

Bemerkungen über die Verwendung der einfachsten Reihen bei der Begründung der algebraischen Regeln.

§. 1. Eine ganze Zahl ist die Vorstellung von der Vielheit oder Menge gleichartiger Dinge. Jedes dieser Dinge ist im Gegensatze zu ihrer Vielheit eine Einheit und wird entweder ohne nähere Angabe als Eins oder Einer aufgefasst oder aber durch Bezeichnung der Art benannt, z. B. als Meter, Ar, Gramm u. s. w. Im ersten Falle heißt die Zahl unbenannt, im anderen benannt.

Wenn man aus einer Menge von gleichartigen Dingen einen Bestandteil als unbenannte Einheit oder Eins auffasst, dann einen andern hinzunimmt und diese Menge mit zwei bezeichnet u. s. w., so erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen oder die natürliche Zahlenreihe; jede ganze Zahl ist ein Glied dieser Reihe.

§. 2. Zu einer Zahl eine andere addieren heißt in der Zahlenreihe von der einen an um so viele Einheiten weiter zählen, als die andere angibt. Die so entstandene Zahl heißt Summe, und jene Zahlen sind ihre Glieder (Summanden). Die Summe der Zahlen a und b wird mit $a + b$ bezeichnet und „ a plus b “ gelesen. Da auch in der Summe $b + a$ alle Einheiten der Zahlen a und b enthalten sind, so ist

$$a + b = b + a,$$

und ebenso

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + a + c \\ &= b + c + a = c + a + b = c + b + a, \end{aligned}$$

d. h. eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Ordnung der Glieder ändert.

Von einer Zahl eine andere abziehen (subtrahieren) heißt in der Zahlenreihe von der ersten Zahl an um so viele Einheiten zurückzählen, als die andere angibt. Die so entstandene Zahl heißt Differenz, jene erste ist ihr Minuend, die andere ihr Subtrahend. Die Differenz vom Minuenden a und Subtrahenden b wird durch $a - b$ bezeichnet und „ a minus b “ gelesen.

§. 3. Von der Reihe der natürlichen Zahlen gilt das Gesetz, daß aus jedem Gliede beliebig viele folgende durch wiederholte Addition von Eins und alle vorhergehenden durch wiederholte Subtraktion von Eins entstehen. Wenn man aber durch Subtraktion die Reihe über Eins hinaus fortsetzt, so erhält man Glieder, die keine natürlichen Zahlen sind. Diese werden in der Ordnung, wie sie entstehen, mit $0, -1, -2, -3$ u. s. w. bezeichnet, so daß $0 = 1 - 1, -1 = 0 - 1, -2 = -1 - 1$ u. s. w. Das erste von diesen neuen Gliedern, nämlich 0 , gibt hier wie in den dekadischen Zahlen das Fehlen der Einheiten an; die folgenden entstehen, wenn man von 0 ausgeht, ebenso durch wiederholte Subtraktion von 1 , wie die natürlichen Zahlen durch Addition; sie heißen daher negative (subtraktive) Zahlen. Um auch bei den natürlichen Zahlen auf ihre Entstehung (durch Addition) hinzuweisen, nennt man sie positiv (additiv) und fügt noch das Vorzeichen $+$ hinzu.

Die negativen Zahlen bilden für sich eine Reihe vom Anfangsglied 0 , wie die positiven, und durch die Vereinigung beider entsteht die nach beiden Seiten unbegrenzte erweiterte Reihe der algebraischen Zahlen:

$$1) \dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 \dots$$

Eine algebraische Zahl bezeichnet somit wie die natürliche eine Menge von Einheiten; sie gibt aber überdies durch das Vorzeichen ($+$ oder $-$) an, ob die Einheiten durch Wiederholung der Addition oder der Subtraktion vereinigt worden sind. Ganz abgesehen von dieser durch das Vorzeichen bestimmten Beziehung zu Null heißt eine Zahl absolut oder absoluter Wert.

In jeder geordneten Reihe von Gegenständen wird die Stelle eines jeden am einfachsten und deutlichsten durch eine Zahl, den Stellenzeiger, angegeben. In der natürlichen und auch in der erweiterten Zahlenreihe ist jede Zahl nicht nur ein Glied, sondern auch der Stellenzeiger von sich selbst. //

Man erhält eine anschauliche Darstellung des Vorstehenden, wenn man auf einer Geraden als Zahlenaxe von einem beliebigen Nullpunkte aus eine beliebige als Einheit gewählte Strecke nach beiden Seiten wiederholt abträgt und die Teilpunkte auf der einen Seite des Nullpunktes mit den positiven, auf der andern mit den negativen Zahlen der Reihe nach bezeichnet.

Aus dem oben erwähnten Gesetze der Zahlenreihe folgt unmittelbar, daß

$$a + (-a) = 0$$

ist, und aus dieser Gleichung ergeben sich die Regeln für die Addition und Subtraktion der negativen Zahlen.

§. 4. Setzt man an Stelle jeder in der Zahl n enthaltenen Einheit die Zahl a , so entsteht die Summe

$$a + a + a \dots + a \text{ (n Glieder),}$$

die kurz mit $a \cdot n$ oder mit $a n$ bezeichnet und „ a mal n “ gelesen wird. Die Rechnung, durch die man $a \cdot n$ aus den Zahlen a und n bildet, heißt Multiplikation; $a \cdot n$ ist das Produkt, a der Multiplikand, n der Multiplikator des Produktes.

Ein Produkt ist also ein Vielfaches des Multiplikanden und entsteht aus diesem so, wie der Multiplikator aus der Einheit.

Wenn in dem Produkte $a n$ oder der Summe

$$a + a + a + \dots + a \text{ (n Glieder)}$$

der Multiplikand eine unbenannte Zahl ist, so kann man aus jedem Gliede der Summe eine Einheit herausheben und diese Einheiten zu der Zahl n vereinigen. Wird eine solche Vereinigung a -mal vorgenommen, so entsteht die Summe

$$n + n + n + \dots + n \text{ (a Glieder)}$$

oder das Produkt $n \cdot a$. Daher ist

$$a n = n a,$$

d. h. ein Produkt, dessen Multiplikand eine unbenannte Zahl ist, bleibt unverändert, wenn man den Multiplikanden mit dem Multiplikator vertauscht.

Wegen dieser Eigenschaft des Produktes bezeichnet man den Multiplikanden und Multiplikator auch mit dem gemeinsamen Namen Faktoren.

§. 5. Von der Reihe der natürlichen Vielfachen einer Zahl a , d. i. von der Reihe $1a, 2a, 3a$ u. s. w. gilt das Gesetz, daß aus jedem Gliede beliebig viele folgende durch wiederholte Addition von a und alle vorhergehenden durch wiederholte Subtraktion von a entstehen. Wenn man aber das Verfahren der Subtraktion über das Anfangsglied a hinaus fortsetzt, so erhält man die erweiterte Reihe der Vielfachen von, nämlich

$$2) \dots - 3a, - 2a, - 1a, 0, + 1a, + 2a, + 3a \dots,$$

und darin ist der Stellenzeiger eines jeden Gliedes das entsprechende Glied der Zahlenreihe 1).

Die hier durch Erweiterung entstandenen Glieder sind keine natürlichen Vielfachen von a , sie sind algebraische Vielfache von a oder Produkte, deren Multiplikand a ist, wenn man folgenden erweiterten Begriff des Produktes zu Grunde legt.

Ein Produkt aus zwei Zahlen ist in der (erweiterten) Reihe der Vielfachen des Multiplikanden das Glied, dessen Stelle der Multiplikator angiebt.

Demgemäß ist

$$a \cdot (+n) = a n, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot (-n) = -a n.$$

Wenn man von den natürlichen Vielfachen einer negativen Zahl ausgeht, z. B. von der Reihe $-1a, -2a, -3a$ u. s. w., so entsteht durch Erweiterung die Reihe

$$\dots + 3a, + 2a, + 1a, 0, - 1a, - 2a, - 3a, \dots$$

Wendet man auch hier wieder den erweiterten Begriff des Produktes an, so erhält man

$$(-a) \cdot (+n) = -a n, \quad (-a) \cdot 0 = 0, \quad (-a) \cdot (-n) = +a n.$$

Die hier gewonnenen Ergebnisse lassen sich in folgende Regeln zusammenfassen.

α) Ein Produkt aus zwei (algebraischen) Zahlen ist seinem absoluten Werte nach gleich dem Produkte aus den absoluten Werten der Faktoren und positiv oder negativ, je nach dem die Faktoren gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

β) Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.

§. 6. Eine Zahl durch eine andere teilen heißt eine dritte Zahl finden, die mit der zweiten ein Produkt bildet, das der ersten gleich ist.

Diese neue Zahl heißt Quotient, jene erste Dividend, die andere Divisor.

Der Quotient von dem Dividenten a und dem Divisor wird mit $\frac{a}{n}$ oder $a : n$ bezeichnet und „ a durch n “ gelesen.

Da der Divident ein Produkt aus dem Divisor und Quotienten oder ein Vielfaches des Divisors sein soll, so hat man, um den Quotienten $\frac{a}{n}$ zu finden, in der Reihe der Vielfachen des Divisors n den Dividenten a zu suchen. Findet sich darin $a = m \cdot n$, so ist $\frac{a}{n} = m$, d. h. ein Quotient ist in der Reihe der Vielfachen des Divisors der Stellenzeiger des Gliedes, das dem Dividenten gleich ist.

Wenn aber unter den Vielfachen des Divisors n der Divident a nicht vorkommt, also

$$a > m \cdot n \text{ und } a < (m + 1) \cdot n,$$

so gibt es in der erweiterten Zahlenreihe 1) auch keine Zahl, die dem Quotienten $\frac{a}{n}$ gleich ist. Um nun dennoch diesen Quotienten genau darstellen zu können, teilt man die Einheit in so viele gleiche Teile, als der Divisor n angibt. Ein solcher Teil wird mit $\frac{1}{n}$ bezeichnet und heißt gebrochene Einheit vom Nenner n ; das a -fache derselben oder $\frac{1}{n} \cdot a$ wird kurz mit $\frac{a}{n}$ bezeichnet und heißt Bruch oder gebrochene Zahl von dem Zähler a und dem Nenner n . Im Gegensatze zu den Brüchen nennt man die Glieder der Zahlenreihe 1) ganze Zahlen.

Durch Aufnahme der Brüche vom Nenner n werden zwischen je zwei aufeinander folgende ganze Zahlen $(n-1)$ Brüche eingeschaltet; dadurch entsteht die ergänzte Zahlenreihe

$$3) \dots \dots -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, 0, +\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{3}{n} \dots \dots$$

Die ganzen Zahlen erscheinen hier in der Form $\frac{n}{n}, \frac{2n}{n}, \frac{3n}{n}$ u. s. w. und daher nennt man diese Formen uneigentliche Brüche.

Auch in der ergänzten Zahlenreihe 3) ist jedes Glied, wie in der Reihe 1), selbst sein Stellenzeiger.

§. 7. Entsprechend der Entwicklung der Reihe 3) kann man auch zwischen je zwei aufeinander folgende Glieder der Vielfachenreihe 2) $(n-1)$ neue Glieder von der Art einschalten, daß in der neuen Reihe jedes Glied um $\frac{a}{n}$ größer ist als das vorhergehende. Dadurch entsteht die ergänzte Reihe der Vielfachen von a , nämlich

$$4) \dots \dots -\frac{3a}{n}, -\frac{2a}{n}, -\frac{1a}{n}, 0, +\frac{1a}{n}, +\frac{2a}{n}, +\frac{3a}{n} \dots \dots$$

Wenn man nun beachtet, daß hier der Stellenzeiger eines jeden Gliedes das entsprechende Glied der Zahlenreihe 3) ist, und den erweiterten Begriff des Produktes anwendet, so erhält man

$$a \cdot \left(+\frac{m}{n}\right) = \frac{ma}{n}, \quad a \cdot \left(-\frac{m}{n}\right) = -\frac{ma}{n},$$

also die Regel: Eine Zahl wird mit einem Bruche multipliziert, indem man sie mit dem Zähler multipliziert, und das Produkt durch den Nenner dividiert.

Daher können die Regeln, die von der Multiplikation mit ganzen Zahlen gelten, auf Brüche übertragen werden. Ferner ist der Quotient $1 : \frac{1}{n} = n$, weil er in der Reihe 3) das Glied vom Stellenzeiger n ist; und aus dieser Gleichung folgen dann weiter die Regeln für die Division durch Brüche.

§. 8. Die n^{te} Potenz einer Zahl a ist das Produkt aus n Faktoren a oder

$$a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (nFaktoren);}$$

sie wird kurz mit a^n bezeichnet und „ a hoch n “ gelesen. Der gleiche Faktor ist die Grundzahl (Basis), die Anzahl der Faktoren der Grad (Exponent) der Potenz.

Von der Reihe der natürlichen Potenzen einer Zahl a , d. i. von a^1, a^2, a^3 u. s. w. gilt das Gesetz, daß aus jedem Gliede beliebig viele folgende durch wiederholte Multiplikation mit a und alle vorhergehenden durch wiederholte Multiplikation mit $\frac{1}{a}$ entstehen. Wenn man dies rückschreitende Verfahren über a^1 hinaus fortsetzt, so entsteht die zur Grundzahl a gehörige erweiterte Potenzreihe

$$5) \dots \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a^1, a^2, a^3, \dots$$

Auch hier ist, wie in der natürlichen Potenzreihe, der Stellenzeiger eines jeden Gliedes das entsprechende Glied der Zahlenreihe 1); die durch Erweiterung entstandenen Glieder $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}$ u. s. w. sind keine natürlichen Potenzen von a ; sie sind aber algebraische Potenzen von a , wenn man folgende Erweiterung des Potenzbegriffes zu Grunde legt.

Eine Potenz ist in der zu ihrer Grundzahl gehörigen Potenzreihe das Glied, dessen Stelle der Grad angibt.

Eine unmittelbare Folge hiervon sind die Gleichungen

$$a^{+n} = a^n, a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

oder die Regeln:

α) Eine Potenz von negativem Grade ist eine gebrochene Einheit und ihr Nenner die Potenz mit positivem Grade.

β) Eine Potenz vom Grade null ist Eins.

Wenn die Grundzahl einer Potenzreihe Eins ist, so sind auch alle Glieder Eins; wenn die Grundzahl größer als Eins, so bilden die natürlichen Potenzen eine zunehmende und die durch Erweiterung entstandenen algebraischen Potenzen eine abnehmende Reihe; und umgekehrt sind, wenn die Grundzahl zwischen 0 und 1 liegt, die natürlichen Potenzen abnehmend, die algebraischen zunehmend. In einer Potenzreihe von negativer Grundzahl sind die Glieder von geradem Zeiger positiv, die andern negativ, also die Vorzeichen abwechselnd.

§. 9. Wenn nun auch in die Potenzreihe 5) zwischen je zwei aufeinander folgende Glieder ($n-1$) neue Glieder von der Beschaffenheit aufgenommen werden sollen, daß sie mit den ursprünglichen Gliedern die neue Potenzreihe

$$\dots \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \dots$$

bilden, so ist in dieser das Glied α^n gleich der Grundzahl a der ursprünglichen Reihe. Die Einschaltung ist also in den bisherigen (ganzen oder gebrochenen) Zahlen dann und nur dann ausführbar, wenn man die Zahl a als eine n^{te} Potenz oder als ein Produkt aus n gleichen Faktoren darstellen kann. Ein solcher Faktor wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet und „ n^{te} Wurzel aus a “ oder „Wurzel aus a vom Grade n “ gelesen. Die Zahl a ist der Radikand und die Zahl n der Grad der Wurzel. Eine Zahl a mit n radizieren heißt also eine Zahl finden, deren n^{te} Potenz gleich a ist.

Durch Einführung des Zeichens $\sqrt[n]{a}$ erhält man die ergänzte Potenzreihe die Form

$$6) \dots (\sqrt[n]{a})^{-3}, (\sqrt[n]{a})^{-2}, (\sqrt[n]{a})^{-1}, 1, \sqrt[n]{a}, (\sqrt[n]{a})^2, (\sqrt[n]{a})^3 \dots;$$

und hier erscheinen die ursprünglichen Glieder in der Form $(\sqrt[n]{a})^n, (\sqrt[n]{a})^{2n}$ u. s. w. Der Stellenzeiger eines jeden Gliedes ist das entsprechende Glied der durch Brüche ergänzten Zahlenreihe 3).

Bringt man auch hier wieder den verallgemeinerten Potenzbegriff aus §. 8 zur Anwendung, so erhält man die Gleichungen

$$a^{+\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}$$

oder die Regel: Eine Zahl wird mit einem Bruche potenziert, indem man sie mit dem Nenner radiziert und die Wurzel mit dem Zähler potenziert.

§. 10. Die Potenzen von ganzzahligem Grade sind alle positiv, wenn die Grundzahl positiv ist, aber abwechselnd positiv und negativ, wenn die Grundzahl negativ ist. Daher können auch Wurzeln aus positiven Zahlen sowohl positive als negative Werte haben. Um diese und ähnliche mehrfachen Werte fürs erste von der Untersuchung auszuschließen, sollen hier die absoluten Werte der Wurzeln aus absoluten Zahlen zunächst allein in Betracht kommen.

In der Reihe der natürlichen Potenzen einer beliebigen Grundzahl sind alle Glieder entweder ganze Zahlen oder eigentliche Brüche, je nach dem die Grundzahl selbst eine ganze Zahl oder ein eigentlicher Bruch ist. Wenn also umgekehrt eine natürliche Potenz eine ganze Zahl ist, so kann die Grundzahl kein eigentlicher Bruch sein, d. h. eine Wurzel aus einer ganzen Zahl ist nie ein Bruch.

Andererseits sind aber unter den Wurzeln aus ganzen Zahlen nur wenige selbst wieder ganze Zahlen; also müssen die Wurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht ganzzahlig sind, wenn sie überhaupt eine Bedeutung haben sollen, zu einer neuen Art von Zahlen gehören, von denen bisher nur das negative Merkmal feststeht, daß sie weder ganze noch gebrochene Zahlen sind.

Wenn die ganzen Zahlen a und b der Bedingung

$$b^n < a < (b+1)^n$$

genügen, so ist

$$b < \sqrt[n]{a} < b+1,$$

und hierdurch ist $\sqrt[n]{a}$ schon bestimmt bis auf einen Fehler, der kleiner ist als Eins. Ebenso kann man auch für einen beliebigen Wert p das Produkt ap^n durch zwei n^{te} Potenzen von ganzzahliger Grundzahl eingrenzen, etwa durch

$$m^n < ap^n < (m+1)^n;$$

und demgemäß ist

$$\frac{m}{p} < \sqrt[n]{a} < \frac{m+1}{p},$$

d. h. $\sqrt[n]{a}$ wird durch die Brüche $\frac{m}{p}$ und $\frac{m+1}{p}$ bestimmt bis auf einen Fehler, der kleiner ist als die gebrochene Einheit $\frac{1}{p}$. Da man außerdem die Zahl p beliebig groß und dadurch die gebrochene Einheit $\frac{1}{p}$ beliebig klein wählen kann, so läßt sich auch jede nicht ganzzahlige Wurzel aus einer ganzen Zahl bis auf einen so kleinen Fehler berechnen, daß der erhaltene Näherungswert dem Grade der Genauigkeit genügt, die bei einer vorliegenden Aufgabe verlangt wird. Zahlen dieser Art, die weder zu den ganzen noch zu den gebrochenen gehören, und nur durch Einschließung zwischen Näherungswerte bestimmt werden, nennt man irrational; im Gegensatze dazu heißen die ganzen Zahlen und die Brüche rational.

Wenn der Radikand a einer Wurzel selbst ein Bruch ist, so kann man diesen so erweitern, daß die Wurzel aus dem Nenner eine ganze Zahl wird und die gesuchte $\sqrt[n]{a}$ sich darstellt als Bruch von irrationalem Zähler und ganzzahligem Nenner. Demnach können zwischen je zwei Glieder der Potenz-

reihe 5), deren Grundzahl eine absolute ganze oder gebrochene Zahl a ist, $(n-1)$ solche Glieder von der Form $(\sqrt[n]{a})^m$ eingeschaltet werden, daß diese eine Ergänzung der ursprünglichen Potenzreihe von der Grundzahl a bilden.

§. 11. Im vorigen Abschnitt sind nur die absoluten Werte der Wurzeln aus absoluten Zahlen in Betracht gezogen worden; im Gegensatz dazu kann man die Aufgabe stellen, die Einerreihe

$$7) \dots 1^{-3}, 1^{-2}, 1^{-1}, 1^0, 1^1, 1^2, 1^3 \dots$$

d. i. die Grenzform der wachsenden sowohl als der abnehmenden Potenzreihe durch Einschaltung von neuen Gliedern zu ergänzen.

Wenn es eine Zahl ε gibt, die der Bedingung

$$8) \varepsilon^n = 1 \text{ oder } \varepsilon = \sqrt[n]{1}$$

genügt, so kann man in die Einerreihe 7) zwischen je zwei Glieder die neuen Glieder $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ aufnehmen. Nun genügt zwar dieser Bedingung der Wert $\varepsilon = 1$, aber durch Einschaltung der Potenzen von 1 entsteht aus der Reihe 7) keine neue Reihe. Gibt man aber der Bedingung 8) die Form

$$(\varepsilon - 1, (\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \dots + \varepsilon + 1) = 0,$$

so wird ersichtlich, daß ihr nicht allein der Wert $\varepsilon = 1$, sondern auch jeder Wurzelwert der Gleichung

$$9) \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2} + \dots + \varepsilon + 1 = 0$$

genügt. Wenn eine solche Wurzel gefunden ist, so kann man die Einerreihe 7) durch Einschaltung ergänzen zu der Reihe

$$10) \dots \varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}, 1, \varepsilon, \dots$$

Diese neue Potenzreihe besteht also aus Perioden von je n Gliedern und die Grundzahl ihrer Potenzen ist $\varepsilon = \sqrt[n]{1}$ oder eine Wurzel aus der Einheit vom Grade n . Zugleich folgt aus dieser periodischen Wiederkehr der Glieder, daß nicht allein ε^1 , sondern auch $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ und überhaupt alle ganzgradigen Potenzen von ε Wurzeln n^{ten} Grades aus der Einheit sind.

§. 12. Wenn im vorigen §. überall $n = 2$ gesetzt wird, so folgt aus den Gleichungen 8) und 9), daß in die Einerreihe 7) zwischen je zwei Glieder die positive und auch die negative Einheit als neues Glied eintreten kann. Durch die Einschaltung $\varepsilon = -1$ entsteht die Potenzreihe

$$\dots (-1)^{-3}, (-1)^{-2}, (-1)^{-1}, 1, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \dots$$

oder die Einerreihe mit abwechselnden Vorzeichen:

$$11) \dots -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$$

worin die Glieder $+1, -1$ sich periodisch wiederholen.

Wenn ferner in §. 11 $n = 4$ gesetzt wird, so muß, um in die Einerreihe 7) zwischen je zwei Glieder drei neue Glieder einzuschalten, die Wurzel 4. Grades aus der Einheit der Bedingung

$$\varepsilon^4 - 1 = 0 \text{ oder } (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)(\varepsilon^2 + 1) = 0$$

genügen. Von den 4 Wurzeln dieser Gleichung $+1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ kommen nur die beiden letzten in Betracht, da durch die Einschaltung der Potenzen von $+1$ und von -1 nur die Reihen 7) und 11) entstehen. Wählt man aber $+\sqrt{-1}$ als Grundzahl der drei einzuschaltenden Glieder, so erhält man die Potenzreihe

$$12) \dots (\sqrt{-1})^{-3}, (\sqrt{-1})^{-2}, (\sqrt{-1})^{-1}, 1, (\sqrt{-1})^1, (\sqrt{-1})^2, (\sqrt{-1})^3, \dots$$

und dabei bilden je vier aufeinander folgende Glieder, wie

$$1, \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^2, (\sqrt{-1})^3, \text{ oder } 1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$$

eine Periode. Wenn man dagegen die Potenzen von $-\sqrt{-1}$ einschaltet, so entsteht eine Reihe, die sich von der unter 12) nur durch die entgegengesetzte Ordnung unterscheidet.

Die Wurzeln $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ gehören weder zu den positiven noch zu den negativen Zahlen, sie sind ja auch nicht, wie die Brüche und irrationalen Zahlen als eingeschaltete Glieder der erweiterten Zahlenreihe 1) gefunden worden, sondern als Glieder der Potenzreihe 7) von der Grundzahl Eins. Da aber zu den Potenzen auch die eingeschalteten Glieder der Potenzreihen gehören, so müssen auch die Wurzeln aus der Einheit, insbesondere die vom 4. Grade $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ als Potenzen von der Grundzahl Eins gelten.

Für die Wurzel $\sqrt{-1}$ hat Gauß den Namen imaginäre Einheit und das Zeichen i eingeführt. Dadurch ergibt sich für die Reihe 12) die einfachere Darstellung

$$12) \dots i^{-3}, i^{-2}, i^{-1}, 1, i, i^2, i^3, \dots$$

und ihre Periode besteht aus den 4 Einheiten

$$1, i, i^2, i^3 \text{ oder } 1, i, -1, -i.$$

Im Gegensatz zu den imaginären Einheiten $+i$ und $-i$ heißen die ursprüngliche Einheit und ihr negativer Gegensatz ($+1$ und -1) reell, und ebenso nennt man allgemein eine Zahl reell oder imaginär, je nach dem sie ein Vielfaches von diesen oder jenen Einheiten angibt. Auch heißt bei einer imaginären Zahl wie bei der reellen die Menge der Einheiten, die sie angibt, ohne Rücksicht auf die Art derselben ihr absoluter Wert; daher kann jede Zahl, wenn a einen absoluten Wert bedeutet, durch $a \cdot i^n$ bezeichnet werden. Und wie die 4 Einheiten $+1, +i, -1, -i$ als periodische Glieder zusammen gehören, so sind auch $+a, +ai, -a, -ai$ vier periodische Glieder einer Reihe.

Die Gesamtheit der reellen und imaginären Zahlen zerfällt wegen der 4 zu Grunde liegenden Einheiten in 4 Gruppen, und jede Gruppe bildet für sich eine Reihe, die einerseits durch das Anfangsglied null begrenzt ist. Die beiden Reihen der positiven und negativen imaginären Zahlen ergänzen sich aber auch zu einer nach beiden Seiten unendlichen Reihe, die mit der erweiterten Zahlenreihe 1) das Glied null gemeinsam hat.

§. 13. Nach Aufnahme der imaginären Zahlen ist die allgemeinste Form einer Zahlengröße diejenige, die aus einem reellen und einem imaginären Bestandteil zusammengesetzt ist. Eine solche Größe $a + ia$, heißt komplex und der positive Wert von $\sqrt{a^2 + a_1^2}$ ihr absoluter Betrag. Da dieser nur dann null wird, wenn der reelle Bestandteil a und zugleich der imaginäre ia_1 null wird, so kann man jede komplexe Größe $a + ia_1$, die nicht null ist, darstellen in der Form

$$a + ia_1 = \sqrt{a^2 + a_1^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + a_1^2}} + \frac{a_1}{\sqrt{a^2 + a_1^2}} \cdot i \right).$$

Die Quotienten $\frac{a}{\sqrt{a^2 + a_1^2}}$ und $\frac{a_1}{\sqrt{a^2 + a_1^2}}$ haben mit den trigonometrischen Funktionen des Cosinus und Sinus die Eigenschaft gemein, daß sich ihre Quadrate zu der reellen positiven Einheit ergänzen. Daher gibt es einen, aber auch nur einen Winkel α , der kleiner als 360° ist und den Gleichungen

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a_1^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a^2 + a_1^2}}$$

genügt; und dieser liegt im ersten oder dritten Quadranten, je nach dem die Zahlen a und a_1 beide positiv oder negativ sind, dagegen im zweiten oder vierten, je nach dem a negativ und a_1 positiv oder a positiv und a_1 negativ ist. Wenn man noch zur Abkürzung $\sqrt{a^2 + a_1^2} = r$ setzt, so ist die komplexe Größe

$$a + ia_1 = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

oder das Produkt aus dem absoluten Betrag r und dem Richtungskoeffizienten $\cos \alpha + i \sin \alpha$.

§. 14. Die Richtungskoeffizienten haben die Eigenschaft, daß

$$13) (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta),$$

d. h. das Produkt aus zwei Richtungskoeffizienten ist wieder ein Richtungskoeffizient und der zugehörige Winkel gleich der Summe der Winkel der Faktoren.

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung ergibt sich, daß auch jedem Produkt aus n Richtungskoeffizienten dieselbe Eigenschaft zukommt und daß demgemäß

$$14) (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Diese Gleichung gestattet unmittelbar, in die Einerreihe 7) zwischen je zwei Glieder $(n-1)$ neue Glieder einzuschalten; denn setzt man darin $n\alpha = 360^\circ$ oder in kürzerer Bezeichnung $n\alpha = u$, so ist

$$\left(\cos \frac{u}{n} + i \sin \frac{u}{n}\right)^n = \cos u + i \sin u = 1$$

oder

$$\cos \frac{u}{n} + i \sin \frac{u}{n} = \sqrt[n]{1}.$$

Daher sind die eingeschalteten Glieder:

$$15) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \cos \frac{u}{n} + i \sin \frac{u}{n}, \\ \varepsilon_2 = \cos \frac{2u}{n} + i \sin \frac{2u}{n} = \varepsilon_1^2, \\ \varepsilon_3 = \cos \frac{3u}{n} + i \sin \frac{3u}{n} = \varepsilon_1^3, \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_{n-1} = \cos \frac{(n-1)u}{n} + i \sin \frac{(n-1)u}{n} = \varepsilon_1^{n-1}. \end{array} \right.$$

Sie sind sämtlich komplexe Größen, wenn die Zahl n ungerade ist, wenn aber n eine gerade Zahl, etwa $n = 2m$, so ist ein Glied, nämlich

$$\cos \frac{mu}{n} + i \sin \frac{mu}{n} = \cos \frac{u}{2} + i \sin \frac{u}{2} = -1,$$

und wenn die Zahl n durch 4 teilbar, etwa $n = 4k$, so ist

$$\begin{aligned} \cos \frac{ku}{n} + i \sin \frac{ku}{n} &= \cos \frac{u}{4} + i \sin \frac{u}{4} = +i, \\ \cos \frac{2ku}{n} + i \sin \frac{2ku}{n} &= \cos \frac{u}{2} + i \sin \frac{u}{2} = -1, \\ \cos \frac{3ku}{n} + i \sin \frac{3ku}{n} &= \cos \frac{3u}{4} + i \sin \frac{3u}{4} = -i. \end{aligned}$$

Es ist noch übrig, auch dann in die Potenzreihe 5) zwischen je zwei Glieder $(n-1)$ neue Glieder einzuschalten, wenn die Grundzahl der Reihe eine komplexe Größe ist, also in die Reihe

$$16) 1, A, A^2, A^3, \dots,$$

wenn $A = a + ia_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha).$

Es sei $Z = z + iz_1 = \rho \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

die Grundzahl der eingeschalteten Glieder, also

$$Z^n = A \text{ oder } \rho^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Aus dieser komplexen Gleichung folgt zunächst

$$17) \rho^n \cdot \cos n\varphi = r \cdot \cos \alpha \text{ und } \rho^n \cdot \sin n\varphi = r \cdot \sin \alpha,$$

dann durch Quadrieren und Addieren

$$\rho^{2n} = r^2.$$

Weil dazu ρ als absoluter Betrag der komplexen Größe Z nur eine positive Zahl sein kann, so ist

$$18) \rho = \sqrt[n]{r}.$$

Die Anzahl der ...

... die ...

$$\begin{aligned}
 & \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \\
 & \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k+1} = \cos \frac{2(k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(k+1)\pi}{n}
 \end{aligned}$$

... die ...

$$\begin{aligned}
 & \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \\
 & \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k+1} = \cos \frac{2(k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(k+1)\pi}{n} \\
 & \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^{k+2} = \cos \frac{2(k+2)\pi}{n} + i \sin \frac{2(k+2)\pi}{n}
 \end{aligned}$$

... die ...

... die ...

$$\left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

... die ...

... die ...