Allgemeine Auflösungen

einiger Probleme der analytischen Geometrie

über

Berührungen im Raume.

Aufgefordert, das diesjährige Programm mit einer Abhandlung zu begleiten, wählte der Verfasser zum Thema den in der Ueberschrift angedeuteten Gegenstand, weil ihm derselbe durch die Mannigfaltigkeit der dabei zur Anwendung kommenden Lehren und Hülfsmittel ein besonderes Interesse darzubieten, und den sich der höhern Mathematik zuwendenden Jünglingen ein passendes Studium zur Uebung in der neuern analytischen Methode zu gewähren schien. Ueberhaupt hielt er es für zweckmäßig, recht zeitig die Aufmerksamkeit auf die analytische Geometrie im Raume zu lenken, welche durch ihre Allgemeinheit es möglich macht, so viele Gegenstände auf einmal zu umfassen, und deren Anwendung so mächtig auf die Mechanik und andere Wissenschaften eingewirkt hat, daß dieselben ihre Gestalt gänzlich geändert haben. — Die für Schulschriften dieser Art bestimmte Ausdehnung gestattete es jedoch nicht, eine größere Anzahl zu einem Ganzen zusammengehöriger Probleme zur Ausführung zu bringen; auch konnte es mannigfacher Gründe wegen nicht zweckmäßig befunden werden, aus denselben gerade die interessantesten herauszuheben. Der Verfasser hat daher diejenigen, welche hier zur Behandlung kommen konnten, in natürlicher Stufenfolge aneinander gereiht, beginnend bei den einfachen und allmählig zu den zusammengesetztern übergehend, und muß es einer spätern Gelegenheit vorbehalten bleiben, die fehlenden folgen zu lassen.

Erstes Problem.

Mittelpunkt und Halbmesser derjenigen Kugel zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch vier im Raume der Lage nach gegebene Punkte geht.

Auflösung. Es seien **OX**, **OY** und **OZ** die Axen eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, die Coordinaten der vier im Raume der Lage nach gegebenen Punkte $\overset{I}{x}, \overset{I}{y}, \overset{I}{z}$; $\overset{II}{x}, \overset{II}{y}, \overset{II}{z}$; $\overset{III}{x}..$; $\overset{IV}{x}...$; die Coordinaten des zu suchenden Mittelpunktes x, y, z und der Radius der verlangten Kugel **R**, so hat man folgende vier Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Stücke:

1) $(x-\overset{I}{x})^2 + (y-\overset{I}{y})^2 + (z-\overset{I}{z})^2 = R^2$, 2) $(x-\overset{II}{x})^2 + (y-\overset{II}{y})^2 + (z-\overset{II}{z})^2 = R^2$,
3) $(x-\overset{III}{x})^2 + \text{etc.} = R^2$, 4) $(x-\overset{IV}{x})^2 + \text{etc.} = R^2$.

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, die dritte von der zweiten u. s. w., so erhält man drei Gleichungen vom ersten Grade, in welchen die unbekannte **R** nicht mehr vorkommt, aus denen man die verlangten Mittelpunkts-Coordinaten und somit auch den Radius der Kugel leicht finden kann.

Diese Werthe sind aber einer mehr oder weniger bedeutendern Vereinfachung fähig, je nachdem man die Lage der Coordinaten-Ebenen zu den im Raume der Lage nach gegebenen vier Punkten mehr oder weniger günstig wählt. Wählt man z. B. die Lage der Coordinaten-Axen der Art, daß der Anfangspunkt **O** derselben mit dem Punkte $\overset{I}{x}, \overset{I}{y}, \overset{I}{z}$ zusammenfällt, läßt man ferner die Axe der **X** durch den Punkt $\overset{II}{x}, \ldots$ gehen, und legt man endlich die Ebene der **XY** durch den Punkt $\overset{III}{x} \ldots$, so werden in den für $x, y, z,$ **R** erhaltenen allgemeinen Ausdrücken $\overset{I}{x}, \overset{I}{y}, \overset{I}{z}, \overset{II}{y}, \overset{II}{z}$ und $\overset{III}{z}=0$, wodurch dieselben eine wesentliche Vereinfachung erleiden.

Zweites Problem.

Mittelpunkt und Radius derjenigen Kugeln zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch drei im Raume der Lage nach gegebene Punkte gehen, und eine der Lage nach gegebene Fläche berühren.

Auflösung. Man nehme die der Lage nach gegebene Ebene zur Ebene der **XY** eines rechtwinklichen Coordinaten-Systems, eine auf diese Ebene durch den gegebenen Punkt x, y, z gezogene Senkrechte zur positiven Axe der **Z**, und richte die Ebene der **XZ** der Art, daß dieselbe durch den gegebenen Punkt $\overset{II}{x}, \overset{II}{y}, \overset{II}{z}$ gehe. Bezeichnet man nun die Coordinaten des Mittelpunktes eines um das Dreieck beschriebenen Kreises, dessen drei Spitzen die gegebenen Punkte $\overset{I}{x}, \overset{I}{y}, \overset{I}{z}$; $\overset{II}{x}, \overset{II}{y}, \overset{II}{z}$; $\overset{III}{x} \ldots$ sind, mit $\overset{II}{x}, \overset{II}{y}, \overset{II}{z}$, so wird ein in diesem Punkte auf der Dreiecksfläche errichtetes Perpendikel alle Punkte enthalten, welche von den drei gegebenen Punkten gleichweit entfernt sind, mithin auch die Mittelpunkte der verlangten Kugeln in sich fassen. Die Gleichung der Dreiecksfläche auf dasselbe Coordinatensystem bezogen sei:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Oder bezeichnet man die Entfernungen der Durchschnittspunkte dieser Dreiecksfläche in den Axen der **X**, **Y** und **Z** von dem Anfangspunkte des Coordinatensystems mit p, q und r, so ist die Gleichung dieser Dreiecksfläche auch unter die symmetrische Form $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

zu bringen, und somit $A=qr$, $B=pr$, $C=pq$ und $D=-pqr$ gedacht werden muß. Die Dreiecksebene schneidet aber die Axe der Z in einer Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich z, daher $r=\overset{I}{z}$ ist. Weil dieselbe auch durch den Punkt $\overset{II}{x}, \overset{II}{z}$ geht, somit $\frac{\overset{II}{x}}{p}+\frac{\overset{II}{z}}{r}=1$ oder $\frac{\overset{II}{x}}{p}+\frac{\overset{II}{z}}{\overset{I}{z}}=1$ ist, so folgt $p=\frac{\overset{II}{x}\,\overset{I}{z}}{\overset{I}{z}-\overset{II}{z}}$. Da ferner dieselbe durch $\overset{III}{x}, \overset{III}{y}, \overset{III}{z}$ geht, somit $\frac{\overset{III}{x}}{p}+\frac{\overset{III}{y}}{q}+\frac{\overset{III}{z}}{r}=1$ ist, so folgt hieraus nach Einführung der Werthe für r und p in diese Gleichung: $q=\frac{\overset{II}{x}\,\overset{III}{y}\,\overset{I}{z}}{\overset{II}{x}\,\overset{I}{z}-\overset{II}{x}\,\overset{III}{z}-\overset{III}{x}\,\overset{I}{z}+\overset{III}{x}\,\overset{II}{z}}$. Führt man die für p, q, r gefundenen Werthe in die Gleichung der Ebene ein, und berücksichtiget, daß der Punkt $\overset{IV}{x}, \overset{IV}{y}, \overset{IV}{z}$ in derselben sich befindet, also statt x, y, z die Coordinaten $\overset{IV}{x}, \overset{IV}{y}, \overset{IV}{z}$ gesetzt werden können, so erhält man:

$$\text{(I)}\quad \overset{IV}{x}\,\overset{III}{y}\,(\overset{I}{z}-\overset{II}{z})+\overset{IV}{y}\,(\overset{II}{x}\,\overset{I}{z}-\overset{II}{x}\,\overset{III}{z}-\overset{III}{x}\,\overset{I}{z}+\overset{III}{x}\,\overset{II}{z})+\overset{IV}{z}\,\overset{II}{x}\,\overset{III}{y}=\overset{II}{x}\,\overset{III}{y}\,\overset{I}{z}.$$

Da ferner der Punkt $\overset{IV}{x}, \overset{IV}{y}, \overset{IV}{z}$ von den drei Spitzen des Dreiecks gleich weit entfernt ist, so folgt:

$$\text{(II)}\quad \overset{IV}{x}{}^2+\overset{IV}{y}{}^2+(\overset{I}{z}-\overset{IV}{z})^2=(\overset{II}{x}-\overset{IV}{x})^2+\overset{IV}{y}{}^2+(\overset{II}{z}-\overset{IV}{z})^2 \text{ und}$$

$$\text{(III)}\quad \overset{IV}{x}{}^2+\overset{IV}{y}{}^2+(\overset{I}{z}-\overset{IV}{z})^2=(\overset{III}{x}-\overset{IV}{x})^2+(\overset{III}{y}-\overset{IV}{y})^2+(\overset{III}{z}-\overset{IV}{z})^2.$$

Aus den vorstehenden drei Gleichungen lassen sich die unbekannten Stücke $\overset{IV}{x}, \overset{IV}{y}, \overset{IV}{z}$ sehr leicht bestimmen, daher der Mittelpunkt des Dreiecks bekannt.

Es seien nun die allgemeinen Gleichungen einer Linie, welche senkrecht auf der Dreiecksebene steht:

$$(\alpha)\ x=az+\pi \text{ und } (\beta)\ y=bz+\varrho, \text{ so ist}$$

$$a=\frac{A}{C}=\frac{r}{p} \text{ und } b=\frac{B}{C}=\frac{r}{q} \text{ d. i. } a=\frac{\overset{I}{z}-\overset{II}{z}}{\overset{II}{x}} \text{ und}$$

$b=\frac{\overset{II}{x}\,\overset{I}{z}-\overset{II}{x}\,\overset{III}{z}-\overset{III}{x}\,\overset{I}{z}+\overset{III}{x}\,\overset{II}{z}}{\overset{II}{x}\,\overset{III}{y}}$ und da die senkrechte Linie durch den Punkt $\overset{IV}{x}, \overset{IV}{y}, \overset{IV}{z}$ geht, so erhält man aus (α) und (β): $\pi=\overset{IV}{x}-\frac{\overset{I}{z}-\overset{II}{z}}{\overset{II}{x}}\overset{IV}{z}$ und $\varrho=\overset{IV}{y}-\frac{\overset{II}{x}\,\overset{I}{z}-\overset{II}{x}\,\overset{III}{z}-\overset{III}{x}\,\overset{I}{z}+\overset{III}{x}\,\overset{II}{z}}{\overset{II}{x}\,\overset{III}{y}}\overset{IV}{z}$.

Somit die Gleichungen der Senkrechten folgende Form annehmen:

$$1)\quad x-\overset{IV}{x}=a\,(z-\overset{IV}{z}) \text{ und } \quad 2)\quad y-\overset{IV}{y}=b\,(z-\overset{IV}{z}) \text{ oder}$$

$$3)\ x - \overset{\mathrm{IV}}{x} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{z} - \overset{\mathrm{II}}{z}}{\overset{\mathrm{II}}{x}}(z - \overset{\mathrm{IV}}{z}) \text{ und } 4)\ y - \overset{\mathrm{IV}}{y} = \frac{\overset{\mathrm{II}}{x}\overset{\mathrm{I}}{z} - \overset{\mathrm{II}}{x}\overset{\mathrm{III}}{z} - \overset{\mathrm{III}}{x}\overset{\mathrm{I}}{z} + \overset{\mathrm{III}}{x}\overset{\mathrm{II}}{z}}{\overset{\mathrm{III}}{y}\overset{\mathrm{II}}{x}}(z - \overset{\mathrm{IV}}{z}).$$

Um nun den Mittelpunkt und Radius der verlangten Kugeln zu bestimmen, hat man in der senkrechten Linie einen Punkt $\overset{\mathrm{V}}{x}, \overset{\mathrm{V}}{y}, \overset{\mathrm{V}}{z}$ zu suchen, dessen senkrechte Entfernung von der Ebene **XY** gleich ist seiner Entfernung von dem Punkte $\overset{\mathrm{I}}{z}$ der Axe **OZ**. Die Gleichungen 1) und 2) erhalten wegen dieser besondern Werthe für x, y, z die Form:

$$5)\ \overset{\mathrm{V}}{x} - \overset{\mathrm{IV}}{x} = a\,(\overset{\mathrm{V}}{z} - \overset{\mathrm{IV}}{z}) \text{ und } 6)\ \overset{\mathrm{V}}{y} - \overset{\mathrm{IV}}{y} = b\,(\overset{\mathrm{V}}{z} - \overset{\mathrm{IV}}{z}).$$

Für die Entfernung des gesuchten Mittelpunktes vom Punkte $\overset{\mathrm{I}}{z}$ erhält man zu diesen noch

$$7)\ \overset{\mathrm{V}2}{z} = \overset{\mathrm{V}2}{x} + \overset{\mathrm{V}2}{y} + (\overset{\mathrm{I}}{z} - \overset{\mathrm{V}}{z})^2.$$

Aus diesen drei letzten Gleichungen folgt dann der Radius der Kugel **R** oder, was dasselbe ist, die Mittelpunkts-Coordinate

$$\overset{\mathrm{V}}{z} = \frac{a\overset{\mathrm{IV}}{x} + b\overset{\mathrm{IV}}{y} - (a^2+b^2)\overset{\mathrm{IV}}{z} - \overset{\mathrm{I}}{z} \pm \sqrt{(1-a^2+b^2)\,\overset{\mathrm{I}}{z}{}^2 + 2\overset{\mathrm{I}}{z}\left[(a^2+b^2)\overset{\mathrm{IV}}{z} - a\overset{\mathrm{IV}}{x} - b\overset{\mathrm{IV}}{y}\right] - (a\overset{\mathrm{IV}}{y} - b\overset{\mathrm{IV}}{x})^2}}{a^2+b^2}$$

Aus diesem Resultate erhellt, daß es zwei Kugeln der verlangten Art geben kann, deren Coordinaten $\overset{\mathrm{V}}{x}$ und $\overset{\mathrm{V}}{y}$ man leicht findet, wenn man den für $\overset{\mathrm{V}}{z}$ gefundenen Werth in die Gleichungen 5) und 6) substituirt.

Drittes Problem.

Mittelpunkt und Radius derjenigen Kugeln zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch drei der Lage nach im Raume gegebene Punkte gehen, und eine der Lage nach gegebene Linie berühren.

Auflösung. Die Ebene der drei gegebenen Punkte sei die Ebene der **XY** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, der Mittelpunkt des um diese drei Punkte beschriebenen Kreises der Anfangspunkt der Axen, und die Axe der **X** gehe durch den Punkt $\overset{\mathrm{I}}{x}, \overset{\mathrm{I}}{y}, \overset{\mathrm{I}}{z}$; so sind $\overset{\mathrm{I}}{y}, \overset{\mathrm{I}}{z}, \overset{\mathrm{II}}{z}$ und $\overset{\mathrm{III}}{z} = 0$, und es enthält die Axe der **Z** alle Punkte, welche von den drei gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind. Es bleibt mithin zur Bestimmung der Mittelpunkts-Coordinaten nur noch ein Punkt in der Axe der **Z** zu suchen, dessen senkrechte Entfernung von der der Lage nach gegebenen Linie gleich ist der Entfernung desselben von dem Punkte $\overset{\mathrm{I}}{x}$.

Bezeichnet man die Mittelpunkts-Coordinaten der Kugel mit $\overset{\mathrm{IV}}{x}, \overset{\mathrm{IV}}{y}, \overset{\mathrm{IV}}{z}$, so sind $\overset{\mathrm{IV}}{x}$ und $\overset{\mathrm{IV}}{y}$ gleich Null, und man erhält den Radius **R** der Kugel durch die Gleichung:

$$1)\ \mathbf{R} = \sqrt{\overset{\mathrm{I}}{x}{}^2 + \overset{\mathrm{IV}}{z}{}^2}.$$

Die Gleichungen der der Lage nach gegebenen Geraden seien: 2) $x = az + p$ und 3) $y = bz + q$, und die Gleichungen der auf diese Gerade aus dem Punkte $\overset{\shortparallel}{z}$ gezogenen Senkrechten: $x - \overset{\shortparallel}{x} = \overset{\prime}{a}(z - \overset{\shortparallel}{z})$ und $y - \overset{\shortparallel}{y} = \overset{\prime}{b}(z - \overset{\shortparallel}{z})$ oder 4) $x = \overset{\prime}{a}(z - \overset{\shortparallel}{z})$ und 5) $y = \overset{\prime}{b}(z - \overset{\shortparallel}{z})$; so findet folgende Bedingungsgleichung Statt: 6) $a\overset{\prime}{a} + b\overset{\prime}{b} + 1 = 0$.

Um nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes der aufeinander senkrecht gezogenen Linien zu bestimmen, hat man die Gleichungen 2), 3), 4) und 5) in Bezug auf die Veränderlichen einander gleich zu achten. Zu diesem Zwecke setze man aus 4) und 5) die Werthe von $\overset{\prime}{a}$ und $\overset{\prime}{b}$ in 6), wodurch man erhält:

$$a\,\frac{x}{z - \overset{\shortparallel}{z}} + b\,\frac{y}{z - \overset{\shortparallel}{z}} + 1 = 0.$$

In diese Gleichung substituire man aus 2) und 3) die Werthe für x und y, so hat man: $a\,\frac{az+p}{z-\overset{\shortparallel}{z}} + b\,\frac{bz+p}{z-\overset{\shortparallel}{z}} + 1 = 0$, und daher $z = \frac{\overset{\shortparallel}{z} - ap - bq}{a^2+b^2+1}$.

Aus diesem Werthe von z folgt mit Zuziehung der Gleichungen 2) und 3):

$$x = a\,\frac{\overset{\shortparallel}{z} - ap - bq}{a^2+b^2+1} + p,\quad y = b\,\frac{\overset{\shortparallel}{z} - ap - bq}{a^2+b^2+1} + q.$$

Der Radius der Kugel **R** kann daher auch, weil derselbe durch die Punkte x, y, z und $\overset{\shortparallel}{z}$ begränzt ist, auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\mathbf{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \overset{\shortparallel}{z})^2}.$$

Setzt man diesen Werth von **R** dem in 1) angegebenen gleich, und substituirt für x, y, z die vorhin gefundenen Ausdrücke, so erhält man eine Endgleichung in $\overset{\shortparallel}{z}$, woraus $\overset{\shortparallel}{z} = ap + bq \pm \sqrt{(q^2 + p^2 - \overset{\prime}{x}{}^2)\,(a^2 + b^2 + 1)}$; daher zwei Kugeln der verlangten Art möglich sind, für deren Radien nach Einführung des Werthes $\overset{\shortparallel}{z}$ in Gleichung 1) man erhält:

$$\mathbf{R} = \pm\sqrt{\overset{\prime}{x}{}^2 + \left[ap + bq \pm \sqrt{(q^2 + p^2 - \overset{\prime}{x}{}^2)\,(a^2 + b^2 + 1)}\right]^2}$$

Von den beiden Zeichen, welche vor dem ganzen Endausdrucke für **R** stehen, darf natürlich immer nur das Zeichen + beibehalten werden, weil jedesmal, wenn es sich von Entfernungen handelt, welche nicht parallel mit einer gewissen, fest bestimmten Richtung genommen werden, nur von den absoluten Werthen derselben die Rede sein kann.

Viertes Problem.

Mittelpunkt und Radius derjenigen Kugeln zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch zwei der Lage nach im Raume gegebene Punkte gehen, und zwei der Lage nach gegebene Ebenen berühren.

Auflösung. Eine der gegebenen Ebenen mache man zur Ebene der **YX** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Normale aus einem der gegebenen Punkte auf diese Ebene zur Axe der **Z**, und eine durch dieselbe und den zweiten gegebenen Punkt gelegte Ebene zur Ebene der **ZX**, so werden die Coordinaten des ersten Punktes $\overset{I}{x} = o$, $y = o$ und $\overset{I}{z}$, die des zweiten gegebenen Punktes $\overset{II}{y} = o$, ^{II} und $\overset{II}{z}$ sein, und wird die Gleichung der zweiten gegebenen Ebene die Form haben:

$$1)\ \mathbf{A}x+\mathbf{B}y+\mathbf{C}z+\mathbf{D}=o.$$

Um die Mittelpunkts-Coordinaten der verlangten Kugeln zu bestimmen, suche man erstens alle Punkte auf, welche von den beiden gegebenen Ebenen gleichweit entfernt sind. Bezeichnet man einen beliebigen dieser Punkte, welche von den beiden gegebenen Ebenen gleichweit entfernt sind, mit $\overset{I}{x}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{z}$, so ist $\overset{I}{z}$ gleich der senkrechten Entfernung des Punktes $\overset{I}{x}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{z}$ von der zweiten der Lage nach gegebenen Ebene. Die allgemeinen Gleichungen einer aus dem Punkte $\overset{I}{x}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{z}$, auf diese, der Lage nach gegebene, Ebene gefällten Senkrechten sind:

$$2)\ x-\overset{I}{x}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}\,(z-\overset{I}{z}) \text{ und } 3)\ y-\overset{I}{y}=\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}\,(z-\overset{I}{z}).$$

Die Coordinaten des Fußpunktes dieser Senkrechten in der gegebenen Ebene werden erhalten, wenn man die Veränderlichen x, y, z so betrachtet, als hätten sie in den Gleichungen 1) 2) und 3) dieselben Werthe.

Sind die Coordinatenwerthe x, y, z gefunden, so hat man dieselben nur in die bekannte Formel für die Entfernung zweier Punkte zu substituiren, um eine Endgleichung $\overset{I}{z}=\sqrt{(x-\overset{I}{x})^2+(y-\overset{I}{y})^2+(z-\overset{I}{z})^2}$ ohne andere Unbekannten als die beliebig angenommenen $\overset{I}{x}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{z}$ zu erhalten. Damit die Ausführung dieser Operationen aber leichter bewerkstelligt werde, gebe man der Gleichung 1) zuvor eine Gestalt, daß sie die Binomien $x-\overset{I}{x}$, $y-\overset{I}{y}$ und $z-\overset{I}{z}$ enthalte. Man schreibe deßhalb:

$4)\ \mathbf{A}\,(x-\overset{I}{x})+\mathbf{B}(y-\overset{I}{y})+\mathbf{C}(z-\overset{I}{z})+\overset{I}{\mathbf{D}}=o$, wo der Kürze wegen, $\overset{I}{\mathbf{D}}$ statt $\mathbf{A}\overset{I}{x}+\mathbf{B}\overset{I}{y}+\mathbf{C}\overset{I}{z}+\mathbf{D}$ gesetzt wird. Nun substituire man in 4) die aus 2) und 3) gezogenen Werthe von $x-\overset{I}{x}$ und $y-\overset{I}{y}$, so findet man $z-\overset{I}{z}=\dfrac{-\overset{I}{\mathrm{D}}\mathrm{C}}{\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2}$, $y-\overset{I}{y}=\dfrac{-\overset{I}{\mathrm{D}}\mathrm{B}}{\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2}$, $x-\overset{I}{x}=\dfrac{-\overset{I}{\mathrm{D}}\mathrm{A}}{\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2}$ und die Entfernung (5) $\overset{I}{z}=\dfrac{\mathbf{A}\overset{I}{x}+\mathbf{B}\overset{I}{y}+\mathbf{C}\overset{I}{z}+\mathbf{D}.}{+\sqrt{\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2.}}$ Da nun die in Gleichung (5) ausgedrückte Beziehung für den beliebigen Punkt $\overset{I}{x}$, $\overset{I}{y}$, $\overset{I}{z}$, welcher von den beiden gegebenen Ebenen gleichweit entfernt ist, Statt findet, so gilt dieselbe auch für alle Punkte dieser Art; daher der Ort für alle Punkte, welche von den zwei der Lage nach gegebenen Ebenen gleichweit entfernt sind, allgemein durch die beiden Gleichungen:

$\mathbf{I.}\ z = \frac{Ax+By+Cz+D}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ und $\mathbf{II.}\ z = \frac{Ax+Bx+Cz+D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ gegeben, die offenbar ein Paar aufeinander senkrecht stehende Ebenen vorstellen.

Sucht man nun zweitens den Ort für alle Punkte, welche von einem der beiden gegebenen Punkte, etwa dem Punkte $\overset{\mathrm{I}}{z}$, und der Ebene der **XY** gleichweit entfernt sind, so wird der Durchschnitt dieses Ortes mit den durch **I** und **II** dargestellten Ebenen alle Punkte enthalten, welche von den zwei gegebenen Ebenen und dem einen gegebenen Punkte gleiche Entfernung haben. Dieser Ort ist aber offenbar ein Paraboloid, dessen Erzeugungs-Parabel zur Abscissenaxe die Axe der **Z**, zur Directrix die Axe der **X**, zum Brennpunkte den Punkt $\overset{\mathrm{I}}{z}$, und zum Parameter die Linie $2\overset{\mathrm{I}}{z}$ hat, daher die Gleichung des Paraboloids die Form hat:

$$\mathbf{III.}\ x^2+y^2=2\overset{\mathrm{I}}{z}\left(z-\frac{\overset{\mathrm{I}}{z}}{2}\right).$$

Da für die Durchschnittslinie des Paraboloids mit den durch **I** und **II** dargestellten Ebenen die veränderlichen Größen in diesen Gleichungen denselben Werth haben, so erhält man nach Ausscheidung von y aus **I** und **III**, sowie aus **II** und **III**, wenn man der Kürze wegen $\pm\sqrt{A^2+B^2+C} = \pm M$ setzt, für die beiden Durchschnitte folgende Gleichungen:

$$\mathbf{IV.}\ x^2+\frac{[(M-C)z-Ax-D]^2}{B^2}=2\overset{\mathrm{I}}{z}z-\overset{\mathrm{I}}{z} \text{ und } \mathbf{V.}\ x^2=\frac{[(-M-C)z-Ax-D]^2}{B^2}=2\overset{\mathrm{I}}{z}z-\overset{\mathrm{I}}{z}{}^2.$$

Sucht man drittens alle Punkte, welche von den zwei der Lage nach im Raume gegebenen Punkten gleiche Entfernung haben, so wird man eine Ebene erhalten, welche durch die Gleichung **VI** $\frac{\overset{\mathrm{II}}{x}{}^2}{2}-\overset{\mathrm{II}}{x}x+(\overset{\mathrm{I}}{z}-\overset{\mathrm{II}}{z})\left(z-\frac{\overset{\mathrm{I}}{z}+\overset{\mathrm{II}}{z}}{2}\right)=0$ dargestellt wird,*) und man findet endlich die Mit-

*) Die Richtigkeit der in **VI** aufgestellten Gleichung erhellt, wenn man erwägt, daß die Gleichung dieser Ebene identisch sein muß mit der Gleichung einer in der Ebene der **XZ** liegenden Linie, welche im Mittelpunkte auf der von $\overset{\mathrm{I}}{x}$.. nach $\overset{\mathrm{II}}{x}$.. gezogenen Linie senkrecht steht. Zieht man nämlich zur Darstellung einer senkrechten Ebene durch die verschiedenen Punkte jener senkrechten Linie Parallelen mit der Axe der **OY**, so erhält man eine Ebene, in welcher jeder Punkt **A** derselben, was auch **y** sein mag, stets dasselbe **x** und **z** hat wie seine Projection. Folglich genügen die Coordinaten aller Punkte dieser Ebene der Liniengleichung, welche die Veränderlichen **y** nicht enthält, während jeder außerhalb dieser Ebene genommene Punkt, dessen Projection also nicht in die Gerade fallen kann, durch seine Coordinaten der Liniengleichung nicht genügen wird. Ist nun die Gleichung der von $\overset{\mathrm{I}}{x}$ nach $\overset{\mathrm{II}}{x}$ führenden Linie 1) $x=az+p$, und die Gleichung der Senkrechten 2) $x=\overset{\mathrm{I}}{a}z+\overset{\mathrm{I}}{p}$, so folgt, weil die Werthe von $\overset{\mathrm{I}}{x}$.. und $\overset{\mathrm{II}}{x}$.. der Gleichung 1) genügen, $a=\frac{\overset{\mathrm{II}}{x}}{\overset{\mathrm{II}}{z}-\overset{\mathrm{I}}{z}}$, $p=\frac{\overset{\mathrm{I}}{z}\overset{\mathrm{II}}{x}}{\overset{\mathrm{I}}{z}-\overset{\mathrm{II}}{z}}$, und weil $\overset{\mathrm{I}}{a}=-\frac{1}{a}$, $\overset{\mathrm{I}}{a}=\frac{\overset{\mathrm{I}}{z}-\overset{\mathrm{II}}{z}}{\overset{\mathrm{II}}{x}}$. Den Werth von $\overset{\mathrm{I}}{p}$ findet man durch Einführung der Mittelpunkts-Coordinaten $x=\frac{\overset{\mathrm{II}}{x}}{2}$ und $z=\frac{\overset{\mathrm{I}}{z}+\overset{\mathrm{II}}{z}}{2}$ der durch 1) dargestellten Linie in Gleichung 2), wodurch sich ergibt $\overset{\mathrm{I}}{p}=\frac{\overset{\mathrm{II}}{x}{}^2-\overset{\mathrm{I}}{z}{}^2+\overset{\mathrm{II}}{z}{}^2}{2\overset{\mathrm{II}}{x}}$. Setzt man nun die Werthe von $\overset{\mathrm{I}}{a}$ und $\overset{\mathrm{I}}{p}$ in 2) so erhält man die angezogene Gleichung **VI**.

telpunkts-Coordinaten der verlangten Kugeln, wenn man die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit den durch die Gleichungen **IV** und **V** dargestellten Curven aufsucht. Da für diese Durchschnittspunkte die Veränderlichen x und z in **IV** und **VI** desgleichen in **V** und **VI** denselben Werth haben, so erhält man durch Einführung des Werthes von z aus **VI** in die quadratischen Gleichungen **IV** und **V** aus jeder derselben zwei Werthe von x; daher vier Kugeln möglich sind. Die verschiedenen Werthe der Mittelpunkts-Coordinate z dieser vier Kugeln erhält man durch Einführung der verschiedenen Werthe von x in Gleichung **VI**, und die von y durch Einführung der gefundenen Coordinatenwerthe in eine beliebige der Gleichungen **I**, **II** oder **III**. Die beiden nach der bezeichneten Rechnungsweise sich ergebenden quadratischen Endgleichungen zur Bestimmung der vier verschiedenen Werthe von x, in eine Gleichung zusammengefaßt, lassen sich darstellen unter der Form:

$$x^2+\frac{\left[(\pm M-C)\dfrac{2x\overset{\prime\prime}{x}-\overset{\prime\prime}{x}^2+\overset{\prime}{z}^2-\overset{\prime\prime}{z}^2}{2(\overset{\prime}{z}-\overset{\prime\prime}{z})}-Ax-D\right]^2}{B^2}=\frac{2x\overset{\prime\prime}{x}-\overset{\prime\prime}{x}^2-\overset{\prime\prime}{z}^2+\overset{\prime}{z}\overset{\prime\prime}{z}}{\overset{\prime}{z}-\overset{\prime\prime}{z}}\overset{\prime}{z}$$

Fünftes Problem.

Die Mittelpunkte aller Kugeln zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch zwei der Lage nach gegebene Punkte gehen, eine der Lage nach im Raume gegebene Linie und eine gegebene Ebene berühren.

Auflösung. Man mache die der Lage nach im Raume gegebene Linie zur Axe der **X**, und eine aus dem gegebenen Punkte $\overset{\prime}{x}, \overset{\prime}{y}, \overset{\prime}{z}$ auf die Axe der **X** gezogene Senkrechte zur Axe der **Z** eines rechtwinklichen Coordinatensystems. Bezeichnet man nun die Mittelpunkts-Coordinaten der verlangten Kugeln mit x, y, z, so hat man wegen der gleichen Entfernung der Mittelpunkte von den beiden gegebenen Punkten

$$(1)\quad x^2+y^2+(\overset{\prime}{z}-z)^2=(\overset{\prime\prime}{x}-x)^2+(\overset{\prime\prime}{y}-y)^2=(\overset{\prime\prime}{z}-z)^2,$$

wegen der gleichen Entfernung von dem einen der gegebenen Punkte und der Axe der **X**

$$(2)\quad x^2+y^2+(\overset{\prime}{z}-z)^2=y^2+z^2,$$

und wegen der gleichen Entfernung derselben von der Axe der **X** und der gegebenen Ebene

$$(3)\quad y^2+z^2=\frac{[Ax+Bz+Cz+D]^2}{A^2+B^2+C^2},$$

indem aus der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ersichtlich, daß das Quadrat der kürzesten Entfernung eines Punktes x, y, z von einer Ebene, deren Gleichung die Form $Ax+By+Cz+D=0$ hat, durch den Ausdruck $\dfrac{[Ax+By+Cz+D]^2}{A^2+B^2+C^2}$ bestimmt ist.

Aus diesen drei hier aufgestellten Gleichungen erhält man, weil die beiden letzten vom zweiten und nur Gleichung (1) vom ersten Grade ist, vier verschiedene Werthe für die Mittelpunkts-Coordinaten, daher vier verschiedene Kugeln möglich sind.

Sechstes Problem.

Die Mittelpunkte aller Kugeln zu bestimmen, welche mit ihrer Oberfläche durch zwei der Lage nach gegebene Punkte gehen, und zwei der Lage nach im Raume gegebene Linien berühren.

Auflösung. Man mache die eine der gegebenen Linien zur Axe der **X**, und eine aus dem gegebenen Punkte x', y', z' auf diese Axe errichtete Senkrechte zur Axe der **Z** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so lassen sich zur Berechnung der Mittelpunkts-Coordinaten x, y, z der verlangten Kugeln wegen der gleichen Entfernung der Mittelpunkte von den beiden gegebenen Punkten, so wie von dem einen der gegebenen Punkte und der Axe der **X** ganz genau die in der Auflösung des vorhergehenden Problems unter (1) und (2) angeführten Gleichungen aufstellen. Es bleibt nun noch eine dritte Gleichung zwischen denselben unbekannten x, y, z aufzustellen übrig. Eine solche wird erhalten, wenn man die kürzeste Entfernung des verlangten Mittelpunktes x, y, z von der zweiten gegebenen Linie gleichsetzt der Entfernung desselben von der Axe der **X**. Um aber die kürzeste Entfernung **R** eines beliebigen Punktes x''', y''', z''' von der zweiten durch die Gleichungen **I)** $x=az+p$ und **II)** $y=bz+q$ gegebenen Geraden zu finden, könnte man durch den Punkt x'''.. senkrecht auf die Gerade, eine Ebene legen, deren Gleichung sein würde: **III)** $a(x-x''') + b(y-y''') + z-z'''=0$,
und wenn man die Gleichungen **I, II, III** combinirte, so erhielte man aus denselben die Werthe der Coordinaten x, y, z des Punktes, in welchem die Ebene von der Geraden geschnitten wird. Nun würde aber offenbar die Linie, welche diesen letzten Punkt mit dem, dessen Coordinaten x''', y''', z''' sind, verbindet, die gesuchte kürzeste Entfernung sein. Substituirte man daher die für x, y, z aus **I, II** und **III** gefundenen Werthe in die allgemeine Formel $\mathbf{R}^2=(x-x''')^2+(y-y''')+(z-z''')^2$; so erhielte man diese Entfernung, welche nach verschiedenen Reductionen sich ganz allgemein in folgender Gestalt darstellen würde:

$$\mathbf{R}^2=(x'''-p)^2+(y'''-q)^2+z'''^2-\frac{[a(x'''-p)+b(y'''-q)+z''']^2}{a^2+b^2+1}.$$

Nimmt man nun statt des beliebigen Punktes x''', y''', z''' den verlangten Kugel-Mittelpunkt x, y, z, so erhält man wegen der gleichen Entfernung desselben von der Axe der **X** und der zweiten gegebenen Linie die gesuchte dritte Gleichung:

*

$$(3)\quad y^2+x^2=(x-p)^2+(y-q)^2z^2-\frac{[a(x-p)+b(y-q)+z]^2.}{a^2+b^2+1}$$

Die zur Bestimmung der Mittelpunkts-Coordinaten hier aufgestellten Gleichungen (1), (2) und (3) berechtigen aus denselben Gründen, welche in der Auflösung des vorhergehenden Problems angeführt worden, zu der Annahme, daß vier Kugeln der verlangten Art möglich sind.

Siebentes Problem.

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln zu bestimmen, welche drei der Lage nach im Raume gegebene Ebenen berühren, und mit ihrer Oberfläche durch einen der Lage nach gegebenen Punkt gehen.

Auflösung. Eine der gegebenen Ebenen nehme man zur Ebene der **YZ** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Durchschnittslinie derselben mit der zweiten gegebenen Ebene zur Axe der **Z**, und zur Ebene der **XY** eine durch den gegebenen Punkt auf die Axe der **Z** senkrecht errichtete Ebene. Bezeichnet man die Mittelpunkts-Coordinaten der verlangten Kugeln mit x, y, z, so hat man wegen der gleichen Entfernung der Mittelpunkte von der Ebene der **YZ** und dem gegebenen Punkte x', y' 1) $x^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2$, wegen der gleichen Entfernung von den beiden gegebenen, in der Axe der **Z** sich schneidenden, Ebenen

$$2)\quad x=\frac{A'x+B'y}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

und wegen der gleichen Entfernung von der Ebene der **YZ** und der dritten gegebene Ebene

$$3)\quad x=\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

indem die Gleichungen der beiden gegebenen, nicht mit der Ebene **YZ** zusammenfallenden, Ebenen sich offenbar unter der Form: $A'x+B'y=0$ und $Ax+By+Cz+D=9$ darstellen lassen. Setzt man zur Abkürzung M'^2 für $A'^2+B'^2$, M^2 für $A^2+B^2+C^2$, und substituirt den für x aus Gleichung 2) gefundenen Werth in die Gleichungen 1) und 3), so erhält man nach gehöriger Vereinfachung:

$$\text{I.}\quad \left(\frac{B'x'}{\pm M'-A'}+y\right)2y-y^2=x'^2+y'^2+z^2$$

$$\text{II.}\quad 0=\frac{B'(A\mp M)-B(A'\mp M')}{\pm M'-A'}y+Cz+D.$$

Führt man hierauf den aus **II.** für y leicht zu bestimmenden Werth in Gleichung **I.** ein, so erhält man eine quadratische Endgleichung in z; daher man abgesehen von den verschiedenen Zeichen, welche in den Gleichungen **I.** und **II.** vor den Größen M und $\overset{1}{M}$ stehen, zwei verschiedene Werthe für z findet. Weil aber in den Gleichungen **I** und **II** jedes der beiden Verbindungszeichen vor einer der Größen M oder $\overset{1}{M}$ mit jedem Verbindungszeichen vor der andern Größe vorkommen kann, so wird jeder der beiden aus der Endgleichung für z gefundenen Werthe in vier verschiedene Werthe sich verwandeln, im Ganzen es somit acht verschiedene Werthe für z, also auch acht verschiedene Mittelpunkte der gesuchten Kugeln geben können.

Achtes Problem.

Die Mittelpunkte derjenigen Kugeln zu bestimmen, welche zwei der Lage nach im Raume gegebene Ebenen, sowie eine der Lage nach gegebene gerade Linie berühren, und mit ihrer Oberfläche durch einen im Raume gegebenen Punkt gehen.

Auflösung. Die Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen mache man zur Axe der **Z** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die beiden Ebenen, welche die Flächenwinkel der gegebenen Ebenen halbiren, zu Ebenen der **XZ** und **YZ**, und führe die Ebene der **XY** durch den gegebenen Punkt; so werden die Mittelpunkte einiger Kugeln in der Ebene der **ZX** und die Mittelpunkte anderer Kugeln in der Ebene der **ZY** liegen.

Die Gleichungen der gegebenen Ebenen werden, weil sie beide durch die Axe der **Z** gehen, sich unter den einfachen Formen:

$$Ax+By=0 \text{ und } \overset{1}{A}x+\overset{1}{B}y=0$$

darstellen lassen; dagegen die Gleichungen der gegebenen Geraden die allgemeine Form:

$$x=az+p \text{ und } y=bz+q \text{ beibehalten.}$$

Bezeichnet man nun die Mittelpunkts-Coordinaten derjenigen Kugeln, welche in der Ebene **ZX** liegen mit x, z, die Mittelpunkts-Coordinaten derjenigen Kugeln aber, welche in der Ebene der **ZY** liegen mit y, z; so folgt wegen der gleichen Entfernung derjenigen Mittelpunkte, deren Coordinaten x, z sind, von dem gegebenen Punkte $\overset{1}{x}$, $\overset{1}{y}$ und der gegebenen Geraden

$$1)\ (x-\overset{1}{x})^2+\overset{1}{y}^2+z^2=(x-p)^2+q^2+z^2-\frac{[a(x-p)-bq+z]^2}{a^2+b^2+1},$$

und weil dieselben Mittelpuukte auch von dem gegebenen Punkte und einer der gegebenen Ebenen gleiche Entfernung haben

$$2)\ (x-\overset{1}{x})^2+\overset{1}{y}^2+z^2=\frac{A^2x^2}{A^2+B^2}$$

Mithin hat man zwei Gleichungen vom zweiten Grade zur Bestimmnng der Mittelpunkts-Coordinaten z und z, daher vier verschiedene Kugeln möglich sind, deren Mittelpunkte in der Ebene der **ZX** liegen. Für die Mittelpunkts-Coordinaten y, z derjenigen Kugel, deren Mittelpunkle in der Ebene der **YZ** liegen, folgt wegen der gleichen Entfernung dieser Mittelpunkte von dem gegebenen Punkte und der gegebenen Geraden

$$\text{I.}\quad \overset{1}{x}^2+(y-\overset{1}{y})^2+z^2=p^2+(y-q)^2+z-\frac{[b(y-q)+z-ap]^2}{a^2+b^2+1},$$

und wegen der gleichen Entfernung von dem gegebenen Punkte und einer der gegebenen Ebenen

$$\text{II.}\quad \overset{1}{x}^2+(y-\overset{1}{y})^2+z^2=\frac{B^2\,y^2}{A^2+B^2}$$

Es gibt mithin auch vier mögliche Kugeln, deren Mittelpunkte in der Ebene der **YZ** liegen; daher im Ganzen acht verschiedene Kugeln möglich sind, deren Mittelpunkts-Coordinaten sich aus den vorstehenden Gleichungen leicht bestimmen lassen.

Neuntes Problem.

Die Mittelpunkte derjenigen Kugeln zu bestimmen, welche zwei der Lage nach im Raume gegebene Linien, sowie eine der Lage nach im Raume gegebene Ebene berühren, und mit ihren Oberflächen durch einen im Raume gegebenen Punkt gehen.

Auflösung. Die gegebene Ebene mache man zur Ebene der **XY** eines rechtwinkligen Coordinatensystems, den Durchschnittspunkt derselben mit der einen der gegebenen Linien zum Anfangspunkte der Coordinaten, und eine durch diese Linie gelegte, auf die Ebene der **XY** senkrecht errichtete, Ebene zur Ebene der **ZX**; so wird die eine gegebene, in der Ebene der **ZX** liegende, Linie durch die Gleichung

$x=\overset{1}{a}z$, dagegen die andere gegebene Linie durch die beiden Gleichungen
$x=az+p$ und $y=bz+q$ bestimmt sein.

Bezeichnet man nun die Mittelpunkts-Coordinaten mit x, y, z, so hat man wegen der gleichen Entfernung der Mittelpunkte von dem gegebenen Punkte der $\overset{1}{x}$, $\overset{1}{y}$, $\overset{1}{z}$ und der Ebene der **XY**

$$1)\quad z^2=(x-\overset{1}{x})^2+(y-\overset{1}{y})^2+(z-\overset{1}{z})^2,$$

wegen der gleichen Entfernung von der Ebene **XY** und der einen gegebenen Linie

$$2)\quad zx^2={}^2+y^2+z^2-\frac{(\overset{1}{a}x+z)^2}{\overset{1}{a}^2+1},$$

und wegen der gleichen Entfernung von den beiden gegebenen Linien

$$3)\quad x^2+y^2+z^2-\frac{(\overset{1}{a}x+z)^2}{\overset{1}{a}^2+1}=(x-p)^2+(y-q)^2+z^2-\frac{[a(x-p)+b(y-q)+z]^2}{a^2+b^2+1}$$

Es sind mithin acht verschiedene Kugeln möglich, deren Mittelpunkts-Coordinaten sich aus den vorstehenden Gleichungen 1), 2), 3) leicht bestimmen lassen.