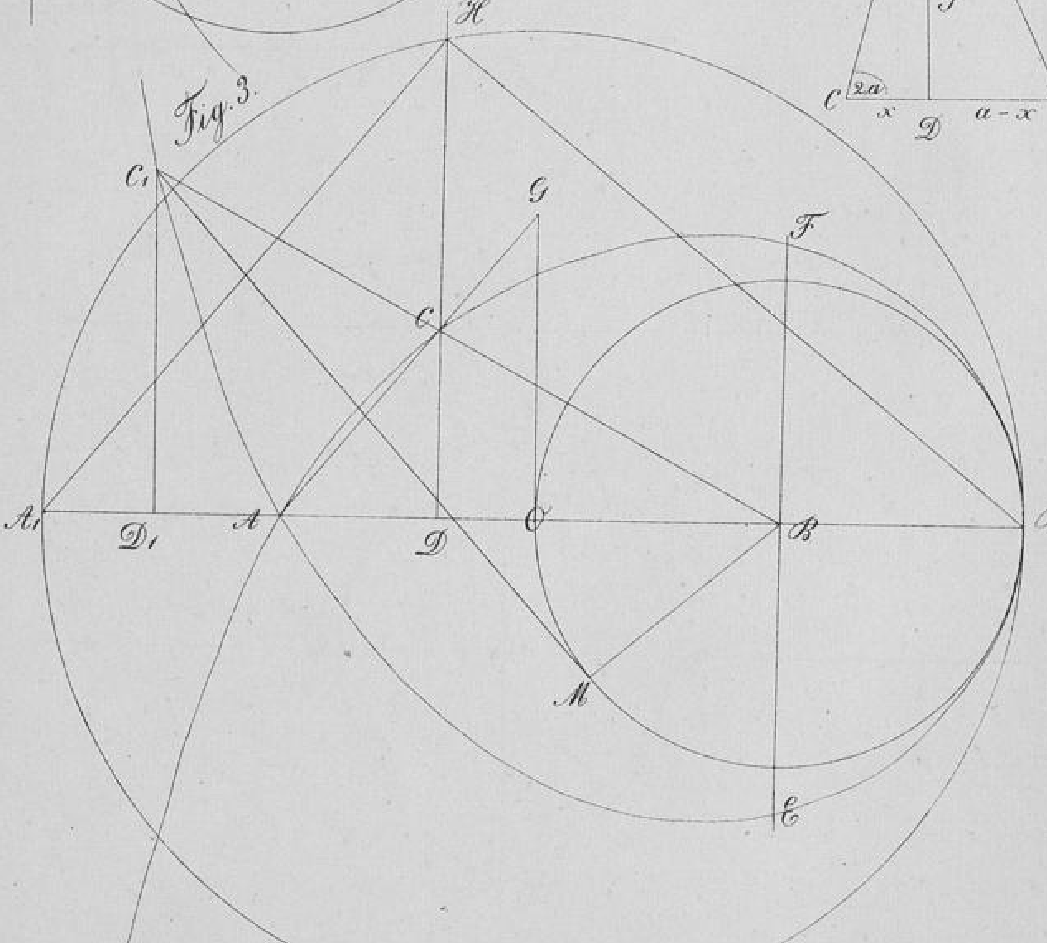

Fig. 5.

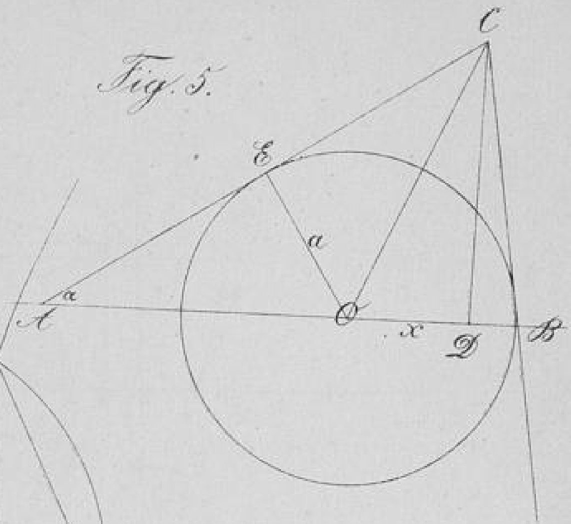

Fig. 4.

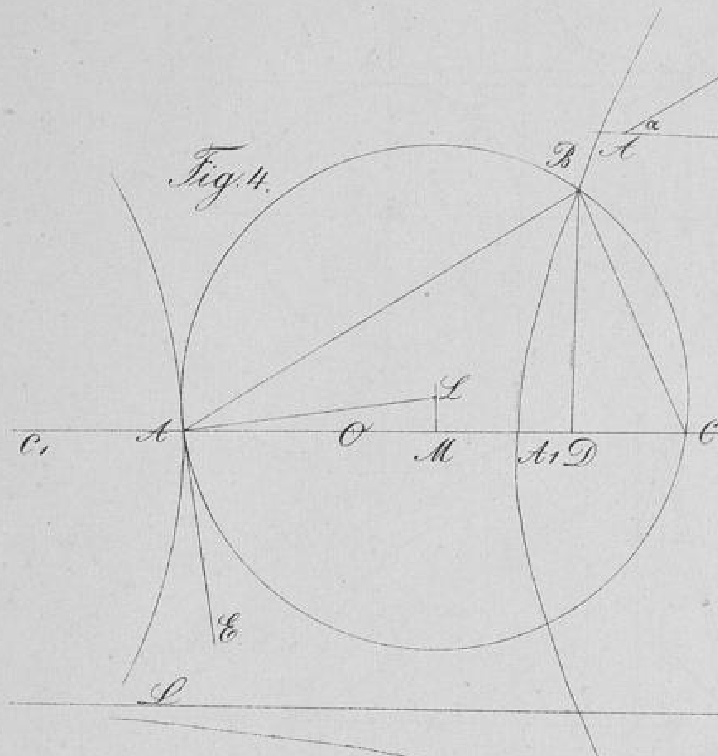

Fig. 6.

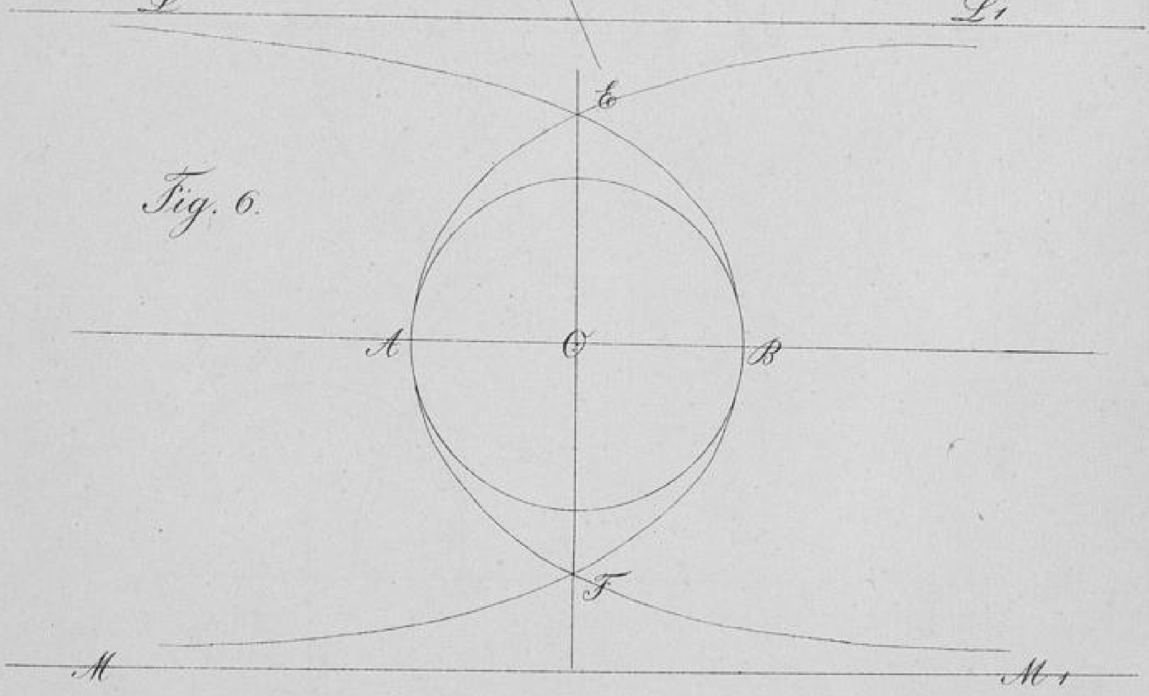

Fig. 7.

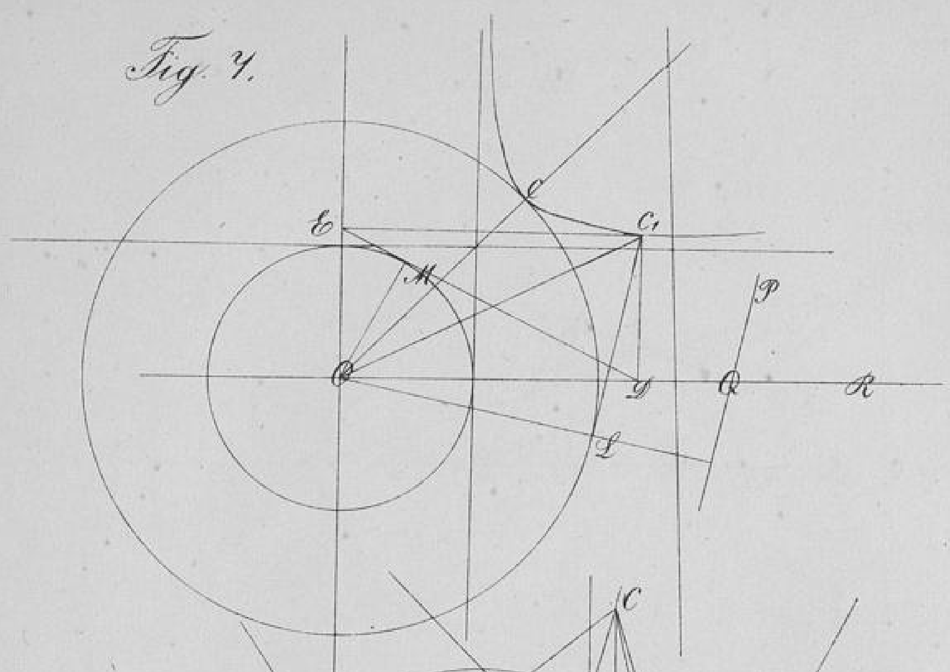

Fig. 8.

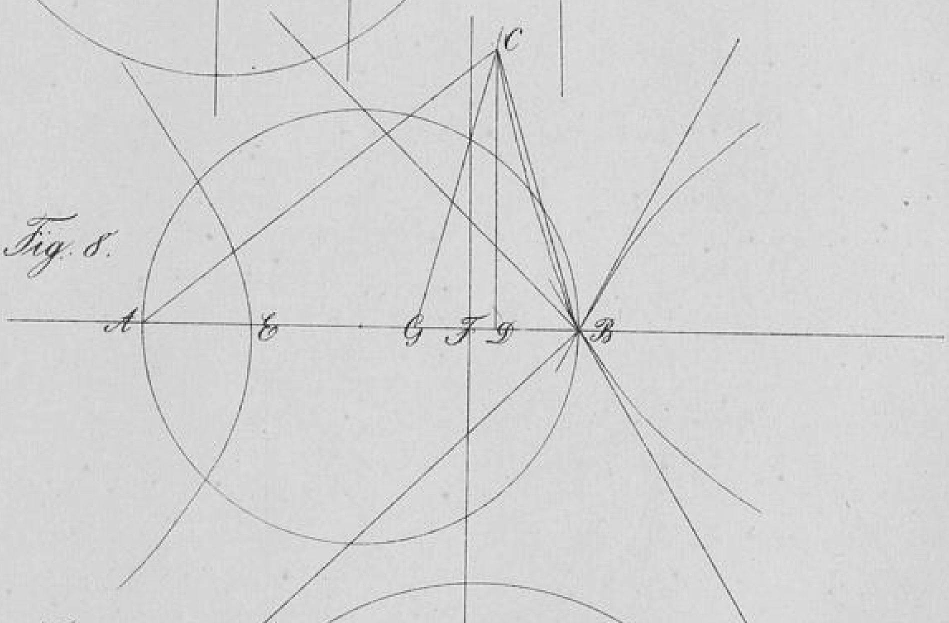

Fig. 9.

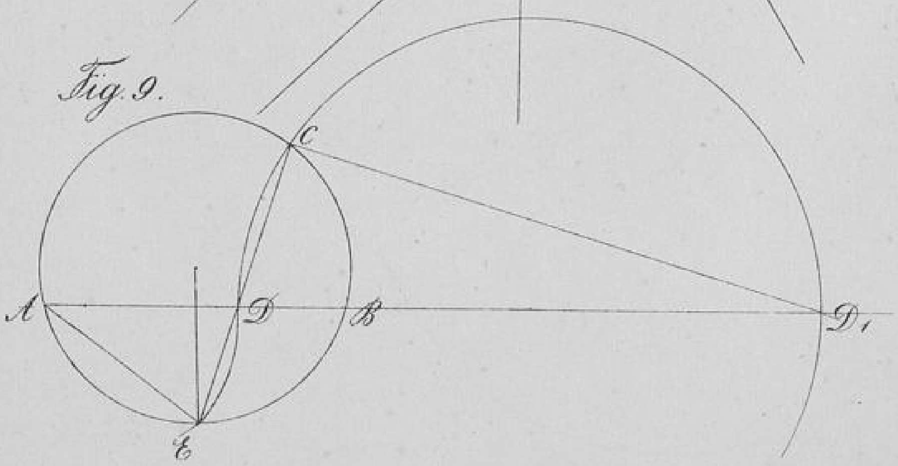

Fig. 10.

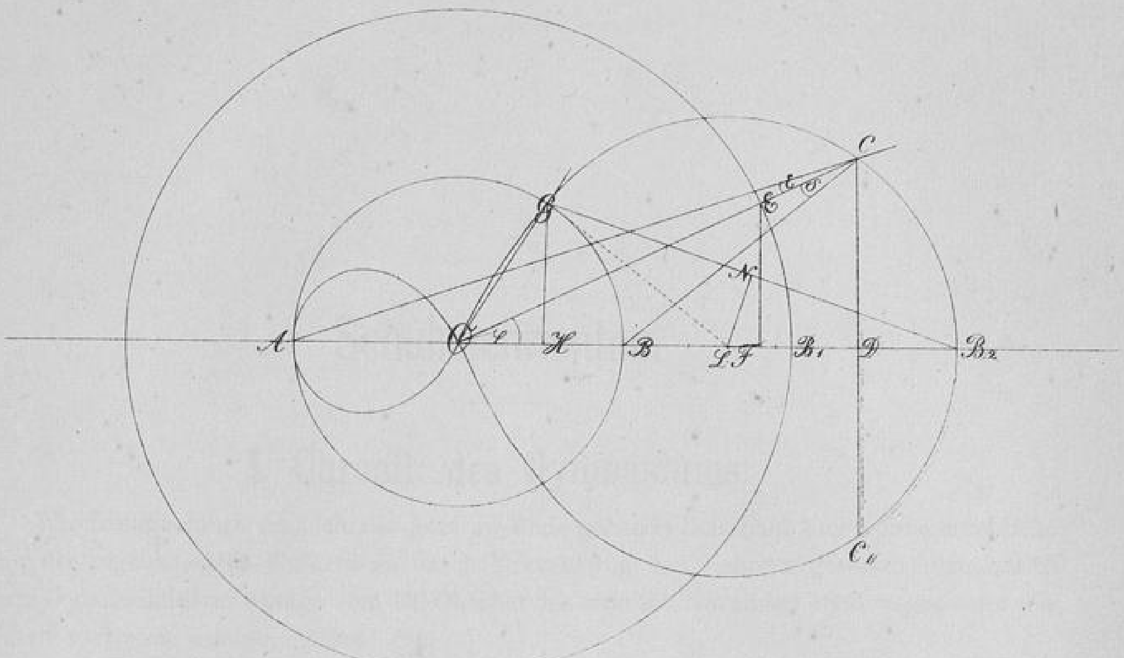

Fig. 11.