

**Königliches König-Wilhelms-Gymnasium  
in Breslau.**

---

# **Die Kartenprojektionen im Schulunterricht**

von

**Prof. Dr. Theodor Maschke.**

---

**Wissenschaftliche Beilage**

zum

**Jahresbericht Ostern 1914.**

---

**Nr. 271**

**Breslau.**

Druck von R. Nischkowsky.

96r  
32 (1914)

Königliches König-Wilhelms-Gymnasium

in Brestau.

Die Kartenprojektionen im Schulunterricht

Prof. Dr. Theodor Blaschke

Landes- u. Stadt-Bibl.  
Düsseldorf

Verlag von W. Neumann, Neudamm 1914.

Brestau.

Verlag von W. Neumann

44 g 304

## Die Kartenprojektionen im Schulunterricht.

Der stundenplanmäßige Unterricht in der Erdkunde wird auf den preußischen Gymnasien und Realgymnasien in der UII abgeschlossen. In den oberen Klassen finden nur noch ab und zu die unbedingt notwendigen Wiederholungen statt. Um auf Kartenprojektionen im geographischen Unterricht einzugehen, fehlen den Schülern bis zur UII die mathematischen Vorkenntnisse, in OII und I fehlt dem Geographen die Zeit. Das dürfte auch für die Oberrealschulen gelten, wo in den oberen Klassen eine Wochenstunde für die Erdkunde angesetzt ist. Sollen unsere Schüler etwas von Kartenprojektionen kennen lernen, so muß dies im mathematischen Unterricht der Prima erfolgen. Die Stereometrie und Koordinatengeometrie bietet vielfach Gelegenheit soweit darauf einzugehen, daß ein Verständnis für die wichtigsten Methoden der Kartenabbildung erzielt werden kann.

Mit Recht wird seit langem von erfahrenen Fachleuten gefordert, bei der Auswahl des mathematischen Aufgabenmaterials praktische Anwendungen zu berücksichtigen. Auf physikalischen Gebieten zeigen sich da oft Schwierigkeiten. Entweder ist die mathematische Übung bei diesen Aufgaben zu gering, oder sie sind künstlich zugeschnitten und ihre praktische Bedeutung ist nur eingebildet. Haben sie aber sowohl physikalisches wie mathematisches Interesse, dann ist oft erst eine beträchtliche Zeit nötig, um die Schüler mit dem Stoff genügend vertraut zu machen.

Bei den Aufgaben über Kartenprojektion treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Ihr praktischer Nutzen leuchtet jedem ein. Die nötigen Vorkenntnisse aber sind rasch beigebracht. Sie sind eine treffliche Übung für die Ausbildung der Raumanschauung, für die Erlangung einer gewissen zeichnerischen Fertigkeit, für die Gewandtheit in der Anwendung geometrischer und trigonometrischer Sätze und für die Benutzung der Koordinatenmethoden. Sowohl größere Aufgaben für häusliche Arbeiten, als auch kleinere für die Klassenarbeiten und das Abiturientenexamen gibt es da in reicher Auswahl.

Trotz solcher Vorzüge liegt, wenn man nach äußeren Zeichen urteilen darf, dieses reiche Feld im mathematischen Schulunterricht noch ziemlich brach. Die bekannten Aufgabensammlungen bringen darüber so gut wie gar nichts. Unter den in den Schulprogrammen veröffentlichten Abiturientenaufgaben wird man meist vergeblich nach einer über Kartenprojektion suchen. Auch unsere mathematischen Lehrbücher für die Schule gehen mit wenigen Ausnahmen gar nicht oder zu oberflächlich darauf ein. Es wäre sehr zu wünschen, daß eine Mahnung von Felix Klein endlich die verdiente Beachtung finden möchte. An der unten angeführten Stelle<sup>1)</sup> heißt es: „Die Theorie der geographischen Karten ist ein Gebiet, das im Rahmen des Schulunterrichts von größter Bedeutung ist. Jedem Knaben wird es interessant sein zu hören, wie denn eigentlich die Karten in seinem Atlas gezeichnet sind, und der Mathematiklehrer wird gewiß größere Teilnahme für seinen Unterricht erzielen können, wenn er hierüber gelegentlich den erwünschten Aufschluß gibt, als wenn er ausschließlich abstrakte Fragen behandelt. Es

<sup>1)</sup> Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil II: Geometrie. Vorlesungen, gehalten im Sommersemester 1908 von F. Klein. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig, Teubner. 1909. Seite 212.

sollte gewiß jeder Lehramtskandidat Bescheid über jenes Gebiet wissen, das überdies auch dem Mathematiker interessante Beispiele von Punkttransformationen liefert.“

Als Vorläufer für die angeregte Verbesserung unseres mathematischen Schulbetriebes habe ich zwei jüngst erschienene Bücher begrüßt: das für Lehrer bestimmte Handbuch des mathematischen Unterrichts von Killing und Hovestadt Bd. II, Teubner 1913, Seite 198—206, und die Didaktik der Himmelskunde und der astronomischen Geographie von Höfler, Teubner 1913, Seite 270—275.

In Folgendem will ich zusammenstellen, wie ich in der UI und OI eines Gymnasiums den Gegenstand behandelt habe. Da ich dabei auf eine 20jährige Erfahrung zurückblicken kann, so darf ich wohl mit einem gewissen Recht hoffen, keinen überflüssigen Beitrag für den Schulunterricht in der Kartenprojektion zu liefern.

### § 1. Zweck und Einteilung der Kartenabbildungen.

Eine geographische Karte bildet die Erdoberfläche oder eines ihrer Teile auf einer Ebene in verkleinertem Maßstabe ab. Der Zweck einer solchen Darstellung würde am vollkommensten erreicht sein, wenn Original und Bild mathematisch ähnlich wären. Die Umriss der Länder und Meere würden dann nicht verzerrt erscheinen und die Längen- und Flächenverhältnisse würden überall richtig wiedergegeben sein. Diese Forderungen ließen sich restlos und leicht erfüllen, wenn die Erde eine Ebene oder ein von ebenen Flächen begrenzter Körper wäre. Auch dann noch würden sich recht einfache Abbildungsgesetze ergeben, wenn die Erdoberfläche so gekrümmt wäre, daß sie sich auf einer Ebene abwickeln ließe, wie das zum Beispiel bei dem Zylinder- und Kegelmantel der Fall ist. Nun hat die Erde aber mit großer Annäherung die Gestalt einer Kugel. Wer jemals als Knabe versucht hat, eine Kugel durch Bekleben mit buntem Papier zu verschönern, wird bald dahinter gekommen sein, daß sich dem Papier zwar irgend eine bestimmte kreisförmige Krümmung geben läßt, nicht aber gleichzeitig eine zweite. Die Kugelfläche gehört nicht zu den abwickelbaren Flächen. Deshalb lassen sich nicht größere Teile von ihr ohne Verzerrung auf einer Ebene abbilden. Das ist nur möglich, wenn man sich auf die Wiedergabe kleiner Stücke beschränkt, bei denen die Erdkrümmung vernachlässigt werden darf. Um die ganze Erde oder größere Teile von ihr durch ein ähnliches Bild darzustellen, müßte man eine der Erdoberfläche gleichartige Fläche, d. h. eine Kugel benutzen, denn die Abweichungen unserer Erde von der Kugelform spielen bei den praktisch möglichen Maßstäben keine Rolle. Die treueste Wiedergabe der Erdoberfläche wird also auf unseren Globen verwirklicht. Daß diese wegen ihrer Unhandlichkeit keinen Ersatz bieten können für ebene Kartenbilder, leuchtet ohne weiteres ein. Man hat deshalb die mannigfaltigsten Methoden erdacht, um den verschiedenen Forderungen, die eine fehlerfreie Abbildung erfüllen müßte, wenigstens teilweise zu genügen.

Ein Ort auf der Erde ist durch seine geographische Länge und Breite bestimmt. Denken wir uns die Erdoberfläche mit einem Netz von Längen- und Breitenkreisen bedeckt, dessen Maschen wir so eng machen können, wie wir wollen, so läßt sich irgend ein Gesetz vorschreiben, nach dem wir diese Kreise auf einer Ebene oder einer Fläche, die in einer Ebene abwickelbar ist, abbilden sollen. Hiernach gibt es unzählig viele Methoden, die eine eindeutige Darstellung der Kugelfläche auf einer Ebene ermöglichen. Ihre Zahl wird dadurch eingeschränkt, daß man je nach dem Zweck, dem die Karte dienen soll, gewisse Bedingungen stellt. So kann man z. B. verlangen, daß überall zwei beliebige Flächenstücke auf der Erde dasselbe Größenverhältnis haben wie ihre ebenen Bilder, oder daß jeder größte Kugelkreis der Erde als gerade Linie dargestellt wird usw.

Eine Einteilung und Behandlung der Kartenprojektionen auf Grund derartiger Eigen-

schaften erscheint aus didaktischen Rücksichten nicht angezeigt. Im Schulunterricht wird man sich in der Hauptsache auf solche Projektionen beschränken, die nach einfachen geometrischen Gesetzen die Kugelfläche auf einer Ebene oder einer abwickelbaren Fläche abbilden. Da von diesen Flächen nur der Zylinder- und Kegelmantel in Betracht kommen, so werde ich nacheinander die azimutalen, die Kegel- und Zylinderprojektionen behandeln. Für zweckmäßig halte ich es, einige Bemerkungen über Koordinatensysteme vorzuschicken.

## § 2. Koordinaten.

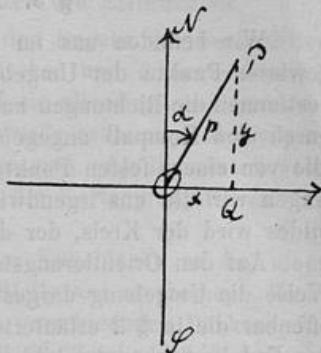
Auf einer geraden oder krummen Linie läßt sich die Lage eines beliebigen Punktes durch eine einzige Angabe festlegen, z. B. durch die auf der Linie gemessene Entfernung des Punktes von einem festen Anfangspunkt. Zur Bestimmung eines Punktes auf einer ebenen oder krummen Fläche genügen zwei Angaben, z. B. auf einer Ebene die senkrechten Abstände des Punktes von einem rechtwinkligen Achsensystem, auf einer Kugelfläche die geographischen Koordinaten Länge und Breite. Im Raum ist ein Punkt erst durch drei Angaben bestimmt, z. B. durch seine Entfernungen von drei sich rechtwinklig schneidenden Ebenen. Wenn wir der Linie eine, der Fläche zwei, dem Körper drei Dimensionen zuschreiben, so beruht diese Ausdrucksweise auf der geometrischen Tatsache, daß sich die Punkte dieser Gebilde durch 1, 2 oder 3 veränderliche Größen darstellen lassen.

Bei den Kartenprojektionen handelt es sich um die Lage von Punkten auf Flächen. Da wir die Erde als vollkommene Kugel ansehen und ihre Oberfläche auch bei den Zylinder- und Kegelprojektionen zuguterletzt auf einer Ebene abbilden, so sind für uns die ebenen und sphärischen Koordinatensysteme besonders wichtig. Außer den bereits erwähnten rechtwinkligen Koordinaten bedient man sich häufig auch der Polarkoordinaten. Bedeutet auf einer horizontalen Ebene (Fig. 1) SN die Richtung von Süden nach Norden und O einen festen Punkt auf SN, so ist die Lage eines beliebigen Punktes P der Ebene bestimmt, wenn man die Polarkoordinaten  $OP = p$  und  $\angle NOP = \alpha$  kennt. Der Winkel  $\alpha$  heißt das Azimut von P in bezug auf den Pol O. Es wird von ON an gezählt im Sinne des Uhrzeigers, also von Norden über Osten, Süden, Westen. Zwischen den Polarkoordinaten von P und seinen rechtwinkligen Koordinaten  $OQ = x$  und  $PQ = y$  bestehen die Gleichungen  $x = p \sin \alpha$ ,  $y = p \cos \alpha$ .

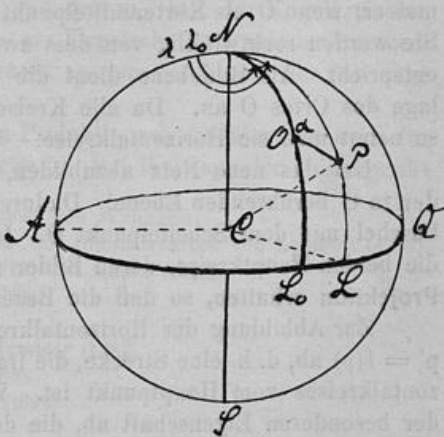
Auf der Kugelfläche dient als rechtwinkliges Achsensystem der Äquator AQ und der Nullmeridian ANQS (Fig. 2). Die geographischen Koordinaten eines Punktes P sind die größten Kugelkreisbögen AL und PL, die durch die Mittelpunktswinkel ACL und PCL gemessen werden. Setzen wir den Kugelradius 1, so sind  $\widehat{AL} = \lambda$  und  $\widehat{PL} = \varphi$  die im Bogenmaß ausgedrückte Länge und Breite von P.

Die Polarkoordinaten von P in bezug auf N als Pol oder Hauptpunkt des Systems sind die Poldistanz  $\widehat{NP} = p = \pi/2 - \varphi$  und das Azimut  $\angle ANP = \alpha = \widehat{AL} = \lambda$ .

Der Pol oder Hauptpunkt des Systems kann aber auch jede beliebige andere Lage haben. Wird er z. B. (Fig. 2) nach dem Orte O verlegt, der durch die Länge  $\widehat{AL}_0 = \lambda_0$  und die Breite  $\widehat{OL}_0 = \varphi_0$  gegeben ist, dann stellt der größte Kugelkreisbogen  $\widehat{OP} = p$  die Poldistanz



Figur 1.



Figur 2.

und  $\angle NOP = \alpha$  das Azimut dar. Für den Zusammenhang der rechtwinkligen und Polarkoordinaten ergeben sich in diesem allgemeinsten Falle aus dem sphärischen Dreieck OPN die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 1. \cos p = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) & 1.* \sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos p + \cos \varphi_0 \sin p \cos \alpha \\ 2. \sin \alpha = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\sin p} & 2.* \sin(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin \alpha \sin p}{\cos \varphi} \\ 3. \tan \alpha = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos \varphi_0 \tan \varphi - \sin \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)} & 3.* \tan(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} p - \sin \varphi_0 \cos \alpha} \end{array}$$

Außer dem bereits erwähnten Sonderfalle  $\varphi_0 = \pi/2$ , ist noch der wichtig, wenn O auf dem Äquator liegt, also  $\varphi_0 = 0$  ist. Die allgemeinen Transformationsgleichungen gehen dann über in:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \cos p = \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0) & \text{I.* } \sin \varphi = \sin p \cos \alpha \\ \text{II. } \sin \alpha = \frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{\sin p} & \text{II.* } \sin(\lambda - \lambda_0) = \frac{\sin \alpha \sin p}{\cos \varphi} \\ \text{III. } \tan \alpha = \operatorname{ctg} \varphi \sin(\lambda - \lambda_0) & \text{III.* } \tan(\lambda - \lambda_0) = \sin \alpha \tan \varphi \end{array}$$

Die Gleichungen für  $\tan \alpha$  und  $\tan(\lambda - \lambda_0)$  erhält man übrigens einfacher aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck  $L_0PL$ .

### § 3. Allgemeines über azimutale Projektionen.

Wir befinden uns im freien Felde und wollen durch eine einfache Zeichnung die Lage gewisser Punkte der Umgebung in unserer Erinnerung festhalten. Wie verfahren wir? Wir bestimmen die Richtungen nach den einzelnen Punkten gegen eine feste Anfangsrichtung, z. B. die durch den Kompaß angegebene. Diese Richtungen werden als gerade Linien gezeichnet, die alle von einem festen Punkte, dem Standpunkte des Beschauers ausgehen. Auf diesen Strahlen tragen wir die uns irgendwie bekannt gewordenen Entfernungen ab. Die Grenze des Kartenbildes wird der Kreis, der den scheinbaren Horizont abbildet.

Auf den Orientierungstafeln, die man an vielen Aussichtspunkten antrifft, wird auf diese Weise die Umgebung dargestellt. Man benutzt bei einem derartigen, einfachsten Kartenentwurf offenbar die in § 2 erläuterte Methode der Polarkoordinaten. Die Aufgabe, einen größeren Teil der Erdoberfläche abzubilden, führt zu einer naheliegenden Verallgemeinerung.

Man denkt sich die Erdoberfläche mit einem Netz bedeckt, das aus zwei Kreissystemen besteht, entsprechend den Meridianen und Breitenkreisen. Nur ist der Durchmesser aller Großkreise des neuen Netzes nicht die Erdachse, sondern der zum Hauptpunkte O gehörige Durchmesser, wenn O als Kartenmittelpunkt gewählt wird. Alle diese Großkreise heißen Hauptkreise. Sie werden rechtwinklig von dem zweiten Kreissysteme geschnitten, das dem der Parallelkreise entspricht. Als Bildebene dient die Tangentialebene im Hauptpunkte. Sie gibt die Horizontlage des Ortes O an. Da alle Kreise des zweiten Systems parallel zu diesem Horizont liegen, so nennt man sie Horizontalkreise.

Um das neue Netz abzubilden, bringt man sämtliche Hauptkreisebenen zum Schnitt mit der in O berührenden Ebene. Dadurch erhält man als Abbildung der Hauptkreise ein Strahlenbüschel mit dem Scheitelpunkt O. Irgend zwei Strahlen schließen denselben Winkel ein wie die beiden Hauptkreise, deren Bilder sie sind. Die Azimute auf der Kugel bleiben also bei der Projektion erhalten, so daß die Bezeichnung azimutale Projektion gerechtfertigt ist.

Zur Abbildung der Horizontalkreise trägt man auf den Strahlen des Büschels eine Strecke  $p' = f(p)$  ab, d. h. eine Strecke, die irgendeine Funktion des sphärischen Abstandes p eines Horizontalkreises vom Hauptpunkt ist. Welche Funktion  $f(p)$  man zugrunde legt, das hängt von der besonderen Eigenschaft ab, die den Kartenentwurf auszeichnet. In jedem Falle werden die Horizontalkreise als konzentrische Kreise um O mit dem Halbmesser  $p'$  dargestellt. Die ver-

schiedenen azimutalen Projektionen unterscheiden sich demnach nur durch das Halbmessergesetz  $p' = f(p)$ . Je nachdem der Hauptpunkt ein Erdpol, ein Punkt des Äquators oder irgend ein anderer Punkt auf der Erde ist, spricht man von 1. polaren, 2. äquatorealen, 3. horizontalen Projektionen. Hierfür sind auch die Bezeichnungen 1. normal, 2. transversal, 3. schiefachsrig gebräuchlich.

Für die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  der Bildebene gelten in jedem Falle die Gleichungen

$$x = f(p) \sin \alpha$$

$$y = f(p) \cos \alpha.$$

Ersetzt man in ihnen  $p$  und  $\alpha$  mit Hilfe der Gleichungen des § 2, so erhält man  $x$  und  $y$  durch die geographischen Koordinaten  $\lambda$  und  $\varphi$  ausgedrückt. Die Elimination von  $\lambda$  oder  $\varphi$  ergibt dann die Gleichungen der Bildkurven für den  $\varphi$ . Breitenkreis oder den  $\lambda$ . Meridian.

Diese Umformungen bilden einen guten Übungsstoff für trigonometrische Rechnungen, von denen einige im § 8 durchgeführt sind. Für den praktischen Kartenentwurf sind sie weniger von Bedeutung, da man für die üblichen Lagen des Hauptpunktes Tabellen hergestellt hat, die die Verwandlung geographischer Koordinaten in azimutale enthalten. In das leicht zu zeichnende azimutale Kartennetz werden dann die Orte  $(\lambda, \varphi)$  eingetragen.

#### § 4. Einordnung der perspektivischen Projektionen unter die azimutalen.

Der Gedanke, ebene Kartenbilder von einer Kugeloberfläche nach den Regeln der Perspektive zu entwerfen, ist sehr alt. So wird die Erfindung der stereographischen und orthographischen Projektion bereits dem Hipparch (180—125) zugeschrieben. Er wird sie allerdings nur zur Darstellung des Himmelsgewölbes angewendet haben. Erst viel später wurde erkannt, daß die perspektivischen Netzentwürfe nur Sonderfälle der azimutalen Projektion sind. Als Bahnbrecher ist hier der deutsche Mathematiker Lambert<sup>1)</sup> zu nennen, der zuerst die Kartenprojektionen von einem höheren Gesichtspunkte aus behandelt hat.

Nach den perspektivischen Methoden werden die Punkte einer Kugeloberfläche so auf einer Ebene abgebildet, wie sie einem Beobachter von einer bestimmten Stelle aus erscheinen. Zieht man vom Augenpunkte (Projektionszentrum) aus Strahlen nach den verschiedenen Punkten des darzustellenden Kugelteils und bringt diese Strahlen zum Schnitt mit der Zeichenebene, so wird jedem Punkt des Originals im allgemeinen eindeutig ein Bildpunkt zugeordnet. Diese Bildpunkte verbindet man dann in derselben Reihenfolge miteinander, wie sie auf der Kugel angeordnet sind. Ein beliebiger Kugelkreis projiziert sich als Kegelschnitt, nämlich als der Schnitt der Bildebene mit dem Kegel, der seine Spitze im Augenpunkt hat und dessen Basis der Kugelkreis ist. Das Netzbild der Längen- und Breitenkreise muß sich also aus Kegelschnitten zusammensetzen. Die Bildebene nimmt man aus naheliegenden Gründen senkrecht zu dem Strahl an, der das Auge mit der Mitte des abgebildeten Kugelteils verbindet.

Die mathematisch interessanteste der perspektivischen Projektionen, die überdies auch für den Geographen ihre Bedeutung hat, ist die **stereographische**<sup>2)</sup>. Bei ihr liegt der Augenpunkt

<sup>1)</sup> Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, herausgegeben von Wangerin:

Nr. 54 Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten von Lambert (1772).

Nr. 55 Über Kartenprojektion. Abhandl. von Lagrange (1779) und Gauss (1822).

Nr. 93 Drei Abhandl. über Kartenprojektion von Euler (1777).

Gretschel: Lehrbuch der Kartenprojektion (1873).

Tissot: Die Netzentwürfe geographischer Karten. Bearbeitet von Hammer (1887).

Hammer: Über die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen (1889).

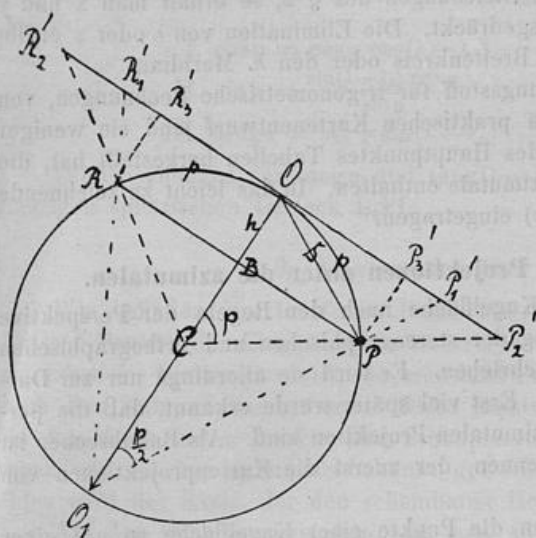
Breusing: Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe (1892).

Zöppez-Bludau: Leitfaden der Kartenentwurfslehre (1899).

<sup>2)</sup> Der Name ist unglücklich gewählt, denn man könnte jede Projektion so bezeichnen.

auf der Kugel. — Wählen wir den Kugelmittelpunkt zum Augenpunkt, so ergibt sich die **zentrale oder gnomonische** Projektion. Sie wird häufig bei Himmelskarten benutzt. Da die Stundenlinien des Zifferblattes einer Sonnenuhr durch Zentralprojektion der Stundenkreise der Sonne erhalten werden, so ist diese Abbildung für die Gnomonik wichtig und daher rührt die Bezeichnung gnomonische Projektion. — Für einen unendlich fernen Augenpunkt werden die Projektionsstrahlen parallel, und man erhält, da die Bildebene senkrecht zur Strahlenrichtung liegt, die **orthographische** Projektion.

Alle drei Projektionen lassen sich als azimutale auffassen, wie die Figur 3 zeigt, aus der man unmittelbar die drei Halbmessergesetze ablesen kann. Der Kreis um C mit dem Radius 1 bedeutet den Meridian des Hauptpunktes O, der der Kartenmittelpunkt werden soll. Die Bildebene ist die Tangentialebene in O.



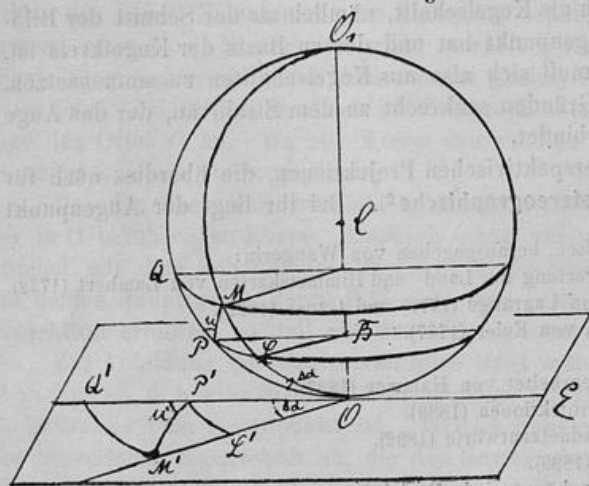
Figur 3.

a) Bei der **stereographischen** Abbildung ist der Augenpunkt  $O_1$  der Gegenpol von O; RP ist der Durchmesser eines beliebigen Horizontalkreises, dessen sphärischen Abstand  $\widehat{OP}$  wir mit  $p$  bezeichnen. Aus dem Dreieck  $O_1OP_1$  folgt für den Radius des Kreises, der den Horizontalkreis RP abbildet,  $OP'_1 = p'_1 = 2 \tan \frac{p}{2}$ . Hier ist also  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$ .

b) Projiziert man **zentral** von C aus den Horizontalkreis RP, so ergibt sich aus dem Dreieck  $COP'_2$  der Radius des Bildkreises  $OP'_2 = p'_2 = \tan p$ . Das Halbmessergesetz wird demnach durch  $f(p) = \tan p$  dargestellt.

c) Die **orthographische** Projektion des Horizontalkreises RP liefert den Kreis um O mit dem Radius  $OP'_3 = \frac{RP}{2} = p'_3 = \sin p$ . In diesem Falle ist somit  $f(p) = \sin p$  zu setzen.

### § 5. Die Bildverzerrung.



Figur 4.

Wir denken uns um den beliebigen Punkt P der Kugelfläche einen sehr kleinen Kreis beschrieben und durch P alle möglichen Großkreise der Kugel gelegt, die den Kleinkreis in dem variablen Punkte M schneiden. Hat P die azimutalen Koordinaten  $p$  und  $\alpha$ , so lassen sich die eines bestimmten Punktes M durch  $p + dp$  und  $\alpha + d\alpha$  darstellen, wo  $dp$  und  $d\alpha$  die positiven oder negativen sehr kleinen Zuwächse von  $\alpha$  und  $p$  bezeichnen. Die durch P und M gehenden Haupt- und Horizontalkreise des azimutalen Netzes begrenzen eine rechteckige Masche PQML (Fig. 4), die um so genauer als ebenes Rechteck anzusehen ist, je näher M an P liegt. Die beiden



Gegenseiten dieses Rechtecks PQ und LM sind gleich  $dp$ . Für die Seite PL ergibt sich der Wert  $dz \sin p$ . Denn ist B der Mittelpunkt des Horizontalkreises von P und L, so ist  $\angle PBL = dz$  und der Radius  $PB = \sin p$ , wenn wir wie bisher den Kugelhalbmesser 1 setzen. Die Originalfigur PQML wird auf die Kartenebene als Kreisringsektor  $P'Q'M'L'$  projiziert, den wir ebenfalls nach obiger Voraussetzung als ein Rechteck auffassen können. Für die Projektionsart sei irgend ein Halbmessergesetz  $p' = f(p)$  gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} P'Q' &= L'M' = f(p + dp) - f(p) \text{ und} \\ P'L' &= f(p) dz. \end{aligned}$$

a) Wir bestimmen zunächst die **linearen Verzerrungen**, die die Seiten PQ und PL bei der Abbildung erfahren und messen diese Verzerrungen durch das Verhältnis  $v_1 = \frac{P'Q'}{PQ}$  und  $v_2 = \frac{P'L'}{PL}$ , für die wir erhalten  $v_1 = \frac{f(p + dp) - f(p)}{dp}$ , d. h. die erste Ableitung  $f'(p)$  von  $f(p)$ , und

$$v_2 = \frac{d\alpha \cdot f(p)}{d\alpha \cdot \sin p} = \frac{f(p)}{\sin p}.$$

Die linearen Verzerrungen  $v_1$  und  $v_2$  beziehen sich auf die zueinander senkrechten Bildrichtungen, welche denen des Haupt- und Horizontalkreises von P entsprechen. Um die Verzerrung  $V = \frac{P'M'}{PM}$  zu erhalten, benutzen wir die Beziehung

$$P'M'^2 = P'Q'^2 + P'L'^2$$

und berücksichtigen, daß  $P'Q' = v_1 \cdot PQ$  und  $P'L' = v_2 \cdot PL$  ist.

Es folgt dann  $P'M'^2 = v_1^2 \cdot PQ^2 + v_2^2 \cdot PL^2$ .

Bezeichnen wir mit  $u$  und  $u'$  die Winkel, die die Rechteck-Diagonalen PM und  $P'M'$  mit den Seiten PQ und  $P'Q'$  bilden, so ist ferner  $PQ = PM \cos u$

$$PL = PM \sin u.$$

Durch Einsetzen in die letzte Gleichung für  $P'M'^2$  ergibt sich nun

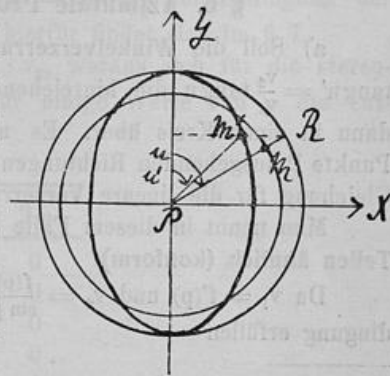
$$P'M'^2 = PM^2 (v_1^2 \cos^2 u + v_2^2 \sin^2 u), \text{ also}$$

$$V = \sqrt{v_1^2 \cos^2 u + v_2^2 \sin^2 u}.$$

Lassen wir in diesem Ausdruck den Winkel  $u$  alle Werte von 0 bis  $2\pi$  durchlaufen, so beschreibt der Punkt M den sehr kleinen Kreis auf der Kugel, den wir um P gelegt hatten. Der Wert  $V$  gibt somit die lineare Verzerrung an, die ein von P ausgehendes und beliebig gerichtetes Bogenelement eines Großkreises im Bilde erleidet. Die Werte  $v_1$  und  $v_2$  sind die beiden Grenzwerte von  $V$  für  $u = 0$  und  $\pi$  oder für  $u = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3}{2}\pi$ .

Wir stellen nun die mit  $u$  variablen Größen  $v_2 \sin u$  und  $v_1 \cos u$  durch die Strecken  $x$  und  $y$  dar und erhalten in den Gleichungen  $x = v_2 \sin u$  und  $y = v_1 \cos u$  die bekannte Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen  $v_1$  und  $v_2$ , wobei es von der Natur der Funktion  $f(p)$  abhängt, ob  $v_1$  oder  $v_2$  die lange Halbachse wird. Wir nehmen  $v_1 > v_2$  an, zeichnen die Ellipse mit dem Mittelpunkt P (Figur 5) und beschreiben um P mit  $v_1$  den Kreis. An die Y-Achse tragen wir in P den Winkel  $u$  an, dessen freier Schenkel den Kreis in R schneidet, und fällen von R auf die Y-Achse das Lot. Dieses trifft die Ellipse in einem Punkte M' so, daß  $PM' = V = \sqrt{v_1^2 \cos^2 u + v_2^2 \sin^2 u}$  ist.

$PM'$  bildet mit der Y-Achse einen Winkel  $u'$ , für den nach bekannten Eigenschaften der Ellipse die Gleichung  $\tan u' = \frac{v_2}{v_1} \tan u$  besteht. Denselben



Figur 5.

Wert aber hat in dem Kartenbilde die Tangente des Winkels  $u'$ , denn es ist (Fig. 4)  $\text{tang} u' = \frac{P'L'}{M'L'} = \frac{P'L'}{P'Q'} = \frac{v_2 \cdot PL}{v_1 \cdot PQ} = \frac{v_2}{v_1} \text{tang} u$ .

Denken wir uns jetzt den Kleinkreis, den wir auf der Kugel um P gezogen hatten, auf die Kartenebene so gelegt, daß P mit seiner Abbildung P' zusammenfällt (Fig. 5), so schneidet die Gerade PR den Kleinkreis in dem Punkte M, dessen Abbildung der Punkt M' ist, sobald wir nur die Strecke PM als Einheit für den Maßstab der Fig. 5 ansehen. Unter dieser Voraussetzung stellt die Ellipse mit den Halbachsen  $v_1$  und  $v_2$  die Projektion unseres kleinen Kugelkreises dar. Sie ist nichts anderes als die aus den Arbeiten Tissots bekannte Indikatrix<sup>1)</sup>. Ihre Halbachsen fallen mit den Richtungen der Haupt- und Horizontalkreisbilder zusammen und sind ein Maß für die größte und kleinste lineare Verzerrung.

b) Die Winkelverzerrung  $u - u'$  ergibt sich einfach aus der obigen Gleichung  $\text{tang} u' = \frac{v_2}{v_1} \text{tang} u$ . Es ist

$$\frac{\text{tang} u - \text{tang} u'}{\text{tang} u + \text{tang} u'} = \frac{\sin(u - u')}{\sin(u + u')} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \text{ also}$$

$$\sin(u - u') = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \sin(u + u').$$

Durchläuft  $u$  das Intervall von 0 bis  $\pi/2$ , so erreicht  $u - u'$  für  $u + u' = \pi/2$  ein Maximum  $\omega$ , wo  $\sin \omega = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$  ist. Es mögen  $U$  und  $U'$  die dem Maximum entsprechenden Werte von  $u$  und  $u'$  sein, dann folgt aus  $\text{tang} u' = \frac{v_2}{v_1} \text{tang} u$

$$\text{cotang} U = \frac{v_2}{v_1} \text{tang} U, \text{ also}$$

$$\text{tang} U = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}.$$

Für zwei beliebige von P ausgehende Richtungen tritt die größte Winkelverzerrung  $2\omega$  dann ein, wenn die eine Richtung den Winkel  $U$  mit der Y-Achse bildet und die zweite symmetrisch zu dieser Achse liegt.

c) Die Flächenverzerrung  $S$  läßt sich bestimmen aus dem Inhaltsverhältnis der Elementar-Rechtecke  $P'L'M'Q'$  und  $PLMQ$ . Es ist

$$S = \frac{P'L' \cdot P'Q'}{PL \cdot PQ} = v_1 \cdot v_2 = \frac{f(p)f(p)}{\sin p}.$$

Zu dem gleichen Resultat gelangt man, wenn man das Verhältnis bildet der Indikatrixfläche zu der Kreisfläche, deren Projektion sie ist.

### § 6. Azimutale Projektionen mit ausgezeichneten Eigenschaften.

a) Soll die Winkelverzerrung  $u - u'$  null, also  $u = u'$  sein, so liefert die Gleichung  $\text{tang} u' = \frac{v_2}{v_1} \text{tang} u$  die hinreichende und notwendige Bedingung  $v_1 = v_2$ . Die Indikatrix geht dann in einen Kreis über. Es müssen also die linearen Verzerrungen nach allen von einem Punkte P ausgehenden Richtungen gleich werden. Das folgt überdies auch aus der allgemeinen Gleichung für die lineare Verzerrung  $V = \sqrt{v_1^2 \cos^2 u + v_2^2 \sin^2 u}$  für  $v_1 = v_2$ .

Man nennt in diesem Falle die Abbildung **winkeltreu** oder **dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich (konform)**.

Da  $v_1 = f'(p)$  und  $v_2 = \frac{f(p)}{\sin p}$  ist, so muß eine winkeltreue azimutale Projektion die Bedingung erfüllen

$$f'(p) = \frac{f(p)}{\sin p}.$$

<sup>1)</sup> Von dieser Indikatrix machen auch Hammer und Zöppez-Bludau in den bereits angeführten Werken Gebrauch. Während sich H. auf den allgemeinen Beweis Tissots stützt, dessen Weg für die Schule nicht gangbar ist, beschränkt sich Z.-B. auf die Anwendung.

Nun war  $f(p)$  die Strecke  $OP' = p'$  (Fig. 4) und  $f'(p) = \frac{df(p)}{dp} = \frac{dp'}{dp}$ ; demnach lautet die Bedingung  $\frac{dp'}{dp} = \frac{p'}{\sin p}$  oder  $\frac{dp'}{p'} = \frac{dp}{\sin p}$ . Hieraus ergibt sich durch Integration  $\ln p' = \ln \tan \frac{p}{2} + C$ , also

$$p' = f(p) = x \tan \frac{p}{2},$$

wo  $x$  eine Konstante bedeutet, die den Abstand der Bildebene vom Gegenpol  $O_1$  des Hauptpunktes  $O$  mißt. Wenn wir auf die Tangentialebene in  $O$  projizieren, dann ist  $x = 2$ . Für einen anderen Wert von  $x$  ändert sich nur der Maßstab.

Das Halbmessergesetz  $f(p) = x \tan \frac{p}{2}$  charakterisiert die Abbildung als stereographische (§ 4), die demnach die einzige winkeltreue azimutale Projektion ist<sup>1)</sup>.

Das Resultat wurde durch Integration der einfachen Gleichung  $\frac{dp'}{p'} = \frac{dp}{\sin p}$  erreicht. Den Primanern der Realanstalten darf man das wohl zumuten. Auf den Gymnasien kann man sich auf folgenden Nachweis beschränken:

Durch Differentiation von  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$  erhält man  $f'(p) = \frac{1}{\cos^2 \frac{p}{2}} = v_1$ . Da  $v_2 = \frac{f(p)}{\sin p} = \frac{2 \tan \frac{p}{2}}{\sin p} = \frac{1}{\cos^2 \frac{p}{2}}$  ist, so erfüllt das Durchmessergesetz  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$  in der Tat die Bedingung der Winkeltreue  $v_1 = v_2$ .

Um noch elementarer zu verfahren, benutzt man die Figur 4 unter der Voraussetzung, daß  $PQ = \Delta p$ ,  $P'Q' = \Delta p'$  und  $\angle POL = P'OL' = \Delta \alpha$  beliebige **endliche** Zuwüchse von  $OP = p$ ,  $OP' = p'$  und des Azimuts  $\alpha$  der Punkte  $P$  und  $P'$  sind, wie diese Zuwüchse aus praktischen Gründen auch tatsächlich gezeichnet wurden. Die lineare Verzerrung in der Horizontalkreisrichtung wird dann dargestellt durch  $v_2 = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{\Delta p'}{\Delta p} = \frac{f(p+\Delta p) - f(p)}{\Delta p}$ , während man die Verzerrung längs eines Hauptkreises durch  $v_1 = \frac{P'L'}{PL} = \frac{\Delta \alpha \cdot p'}{\Delta \alpha \cdot \sin p} = \frac{p'}{\sin p} = \frac{f(p)}{\sin p}$  mißt. Für  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$  ist nun  $v_2 = \frac{2 \tan \frac{p+\Delta p}{2} - 2 \tan \frac{p}{2}}{\Delta p} = \frac{\sin \frac{\Delta p}{2}}{\Delta p} \cdot \frac{1}{\cos \frac{p+\Delta p}{2} \cdot \cos \frac{p}{2}}$  und  $v_1 = \frac{2 \tan \frac{p}{2}}{\sin p} = \frac{1}{\cos^2 \frac{p}{2}}$ .

Wenn  $\Delta p$  sich immer mehr der Null nähert, so folgt hieraus für  $v_1$  der Grenzwert  $v_1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{p}{2}}$ ; der Wert von  $v_2 = \frac{f(p)}{\sin p} = \frac{1}{\cos^2 \frac{p}{2}}$  ändert sich bei diesem Übergange nicht. Hiermit ist der elementare Nachweis erbracht, daß die Funktion  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$  der Bedingung der Winkeltreue  $v_1 = v_2$  genügt. Ein rein geometrischer Beweis hierfür findet sich im § 7.

Die Flächenverzerrung hat nach § 5 den Wert  $S = v_1 \cdot v_2$ , woraus sich für die stereographische Projektion  $S = v_2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{p}{2}}$  ergibt. Wir stellen für einige Werte von  $p$  die entsprechenden Verzerrungen zusammen.

p	$V = v_1 = v_2$	S	$2\omega$
0°	1	1	0
30°	1,072	1,149	0
45°	1,172	1,373	0
60°	1,333	1,778	0
90°	2	4	0

<sup>1)</sup> Die elementare Begründung dieses Satzes in dem Leitfaden von Zöppritz-Bludau, 2. Aufl., S. 44, halte ich für einen Scheinbeweis.

b) Eine Abbildung heißt **flächentreu (äquivalent)**, wenn ein beliebiger Teil der Kugel­fläche und sein Kartenbild inhaltsgleich sind. Eine azimutale Projektion kann diese Eigenschaft nur besitzen, wenn für den Maßstab 1 die Gleichung besteht

$$S = v_1 \cdot v_2 = 1 \quad (\text{s. § 5}).$$

Nach Einführung der Werte  $v_1 = \frac{dp'}{dp}$  und  $v_2 = \frac{p'}{\sin p}$  geht diese Gleichung über in  $\frac{dp'}{dp} \cdot \frac{p'}{\sin p} = 1$  oder  $p'dp' = \sin p dp$ .

Durch Integration folgt nun  $\frac{1}{2}(p')^2 = -\cos p + C$ .

Da  $p'$  zugleich mit  $p$  null werden muß, so ist  $C = 1$ , also

$$\frac{1}{2}(p')^2 = 1 - \cos p = 2 \sin^2 \frac{p}{2},$$

$$p' = 2 \sin \frac{p}{2}.$$

Ohne Integration kommt man zu demselben Ergebnis durch folgende Überlegung:

Die Kugelkappe POR (Fig. 3) hat den Inhalt  $F = 2\pi h$ , wenn  $h$  ihre Höhe bezeichnet und der Kugelradius die Längeneinheit darstellt. Irgendein azimutales Bild der Kappe ist eine Kreisfläche mit dem Radius  $OP' = p' = f(p)$ , ihr Inhalt also  $F' = p'^2\pi$ . Die Bedingung der Flächentreue ergibt  $2\pi h = p'^2\pi$ , also  $p' = \sqrt{2h}$ . Es ist aber, wie aus den Dreiecken PBO und POO' folgt,  $h = 2 \sin^2 \frac{p}{2}$ , somit  $p' = 2 \sin \frac{p}{2}$ , d. h. gleich der zum Bogen OP gehörigen Sehne.

Beide Ableitungen zeigen, daß es nur eine einzige azimutale Projektion gibt, die flächentreu ist. Sie wird nach ihrem Erfinder gewöhnlich die Lambertsche genannt (s. d. Anm. S. 7 u. § 8c).

Die lineare Verzerrung längs eines Horizontalkreises ist  $v_2 = \frac{f(p)}{\sin p} = \frac{2 \sin \frac{p}{2}}{\sin p} = \frac{1}{\cos \frac{p}{2}}$ . In der dazu senkrechten Richtung, also der eines Hauptkreises, beträgt die lineare Verzerrung  $v_1 = f'(p) = \frac{d 2 \sin \frac{p}{2}}{dp} = \cos \frac{p}{2}$ . Die Differentiation ist nicht notwendig, denn wegen der Flächentreue muß  $v_1 \cdot v_2 = 1$ , also  $v_1 = \frac{1}{v_2} = \cos \frac{p}{2}$  sein.

Da offenbar  $v_2 > v_1$ , so ist die Winkelverzerrung  $\omega$  (s. § 5) zu berechnen aus  $\sin \omega = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{1 - \cos^2 \frac{p}{2}}{1 + \cos^2 \frac{p}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{p}{2}}{1 + \cos^2 \frac{p}{2}} = \frac{1 - \cos p}{3 + \cos p}$ .

Man gewinnt eine Vorstellung von der Größe der Verzerrung aus folgenden Zahlenwerten:

p	2ω	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	S
0°	0	1	1	1
30°	3° 58'	0,966	1,035	1
45°	9° 4'	0,924	1,082	1
60°	16° 26'	0,866	1,155	1
90°	38° 57'	0,707	1,414	1

c) Bei der azimutalen Projektion mit längentreuen Hauptkreisen (s. § 8e), häufig als äquidistanter Entwurf bezeichnet, hat jeder Bildpunkt dieselbe Entfernung vom Kartenmittelpunkte wie der entsprechende Punkt auf der Kugel vom Hauptpunkte gemäß dem Halbmessergesetz  $p' = f(p) = p$ . Die Hauptkreise werden demnach längentreu abgebildet und die lineare Verzerrung  $v_1$  in der Richtung dieser Kreise ist 1, was auch aus der allgemeinen Beziehung  $v_1 = f'(p) = \frac{dp}{dp} = 1$  hervorgeht. Die lineare Verzerrung senkrecht zur Richtung dieser Kreise

ist  $v_2 = \frac{f(p)}{\sin p} = \frac{p}{\sin p}$  und deshalb die Flächenverzerrung  $S = v_1 \cdot v_2 = \frac{p}{\sin p}$ . Die Winkelverzerrung berechnet man aus  $\sin \omega = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{p - \sin p}{p + \sin p}$ . Man erhält so die Tabelle:

p	2ω	S	v <sub>2</sub>	v <sub>1</sub>
0°	0°	1	1	1
30°	2° 39'	1,047	1,047	1
45°	6° 1'	1,111	1,111	1
60°	10° 52'	1,209	1,209	1
90°	25° 39'	1,571	1,571	1

d) Die **gnomonische Projektion** (S. § 4, § 7b, § 8b) ist dadurch ausgezeichnet, daß alle Kugelgroßkreise sich als gerade Linien abbilden. Hierauf beruht die Anwendung der gnomonischen Entwürfe bei Seekarten. Unsere modernen Schiffe machen ihre Reisen der Zeit- und Kohlenersparnis wegen auf dem kürzesten Wege, das ist der Großkreisbogen, der Abfahrts- und Ankunftsart verbindet. Dieser Weg stellt sich auf der gnomonischen Karte als gerade Linie dar.

Das Halbmessergesetz dieser Projektion lautet  $f(p) = \tan p$  (S. § 4b).

Nach den allgemeinen Verzerrungsregeln ergeben sich die Werte

$$v_1 = f'(p) = \frac{d \tan p}{dp} = \frac{1}{\cos^2 p} \quad (\text{Über die ganz entsprechende elementare Ableitung s. § 6a}).$$

$$v_2 = \frac{f(p)}{\sin p} = \frac{\tan p}{\sin p} = \frac{1}{\cos p}$$

$$S = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{\cos^3 p}$$

$$\sin \omega = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} = \frac{1 - \cos p}{1 + \cos p} = \tan^2 \frac{p}{2}$$

Nach diesen Formeln berechnet man die Tabelle:

p	2ω	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	S
0°	0°	1	1	1
30°	8° 14'	1,333	1,155	1,540
45°	19° 45'	2	1,414	2,828
60°	38° 57'	4	2	8
90°	180°	∞	∞	∞

e) Die **orthographische Projektion** (s. § 4 und § 7c) wird hier nur erwähnt zum Vergleich der dabei auftretenden Verzerrungen mit denen, die unter a) bis d) bestimmt worden sind. Es gilt für die Projektion das Halbmessergesetz  $f(p) = \sin p$ . Die allgemeinen Verzerrungsgleichungen liefern also die Formeln:

$$v_1 = f'(p) = \cos p$$

$$v_2 = \frac{\sin p}{f(p)} = 1$$

$$S = v_1 \cdot v_2 = \cos p$$

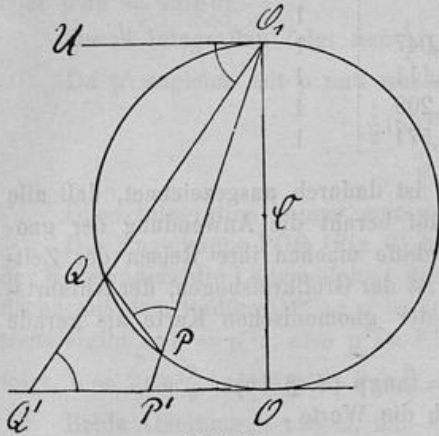
$$\sin \omega = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{1 - \cos p}{1 + \cos p} = \tan^2 \frac{p}{2}$$

p	2ω	S	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>
0°	0°	1	1	1
30°	8° 14'	0,866	0,866	1
45°	19° 45'	0,707	0,707	1
60°	38° 57'	0,5	0,5	1
90°	180°	0	0	1

### § 7. Geometrische Behandlung der perspektivischen Projektionen.

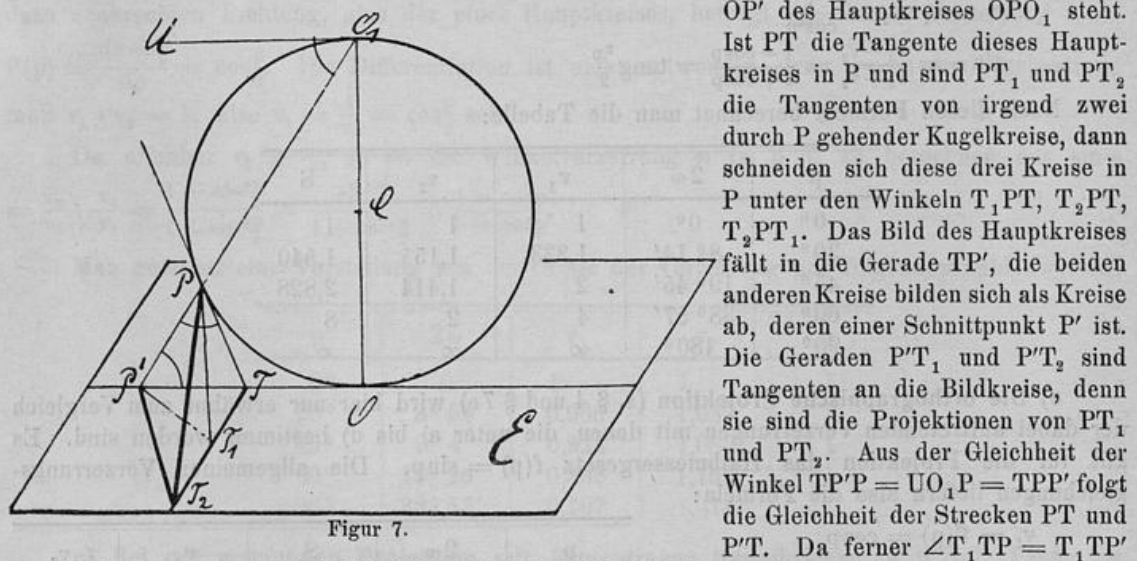
a) Die Eigenschaften der stereographischen Projektion lassen sich aus zwei Sätzen ableiten:

1. Alle durch den Augenzentrum gehenden Kugelkreise bilden sich als gerade Linien ab, alle anderen Kugelkreise als Kreise.
2. Die Bilder zweier Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel wie die Kugelkreise selbst.



Figur 6.

Der erste Teil des Satzes 1. leuchtet ohne weiteres ein. Den zweiten Teil beweist man am einfachsten mit dem Satze vom Wechselschnitt. Wir denken uns die Kugel um C (Fig. 6) vom Augenzentrum  $O_1$  aus auf die Tangentialebene im Hauptpunkte O projiziert. PQ stellt den Durchmesser eines beliebigen Kugelkreises dar, dessen Ebene senkrecht zur Papierfläche liegt.  $P'Q'$  ist die Bildgerade von  $PQ$ . Zieht man die Tangente  $UO_1$  an den Hauptkreis  $OPQO_1$ , so erkennt man die Gleichheit der Winkel  $P'Q'O_1$ ,  $UO_1Q$  und  $QPO_1$ . Die Abbildungsebene schneidet demnach den schiefen Kreiskegel, dessen Hauptachsenschnitt  $O_1PQ$  ist, in dem Wechselschnitt  $P'Q'$ , also in einem Kreise.



Figur 7.

Beweis für 2.: Die Tangenten aller durch einen beliebigen Kugelpunkt P laufenden Kugelkreise liegen in der Ebene, die in P die Kugel um C (Fig. 7) berührt. Diese Ebene schneidet die Bildebene, d. i. die Tangentialebene E in O, in einer Geraden  $TT_1T_2$ , die senkrecht auf der Bildgeraden  $OP'$  des Hauptkreises  $OPO_1$  steht. Ist PT die Tangente dieses Hauptkreises in P und sind  $PT_1$  und  $PT_2$  die Tangenten von irgend zwei durch P gehender Kugelkreise, dann schneiden sich diese drei Kreise in P unter den Winkeln  $T_1PT$ ,  $T_2PT$ ,  $T_2PT_1$ . Das Bild des Hauptkreises fällt in die Gerade  $TP'$ , die beiden anderen Kreise bilden sich als Kreise ab, deren einer Schnittpunkt  $P'$  ist. Die Geraden  $P'T_1$  und  $P'T_2$  sind Tangenten an die Bildkreise, denn sie sind die Projektionen von  $PT_1$  und  $PT_2$ . Aus der Gleichheit der Winkel  $TP'P = UO_1P = TPP'$  folgt die Gleichheit der Strecken  $PT$  und  $P'T$ . Da ferner  $\angle T_1TP = T_1TP'$

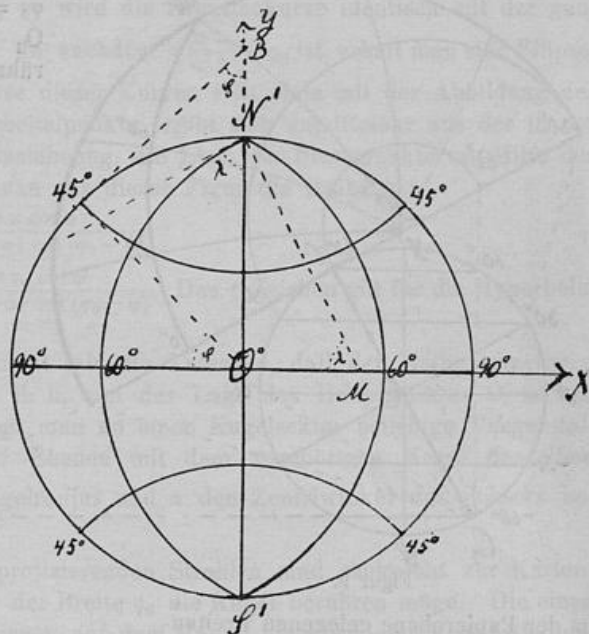
$= 1R$  ist, so muß  $\triangle T_1TP \cong T_1TP'$  und  $\triangle T_2TP \cong T_2TP'$  sein. Hiermit ist die Gleichheit der Winkel  $T_1PT_2$  und  $T_1P'T_2$  bewiesen, also auch der Satz 2. Demnach entspricht einem beliebigen von Kreisbögen begrenzten Dreieck der Kugel ein mit ihm in den Winkeln übereinstimmendes Bogendreieck der Kartenebene. Diese krummlinigen Dreiecke mit endlicher Seitenlänge sind aber nicht ähnlich, denn die Seitenverhältnisse sind nicht dieselben, wie man sich leicht überzeugt. Nur dann wird diese Bedingung erfüllt, wenn wir ein

so kleines Dreieck der Erdoberfläche abbilden, daß man seine Seiten als gerade Linien ansehen kann; man sagt deshalb mit Recht: **Das stereographische Bild der Kugelfläche ist dem Original in den kleinsten Teilen ähnlich.**

Bei der Netzzeichnung der Längen- und Breitenkreise sind die drei Fälle (§ 3) zu unterscheiden: 1. normale (polare), 2. transversale (äquatoreale), 3. schiefachsige (horizontale) Projektion.

Der Fall 1 bedarf keiner Erläuterung.

Im Fall 2 liegen der Hauptpunkt  $O$  und der Augenzentrum  $O_1$  auf dem Äquator. Die geographische Länge  $\lambda$  soll von dem durch  $O, O_1$  und die Erdpole  $N, S$  gehenden Hauptkreise aus gezählt werden, den wir kurz als Nullmeridian bezeichnen. Sein Bild und das des Äquators sind zwei sich in  $O$  rechtwinklig schneidende Gerade  $y$  und  $x$  (Fig. 8), während das des Meridians von  $90^\circ$  der Kreis um  $O$  mit dem Halbmesser  $2r$  ist, wenn  $r$  den Kugelradius bezeichnet. Die Schnittpunkte der Geraden  $y$  mit diesem Kreise stellen die Polbilder  $N'$  und  $S'$  dar. Alle Meridianabbildungen müssen durch  $N'$  und  $S'$  gehen und, da es Kreise sind, liegen ihre Mittelpunkte auf der Geraden  $x$ . Mit dem Nullmeridian der Karte bilden diese Kreise in  $N'$  und  $S'$  die Winkel  $\lambda$ . Trägt man also einen bestimmten Winkel  $\lambda$  (i. d. Fig.  $60^\circ$ ) an  $ON'$  in  $N'$  an, so muß der freie Schenkel den  $\lambda$ -Bildmeridian berühren, woraus die einfache Konstruktion des Mittelpunktes  $M$  folgt.



Figur 8.

Die Breitenkreise und Meridiane schneiden sich rechtwinklig, demnach schneiden sich auch ihre Abbildungen so, und die Mittelpunkte der Breitenkreisbilder liegen auf der Geraden  $y$ . Wegen der Parallelität der Projektionsebene und der Ebene des  $90^\circ$  Meridians wird die Abbildung dieses Meridians durch die Abbildungen der Breitenkreise genau so geteilt, wie dies bei den entsprechenden Kreisen auf der Kugel geschieht. Man hat also an die  $x$ -Achse in  $O$  die verschiedenen Winkel  $\varphi$  (i. d. Fig.  $45^\circ$ ) anzutragen, die freien Schenkel zum Schnitt mit dem Bildkreis des  $90^\circ$  Meridians zu bringen und die Tangenten in diesen Punkten zu konstruieren, die die  $Y$ -Achse in den Mittelpunkten  $B$  der Breitenkreisbilder treffen.

Das so erhaltene Gradnetz besteht aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Kreisbüscheln, deren Potenzlinien die  $x$ - und  $y$ -Achse sind.

Die östliche und westliche Halbkugel der Erde wird nicht selten in der angegebenen Manier abgebildet. Das Kartenbild ist dann durch den Kreis mit dem Halbmesser  $2r$  begrenzt.

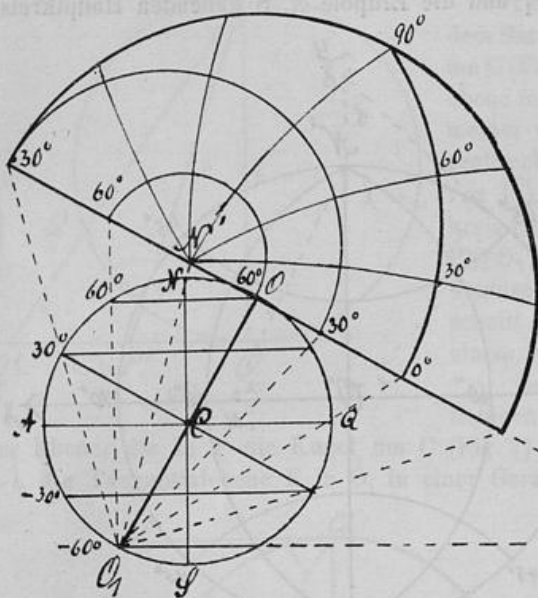
Bei dem Netzentwurf der stereographischen Horizontprojektion benutzt man mit Vorteil den Satz:

**Der Mittelpunkt der Abbildung eines größten Kugelkreises liegt auf dem Lot, das man vom Augenzentrum auf die Großkreisebene fällt<sup>1)</sup>.**

<sup>1)</sup> Der allgemeine Satz heißt: Der Bildmittelpunkt eines beliebigen Kugelkreises liegt auf der Geraden, die den Augenzentrum mit der Spitze des zugehörigen Tangentialkegels verbindet.

Zum Beweise legt man senkrecht zur Ebene des Großkreises einen Hauptkreis durch den Augenpunkt  $O_1$ . Die Schnittgrade, ein Kugeldurchmesser  $AB$ , projiziert sich als Durchmesser  $A'B'$  des Bildkreises. Die Dreiecke  $AO_1B$  und  $A'O_1B'$  sind rechtwinklig, also die Wechsel-schnittwinkel Komplemente. Fällt man von  $O_1$  auf  $AB$  das Lot, so halbiert seine Verlängerung  $A'B'$  in  $M$ , da die Dreiecke  $A'O_1M$  und  $B'O_1M$  gleichschenkelig sind.

Die Netzkonstruktion erläutern wir an der Figur 9. Der Kreis um  $C$  stellt den Nullmeridian der abzubildenden Kugel dar,  $NS$  die Erdachse,  $AQ$  einen Äquatordurchmesser. Für die Lage des Hauptpunktes  $O$  ist die Breite  $\varphi_0 = 60^\circ$  ndl. angenommen. Der Augenpunkt  $O_1$  hat also  $60^\circ$  südl. Breite. Die in  $O$  berührende Bildebene ist zunächst senkrecht zur



Figur 9.

in der Papierebene gelegenen Breiten-gesuchten Durchmesser auf der Karte. die Papierebene um, so können nun werden. Wir begrenzen sie durch des zur Bildebene parallelen Haupt-

Die Mittelpunkte der Meridian-satz auf den vom Augenpunkte  $O_1$  auf Diese Lote gehören sämtlich einer Ebene steht und die Bildebene in einer zu  $N'O$  senkrechten Geraden  $L$  schneidet.  $L$  ist somit ein geometrischer Ort für die gesuchten Mittelpunkte  $M$  und, wie leicht zu sehen, die Abbildung des durch den Augenpunkt  $O_1$  gehenden Breitenkreises. Die zweiten Orte für die Punkte  $M$  sind die freien Schenkel der Winkel  $\frac{\pi}{2} - \lambda$ , die man in  $N'$  rechts und links an  $N'O$  anträgt.

In der Figur 9 ist die eine Hälfte des Gradnetzes von  $30^\circ$  zu  $30^\circ$  für eine Halbkugel gezeichnet.

b) Bei der gnomonischen oder Zentralperspektive sind die Meridianbilder stets gerade Linien, wo auch der Mittelpunkt  $O$  der Karte auf der Kugelfläche angenommen wird. Es sind die Schnittgeraden der Meridianebenen mit der Bildebene. Sie laufen deshalb alle durch den Punkt  $N'$ , der den Erdpol  $N$  abbildet. Liegt  $O$  unter der Breite  $\varphi_0$ , so ist  $N'$  von  $O$  um  $\cotang \varphi_0$  entfernt und der den  $\lambda$ . Meridian darstellende Strahl schließt mit dem Bilde des Anfangsmeridians den Winkel  $\lambda'$  ein, der durch  $\tan \lambda' = -\tan \lambda \cdot \sin \varphi_0$  bestimmt wird.

Papierfläche zu den-ken. Die Tangente in  $O$  ist die Projektion des Nullmeridians. Auf ihr liegen die Polbilder  $N'$  und  $S'$  (in der Fig. ist  $S'$  nicht gezeichnet). Um einen beliebigen Breitenkreis abzubilden, projiziert man den

kreisdurchmesser und erhält so den Klappen wir die Bildebene um  $90^\circ$  in die Bilder der Breitenkreise gezeichnet den Kreis um  $O$ , der die Projektion kreises ist.

abbildungen liegen nach obigem Hilfs-die Meridianebenen gefällten Loten. an, die senkrecht zur Erdachse  $NS$

kreisdurchmesser und erhält so den Klappen wir die Bildebene um  $90^\circ$  in die Bilder der Breitenkreise gezeichnet den Kreis um  $O$ , der die Projektion kreises ist.

 $M_{60}$  $M_{90}$  $M_{120}$



Die Projektionen der Breitenkreise erhält man als die Schnitte der Bildebene mit dem geraden Kreiskegel, der seine Spitze im Kugelmittelpunkte und zur Basis den abzubildenden  $\varphi$ . Breitenkreis hat. Außer dem Öffnungswinkel  $\pi - 2\varphi$  des Kegels kennt man den Neigungswinkel  $\varphi_0$  der Kegelachse NS gegen die Bildebene und den Abstand  $r = 1$  dieser Ebene von der Kegelspitze. Wir werden also auf eine aus der Geometrie bekannte Aufgabe geführt, die mehrfach Anwendung findet, z. B.: Es soll die Kurve gezeichnet werden, die das Schattenende eines vertikalen Stabes im Laufe eines Tages auf dem Horizont eines Ortes unter der Breite  $\varphi_0$  beschreibt. Gegeben ist die Deklination der Sonne. — Ersetzt man die Stablänge durch den Kugelradius 1 und die Deklination durch  $\varphi$ , so wird die Schattenkurve identisch mit der gnomonischen Abbildung des  $\varphi$ . Breitenkreises. Je nachdem  $\varphi \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} \frac{\pi}{2} - \varphi_0$  ist, erhält man eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Die eine Hauptachse dieser Kurven fällt stets mit der Abbildung des Nullmeridians zusammen. Die Lage der Scheitelpunkte ergibt sich unmittelbar aus der in der Ebene dieses Meridians ausgeführten Schnittzeichnung, die Lage der Brennpunkte mit Hilfe der Dandelin'schen Kugeln. Rechnerisch erhält man aus dieser Figur die Halbachse

$$a = \pm \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos (\varphi_0 + \varphi) \cos (\varphi_0 - \varphi)}$$

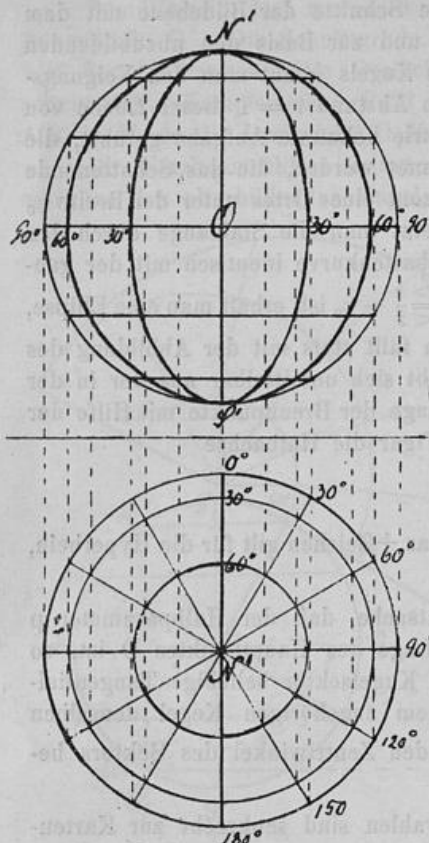
und die lineare Exzentrizität  $e = \pm \frac{\cos \varphi_0 \cos \varphi}{\cos (\varphi_0 + \varphi) \cos (\varphi_0 - \varphi)}$ . Das +Zeichen gilt für die Hyperbeln, das —Zeichen für die Ellipsen.

Mathematisch nicht uninteressant erscheint mir die Tatsache, daß der Halbparameter  $p$  stets gleich  $\text{ctg} \varphi$ , also unabhängig von  $\varphi_0$ , d. h. von der Lage des Hauptpunktes O ist, so daß sich folgender Satz aufstellen läßt: Legt man an einen Kugelsektor beliebige Tangentialebenen, so haben alle Schnittkurven dieser Ebenen mit dem zugehörigen Kegel denselben Parameter  $2p = 2r \text{tang} \frac{\alpha}{2}$ , wenn  $r$  den Kugelradius und  $\alpha$  den Zentriwinkel des Sektors bezeichnet.

c) **Orthographische Projektion.** Die projizierenden Strahlen sind senkrecht zur Kartenebene gerichtet, die im Hauptpunkte O unter der Breite  $\varphi_0$  die Kugel berühren möge. Die einen beliebigen Kugelkreis abbildenden Strahlen liegen auf dem Mantel eines schiefen Kreiszyinders. Die Zylinderachse ist das Lot vom Mittelpunkte des Kugelkreises auf die Bildebene. Diese Ebene schneidet den Zylinder in einer Ellipse, der gesuchten Bildkurve. Sie hat die Halbachsen  $a = \rho$  und  $b = \rho \cos \psi$ , wenn  $\rho$  den Kugelkreisradius und  $\psi$  den Neigungswinkel der Ebene dieses Kreises gegen die Bildebene bezeichnet.

Ist der abzubildende Kreis der  $\varphi$ . Breitenkreis, dann muß  $\rho = \cos \varphi$  und  $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ , also  $a = \cos \varphi$ ,  $b = \cos \varphi \sin \varphi_0$  sein, und wegen  $\frac{b}{a} = \sin \varphi_0$  sind alle diese Ellipsen ähnliche Figuren. Ihre kurzen Achsen fallen in die Richtung der Bildgeraden des Anfangsmeridians, und die Mittelpunkte sind von O um  $\sin \varphi \cos \varphi_0$  entfernt. — Bei der Abbildung des  $\lambda$ . Meridians hat man  $\rho = 1$  zu setzen und  $\psi$  aus  $\cos \psi = \cos \varphi_0 \sin \lambda$  zu bestimmen, wie sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ergibt, das vom Anfangsmeridian, dem  $\lambda$ . Meridian und dem der Bildebene parallelen Hauptkreise begrenzt wird. Für die Bildellipse des  $\lambda$ . Meridians ist also  $a = 1$  und  $b = \cos \varphi_0 \sin \lambda$ . Der Mittelpunkt ist O. Die lange Achse schließt mit der Bildgeraden des Anfangsmeridians den Winkel  $\beta$  ein, der aus  $\text{tang} \beta = \sin \varphi_0 \text{tang} \lambda$  zu finden ist, wie aus dem bereits erwähnten rechtwinkligen sphärischen Dreieck folgt.

Um das Kartennetz der Meridian- und Breitenkreise zu zeichnen, benutzt man am bequemsten das Grund- und Aufrißverfahren. In Fig. 10 stellt der Grundriß die Polarprojektion der nördlichen Halbkugel dar. Als Aufriß erhält man die Äquatorealprojektion einer Halbkugel



Figur 10.

von  $90^\circ$  westl. bis  $90^\circ$  östl. Länge. Die Horizontalprojektion für den Hauptpunkt  $O$  unter der Breite  $\varphi_0$  geht als Grundriß aus dem gezeichneten Aufriß hervor, wenn man diesen so dreht, daß die Erdachse  $N'S'$  gegen die horizontale Grundebene um den Winkel  $\varphi_0$  geneigt ist und  $O$  der höchste Punkt der neuen Aufrißfigur wird.

### § 8. Allgemeine Methode für den Netzentwurf azimuthaler Projektionen.

Das im § 7 benutzte geometrische Verfahren verlangt für jeden Einzelfall eine besondere Begründung. Es soll hier bei einigen Aufgaben die algebraische Methode angewendet werden, die wir bereits im § 3 als stets brauchbar kurz erläutert hatten.

a) Stereographische Äquatorealprojektion. Das Halbmessergesetz heißt  $f(p) = 2 \tan \frac{p}{2}$ . Es sollen die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  eines Kartenpunktes bestimmt werden, wenn der entsprechende Kugelpunkt durch seine Länge und Breite  $(\lambda, \varphi)$  gegeben ist.

Der Anfangspunkt des  $x, y$ -Systems sei der Hauptpunkt  $O$ , der durch  $\lambda_0 = 0$  und  $\varphi_0 = 0$  festliegt. Als  $y$ -Achse dient die Abbildung des Meridians von  $O$ , als  $x$ -Achse die Abbildung des hierzu senkrechten Hauptkreises.

$$\text{Es ist dann (s. § 3)} \quad 1. \quad x = 2 \tan \frac{p}{2} \sin \alpha$$

$$2. \quad y = 2 \tan \frac{p}{2} \cos \alpha$$

Um  $p$  und  $\alpha$  durch  $\varphi$  und  $\lambda$  zu ersetzen, benutzen wir die Gleichungen I und III des § 2:

$$3. \quad \cos p = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$4. \quad \tan \alpha = \operatorname{ctg} \varphi \sin \lambda$$

$$\text{Aus 1., 2. und 4. folgt} \quad 5. \quad \frac{x}{y} = \tan \alpha = \operatorname{ctg} \varphi \sin \lambda,$$

$$\text{aus 1., 2. und 3.} \quad 6. \quad x^2 + y^2 = 4 \tan^2 \frac{p}{2} = 4 \cdot \frac{1 - \cos p}{1 + \cos p} = 4 \cdot \frac{1 - \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}$$

Durch Elimination von  $x$  aus 5. und 6. erhält man

$$7. \quad y^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \lambda + y^2 = 4 \cdot \frac{1 - \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}$$

$$\text{oder} \quad \frac{y^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \varphi} = 4 \cdot \frac{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2} = 4 \cdot \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi \cos \lambda)^2},$$

$$\text{also} \quad 8. \quad y = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}; \quad 9. \quad x = \frac{2 \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \lambda}.$$

Sollen ferner die Gleichungen der Meridian- und Breitenkreisbilder aufgestellt werden, so ist aus 8. und 9. das eine Mal  $\varphi$ , das andere Mal  $\lambda$  zu eliminieren. Man findet so die Gleichungen

$$x^2 + 4x \operatorname{ctg} \lambda + y^2 - 4 = 0 \quad \text{und}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{4y}{\sin \varphi} + 4 = 0$$

Die gesuchten Bilder sind demnach Kreise mit den Radien  $\rho_\lambda = \frac{2}{\sin \lambda}$  und  $\rho_\varphi = 2 \operatorname{ctg} \varphi$ .

Ihre Mittelpunkte haben die Koordinaten  $x_\lambda = -2 \operatorname{ctg} \lambda$ ,  $y_\lambda = 0$  und  $x_\varphi = 0$ ,  $y_\varphi = \frac{2}{\sin \varphi}$ . Aus der Konstruktionsfigur 8 des § 7 kann man diese Resultate direkt ablesen.

**b) Gnomonische Horizontalprojektion.** Es gilt hier das Halbmessergesetz  $f(p) = \operatorname{tang} p$ . Deshalb ist

1.  $x = \operatorname{tang} p \sin \alpha$
2.  $y = \operatorname{tang} p \cos \alpha$ .

Hierzu treten die allgemeinen Gleichungen des § 2, in denen nur  $\lambda_0$ , die Länge des Hauptpunktes, gleich Null gesetzt ist.

3.  $\sin \alpha = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sin p}$
4.  $\operatorname{cosp} = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda$
5.  $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\cos \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi - \sin \varphi_0 \cos \lambda}$

1.3. und 4. ergibt 6.  $x = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\operatorname{cosp}} = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda} = \frac{\sin \lambda}{\sin \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \lambda}$

Wegen 1. 2. und 5. ist 7.  $\frac{x}{y} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi - \sin \varphi_0 \cos \lambda}$ , demnach

$$8. y = \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varphi_0 \cos \lambda}{\operatorname{tang} \varphi_0 \operatorname{tang} \varphi + \cos \lambda}$$

Aus 6. und 8. ist nun entweder  $\varphi$  oder  $\lambda$  zu eliminieren, wenn man die Gleichungen der Meridian- oder Breitenkreisbilder erhalten will. Aus 6. folgt  $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \lambda - x \cos \varphi_0 \cos \lambda}{x \sin \varphi_0}$  und durch Einsetzen dieses Wertes in 8.  $y = -\frac{\operatorname{ctg} \lambda}{\sin \varphi_0} x + \operatorname{ctg} \varphi_0$ . Die Meridiane bilden sich also als gerade Linien ab, die die y-Achse in der Entfernung  $\operatorname{cotang} \varphi_0$  vom Polbilde  $N'$  schneiden und mit dieser Achse den Winkel  $\lambda'$  einschließen, der durch  $\operatorname{tang} \lambda' = -\sin \varphi_0 \operatorname{tang} \lambda$  bestimmt wird.

Die direkte Elimination von  $\lambda$  aus den Gleichungen 6 und 8 ist eine ermüdende Rechnung. Wir kommen bequemer zum Ziel, wenn wir die Gleichung 1\* des § 2 ...  $\sin \varphi = \sin \varphi_0 \operatorname{cosp} + \cos \varphi_0 \sin p \cos \alpha$  mit berücksichtigen. Wir ersetzen hier das Produkt  $\sin p \cos \alpha$  mit Hilfe der Gleichung 2 durch  $y \operatorname{cosp}$  und finden  $\operatorname{cosp} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0}$ .

Wegen 1. und 2. ist aber  $x^2 + y^2 = \operatorname{tang}^2 p$ , also

$$x^2 + y^2 + 1 = 1 + \operatorname{tang}^2 p = \frac{1}{\operatorname{cosp}^2} = \frac{(\sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0)^2}{\sin^2 \varphi}$$

oder geordnet  $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi_0) - 2y \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_0 = 0$ .

Diese Gleichung stellt die Abbildung des  $\varphi$ . Breitenkreises dar. Wir geben ihr noch die Form  $x^2 \sin^2 \varphi - y^2 \cos(\varphi_0 + \varphi) \cos(\varphi_0 - \varphi) - 2y \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \sin(\varphi_0 + \varphi) \sin(\varphi_0 - \varphi) = 0$ .

Ist  $\varphi = \pi/2 - \varphi_0$ , so fällt das Glied mit  $y^2$  weg und die Gleichung

$$x^2 \sin^2 \varphi - 2y \sin \varphi \cos \varphi - \cos 2\varphi = 0$$

oder  $x^2 = 2 \operatorname{ctg} \varphi (y + \operatorname{ctg} 2\varphi)$  ergibt eine Parabel.

Für  $\varphi > \pi/2 - \varphi_0$  wird  $\cos(\varphi_0 + \varphi)$  negativ, das Breitenkreisbild ist dann eine Ellipse, während die Bedingung  $\varphi < \pi/2 - \varphi_0$  eine Hyperbel liefert. Für die Halbachsen erhalten wir die im § 7 b abgeleiteten Werte.

**c) Lamberts flächentreue azimutale Projektion** ist durch das Halbmessergesetz  $f(p) = 2 \sin \frac{p}{2}$  charakterisiert. Liegt der Hauptpunkt auf dem Äquator unter der Länge  $\lambda_0 = 0$ , dann bestehen die Gleichungen:

1.  $x = 2 \sin \frac{p}{2} \sin \alpha$ , 2.  $y = 2 \sin \frac{p}{2} \cos \alpha$
3.  $\operatorname{cosp} = \cos \varphi \cos \lambda$ , 4.  $\operatorname{tang} \alpha = \sin \lambda \operatorname{ctg} \varphi$ .

Aus 1., 2. und 3. folgt 5.  $x^2 + y^2 = 4 \sin^2 \frac{p}{2} = 2(1 - \operatorname{cosp}) = 2(1 - \cos \varphi \cos \lambda)$ ,

aus 1., 2. und 4. 6.  $\frac{x}{y} = \operatorname{tang} \alpha = \sin \lambda \operatorname{ctg} \varphi$ .

Durch Elimination von  $\lambda$  aus 5. und 6. findet man

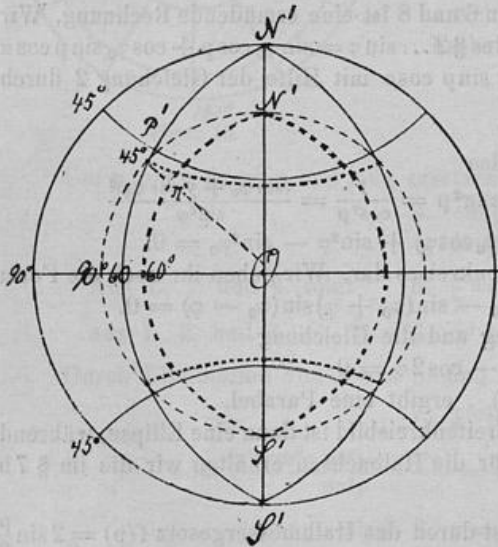
$$x^2 + y^2 = 2 - \frac{2}{y} \sqrt{y^2 - \sin^2 \varphi (x^2 + y^2)} \quad \text{und nach Fortschaffung der}$$

Wurzel 7.  $y^4 + x^2 y^2 - 4y^2 + 4 \sin^2 \varphi = 0$ . Die Abbildungen der Breitenkreise sind also Kurven 4. Ordnung. Um die der Meridiane zu erhalten, eliminiert man  $\varphi$  aus 6. und 7. und findet

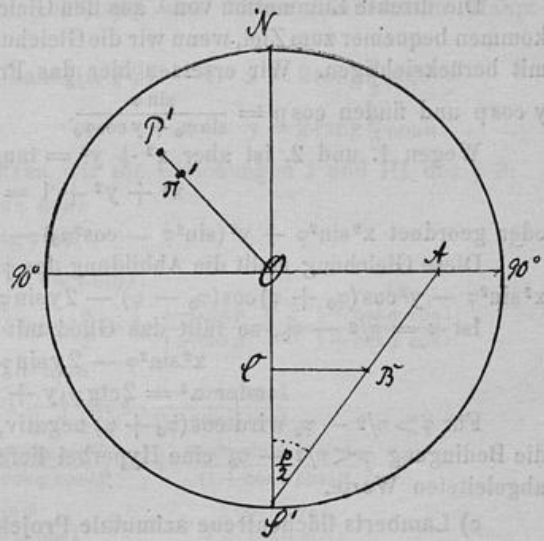
$$8. x^4 + y^4 \sin^2 \lambda + x^2 y^2 (1 + \sin^2 \lambda) - 4y^2 \sin^2 \lambda - 4x^2 + 4 \sin^2 \lambda = 0.$$

d) Die drei angeführten Beispiele zeigen, wie man rechnerisch die rechtwinkligen Koordinaten eines Kartenpunktes aus den geographischen Koordinaten erhält. Für die Schule sind derartige Aufgaben ein gutes Übungsmaterial für algebraische und trigonometrische Umformungen. Die punktweise Konstruktion des Netzes aus den rechtwinkligen Koordinaten liefert zwar die genauesten Bilder, ist aber in der Ausführung zu zeitraubend. Deshalb möge hier noch ein zweites allgemeines Verfahren erwähnt werden, das rascher zum Ziele führt.

Will man ein azimutales Netz für irgend eine Hauptpunktlage herstellen, so ist das verhältnismäßig einfach, wenn bereits für dieselbe Hauptpunktlage ein anderes azimutales Netz gezeichnet vorliegt. Hierzu eignen sich am besten die stereographischen Netze, denn sie lassen sich stets mit Lineal und Zirkel konstruieren. Um also das flächentreue azimutale Netz für die Hauptpunktlage  $\varphi_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$  zu entwerfen, legen wir in Figur 11 a das entsprechende stereographische Netz zugrunde. Es ist durch die voll ausgezogenen Linien dargestellt. Der Punkt  $P'$  hat die Breite  $45^\circ$  und die Länge  $60^\circ$ . Nun ist die Gerade  $OP'$  für jede azimutale Projektion das Bild des Hauptkreises, der durch den zugehörigen Kugelpunkt läuft. Der zu konstruierende Punkt  $\pi'$  der flächentreuen Abbildung muß also auf  $OP'$  liegen. Ferner muß  $O\pi' = 2 \sin \frac{p}{2}$  sein und wegen  $OP' = 2 \tan \frac{p}{2}$  folgt  $O\pi' = OP' \cos \frac{p}{2}$ . Man trage deshalb (Fig. 11 b) auf dem horizontalen Durchmesser, dem Bilde des Äquators, die Strecke  $OP'$  von O



Figur 11 a.



Figur 11 b.

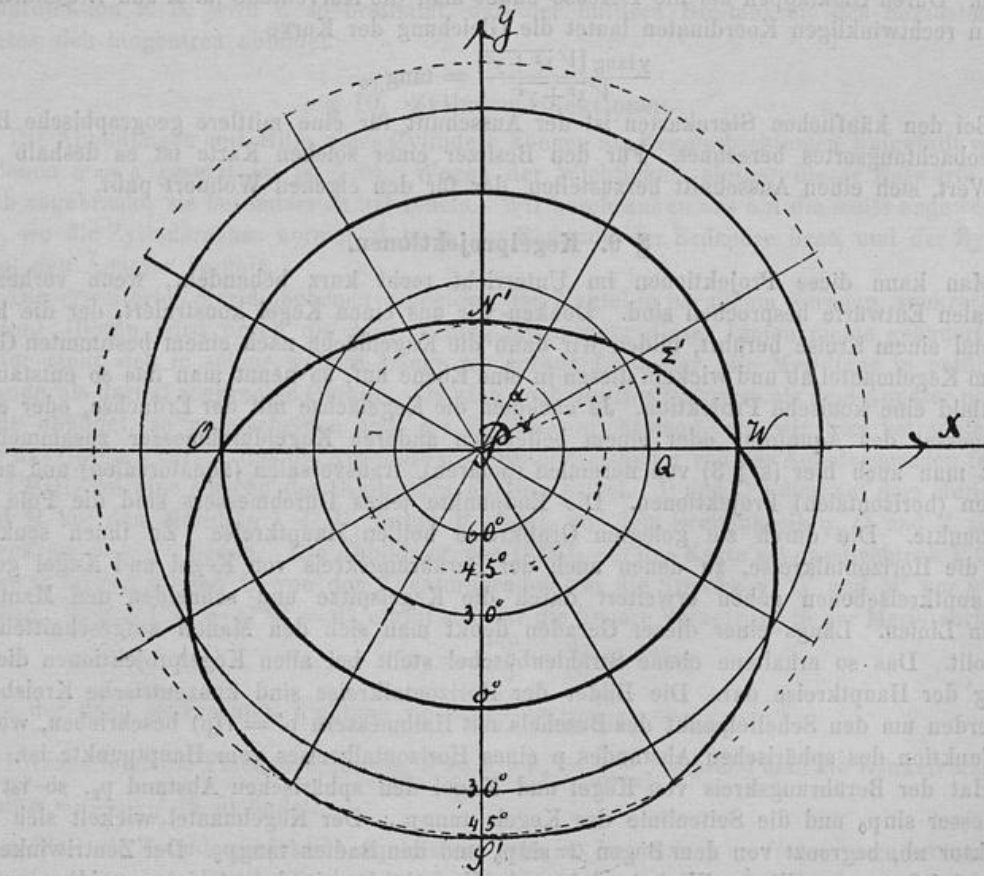
aus bis A ab, verbinde A mit  $S'$ , mache  $S'B$  auf  $S'A$  gleich  $OP'$  und falle von B das Lot  $BC$  auf  $OS'$ , dann ist  $S'C = O\pi'$ . In der Figur 11 a wurden so punktweise die Bilder der Meridiane von  $60^\circ$  und der Breitenkreise von  $45^\circ$  gezeichnet.

e) Eine Abbildungsaufgabe aus der astronomischen Geographie. Drehbare Sternkarten sind in jeder Buchhandlung zu billigem Preise käuflich. Ich habe sie stets meinen Schülern

zur Anschaffung empfohlen, da sie bei richtiger Handhabung recht gut zur Orientierung am Fixsternenhimmel geeignet sind. Unter einem Ausschnitt läßt sich die drehbare Karte für einen bestimmten Tag und Stunde so einstellen, daß nur die Sterne auf ihr sichtbar sind, die sich über dem Horizont befinden. Welche Form muß der Ausschnitt haben, wenn der Beobachtungsort unter der Breite  $\varphi_0$  liegt?

Der Ausschnitt ist eine Abbildung des Horizontes. Seine Gestalt hängt also von der Projektionsart ab, in der die Sternkarte entworfen ist. In Betracht kommen 1. die stereographische und 2. die äquidistante Polarprojektion. Im Falle 1 kann es nur ein Kreis sein, dessen Lage und Halbmesser wir bestimmen müssen. Der Horizont ist ein größter Kugelkreis des Himmelsgewölbes. Seine Ebene bildet mit der Weltachse den Winkel  $\varphi_0$ . Berücksichtigt man den Hilfssatz § 7, Seite 15, so zeigt ein Blick auf die aus der astronomischen Geographie bekannte Figur, die zur Veranschaulichung von Azimut und Höhe, Stundenwinkel und Deklination usw. dient, folgendes Resultat: Der Mittelpunkt des Ausschnitts liegt auf der Geraden, die den Meridian des Beobachtungsortes darstellt, und ist vom Himmelsnordpol um  $2\text{ctg}\varphi_0$  entfernt. Der Halbmesser hat die Länge  $\frac{2}{\sin\varphi_0}$ .

2. Gewöhnlich sind die drehbaren Sternkarten in äquidistanter Polarprojektion gezeichnet. Der Ausschnitt scheint hier beim ersten Anblick eine Ellipse zu sein. Tatsächlich stellt er eine transzendente Kurve dar. In der Figur 12 sind die Strahlen durch den Pol P die Bilder der



Figur 12.

Stundenkreise von  $30^\circ$  zu  $30^\circ$ . Unter ihnen befinden sich die beiden ausgezeichneten, aufeinander senkrechten Strahlen, von denen der zur Y-Achse gewählte den Ortsmeridian, der in die X-Achse fallende den durch den Ost- und Westpunkt gehenden Stundenkreis abbildet.

Für jeden in eine Gerade gestreckten Großkreisbogen von  $90^\circ$  sind 36 mm in der Zeichnung angenommen, so daß  $10^\circ$  4 mm entsprechen. Der Himmelsäquator und seine Parallelkreise projizieren sich als konzentrische Kreise um P. Ein Punkt  $\Sigma'$  des Horizontbildes ist durch seine Polarkoordinaten  $P\Sigma' = p$  und den Winkel  $N'P\Sigma' = \alpha$  oder durch seine rechtwinkligen Koordinaten  $PQ = x$  und  $\Sigma'Q = y$  festgelegt. Das dem Sektordreieck  $PN'\Sigma'$  entsprechende Dreieck auf der Kugel ist ein rechtwinklig-sphärisches mit der Hypotenuse  $\widehat{P\Sigma} = p$ , der Kathete  $\widehat{PN} = \varphi_0$  und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel  $NP\Sigma = \alpha$ , dem Supplement des Stundenwinkels. Es besteht daher die Beziehung  $\cos \alpha = \cotang p \cdot \tan \varphi_0$ .

Es ist dies die Polargleichung des gesuchten Horizontbildes, wenn man  $\alpha$  und  $p$  als variabel ansieht. In der Figur 12 ist  $\varphi_0 = 45^\circ$  n. angenommen, so daß  $\cos \alpha = \cotang p$  wird. Zur Zeichnung der Kurve berechnet man für beliebige Winkel  $\alpha$  des ersten Quadranten die Werte  $p$ , bestimmt in mm die Strecken, die zu diesen Winkeln  $p$  gehören, und trägt sie auf den freien Schenkeln der Winkel  $\alpha$  ab. Auf diese Weise erhält man den im 1. Quadranten liegenden Kurventeil. Da der Ausschnitt auf jeder Stundenlinie eine  $180^\circ$  entsprechende Strecke, in unserem Falle 72 mm, abschneidet, so ist der Verlauf der Kurve im 3. Quadranten leicht zu zeichnen. Durch Umklappen um die Y-Achse findet man die Kurventeile im 2. und 4. Quadranten.

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung der Kurve

$$\frac{y \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tan \varphi_0.$$

Bei den käuflichen Sternkarten ist der Ausschnitt für eine mittlere geographische Breite des Beobachtungsortes berechnet. Für den Besitzer einer solchen Karte ist es deshalb nicht ohne Wert, sich einen Ausschnitt herzustellen, der für den eigenen Wohnort paßt.

### § 9. Kegelprojektionen.

Man kann diese Projektionen im Unterricht recht kurz behandeln, wenn vorher die azimutalen Entwürfe besprochen sind. Denken wir uns einen Kegel konstruiert, der die Kugel in irgend einem Kreise berührt, bilden wir dann die Kugeloberfläche nach einem bestimmten Gesetz auf dem Kegelmantel ab und wickeln diesen in eine Ebene auf, so nennt man das so entstandene Kartenbild eine konische Projektion. Je nachdem die Kegellachse mit der Erdachse, oder einem Durchmesser des Äquators, oder einem beliebigen anderen Kugeldurchmesser zusammenfällt, spricht man auch hier (s. § 3) von normalen (polaren), transversalen (äquatorealen) und schiefachsigen (horizontalen) Projektionen. Die Endpunkte jenes Durchmessers sind die Pole oder Hauptpunkte. Die durch sie gelegten Großkreise heißen Hauptkreise. Zu ihnen senkrecht liegen die Horizontalkreise, zu denen auch der Berührungskreis von Kegel und Kugel gehört. Die Hauptkreisebenen gehen erweitert durch die Kegelspitze und schneiden den Mantel in geraden Linien. Längs einer dieser Geraden denkt man sich den Mantel aufgeschnitten und aufgerollt. Das so erhaltene ebene Strahlenbüschel stellt bei allen Kegelprojektionen die Abbildung der Hauptkreise dar. Die Bilder der Horizontalkreise sind konzentrische Kreisbögen. Sie werden um den Scheitelpunkt des Büschels mit Halbmessern  $p' = f(p)$  beschrieben, wo  $f(p)$  eine Funktion des sphärischen Abstandes  $p$  eines Horizontalkreises vom Hauptpunkte ist.

Hat der Berührungskreis von Kegel und Kugel den sphärischen Abstand  $p_0$ , so ist sein Halbmesser  $\sin p_0$  und die Seitenlinie des Kegels  $\tan p_0$ . Der Kegelmantel wickelt sich dann als Sektor ab, begrenzt von dem Bogen  $2\pi \sin p_0$  und den Radien  $\tan p_0$ . Der Zentriwinkel des Sektors ist  $2\pi \cos p_0$ . Einem Winkel  $\alpha$ , den ein Hauptkreis mit dem Anfangsmeridian auf der

Kugel einschließt, entspricht deshalb auf der Karte nicht ein gleicher Winkel wie bei den azimutalen Projektionen, sondern ein Winkel  $\alpha' = \alpha \cos p_0$ , d. h. ein ihm proportionaler Winkel. Für den bisher angenommenen Fall, daß der Kegel die Kugel berührt, ist der Proportionalitätsfaktor  $n = \cos p_0$ . Benutzt man einen Kegel, der die Kugel in den Horizontalkreisen  $p_1$  und  $p_2$  schneidet, so hat man  $n = \cos \frac{p_1 + p_2}{2}$  zu setzen. Demnach muß  $n$  stets ein echter Bruch sein. Für den einen Grenzfall  $n = 1$  geht der Kegel in die Tangentialebene im Pol über und die Projektion wird eine azimutale. Der andere Grenzfall  $n = 0$  tritt ein, wenn der Kegel zu einem Zylinder ausartet, der die Kugel berührt oder schneidet.

Die Bestimmung der Halbmessergesetze für konische Projektionen mit ausgezeichneten Eigenschaften lassen sich nach den Methoden des § 6 erledigen. Man erhält z. B. für die Flächentreue das Gesetz  $p' = \frac{2 \sin \frac{p}{2}}{\sqrt{n}}$ , für die Winkeltreue  $p' = z (\tan \frac{p}{2})^n$ , wo die Konstante  $z$  den Halbmesser der Abbildung bedeutet, die den Horizontal-Großkreis darstellt. Auch die Ergebnisse des § 5 über die Bildverzerrung können in einfacher Weise übertragen werden. So findet man bei flächentreuen Entwürfen für die lineare Verzerrung in der Richtung der Hauptkreise  $v_1 = f'(p) = \frac{\cos \frac{p}{2}}{\sqrt{n}}$  und in der Richtung der Horizontalkreise  $v_2 = \frac{\sqrt{n}}{\cos \frac{p}{2}}$ . Die Wahl des Proportionalitätsfaktors  $n$  gestattet noch gewisse Freiheiten. Bei Lamberts flächentreuer normaler Kegelprojektion z. B. wird  $n$  so bestimmt, daß der mittlere Breitenkreis des darzustellenden Gebietes sich längentreu abbildet.

### § 10. Zylinderprojektionen.

Die Abbildungen mit Hilfe eines Zylinders können als Kegelprojektionen aufgefaßt werden, bei denen  $n = 0$  gesetzt ist (s. § 9). Wegen der Wichtigkeit einiger dieser Entwürfe ist es jedoch angebracht, sie besonders zu behandeln. Wir beschränken uns auf die meist angewendeten Fälle, wo die Zylinderachse normal, d. h. in der Richtung der Erdachse liegt, und der Zylindermantel den Äquator berührt.

Die erweiterten Meridianebenen schneiden den Mantel in parallelen Geraden, senkrecht zum Äquator. Hieran wird durch die Abwicklung längs einer dieser Linien nichts geändert. Der Äquator stellt sich in seiner wahren Länge als gerade Linie dar, die Meridiane in natürlichem Abstände als darauf senkrechte Gerade. Da man auch die Breitenkreise als dem Äquator parallele Gerade abbildet, so unterscheiden sich die Zylinderprojektionen, die wir hier betrachten, nur durch das Gesetz  $y = f(\varphi)$ , das die Abstände der Breitenkreisbilder von der Äquatorgeraden festlegt.

PMQL sei eine Masche des Gradnetzes auf der Kugel. P und Q sollen auf dem Meridian  $\lambda$ , L und M auf dem Meridian  $\lambda + d\lambda$ , ferner P und L auf dem Breitenkreis  $\varphi$ , Q und M auf dem Breitenkreis  $\varphi + d\varphi$  liegen. Die Abbildung von PQML auf der Karte sei das Rechteck P'Q'M'L', und zwar mögen P' und L' von der Äquatorgeraden um die Strecke  $y$ , Q' und M' um  $y + dy$  abstehen. Wegen  $P'L' = Q'M' = d\lambda$  ergibt sich für die lineare Verzerrung in der Meridianrichtung

$$v_1 = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)$$

und in der dazu senkrechten Richtung  $v_2 = \frac{P'L'}{PL} = \frac{d\lambda}{d\lambda \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$ .

Hieraus folgt die Flächenverzerrung  $S = v_1 \cdot v_2 = \frac{f'(\varphi)}{\cos \varphi}$ , während man die Winkelverzerrung aus  $\sin \omega = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$  (§ 5) findet.

a) Soll die Zylinderprojektion **aquidistant** sein, so hat man  $y = f(\varphi) = \varphi$  zu setzen. Man erhält die sogenannte **Plattkarte**, bei der das Gradnetz aus kongruenten Quadraten besteht. Es

besitzt den Vorzug der leichten Herstellbarkeit. Die Bildverzerrung ist aber bereits für Länder, die sich über  $20^\circ$  nördlich oder südlich vom Äquator ausdehnen, sehr beträchtlich. Zwar ist  $v_1 = 1$ , doch  $v_2 = \frac{1}{\cos \varphi}$  und auch  $S = \frac{1}{\cos \varphi}$ . Die größte Winkelverzerrung  $2\omega$  bestimmt man aus  $\sin \omega = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \tan^2 \frac{\varphi}{2}$ .

**b) Lamberts flächentreue Zylinderprojektion.** Wegen der Flächentreue muß  $S = v_1 \cdot v_2 = \frac{f'(\varphi)}{\cos \varphi} = 1$ , also  $f'(\varphi) = \cos \varphi$  sein, woraus  $y = f(\varphi) = \sin \varphi$  folgt. Die den Breitenkreis  $\varphi$  darstellende Gerade muß somit von der Äquatorgeraden denselben Abstand  $y = \sin \varphi$  haben wie der Breitenkreis  $\varphi$  auf der Kugel vom Äquator. Daß eine nach diesem Gesetz gezeichnete Karte in der Tat die verlangte Eigenschaft besitzt, läßt sich unmittelbar aus der bekannten Formel  $F = 2r\pi h$  für den Inhalt der Kugelzone einsehen.

Die linearen Verzerrungen sind  $v_1 = \cos \varphi$  und  $v_2 = \frac{1}{\cos \varphi}$ . Für die Winkelverzerrung ergibt sich  $\sin \omega = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}$ .

**c) Mercators winkeltreue Projektion<sup>1)</sup>.** Die Winkeltreue verlangt, daß  $v_1 = v_2$ , also im vorliegenden Falle  $f'(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi}$  ist. Nur die Funktion  $y = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$  erfüllt diese Bedingung, wie sich durch Integration ergibt.

Will oder muß man auf diesen kürzesten Weg verzichten, dann erscheint mir folgender Gedankengang der natürlichste zu sein:

Auf der Kugel ist jeder Bogen eines Meridiangrades genau so groß wie der eines Äquatorialgrades, dagegen nimmt die Länge eines Grades auf den Breitenkreisen mit wachsender Breite ab und beträgt für die Breite  $\varphi$  nur  $m \cos \varphi$ , wenn  $m$  die Länge eines Meridiangrades angibt. Das Verhältnis der Gradlänge auf einem Meridian zur Gradlänge auf dem  $\varphi$ . Breitenkreise ist also  $\frac{1}{\cos \varphi}$ . Auf der durch Zylinderabwicklung hergestellten Karte hat jeder Grad eines Breitenparallels die Länge  $m$ . Einen Grad des  $\varphi$ . Breitenkreises der Kugel stellt also die Karte  $\frac{1}{\cos \varphi}$  mal so groß dar. Vergrößern wir nach Mercators Vorgang für einen Kartenpunkt der Breite  $\varphi$  den Meridiangrad von  $m$  auf  $\frac{m}{\cos \varphi}$ , so ist das Verhältnis von Gradlänge auf dem Meridian zur Gradlänge des Breitenparallels  $\frac{m}{\cos \varphi} : m = \frac{1}{\cos \varphi}$ , d. h. ebenso groß wie auf der Kugel. Soll das für alle Kartenpunkte gelten, so müssen ihre Abstände von der den Äquator darstellenden geraden Linie die Länge  $y = m \left[ \frac{1}{\cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos \varphi^\circ} \right]$  erhalten. Auf der Erde ist ein Meridiangrad gleich 15 geographischen Meilen oder ungefähr 111 km. In erster Annäherung läßt sich dieser Bogen als gerade Linie, jede Gradmasche also als ein ebenes Rechteck ansehen, dem seine Mercator-Abbildung ähnlich ist. Weit genauer und für praktische Zwecke völlig ausreichend trifft dies zu, wenn man die Werte von  $y$  statt von Grad zu Grad, von Minute zu Minute fortschreitend berechnet und beim Kartenentwurf verwendet.

Die Mercatorprojektion ist die einzige winkeltreue Abbildung, bei der die Meridiane und Breitenkreise durch gerade Linien dargestellt werden. Hierauf beruht ihre hervorragende Be-

<sup>1)</sup> In dem Leitfaden für Projektionslehre von Müller und Presler (S. 312) bedauern die Verfasser den immer aufs neue entstehenden Irrtum, die Mercator-Karte für eine Zylinderprojektion zu halten. Die Verfasser haben Recht, wenn man unter Projektion nur die Perspektive versteht. Dem aber steht der Sprachgebrauch entgegen, denn alle namenhaften Autoren, die über Kartenprojektion geschrieben haben, gebrauchen das Wort Projektion in der allgemeinen Bedeutung von Abbildung. Daß jemand deshalb die Mercator-Karte für eine Zylinderperspektive halten wird, erscheint wohl ausgeschlossen.



deutung für nautische Zwecke. Verbindet man zwei Kartenpunkte A' und B' durch eine Gerade, so bildet diese mit sämtlichen Meridianen den gleichen Winkel  $\alpha$ . Die ihr entsprechende Kurve auf der Erde, die sogenannte Loxodrome, schneidet wegen der Winkeltreue ebenfalls alle Meridiane unter demselben Winkel  $\alpha$ . Auf dieser Kurve fährt ein Schiff, wenn es seinen Kurs, d. h. den Winkel zwischen Kompaßrichtung und Fahrtrichtung, unverändert beibehält, was für den Steuermann das einfachste ist. Will man also auf der Loxodrome von A nach B gelangen, so erhält man die einzuschlagende Kursrichtung, indem man auf der Mercatorkarte den Winkel  $\alpha$  mißt.

Für geographische Zwecke hat die Mercatorprojektion wegen ihrer beträchtlichen linearen und Flächenverzerrung nur geringe Bedeutung. Es ist  $v_1 = v_2 = \frac{1}{\cos \varphi}$  und  $S = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ . In welcher Weise diese Verzerrungen mit zunehmender Breite wachsen, zeigt folgende kleine Tabelle:

$\varphi$	$v_1 = v_2$	S	$2\omega$
0°	1	1	0
30°	1,15	1,33	0
45°	1,41	2	0
60°	2	4	0
90°	$\infty$	$\infty$	0

### § 11. Die schräge Parallelprojektion der Kugel

hat für Kartenentwürfe gar keine Bedeutung. Für den Unterricht, wo man so oft in der mathematischen Geographie die Erd- und Himmelskugel mit ihren wichtigsten Kreisen zu zeichnen hat, erscheint sie mir als die geeignetste Methode der Kugeldarstellung. Statt ihrer benutzt man wegen der leichten Ausführbarkeit mit Lineal und Zirkel zuweilen auch die stereographische Projektion<sup>1)</sup>. Doch haben die in dieser Manier entworfenen Bilder für den Anfänger zu wenig Anschaulichkeit. Außerdem ist die schräge Parallelprojektion dem Schüler weit geläufiger, da man sie meistens für die Herstellung der Figuren in der Stereometrie benutzt. Der Einwand der größeren Schwierigkeit einer exakten Zeichnung bei dieser Abbildungsmethode ist hinfällig, wenn ungünstige Bedingungen vermieden werden.

Um einzusehen, worauf es dabei ankommt, dient folgender Satz:

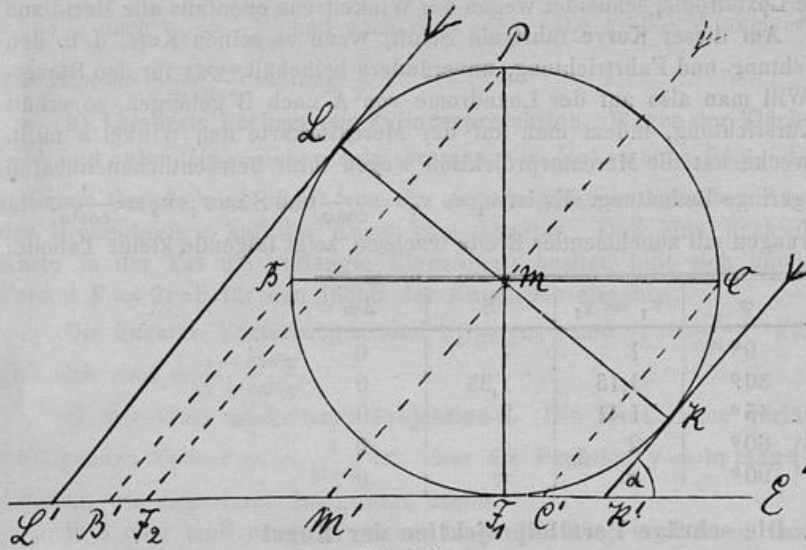
**Die schrägen Parallelprojektionen aller größten Kugelkreise, die auf der Bildebene senkrecht stehen, schneiden sich in den Brennpunkten der Umrißellipse der Kugel.**

Holz Müller macht in seiner „Einführung in das stereometrische Zeichnen“ von dem Satze Gebrauch (Seite 63), ohne ihn zu beweisen. In dem Leitfaden der Projektionslehre von Müller-Preßler, Ausgabe A, Seite 45 und 46, findet sich wohl ein Beweis, doch ist er so umständlich, daß ich von ihm nur abraten kann. An dem gleichen Übelstande leidet der Beweis, den Weber-Wellstein in ihrer Encyclopädie, Band III, Seite 441, geben. Behrendsen-Götting behelfen sich in ihrem Lehrbuch der Oberstufe, Ausgabe A, Seite 108, ohne den Satz, indem sie eine große Zahl von Parallelkreisen konstruieren und die Umrißellipse dann als Einhüllende nach dem Augenmaß zeichnen. Das Verfahren ist recht zeitraubend. Es gewährt auch keinen Einblick in die Bedingungen, von denen die Größe und Lage der Umrißellipse abhängt. Der obige Satz leistet dies und ermöglicht ferner eine rasche und exakte Ausführung der Zeichnung. Hier folgt sein einfacher Beweis:

Die Kugel um M mit dem Radius  $MB = r$  (Fig. 13) soll in schräger Parallelprojektion unter  $\frac{1}{n}$  Verkürzung und dem Winkel  $\psi$  auf einer Tangentialebene oder einer zu dieser parallelen

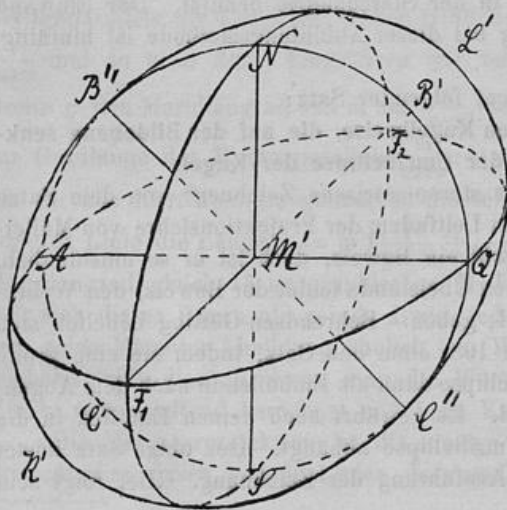
<sup>1)</sup> S. z. B. Kambly-Thaer: Stereometrie, Ausgabe A, § 82.

Ebene abgebildet werden. Die Figur 13 ist ein Achsenschnitt des die Kugel einhüllenden Strahlenzylinders,  $MM'$  seine Achse. Der Zylinder berührt die Kugel in einem Kreise  $KML$ , dessen Ebene senkrecht zur Strahlenrichtung liegt. Die Projektion dieses Kreises gibt den Umriß des sichtbaren Teils der Kugel an. Es ist dies eine Ellipse mit der langen Achse



Figur 13.

kann als den Achsenschnitt eines schiefabgeschnittenen geraden Kreiszyinders mit einer der Dandelinschen Kugeln, so muß der eine Brennpunkt der Ellipse der Berührungspunkt  $F_1$  von Kugel und Bildebene sein. Den zweiten Brennpunkt  $F_2$  erhält man durch die Projektion des höchsten Punktes  $P$  der Kugel. Alle größten Kugelkreise, deren Ebenen senkrecht zur Bildebene  $E'$  stehen, haben  $PF_1$  zum Durchmesser. Deshalb müssen sich ihre Abbildungen in  $F_1$  und  $F_2$  schneiden.



Figur 14.

Auf  $F_1F_2$  errichtet man in  $M'$  das Lot und bringt es zum Schnitt mit dem Kreise in  $B''$  und  $C''$ . Die Umrißellipse ist nun durch ihre Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  und ihre kurze Hauptachse  $B''C'' = 2r = 6$  cm bestimmt. Stellt der Kreis  $ANQS$  den Nullmeridian der Erde dar, so erhält

senkrecht zur Strahlenrichtung liegt. Die Projektion dieses Kreises gibt den Umriß des sichtbaren Teils der Kugel an. Es ist dies eine Ellipse mit der langen Achse  $L/K' = \frac{2r}{\sin \alpha}$ , wo  $\alpha$  den Winkel der Strahlen gegen die Bildebene bezeichnet und durch die Beziehung  $\text{ctg } \alpha = \frac{1}{n}$  bestimmt ist. Hieraus folgt  $L/K' = \frac{2r}{n} \sqrt{n^2 + 1}$ . Die kurze Achse der Umrißellipse hat die Länge  $2r$ . Da man die Figur auffassen

Der zur Bildebene parallele größte Kugelkreis  $BMC$  projiziert sich als ein gleich großer Kreis, der die Umrißellipse in den Endpunkten der kurzen Achse ( $B''C''$  Fig. 14) berührt und ihre lange Achse in  $B'$  und  $C'$  trifft.

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion des Schrägbildes der Kugel, die durch die Endpunkte von drei zueinander senkrechten, gleich langen Achsen gehen soll, von denen zwei in der Bildebene liegen. Die Verkürzung betrage  $\frac{5}{6}$  und der Winkel  $45^\circ$  (Fig. 14).

Man zeichnet um den Mittelpunkt  $M'$  des Achsensystems den Kreis mit dem Radius  $r$  z. B.  $= 3$  cm, der die unverkürzt erscheinenden Achsen in den Punkten  $A, Q, N, S$  schneidet. An  $AQ$  trägt man in  $M'$   $45^\circ$  an und macht die freien Schenkel  $= M'F_1 = M'F_2 = \frac{5}{6} r = 2,5$  cm.

man z. B. die Bilder des Meridians von  $90^\circ$  und des Äquators als Ellipsen, bei denen  $F_1F_2$  und  $NS$  oder  $F_1F_2$  und  $AQ$  konjugierte Durchmesser sind.

In der Figur ist das Verkürzungsverhältnis  $\frac{1}{n} = \frac{5}{6}$  absichtlich so gewählt worden, daß die Umrißellipse sehr beträchtlich von dem Bilde des Nullmeridians abweicht. In welcher Weise sich die Zeichnung bei passender Wahl von  $n$  vereinfacht, zeigt folgende Tabelle, in der für  $r = 3$  cm die lange Halbachse  $a$  der Umrißellipse und die Differenz  $a-r$  für verschiedene  $n$  berechnet ist.

	$n$	$a$	$a-r$
1.	1	4,23	1,23
2.	1,2	3,905	0,91
3.	1,5	3,605	0,61
4.	2	3,354	0,35
5.	3	3,162	0,16
6.	4	3,092	0,09
7.	5	3,059	0,06

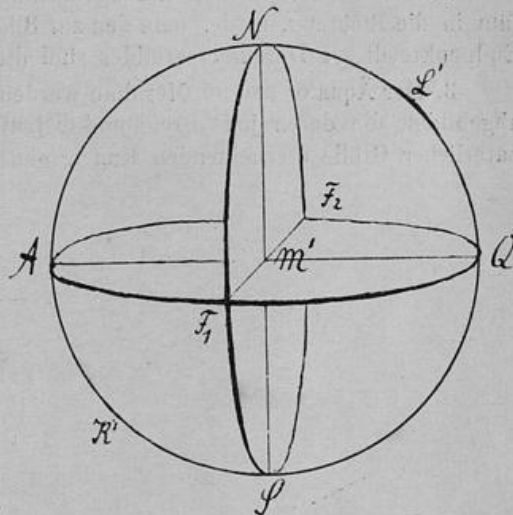
Der Fall 2 der Tabelle ist in der Figur 14 ausgeführt. Die lange Halbachse  $M'L'$  ist hier um 0,91 cm größer als  $r$  und die Abbildungen des Meridians von  $90^\circ$  und des Äquators greifen erheblich über den als Kreis gezeichneten Nullmeridian über. Das ist für den Zeichner recht unbequem. Dagegen wird im Fall 6 (für  $n = 4$ )  $M'L' = 3,092$  cm. Es ist dann  $a$  noch nicht um 1 mm größer als  $r$ , Umrißellipse und Nullmeridian sind also, wie die Figur 15 zeigt, nicht mehr auseinander zu halten. Selbst bei einer großen Wandtafelgröße würde bei  $r = 30$  cm  $a$  nur um 9,2 mm länger als  $r$  sein, und man darf deshalb ohne Gewissensbisse Ellipse und Kreis zusammenfallen lassen.

Zeichnet man nun den Äquator und  $90^\circ$  Meridian so als Ellipsen mit der langen Halbachse  $r$ , daß sie durch die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  laufen, so können auch diese Bilder nur unmerklich von den exakten Figuren abweichen.

Es ist eine für den Primaner nicht uninteressante Aufgabe, die Größe der hierbei auftretenden Fehler festzustellen. Zu diesem Zweck ist zunächst die wahre Länge der Hauptachsen  $a$  und  $b$  z. B. bei der Äquatorabbildung zu berechnen aus ihren konjugierten Halbmessern  $a' = r$  und  $b' = \frac{a'}{n}$ , die den Winkel  $\psi$  einschließen.

Die Gleichungen  $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$  und  $ab = a'b' \sin \psi$  liefern, wenn  $n = 4$ ,  $r = 3$  cm und  $\psi = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$  angenommen wird, folgende Werte für  $a$  und  $b$  in cm:

$\psi$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$
$a$	3	3,024	3,048	3,071
$b$	0,75	0,644	0,522	0,366



Figur 15.

Da wir die korrekte Abbildung durch eine Ellipse ersetzen, die durch die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  geht und deren halbe lange Hauptachse  $a' = 3$  cm ist, so bestimmen wir noch die halbe kurze Achse  $b''$  der Ersatzellipse und den kleinen Winkel  $\delta$ , den die Achsen  $a$  und  $a'$  bilden. Aus den leicht abzuleitenden Gleichungen  $b'' = \frac{a' \sin \psi}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \psi}}$  und  $\sin \delta = \frac{b}{a'} \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}}$  erhalten wir dann die Tabelle:

$\psi$	$90^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$
$b''$	0,75	0,654	0,539	0,384
$b'' - b$	0	0,010	0,017	0,018
$\delta$	0	$1^\circ 36'$	$1^\circ 47'$	$1^\circ 30'$

Ich fasse die Ergebnisse des letzten Paragraphen zusammen:

1. Für die Zeichnung der Kugel in schräger Parallelprojektion ist die Umrißellipse besonders wichtig. Ihre Gestalt hängt allein von dem Verkürzungsverhältnis  $\frac{1}{n}$  ab. Je kleiner  $\frac{1}{n}$  ist, um so weniger unterscheiden sich die Längen der beiden Hauptachsen. Für  $n \leq 4$  kann dieser Unterschied unbedenklich vernachlässigt und die Ellipse durch den Kreis ersetzt werden, dessen Halbmesser gleich dem der Kugel ist.

2. Der Winkel  $\psi$  der Abbildung beeinflußt nur die Lage der Umrißellipse. Ihre lange Achse fällt in die Richtung, in der man den zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmesser darstellt. Die Endpunkte dieses Durchmesserbildes sind die Brennpunkte der Umrißellipse.

3. Der Äquator und 90. Meridian werden für  $n \leq 4$  mit ausreichender Genauigkeit als Ellipsen abgebildet, die durch jene Brennpunkte laufen und deren lange Achse ein Durchmesser des in natürlicher Größe erscheinenden Kugelgroßkreises ist.



Da wir die korrekte A geht und deren halbe lange Achse  $b''$  der Ersatzellipse den leicht abzuleitenden Gl dann die Tabelle:

$\psi$	
$b''$	
$b'' - b$	
$\delta$	

Ich fasse die Ergebnis

1. Für die Zeichnung wichtig. Ihre Gestalt hängt weniger unterscheiden sich schied unbedenklich vernachmesser gleich dem der Kug
2. Der Winkel  $\psi$  der A fällt in die Richtung, in der Endpunkte dieses Durchmes
3. Der Äquator und 90. abgebildet, die durch jene natürlicher Größe erscheinen



die durch die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  men wir noch die halbe kurze Achsen  $a$  und  $a'$  bilden. Aus

$$\delta = \frac{b}{a'} \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}}$$

$30^\circ$
0,384
0,018
$1^\circ 30'$

a: ist die UmriBellipse besonders  $\frac{1}{n}$  ab. Je kleiner  $\frac{1}{n}$  ist, um so Für  $n \geq 4$  kann dieser Unter- is ersetzt werden, dessen Halb-

UmriBellipse. Ihre lange Achse ugeldurchmesser darstellt. Die umriBellipse.

hender Genauigkeit als Ellipsen Achse ein Durchmesser des in