Analytische Darstellung

einiger geometrischen Oerter im Raume.

Der Verfasser der wissenschaftlichen Abhandlung zu der diesjährigen Einladungsschrift wählte zum Gegenstande derselben die analytische Darstellung einiger geometrischen Oerter des Raumes, welche durch die Menge der dabei zur Anwendung kommenden Lehren und Hülfsmittel geeignet sein dürfte, den sich der höhern Mathematik zuwendenden Jünglingen ein passendes Studium zur Uebung in der analytischen Methode zu gewähren. Die für Gelegenheitsschriften dieser Art bestimmte Ausdehnung gestattet es jedoch nicht eine größere zu einem Ganzen zusammengehörige Menge von Oertern zur Ausführung zu bringen; daher hier nur einige wenige derselben, in naturgemäßer Stufenfolge aneinander gereiht, zur Behandlung kommen, und muß es einer spätern Gelegenheit vorbehalten bleiben, die fehlenden folgen zu lassen.

§ 1.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von einem der Lage nach im Raume gegebenen Punkte und einer der Lage nach gegebenen Ebene gleichweit entfernt sind.

Auflösung. Man beziehe die Lage des gegebenen Punktes, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 seien, so wie die Lage der Ebene auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Die Gleichung der Ebene auf dieses Coordinatensystem bezogen sei

$$1)\quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Oder bezeichnet man die Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Ebene in den Achsen der x, y und z von dem Anfangspunkte der Coordinaten mit p, q und r, so ist die Gleichung dieser Ebene auch unter die symmetrische Form zu bringen

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

und somit $A = qr$, $B = pr$, $C = pq$ und $D = -pqr$ gedacht wird. Bezeichnet man nun die Coordinaten eines beliebigen Punktes des verlangten Ortes mit x, y, z und die Coordinaten des Fußpunktes einer aus dem Punkte x, y, z auf die gegebene Ebene gefällten Senkrechten mit x_2, y_2, z_2, so folgt aus der bekannten Formel für die Entfernung zweier Punkte als Gleichung des verlangten Ortes

$$2)\quad (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = (x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + (z_2-z)^2,$$

aus welcher Gleichung nur noch x_2, y_2 und z_2 durch gegebene Größen zu verdrängen sind.

Die allgemeinen Gleichungen einer aus dem Punkte x, y, z auf die gegebene Ebene errichteten Senkrechten sind

$$3)\quad x_2-x = \frac{A}{C}(z_2-z) \text{ und } 4)\quad y_2-y = \frac{B}{C}(z_2-z),$$

da aber auch die Werthe von x_2, y_2, z_2 der Gleichung 1) genügen müssen, so erhält man aus den Gleichungen 1), 3) und 4) die folgenden Ausdrücke:

$$x_2 = x - \frac{D_1 A}{A^2 + B^2 + C^2},\quad y_2 = y - \frac{D_1 B}{A^2 + B_2 + C^2},\quad z_2 = z - \frac{D_1 C}{A^2 + B^2 + C^2},$$

wo D_1 der Kürze wegen statt $Ax + By + Cz + D = 0$ gesetzt worden. Substituirt man nun diese drei gefundenen Werthe in Gleichung 2), so erhält man als allgemeine Gleichung des Ortes:

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = \frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

welche auch, wenn man die Gleichung der Ebene sich unter der vorher erwähnten symmetrischen Form denkt, folgende Gestalt annimmt:

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = \frac{(qrx + pry + pqz - pqr)^2}{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}.$$

Diese allgemeine Gleichung würde sich bedeutend einfacher gestalten, wenn man dem gegebenen Punkte und der der Lage nach gegebenen Ebene eine leichter zu übersehende Lage zu dem Coordinatensysteme geben wollte. Wir wollen hier nur zwei Fälle dieser Art berühren, wodurch das Resultat für die Ortsgleichung die bedeutendste Vereinfachung erleiden dürfte, nämlich 1. den Fall, wo die gegebene Ebene mit der Ebene der **XY** zusammenfällt und der gegebene Punkt in der Achse der **Z** liegt, und 2. den Fall, wo der gegebene Punkt in dem Anfangspunkte der Achsen, die gegebene Ebene aber parallel der Ebene der **XY** in einer Entfernung z_2 gedacht wird. Im ersten Falle würde in Gleichung 2) der Ausdruck der ersten Seite die Form

$$x^2 + y^2 + (z_1-z)^2,$$

der Ausdruck der zweiten Seite die Form z^2 erhalten; daher die Gleichung des Ortes im ersten Falle sein würde

$$z^2 = x^2 + y^2 + (z_1-z)^2, \text{ oder auch } x^2 + y^2 = 2z_1\left(z - \frac{z_1}{2}\right).$$

Im zweiten Falle wird der Ausdruck der ersten Seite $x^2 + y^2 + z^2$, der der zweiten Seite $(z-z_2)^2$; daher die Gleichung des Ortes im zweiten Falle sein würde

$$x^2 + y^2 + z^2 = (z-z_2)^2, \text{ oder auch } x^2 + y^2 = 2z_2\left(\frac{z_2}{2} - z\right).$$

---

§ 2.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von einem der Lage nach im Raume gegebenen Punkte und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie gleichweit entfernt sind.

Auflösung. Die Coordinaten des gegebenen Punktes seien x_1, y_1, z_1. Die Gleichungen der Geraden:

$$1)\ x = az + p \text{ und } 2)\ y = bz + q.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten eines beliebigen Punktes des gesuchten Ortes mit x_2, y_2, z_2, so ist die Entfernung $\mathfrak{E}$ desselben von dem Punkte x_1 . . gegeben durch die Gleichung

$$3)\ \mathfrak{E}^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2.$$

Diese Entfernung $\mathfrak{E}$ muß auch gleich sein der kürzesten Entfernung des beliebigen Punktes x_2 . . von der der Lage nach im Raume gegebenen Geraden. Um aber die kürzeste Entfernung eines Punktes x_2 . . von einer Geraden zu finden, könnte man durch den Punkt x_2 . . senkrecht auf die Gerade eine Ebene legen, und wenn man dann die für diese senkrechte Ebene gefundene Gleichung mit den Gleichungen 1) und 2) combinirte, erhielte man aus denselben die Werthe der Coordinaten x, y, z des

Punktes, in welchem die Ebene von der Geraden geschnitten würde. Nun würde aber offenbar die Linie, welche diesen letzten Punkt mit dem verbindet, dessen Coordinaten x_2.. sind, die gesuchte kürzeste Entfernung sein. Durch Vergleichung des Ausdrucks für diese kürzeste Entfernung mit Gleichung 3) würde dann die Gleichung des verlangten Ortes sich ergeben.

Es sei nun die Gleichung der senkrechten Ebene

$$4)\ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Da aber auch diese Ebene durch den Punkt x_2.. gehen soll, so hat man:

$$5)\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Eliminirt man aus 4) und 5) die Constante D, so erhält die Gleichung der Ebene die Form

$$A\,(x-x_2) + B\,(y-y_2) + C\,(z-z_2) = 0,$$

oder

$$6)\ \frac{A}{C}\,(x-x_2) + \frac{B}{C}\,(y-y_2) + (z-z_2) = 0.$$

Der Grundschnitt der gegebenen Ebene auf XZ wird dargestellt durch

$$y = 0, \text{ und } Ax + Cz + D = 0, \text{ oder } x = -\frac{C}{A}z - \frac{D}{A};$$

da er nun senkrecht auf der ihm entsprechenden Projection sein soll, die durch $x = az + p$ dargestellt wird, so muß folgende Bedingung stattfinden:

$$7)\ a = \frac{A}{C}.$$

Ferner ist der Grundschnitt auf YZ gegeben durch:

$$x = 0,\ By + Cz + D = 0 \text{ oder } y = -\frac{C}{B}z - \frac{D}{B};$$

und damit er senkrecht auf der durch $y = bz + q$ gegebenen Projection stehe, muß

$$8)\ b = \frac{B}{C}$$

sein, somit wird, wenn man statt $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ aus 7) und 8) a und b in 6) einführt, die Gleichung der durch x_2.. auf die Gerade senkrecht gelegten Ebene folgende Form erlangen:

$$9)\ a(x-x_2) + b(y-y_2) + z-z_2 = 0,$$

und wenn man die Gleichung 9) mit 1) und 2) combinirt, so erhält man aus denselben die Werthe der Coordinaten x, y, z des Punktes, in welchem die Ebene von der Geraden geschnitten wird. Substituirt man hierauf die für x, y, z gefundenen Werthe in die allgemeine Formel

$$\mathfrak{E}^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2,$$

so erhält man nach verschiedenen Reductionen

$$10)\ \mathfrak{E}^2 = (x_2-p)^2 + (y_2-q)^2 + z_2^2 - \frac{[a(x_2-p) + b(y_2-q) + z_2]^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Setzt man nun die Werthe von $\mathfrak{E}^2$ aus 3) und 10) einander gleich, und bezeichnet die Coordinaten des gewünschten Ortes mit x, y, z statt mit x_2.., so gelangt man zu der allgemeinen Gleichung des Ortes

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=(x-p)^2+(y-q)^2+z^2-\frac{[(x-p)a+b(y-q)+z]^2}{a^2+b^2+1},$$

oder

$$11)\ (x_1-p)(2x-p-x_1)+(y_1-q)(2y-q-y_1)+z_1(2z-z_1)=\frac{[a(x-p)+b(y-q)+z]^2}{a^2+b^2+1}.$$

Auch diese allgemeine Ortsgleichung erleidet mehr oder weniger bedeutende Vereinfachungen, je nachdem man die gegebenen Stücke in mehr oder weniger innige Verbindung mit dem Coordinatensystem bringt. Eine der einfachsten Ortsgleichungen wird erhalten, wenn man die der Lage nach gegebene Linie zur Achse der Z macht und die Achse der X durch den gegebenen Punkt richtet. In diesem Falle erhält Gleichung 3) die Form

$$\mathfrak{E}^2 = (x_1-x_2)^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Die kürzeste Entfernung des Punktes x_2.. von der gegebenen Geraden oder der Achse der Z würde erhalten aus

$$\mathfrak{E}^2 = x_2^2 + y_2^2;$$

daher

$$x_2^2 + y_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

oder wenn man die Coordinaten des Ortes mit x, y, z statt mit x_2.. bezeichnet, die Gleichung des Ortes dargestellt wird durch

$$x^2=(x_1-x)^2+z^2 \text{ d. i. } z^2=2x_1\left(x-\frac{x_1}{2}\right).$$

Dieses einfache Resultat hätte man eben so leicht unmittelbar aus der allgemeinen unter Nr. 11) angeführten Ortsgleichung auf die hier folgende Weise ermitteln können. — In dem angezogenen besonderen Falle müssen nämlich die Gleichungen der Linie die Achse der Z vorstellen, die Linie mithin in der Ebene der YZ liegen, daher $x=o$, aber auch in der Ebene der XZ, daher $y=o$ sein. Weil die Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, muß auch $p=o$ und $q=o$ sein. Die Gleichungen der Linien würden daher die Form $o=az$ und $o=bz$ annehmen, welcher nur dann genügt werden kann, wenn $a=o$ und $b=o$ gesetzt wird. Führt man nun diese besondern Werthe in 11) ein, und beachtet, daß $y_1=o$ und $z_1=o$, so erhält man gerade wie vorher als Gleichung des Ortes:

$$z^2=2x_1\left(x-\frac{x_1}{2}\right).$$

Eine nicht unbedeutende Vereinfachung würde die allgemeine Formel des Ortes auch erleiden, wenn man etwa die Coordinaten-Ebene der XZ durch die gegebene Linie sich gelegt dächte und zur Achse der Y eine von dem gegebenen Punkte x_1.. auf die gegebene Linie errichtete Senkrechte wählte, ohne gerade die gegebene Linie die Achse der Z werden zu lassen. In diesem Falle würden aus den im vorhergehenden Falle entwickelten Gründen in den allgemeinen Gleichungen der gegebenen Linie $x = az + p$ und $y = bz + q$ die Größen p, q und y Null werden, also auch $b = o$; so daß als Gleichungen der Linie $x = az$ und $y = o$ geltend blieben. Führt man nun diese besondern Werthe in die allgemeine Gleichung Nr. 11) ein und berücksichtigt, daß x_1 und $z_1 = o$, so erhält man für diesen besondern Fall die Ortsgleichung

$$y_1 (2y - y_1) = \frac{(ax + z)^2}{a^2 + 1}.$$

Die vorstehende Gleichung hätte man direct auch in folgender Weise erzielen können. Man bezeichne wieder die Coordinaten eines beliebigen Punktes des verlangten Ortes mit x_2, y_2, z_2 und denke sich durch diesen Punkt eine Ebene senkrecht gerichtet auf die gegebene Linie, deren Gleichungen durch 1) $x = az$ und 2) $y = o$ dargestellt werden, so wird die Gleichung der durch x_2.. geführten Ebene die Form haben

$$A (x - x_2) + B (y - y_2) + C (z - z_2) = o,$$

oder

$$3) \quad \frac{A}{C} (x - x_2) + \frac{B}{C} (y - y_2) + z - z_2 = o,$$

und weil $a = \frac{A}{C}$ und $b = \frac{B}{C}$, mithin $\frac{B}{C} = o$ sein muß, erhält die Gleichung der senkrechten Ebene die Form

$$4) \quad a(x - x_2) + z - z_2 = o.$$

Wenn man nun die Gleichung 1) und 4) combinirte, so erhielte man aus denselben die Werthe der Coordinaten x, z des Punktes, in welchem die Ebene von der Geraden geschnitten wird, und es würde die Linie, welche diesen letzten Punkt mit dem x_2.. verbindet, die gesuchte kürzeste Entfernung sein. Substituirte man daher diese für x und z gefundenen Werthe in die allgemeine Gleichung

$$\mathfrak{E}^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2,$$

so erhielte man diese Entfernung, welche sich wie folgt darstellen ließ. Es ist

$$a (az - x_2) + z - z_2 = o \text{ oder } (a^2 + 1) z = ax_2 + z_2,$$

woraus

$$Z = \frac{ax_2 + z_2}{a^2 + 1} \text{ und } x = \frac{az_2 + z_2}{a^2 + 1} a,$$

daher

$$\mathfrak{E}^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \frac{(ax_2 + z_2)^2}{a^2 + 1}.$$

Es ist aber auch

$$\mathfrak{E}^2 = x_2^2 + (y_1 - y_2)^2 + z_2^2;$$

mithin wenn man statt x_2, y_2, z_2 wieder x, y, z einführt, die Gleichung des Ortes sein wird:

$$(y_1 - y)^2 = y^2 - \frac{(ax + z)^2}{a^2 + 1} \text{ oder } y_1 (2y - y_1) = \frac{(ax + z)^2}{a^2 + 1},$$

was genau übereinstimmt mit dem Resultate der vorhergegangenen Entwickelung.

§ 3.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von einer der Lage nach im Raume gegebenen Ebene, und einer der Lage nach gegebenen Linie gleichweit entfernt sind.

Auflösung. Man beziehe die Lage der gegebenen Stücke auf ein beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem, so wird die Gleichung der Ebene auf dieses Coordinatensystem bezogen, ausgedrückt durch

$$Ax + By + Cz + D = o \text{ oder } \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1;$$

die Gleichungen der Geraden sind:

$$x = \alpha z + \pi \text{ und } y = \beta z + \varsigma.$$

Nun folgt aus den in § 1 entwickelten Gründen, daß, wenn die Coordinaten eines beliebigen Punktes des hier verlangten Ortes mit x, y, z bezeichnet werden, dessen Quadrat der Entfernung von der gegebenen Ebene ausgedrückt wird durch:

$$\frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ oder auch durch } \frac{(qrx + pry + pqz - pqr)^2}{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2}.$$

Aus den in § 2 entwickelten Gründen geht hervor, daß das Quadrat des kürzesten Abstandes des beliebigen Punktes x, y, z von der der Lage nach im Raume gegebenen Linie bezeichnet wird durch:

$$(x - \pi)^2 + (y - \varrho)^2 + z^2 - \frac{[\alpha(x - \pi) + \beta(y - \varsigma) + z]^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.$$

Die allgemeine Gleichung des Ortes wird daher sein:

$$\frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} = (x - \pi)^2 + (y - \varsigma)^2 + z^2 - \frac{[\alpha(x - \pi) + \beta(y - \varsigma) + z]^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1},$$

oder auch

$$\frac{(qrx + pry + pqz - pqr)^2}{q^2r^2 + p^2r^2 + p^2q^2} = \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Zu einer bedeutend einfachern Ortsgleichung würde man gelangen, wenn die gegebene Linie zur Achse der Z und der Durchschnittspunkt der Achse der Z mit der gegebenen Ebene zum Anfangspunkte des Coordinatensystems genommen würde. In diesem Falle würden, wie im § 2 gezeigt worden, $\pi = o$, $\varrho = o$, $\alpha = o$ und $\beta = o$, weil ferner die gegebene Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen soll, muß auch $D = o$ und $pqr = o$ sein. Die allgemeine Ortsgleichung würde demnach die Form erhalten

$$\frac{(Ax + By + Cz)^2}{A^2 + B^2 + C^2} = x^2 + y^2.$$

In anderer Weise vereinfacht würde die allgemeine Ortsgleichung erscheinen, wenn man die gegebene Ebene zur Ebene der XY und den Durchschnittspunkt der gegebenen Linie mit der gegebenen Ebene zum Anfangspunkte des Coordinatensystems machen wollte. Der erste Theil der allgemeinen Gleichung würde dann auf z^2 reducirt, im zweiten Theile würde $\pi = o$ und $\varrho = o$ werden, da die gegebene Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und somit würde die allgemeine Ortsgleichung die Form erhalten:

$$x^2 + y^2 = \frac{(\alpha x + \beta y + z)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}.$$

---

§ 4.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von zweien der Lage nach im Raume gegebenen Punkten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gleichweit entfernt sind.

1. Auflösung. Das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes dieses Ortes von dem Punkte x_1.. wird ausgedrückt durch:

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2.$$

Die Entfernung des Punktes x von x_2.. wird durch einen ähnlichen Ausdruck bestimmt, daher die Gleichung des Ortes

$$(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 = (x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + (z_2-z)^2,$$

oder

$$(x_1-x_2)(x_1 + x_2 - 2x) + (y_1 + y_2 - 2y)(y_1-y_2) + (z_1-z_2)(z_1 + z_2 - 2z) = 0,$$

d. i.

$$\left(x_1-x_2\right)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_1-y_2)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + (z_1-z_2)\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0 \quad (A),$$

oder

$$(x_1-x_2)\,x + (y_1-y_2)\,y + (z_1-z_2)\,z + \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2}{2} = 0.$$

Setzt man in der vorstehenden Endgleichung $x_1-x_2 = A$, $y_1-y_2 = B$, $z_1-z_2 = C$ und das letzte Glied $= D$, so erhält die Gleichung des Ortes die Form

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

wodurch eine Ebene angedeutet wird.

---

2. Auflösung. Der gesuchte Ort ist eine Ebene, welche senkrecht steht im Mittelpunkte x_3, y_3, z_3 auf der die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie. Die Gleichungen der die gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie sind:

$$1)\ x - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}(z - z_1) \text{ und } 2)\ y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}(z - z_1).$$

Es sei nun die Gleichung einer Ebene, welche auf dieser Linie senkrecht steht

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so wird der Grundschnitt dieser Ebene auf der Ebene der **XZ** dargestellt durch $y = o$ und $Ax + Cz + D = o$, oder auch durch $y = o$ und

$$x = -\frac{C}{A} z - \frac{D}{A},$$

und da aus der Anwendung der Analysis auf die ebene Geometrie hervorgeht, daß, wenn zwei Linien $x = az + p$ und $x = \alpha z + \pi$ aufeinander senkrecht stehen $a = -\frac{1}{\alpha}$ ist, so folgt, da dieser Grundschnitt senkrecht auf der durch 1) dargestellten Linie ist, daß

$$3) \quad \frac{C}{A} = \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}.$$

Der Grundschnitt der senkrechten Ebene auf der Ebene der **YZ** wird dargestellt durch $x = o$ und

$$y = -\frac{C}{B} z - \frac{D}{B},$$

und da er senkrecht auf der Projektion der durch 2) dargestellten Linie steht, so muß

$$4) \quad \frac{C}{B} = \frac{z_1 - z_2}{y_1 - y_2} \text{ sein.}$$

Da die senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt der die beiden gegebenen Punkte verbindenden geraden Linie geht, so erhält die Gleichung der Ebene die besondere Form

$$A (x - x_3) + B (y - y_3) + C (z - z_3) = o,$$

oder

$$5) \quad \frac{A}{C} (x - x_3) + \frac{B}{C} (y - y_3) + z - z_3 = o.$$

Führt man nun in 5) die aus 3) und 4) für $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ hervorgegangenen Werthe ein, und berücksichtigt, daß $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, so erhält die Gleichung der senkrechten Ebene d. i. die Ortsgleichung die Form

$$\frac{x_1 - x_2}{z_1 - z_2}\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{y_1 - y_2}{z_1 - z_2}\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + z - \frac{z_1 + z_2}{2} = o,$$

oder was dasselbe ist

$$(x_1 - x_2)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_1 - y_2)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + (z_1 - z_2)\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = o.$$

---

§ 5.

Den Ort für alle Punkte zu bestimmen, welche von zwei der Lage nach im Raume gegebenen Ebenen gleichweit entfernt sind.

1. Auflösung. Die Gleichungen der beiden Ebenen seien:

$$Ax + By + Cz + D = o \text{ und } A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = o.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten eines beliebigen Punktes des verlangten Ortes mit x, y, z, so ist, wie aus den Entwickelungen des § 1 erhellt, dessen kürzeste Entfernung von der einen Ebene

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \text{ von der andern Ebene } \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}};$$

daher die Gleichung des Ortes erhalten wird, wenn man diese beiden Ausdrücke für die kürzesten Entfernungen durch das Zeichen der Gleichheit miteinander verbindet. Die so erhaltene Endgleichung läßt sich aber wegen der Zeichen $\pm$ vor den beiden Wurzelgrößen in zwei Gleichungen zerlegen, wovon die eine ist

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = o,$$

die andere

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = o.$$

Bringt man beide Gleichungen auf die einfachste Form, indem man

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \mathfrak{A}, \quad \frac{A_1}{\sqrt{B_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \mathfrak{A}_1, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \mathfrak{B},$$

u. s. w. setzt, so erhält man für die beiden Endgleichungen folgende einfache, zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ darstellenden, Gleichungen:

$$\text{I. } (\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)\, x + (\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)\, y + (\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1)\, z + \mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1 = o$$

und

$$\text{II. } (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1)\, x + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1)\, y + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1)\, z + \mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 = o,$$

welche Ebenen nothwendig aufeinander senkrecht stehen müssen.

Um den analytischen Beweis zu führen, daß diese Ebenen aufeinander senkrecht stehen, sind die Bedingungen aufzusuchen, denen die Coefficienten beider Gleichungen genügen müssen, wenn die durch dieselben vorgestellten zwei Ebenen aufeinander senkrecht stehen. — Läßt man von irgend einem Punkte P_1 einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine Senkrechte p auf eine andere Ebene herab, so liegt p entweder in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ selbst oder schneidet dieselbe; im ersteren Falle sind die beiden Ebenen senkrecht zu einander, im zweiten nicht. Um diese geometrische Eigenschaft analytisch auszudrücken, bezeichne man mit x_1, y_1, z_1, die Coordinaten eines der letztern Ebene angehörigen Punktes, für welchen somit die Gleichung

$$\text{III. } (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1)\, x_1 + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1)\, y_1 + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1)\, z_1 + \mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 = o$$

besteht. Die Gleichungen einer vom Punkte x_1.. auf die Ebene $\mathfrak{E}$ herabgelassenen Senkrechten sind nach Analogie der in Auflösung 2 des § 4 erhaltenen Resultate

$$\text{IV. } x_1 - x = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1}(z_1 - z) \text{ und V. } y_1 - y = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1}(z_1 - z).$$

Soll nun das erwähnte Perpendikel in der Ebene E_1 enthalten sein, so müssen die Coordinaten $x\,y\,z$ in den Gleichungen II, III, IV und V denselben Werth haben. Durch Combination von II und III ergibt sich

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1)(x_1 - x) + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1)(y_1 - y) + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1)(z_1 - z) = 0,$$

oder

$$\text{VI. } \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1} \cdot \frac{x_1 - x}{z_1 - z} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1} \cdot \frac{y_1 - y}{z_1 - z} + 1 = 0.$$

Aus IV und V geht hervor

$$\text{VII. } \frac{x_1 - x}{z_1 - z} = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1} \text{ und } \frac{y_1 - y}{z_1 - z} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1}.$$

Aus VI und VII folgt demnach als Bedingung für die senkrechte Lage der beiden Ebenen

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1} \cdot \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1} \cdot \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1} + 1 = 0,$$

oder

$$\text{VIII. } (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1)(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1)(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1)(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 0.$$

Zu dem nämlichen Resultate führt auch die geometrische Bemerkung, daß p mit E_1 bereits den Punkt $x_1 \ldots$ gemein hat, also nur noch parallel mit E_1 zu sein braucht, um ganz in diese Ebene zu fallen.

Führt man nun in die Bedingungsgleichung Nro. VIII die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$ u. s. w. ein, so bleibt zu beweisen, daß

$$0 = \frac{A^2}{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{A_1^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{B_1^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{C_1^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2},$$

oder daß

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0$$

sei, was offenbar stattfindet.

---

2. Auflösung. Die Gleichungen der beiden der Lage nach gegebenen Ebenen seien wiederum

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und } A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Bezeichnet man nun einen beliebigen Punkt des Ortes mit x_1, y_1, z_1, so müssen die aus diesem Punkte auf die gegebenen Ebenen gefällten Senkrechten einander gleich sein, und wenn man den Fußpunkt der einen Senkrechten in der ersten Ebene mit $x_2 \ldots$, den Fußpunkt der andern Senkrechten in der zweiten Ebene mit $x_3 \ldots$ bezeichnet, so erhält man zunächst folgende Gleichung:

$$1)\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2.$$

Weil x_2.. und x_3.. in den der Lage nach gegebenen Ebenen sich befinden, kann man auch die Gleichungen aufstellen:

$$2)\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \text{ und } 3)\ A_1x_3+B_1y_3+C_1z_3+D_1=0.$$

Die Gleichungen der auf die erste der gegebenen Ebenen gefällten Senkrechten sind:

$$x-x_1=\frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}(z-z_1) \text{ und } y-y_1=\frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}(z-z_1).$$

Diese Gleichungen können aber auch, weil die durch dieselben vorgestellte Linie senkrecht auf der gegebenen Ebene ist, die Form haben

$$x-x_1=\frac{A}{C}(z-z_1) \text{ und } y-y_1=\frac{B}{C}(z-z_1); \text{ daher}$$

$$4)\ \frac{x_1-x_2}{z_1-z_2}=\frac{A}{C} \text{ und } 5)\ \frac{y_1-y_2}{z_1-z_2}=\frac{B}{C} \text{ ist.}$$

Die Gleichungen der zweiten Senkrechten sind:

$$x-x_1=\frac{x_1-x_3}{z_1-z_3}(z-z_1) \text{ und } y-y_1=\frac{y_1-y_3}{z_1-z_3}(z-z_1),$$

welche wegen der besondern Lage der Senkrechten zu der zweiten der gegebenen Ebenen die Form haben können:

$$x-x_1=\frac{A_1}{C_1}(z-z_1) \text{ und } y-y_1=\frac{B_1}{C_1}(z-z_1); \text{ daher}$$

$$6)\ \frac{x_1-x_3}{z_1-z_3}=\frac{A_1}{C_1} \text{ und } 7)\ \frac{y_1-y_3}{z_1-z_3}=\frac{B_1}{C_1} \text{ ist.}$$

Eliminirt man nun aus den sechs letzten der vorstehend entwickelten sieben Gleichungen die sechs Unbekannten x_2, y_2, z_2, x_3.. und setzt deren Werthe in die erste Gleichung, so erhält man genau dieselben Endgleichungen wie in der vorhergehenden Auflösung.

---

§ 6.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von zweien der Lage nach im Raume gegebenen Linien gleichweit entfernt sind.

Auflösung. Die Gleichungen der einen Linie seien:

$$1)\ x=az+p \text{ und } 2)\ y=bz+q,$$

die Gleichungen der andern Linie

$$3)\ x=a_1z+p_1 \text{ und } 4)\ y=b_1z+q_1.$$

Bezeichnet man nun einen beliebigen Punkt des Ortes mit x_1.., so ist, wie aus Nro. 10 des § 2 erhellt, seine kürzeste Entfernung von der ersten Linie gleich

$$\sqrt{(x_1-p)^2+(y_1-q)^2+z_1^2-\frac{[a\,(x_1-p)+b\,(y_1-q)+z_1]^2}{a^2+b^2+1}},$$

die kürzeste Entfernung von der zweiten Linie gleich

$$\sqrt{(x_1-p_1)^2+(y_1-q_1)^2+z_1^2-\frac{[a_1\,(x_1-p_1)+b_1\,(y_1-q_1)+z_1]^2}{a_1^2+b_1^2+1}};$$

daher die allgemeine Gleichung des Ortes

$$\text{I. } (x-p)^2+(y-q)^2-\frac{[a\,(x-p)+b(y-q)+z]^2}{a^2+b^2+1}=(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-\frac{[a_1(x-p_1)+b_1(y-q_1)+z]^2}{a_1^2+b_1^2+1}.$$

Diese allgemeine Ortsgleichung würde nur dann eine wesentliche Vereinfachung erleiden, wenn man die zweite der gegebenen Linien sich mit der Achse der Z zusammenfallend dächte, in welchem Falle die allgemeine Gleichung die Form erhalten würde:

$$\text{II. } (p-2x)\,p+(q-2y)\,q+z^2=\frac{[a\,(x-p)+b\,(y-q)+z]^2}{a^2+b^2+1}.$$

Eine bedeutend einfachere Form würde jedoch die Ortsgleichung in allen denkbaren Fällen annehmen, wenn die beiden der Lage nach im Raume gegebenen Linien sich schnitten. Um die Abänderungen kennen zu lernen, welche die unter I angeführte allgemeine Ortsgleichung erleiden würde, wenn die beiden der Lage nach im Raume gegebenen Linien sich in einem Punkte schneiden, hat man zu berücksichtigen, daß die Veränderlichen x und y im Allgemeinen sehr verschiedene Werthe in den Systemen 1) und 2), 3) und 4) annehmen, wenn man in beiden z gleich einer beliebigen z_0 setzt; wenn jedoch die beiden Geraden sich schneiden, so müssen die Coordinaten ihres gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes beiden Systemen zugleich Genüge leisten, und man erhält jene daher, wenn man x, y, z nicht mehr als Veränderliche, sondern als Unbekannte betrachtet, welche in diesen vier Gleichungen beziehlich die nämlichen Werthe haben. Man darf deßhalb diese Gleichungen nur nach x, y, z auflösen; da aber ihre Zahl die der Unbekannten übersteigt, so erhält man zuletzt eine Bedingungsgleichung, der durch die gegebenen Stücke genügt werden muß, wenn die im Raume der Lage nach gegebenen Linien sich wirklich schneiden sollen. Diese Bedingungsgleichung erhält man leicht durch Elimination der drei Unbekannten: man ziehe 1) von 3) und 2) von 4) ab, wodurch man erhält:

$$o = z\,(a_1-a)+p_1-p \text{ und } o = z\,(b_1-b)+q_1-q;$$

eliminire hierauf z aus diesen beiden Gleichungen, oder drücke vielmehr aus, daß die beiden Werthe von z, welche man aus ihnen erhält, miteinander übereinstimmen, so gelangt man zu der Bedingung:

$$5)\quad \frac{p_1-p}{a-a_1}=\frac{q_1-q}{b-b_1} \text{ oder } \frac{p_1-p}{q_1-q}=\frac{a_1-a}{b_1-b},$$

oder auch

$$6)\ (p_1-p)\,(b_1-b)=(q_1-q)\,(a_1-a).$$

Die beiden Geraden schneiden sich somit in einem Punkte, wenn eine dieser Gleichungen durch die Constanten der gegebenen Gleichungen 1), 2), 3) und 4) identisch wird, und man erhält die Coordinaten des Durchschnittspunktes, wenn man den gemeinschaftlichen Werth

$$z = \frac{p_1 - p}{a - a_1} = \frac{q_1 - q}{b - b_1}$$ nach Belieben entweder in

1) und 2) oder in 3) und 4) substituirt. Auf diese Weise erhält man für die Coordinaten des Durchschnittspunktes:

$$7)\ z_0 = \frac{p_1 - p}{a - a_1},\quad x_0 = \frac{ap_1 - a_1p}{a - a_1} \text{ und } y_0 = \frac{bq_1 - b_1q}{b - b_1}. —$$

Bei zwei parallelen Linien ist $a = a_1$, $b = b_1$ und mithin die Gleichung 6) erfüllt, die Formeln 7) geben $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$ und geben an, daß zwei parallele Linien einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Um diesen Fall mit dem vorhergehenden in einen Ausdruck zusammenzufassen, muß man sagen: zwei gerade Linien liegen in einer und derselben Ebene oder nicht, je nachdem die Gleichung

$$(p_1 - p)(b_1 - b) = (q_1 - q)(a_1 - a)$$

erfüllt oder nicht erfüllt ist; im ersten Falle haben sie einen Punkt gemein, der eben sowohl in endlicher als unendlicher Entfernung liegen kann, im zweiten Falle besitzen die Geraden keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Denkt man sich nun den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Punkt verlegt, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind, so hat man in die allgemeine Gleichung des Ortes nur $x + x_0$ statt x, $y + y_0$ statt y, und $z + z_0$ statt z einzuführen, und man erhält nach gehöriger Vereinfachung an die Stelle der allgemeinen Ortsgleichung I für den Ort zweier sich schneidenden Geraden, deren Durchschnittspunkt den Anfangspunkt des Coordinatensystems bildet: die Gleichung

$$\text{III.}\quad \frac{ax + by + z}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{a_1x + b_1y + z}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 1}},$$

und an die Stelle der Ortsgleichung II die Gleichung

$$\text{IV.}\ z = \frac{ax + by + z}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Die beiden Gleichungen Nro. III sowohl als IV stellen zwei Ebenen dar, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, aufeinander senkrecht stehen, und die Nebenwinkel der beiden sich schneidenden Linien halbiren, was von jedem Paare der genannten Ebenen leicht analytisch bewiesen werden kann. Um diesen Beweis für Nro. IV zu führen, bringe man die durch dieselben vorgestellten Gleichungen zunächst auf die Form $Ax + By + Cz + D = o$, d. i.

$$8)\ ax + by + (1 + \sqrt{a^2 + b^2 + 1})\, z = o \text{ und } 9)\ ax + by + (1 - \sqrt{a^2 + b^2 + 1})\, z = o,$$

so ist klar, daß beide Ebenen durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, da das letzte constante Glied D fehlt. Um zu beweisen, daß beide Ebenen aufeinander senkrecht stehen, müßte nachgewiesen werden, daß

$$aa + bb + (1 - \sqrt{a^2 + b^2 + 1})\,(1 + \sqrt{a^2 + b^2 + 1}) = o, \text{ d. i. daß}$$

$$a^2 + b^2 + 1 - (a^2 + b^2 + 1) = o$$ sei, was offenbar stattfindet. Der Beweis endlich, daß von diesen Ebenen die beiden Nebenwinkel der sich schneidenden Linien halbirt werden, könnte in

folgender Weise geführt werden: der Winkel γ, den die Achse der Z mit der gegebenen Linie bildet, ist von der Art, daß

$$\cos.\ \gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

der Winkel ξ, den die eine der Ebenen 8) oder 9) mit der Ebene der XY bildet, ist von der Art, daß

$$\cos.\ \xi = \frac{c}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

mithin ist auch der Winkel π, den die eine der Ebenen 8) oder 9) mit der Achse der Z macht, von der Art, daß

$$\sin.\ \pi = \frac{c}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

oder daß

$$\cos.\ \pi = \sqrt{1-\frac{C^2}{A^2+B^2+C^2}} = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

Es wäre daher nur noch nachzuweisen, daß $\pi = \frac{\gamma}{2}$, oder daß $\cos.\ \pi = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\cos.\ \gamma}{2}}$, oder $\overline{\cos.\ \pi}^2 = \frac{1}{2}+\frac{\cos.\ \gamma}{2}$ sei. Führt man daher in den letzten Ausdruck die für cos. π und cos. γ vorher gefundenen Werthe ein, so bleibt zu beweisen, daß

$$\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pm 2\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \text{oder daß}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+(1\mp\sqrt{a^2+b^2+1})^2} = \quad \text{〃} \qquad \text{〃} \qquad \text{〃} \quad \text{〃}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1\mp\sqrt{a^2+b^2+1}} = \frac{1\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \text{d. i.}$$

$$\pm(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2+1} = a^2+b^2+1\mp\sqrt{a^2+b^2+1}\pm(a^2+b^2+1)\sqrt{a^2+b^2+1}-(a^2+b^2+1)$$

$$\text{〃} \qquad \text{〃} \qquad = \mp\sqrt{a^2+b^2+1}\pm(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2+1}\pm\sqrt{a^2+b^2+1},\ \text{was}$$

offenbar stattfindet.

Man hätte auch, um den Fall analytisch zu sondern, in welchem sich die durch 1), 2), 3) und 4) dargestellten Linien schneiden, auf die hier folgende Weise verfahren können. — Man bestimme zunächst die Durchschnitte der gleichnamigen Projection beider Geraden; aus den Gleichungen

$$x = az + p \text{ und } x = a_1 z + p_1$$

findet man als Coordinaten z_1 und x_1 des Durchschnitts der Projectionen auf die ZX-Ebene

$$5)\quad z_1 = -\frac{p_1-p}{a_1-a},\quad x_1 = \frac{pa_1-p_1a}{a_1-a},$$

ebenso folgt aus den Gleichungen

$$y = bz + q \text{ und } y = b_1 z + q_1,$$

daß sich die Projectionen auf die ZY-Ebene in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten sind:

$$6)\ z_2 = -\frac{q_1 - q}{b_1 - b},\ y_2 = \frac{qb_1 - q_1 b}{b_1 - b}.$$

Wenn nun die beiden Geraden im Raume einen Punkt s als wirklichen Durchschnitt gemein haben, so müssen die Projectionen s_1 und s_2 desselben mit den Durchschnitten der gleichnamigen Projectionen der Geraden zusammenfallen, d. h. z_1 und x_1 müssen die Coordinaten von s_1 und ebenso z_2, y_2 die Coordinaten von s_1 sein; dies ist aber nur möglich für $z_1 = z_2$, und so ergiebt sich als Bedingung für das Vorhandensein eines Durchschnittes die Gleichung

$$\frac{p_1 - p}{a_1 - a} = \frac{q_1 - q}{b_1 - b'} \text{ oder } \frac{p_1 - p}{q_1 - q} = \frac{a_1 - a}{b_1 - b'} \text{ oder auch } (p_1 - p)(b_1 - b) = (q_1 - q)(a_1 - a).$$

Ist eine dieser Gleichungen erfüllt, so hat man für die Coordinaten des Durchschnitts, welche x_0, y_0, z_0 heißen mögen, die Werthe

$$z_0 = -\frac{p_1 - p}{a_1 - a} = -\frac{q_1 - q}{b_1 - b},\ x_0 = \frac{pa_1 - p_1 a}{a_1 - a},\ y_0 = \frac{qb_1 - q_1 b}{b_1 - b};$$

im entgegengesetzten Falle kann nur von den Durchschnitten der Projectionen die Rede sein und die Formeln 5) und 6) bestehen dann ohne weitern Zusammenhang untereinander.

---

§ 7.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von drei der Lage nach gegebenen Punkten $x_1 \ldots$, $x_2 \ldots$, $x_3 \ldots$ gleichweit entfernt sind.

1. Auflösung. Dieser Ort ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen, deren Gleichungen gemäß Endgleichung A des Ortes in § 4 folgende sind:

$$1)\ (x_1 - x_2)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_1 - y_2)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + (z_1 - z_2)\left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 0$$

und

$$2)\ (x_1 - x_3)\left(x - \frac{x_1 + x_3}{2}\right) + (y_1 - y_3)\left(y - \frac{y_1 + y_3}{2}\right) + (z_1 - z_3)\left(z - \frac{z_1 + z_3}{2}\right) = 0,$$

oder wenn man den Gleichungen 1) und 2) die Formen

$$\text{I. } Ax + By + Cz + D = 0 \text{ und II. } A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

geben will, so erhält man:

$$\text{III. } (x_1 - x_2)\,x + (y_1 - y_2)\,y + (z_1 - z_2)\,z + \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2}{2} = 0,$$

und

$$\text{IV. } (x_1 - x_3)\,x + (y_1 - y_3)\,y + (z_1 - z_3)\,z + \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2}{2} = 0.$$

Um nun die Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen I und II oder III und IV dargestellten Ebenen, das ist den verlangten Ort zu finden, könnte man sich damit begnügen anzugeben: die gesuchte Gerade sei hinlänglich bestimmt durch das System der Gleichungen I und II, wenn man diese als gleichzeitig geltend nimmt, d. h. wenn man den x, y, z in denselben beziehlich die nämlichen Werthe zuschreibt. Da wir aber die Gleichungen der geraden Durchschnittslinie, d. h. die Projection derselben auf der Ebene der **XZ** und der Ebene der **YZ** zu erhalten wünschen, so bedenke man, daß die Veränderlichen x und z z. B. sowohl die Coordinaten eines Durchschnittspunktes im Raume, als auch die Coordinaten der Projection dieses Punktes auf der Ebene **XZ** vorstellen, man erhält somit die Gleichung dieser Projection, wenn man y aus I und II eliminirt. Aus demselben Grunde darf man nur x eliminiren, um die Projection auf **YZ** zu erhalten. Führt man nun die Rechnung in der angegebenen Weise aus, so erhält man als Gleichungen der Geraden:

$$\text{V. } x = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}\,z + \frac{BD_1 - B_1D}{AB_1 - A_1B} \quad \text{und} \quad \text{VI. } y = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B}\,z + \frac{A_1D - AD_1}{AB_1 - A_1B},$$

und wenn man für A, B, C ꝛc. aus den Gleichungen III und IV die Werthe V und VI einführt, erhält man als Gleichungen des verlangten Ortes:

$$\text{VII. } x = \frac{z_2y_3 - y_2z_3 - z_1y_3 + y_1z_3 - y_1z_2 + z_1y_2}{x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 + y_1x_2 - y_1x_3 + y_2x_3}\,z +$$
$$\frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(y_3 - y_2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(y_2 - y_1) + (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)(y_1 - y_3)}{2\,(x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 + y_1x_2 - y_1x_3 + y_2x_3)}.$$

$$\text{VIII. } y = \frac{x_1z_2 - x_1z_3 - z_1x_2 + x_2z_3 - z_2x_3 + z_1x_3}{x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 + y_1x_2 - y_1x_3 + y_2x_3}\,z +$$
$$\frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_3 - x_2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(x_2 - x_1) + (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)(x_1 - x_3)}{2\,(x_1y_3 - x_1y_2 - x_2y_3 + y_1x_2 - y_1x_3 + y_2x_3)}.$$

---

2. Auflösung. Man suche die Gleichung derjenigen Linie, welche im Mittelpunkte des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises senkrecht errichtet ist, so hat man die Gleichung des Ortes. Es sei nun die allgemeine Gleichung der Ebene, welche durch die drei gegebenen Punkte geht: 1) $Ax + By + Cz + D = 0$. Substituirt man nach und nach in diese Gleichung die Coordinaten eines jeden der gegebenen Punkte, so erhält man drei neue Gleichungen, in welchen eigentlich nur drei Unbekannte vorkommen, nämlich die Quotienten $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$; diese kann man daher leicht berechnen und in die Gleichung 1) substituiren, welche die nämlichen Quotienten enthält. Das Resultat, welches sich hieraus ergiebt, indem man die Größe D zum gemeinschaftlichen Nenner nimmt, ist:

$$D = x_1 (y_2z_3 - y_3z_2) + x_2 (y_3z_1 - y_1z_3) + x_3 (y_1z_2 - y_2z_1),$$
$$A = y_3z_2 - y_2z_3 + y_1z_3 - y_3z_1 + y_2z_1 - y_1z_2,$$
$$B = x_2z_3 - x_3z_2 + x_3z_1 - x_1z_3 + x_1z_2 - x_2z_1,$$
$$C = x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_2 - x_1y_2;$$

daher die Gleichung der verlangten Ebene:

$$2)\begin{cases} o = [y_3z_2 - y_2z_3 + y_1z_3 - y_3z_1 + y_2z_1 - y_1z_2]\,x + [x_2z_3 - x_3z_2 + x_3z_1 - x_1z_3 + x_1z_2 - x_2z_1]\,y \\ \quad + [x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_1 - x_1y_2]\,z + x_1 (y_2z_3 - y_3z_2) + x_2 (y_3z_1 - y_1z_3) + x_3 (y_1z_2 - y_2z_1). \end{cases}$$

Die Gleichungen einer Linie, welche auf der Ebene der drei gegebenen Punkte senkrecht steht und durch einen seinen Coordinaten nach bekannten Punkt x_4, y_4, z_4 geht, sind:

$$2)\ x - x_4 = \frac{A}{C}\,(z - z_4) \text{ und } 3)\ y - y_4 = \frac{B}{C}\,(z - z_4).$$

Eine Linie aber, welche im Mittelpunkte des um die drei gegebenen Punkte beschriebenen Kreises senkrecht steht, trifft die Ebene der **XY** in einem Punkte x_4, y_4, z_4, von der Art, daß $z_4 = o$, x_4 aber und y_4 wegen der gleichen Entfernung dieses Punktes von den drei gegebenen sich aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$4)\ (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + z_1^2 = (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 + z_2^2,$$
$$5)\quad '' \qquad '' \qquad '' = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + z_3^2.$$

Führt man die aus den Gleichungen 4) und 5) für x_4, z_4 leicht zu erzielenden Werthe, und die von **A**, **B**, **C** und z_4 in die Gleichungen 2) und 3) ein, so erhält man als Gleichungen des Ortes genau dieselben, welche in der vorhergehenden Auflösung unter **VII** und **VIII** aufgeführt sind.

---

3. Auflösung. Man bestimme die Coordinaten zweier Punkte x_4.. und x_5.. der den Ort vorstellenden Linie, wovon der eine in der Ebene der **XY**, der andere in der Ebene der **YZ** liegt, und jeder derselben von den drei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist. Die Gleichungen des Ortes würden dann sein:

$$1)\ x - x_4 = \frac{x_4 - x_5}{z_4 - z_5}\,(z - z_4) \text{ und } 2)\ y - y_4 = \frac{y_4 - y_5}{z_4 - z_5}\,(z - z_4).$$

Es sind aber $z_4 = o$, $x_5 = o$, die Werthe von x_4 und y_4 aber aus den Gleichungen 4) und 5) der vorhergehenden Auflösung leicht zu berechnen. Zur Bestimmung von z_5 und y_5 könnte man die Gleichungen benutzen:

$$x_1^2 + (y_1 - y_5)^2 + (z_1 - z_5)^2 = x_2^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2,$$
$$'' \qquad '' \qquad '' = x_3^2 + (y_3 - y_5)^2 + (z_3 - z_5)^2.$$

Substituirte man dann hierauf die für x_4, y_4 &c. gefundenen Werthe in die Gleichungen 1) und 2), so erhielte man dieselben Endgleichungen, wie in den beiden vorhergehenden Auflösungen.

In besondern Fällen vereinfacht sich die Ortsgleichung oft bedeutend; ist z. B. $x_3 = y_3 = z_3 = o$, so verändert sich die in Auflösung 2) unter Nro. 2) angeführte Gleichung der Ebene der drei Punkte, wie folgt:

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)\, x + (z_1 x_2 - z_2 - x_1)\, y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, z = o,$$

als Gleichung der Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und außerdem durch die Punkte $x_1 \ldots, x_2 \ldots$ geht. In ähnlicher Weise werden die Ortsgleichungen VII und VIII reducirt.

Für $y_1 = z_1 = x_2 = z_2 = x_3 = y_3 = o$ ergiebt sich als Gleichung der Ebene der drei Punkte:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_3} = 1,$$

als Gleichung einer Ebene, welche auf den Coordinaten-Achsen der Reihe nach die Strecken x_1, y_2, z_3 abschneidet; dagegen die Ortsgleichungen die Form erhalten würden:

$$x = \frac{z_3}{x_1} z + \frac{x_1^2 - y_2^2}{2x_1} \text{ und } y = \frac{z_3}{y_2} z + \frac{z_2^2 - z_3^2}{2y_2}.$$

---

§ 8.

Den Ort für alle Punkte zu finden, welche von drei der Lage nach im Raume gegebenen Ebenen E_1, E_1, E_2 gleichweit entfernt sind.

Auflösung. Die Gleichungen der drei der Lage nach gegebenen Ebenen seien: $Ax + By + Cz + D = o$, $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = o$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = o$. Setzt man nun

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \mathfrak{A}, \quad \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \mathfrak{A}_1, \quad \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \mathfrak{A}_2,$$

$$\frac{B}{\sqrt{\;''\quad ''\quad ''}} = \mathfrak{B}, \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

$$\frac{C}{\sqrt{\;''\quad ''\quad ''}} = \mathfrak{C}, \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

$$\frac{D}{\sqrt{\;''\quad ''\quad ''}} = \mathfrak{D}, \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

so wird gemäß Auflösung 1 des § 5 der Ort für alle Punkte, welche von den Ebenen E und E_1 gleichweit entfernt sind, dargestellt durch zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen, deren Gleichungen die Form haben

$$1)\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1)\, x + (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1)\, y + (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1)\, z + \mathfrak{D} - \mathfrak{D}_1 = o,$$
$$2)\ (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_1)\, x + (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1)\, y + (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1)\, z + \mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 = o.$$

Der Ort für alle Punkte, welche von E und E_2 gleichweit entfernt sind, durch

$$3)\ (\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)\,x+(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)\,y+(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_2)\,z+\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_2=0, \text{ und}$$

$$4)\ (\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)\,x+(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)\,y+(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_2)\,z+\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_2=0.$$

Der Ort für alle Punkte, welche von den drei der Lage nach gegebenen Ebenen gleichweit entfernt sind, wird somit dargestellt durch vier Linien, welche erhalten werden durch die Durchschnitte der Ebene 1) mit 3) und 4), und die Durchschnitte der Ebene 2) mit 3) und 4). Die Gleichungen dieser vier Linien werden nach Analogie der Entwicklungen V und VI aus I und II des § 7 dargestellt, daher hier nur die Gleichungen der ersten und vierten Linie vollständig aufgeführt werden sollen. Die Gleichungen der ersten Linie sind:

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=\dfrac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_2)-(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)}\,z+\dfrac{(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_2)-(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)}, \\[2ex] y=\dfrac{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_2)}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)}\,z+\dfrac{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_2)}{(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_1)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der vierten Linie sind:

$$\text{II.}\ \begin{cases} x=\dfrac{(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_2)-(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_1)}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)}\,z+\dfrac{(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_2)-(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_1)}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)}, \\[2ex] y=\dfrac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_1)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_2)}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)}\,z+\dfrac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_1)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_2)}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1)}. \end{cases}$$

Diese allgemeinen Liniengleichungen erleiden unter Umständen mehr oder weniger bedeutende Abänderungen, von welchen wir nur einige wenige andeuten wollen. Hat man dem Coordinatensystem eine solche Lage zu den drei gegebenen Ebenen gegeben, daß der Anfangspunkt des Coordinatensystems mit dem Punkte der drei gegebenen Ebenen zusammenfällt, in welchem dieselben sich treffen, so wird wegen $D = D_1 = D_2 = 0$ auch $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = 0$, daher auch in den Liniengleichungen I und II die zweiten Quotienten auf der zweiten Seite zu Null werden. Hat man eine solche Lage des Coordinatensystems zu den drei der Lage nach gegebenen Ebenen getroffen, daß nicht nur der Durchschnittspunkt der drei gegebenen Ebenen mit dem Anfangspunkte der Coordinaten, sondern auch die Achse der Z mit der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E und E_1 zusammenfällt, so werden außer $D = D_1 = D_2 = \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = 0$ auch noch $C = C_1 = \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 = 0$ und die unter I und II angeführten Liniengleichungen lassen sich wie folgt, zusammenfassen:

$$x=\frac{\mp(\mathfrak{B}\mp\mathfrak{B}_1)\,\mathfrak{C}_2}{(\mathfrak{A}\mp\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}\mp\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}\mp\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}\mp\mathfrak{B}_1)}\,z,$$

$$y=\frac{\pm(\mathfrak{A}\mp\mathfrak{A}_1)\,\mathfrak{C}_2}{(\mathfrak{A}\mp\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B}\mp\mathfrak{B}_2)-(\mathfrak{A}\mp\mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B}\mp\mathfrak{B}_1)}\,z.$$

Noch bedeutend einfacher würden diese Ortsgleichungen sich gestalten, wenn man noch ferner annehmen wollte, daß eine der gegebenen Ebenen, etwa die der E, außerdem mit der Ebene der YZ zusammentreffe. — Bei den hier erzielten Vereinfachungen der allgemeinen Endresultate für den gesuchten Ort sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, daß die drei der Lage nach gegebenen Ebenen einen Punkt mit einander gemein haben, was jedoch nicht immer stattfindet, indem a) der Fall eintreten kann, daß die drei Durchschnittslinien zwischen je zwei der gegebenen Ebenen parallel sind, oder b) der Durchschnitt der Ebenen E und E_1 parallel mit dem Durchschnitte der Ebenen E und E_2 ist, E_1 und E_2 aber keinen Durchschnitt haben, und c) keine Ebene mit einer der beiden andern einen Durchschnitt hat. Wir wollen jedoch hier nur noch die Modificationen aufsuchen, welche das allgemeine Endresultat des Ortes erleiden würde, wenn der Fall a) stattfindet, indem die übrigen Fälle leicht auf analoge Weise ihre Erledigung erlangen dürften. — Denken wir uns im Falle a) dem Coordinatensystem eine solche Lage gegeben, daß der Durchschnittspunkt der Ebenen E und E_1 mit der Achse der Z zusammenfällt, so werden, weil die Ebenen E und E_1 die Achse der Z in sich enthalten, $D = D_1 = \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 = o$ und $C = C_1 = \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 = o$, und weil die Ebene der E_2 parallel der Achse der Z ist, auch $C_2 = \mathfrak{C}_2 = o$; daher die unter I und II angeführten allgemeinen Gleichungen für diesen Fall reducirt sich zusammenfassen lassen unter der Form:

$$x = \frac{\mp (\mathfrak{B} \mp \mathfrak{B}_1)\, \mathfrak{D}_2}{(\mathfrak{A} \mp \mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B} \mp \mathfrak{B}_2) - (\mathfrak{A} \mp \mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B} \mp \mathfrak{B}_1)} \text{ und}$$

$$y = \frac{\pm (\mathfrak{A} \mp \mathfrak{A}_1)\, \mathfrak{D}_2}{(\mathfrak{A} \mp \mathfrak{A}_1)(\mathfrak{B} \mp \mathfrak{B}_2) - (\mathfrak{A} \mp \mathfrak{A}_2)(\mathfrak{B} \mp \mathfrak{B}_1)},$$

woraus zu erkennen, daß die gesuchten Oerter durch vier Linien vorgestellt werden, welche parallel der Achse der Z, und deren Coordinaten x und y in der XY-Ebene durch die vorstehenden constanten Werthe genau bestimmt sind. — Die Werthe von x und y würden in dem angezogenen Falle noch weitere leicht ersichtliche Vereinfachungen erleiden, wenn man noch ferner annehmen wollte, daß eine der gegebenen Ebenen E oder E_1 Coordinatenebene der ZX oder ZY werden sollte.