# Verschiedenartige allgemeine Auflösungen einiger Berührungsaufgaben und Anwendung derselben zur Ableitung einiger Sätze über die Durchschnittspunkte zweier oder mehrerer sich schneidenden Parabeln.

**Aufgabe.** Die Mittelpunkte derjenigen Kreise zu bestimmen, welche eine der Lage nach gegebene gerade Linie ab berühren, und durch zwei der Lage nach gegebene Punkte c und k gehen, welche Lage auch immer die gegebenen Stücke zu einander haben.

**1. Auflösung.** Die Mittelpunkte der verlangten Kreise befinden sich in gleicher Entfernung von dem Punkte c und dem Punkte k, desgleichen von dem Punkte k und der Linie ab; dieselben sind daher Durchschnittspunkte einer im Mittelpunkte auf der von c nach k gezogenen Linie senkrecht stehenden Geraden mit einer Parabel, deren Brennpunkt k und deren Leitlinie ab ist. — Man bezeichne die aus den Punkten c und k auf ab gefällten Perpendikel mit $\frac{p}{2}$ u. $\frac{\mathfrak{p}}{2}$, und die Entfernung der Fußpunkte derselben mit m. Die Gleichungen der auf der Linie c k Senkrechten und der Parabel beziehe man auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Abscissenaxe die von dem Punkte k auf die Linie ab gefällte Senkrechte und dessen Ordinatenaxe die Linie ab ist. Man wähle zum positiven Theile der Abscissenaxe denjenigen Theil derselben, welcher mit dem Punkte k auf gleicher Seite der Linie ab sich befindet. Positiver Theil der Ordinatenaxe werde der mit dem Punkte c auf gleicher Seite der Abscissenaxe liegende Theil der Linie ab.

Nach diesen Angaben erhält man für die Gleichung der Parabel:

$$\text{I}\quad y^2=\mathfrak{p}\left(x-\frac{\mathfrak{p}}{4}\right).$$

Bezeichnet man die Gleichung der von c nach k gezogenen geraden Linie durch $y=a'x+b'$, so ist klar, da diese gerade Linie durch zwei bestimmte Punkte c und k geht, daß die Gleichung derselben durch $y=\frac{y''-y'}{x''-x'}x+\frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}$ sich darstellen läßt, so daß die Constante $a'=\frac{y''-y'}{x''-x'}$, und $b'=\frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}$ ist. Da ferner die Coordinaten von c $y=m$ und $x''=\frac{p}{2}$, die von k $y'=o$ und $x'=\frac{\mathfrak{p}}{2}$ sind, so erhält man nach Einführung dieser besondern Werthe: $y=\frac{2m}{p-\mathfrak{p}}x+\frac{m}{\mathfrak{p}-p}$, als Gleichung für die von c nach k führende Linie. Die Gleichung jeder durch den Mittelpunkt dieser Linie gehenden Geraden ist, weil die Coordinaten dieses Punktes $y'''=\frac{m}{2}$ und $x'''=\frac{p+\mathfrak{p}}{4}$ sind, $y-\frac{m}{2}=a\left(x-\frac{p+\mathfrak{p}}{4}\right)$. Für eine solche unter diesen Linien, welche auf der Linie c k senkrecht steht, findet außerdem die bei rechtwinklichen Coordinaten für senkrechte Linien geltende Bedingungsgleichung $1+aa'=o$ Anwendung, woraus man nach Einführung des Werthes von $a'=\frac{2m}{p-\mathfrak{p}}$ erhält: $a=\frac{p-\mathfrak{p}}{2m}$, daher die Gleichung der senkrechten Linie:

$y-\frac{m}{2}=\frac{\mathfrak{p}-p}{2m}\left(x-\frac{p+\mathfrak{p}}{4}\right)$; oder auch

$$\text{II } y=\frac{\mathfrak{p}-p}{2m}x-\frac{\mathfrak{p}^2-p^2-4m^2}{8m}.$$

Verbindet man die Gleichungen I und II zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der durch diese Gleichungen vorgestellten Linien, so erhält man:

$$y=\frac{\mathfrak{p}m\pm\sqrt{\mathfrak{p}p\left[\left(\frac{\mathfrak{p}-p}{2}\right)^2+m^2\right]}}{\mathfrak{p}-p}\text{ und } x=\frac{\overline{\mathfrak{p}m\pm\sqrt{\mathfrak{p}p\left[\left(\frac{\mathfrak{p}-p}{2}\right)^2+m^2\right]}}^{\,2}}{\mathfrak{p}(\mathfrak{p}-p)^2}+\frac{\mathfrak{p}}{4}.$$

Die aufgestellten Gleichungen I und II, so wie die gefundenen Werthe für y und x bleiben bei allen Lagen der gegebenen Stücke dieselben, nur hat man das Vorzeichen von p zu ändern, wenn der Punkt c auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegen sollte. Auch kann die Form der Gleichung I beibehalten werden, selbst in dem Falle, daß der Punkt k in der Linie ab sich befinde, indem in diesem Falle die statt der Parabel auftretende senkrechte Linie als eine Parabel betrachtet werden kann, deren Brennpunkt in der Leitlinie liegt und deren Parameter $\mathfrak{p}=o$ ist. Es ist daher klar, daß es im Allgemeinen zwei Kreise gibt, welche die verlangten Eigenschaften haben; in welchen Fällen aber zwei Kreise, ein oder gar kein Kreis möglich sind, und welche besonderen Werthe die Mittelpunkts-Coordinaten derselben bei den verschiedenen Lagen der gegebenen Stücke zu einander haben, soll in dem Folgenden entwickelt werden*).

Zunächst ist klar, daß kein berührender Kreis vorkommen kann, wenn die beiden Punkte c und k sich auf entgegengesetzten Seiten der Linie ab befinden, indem in diesem Falle p negativ genommen werden muß, wodurch die Wurzelwerthe von y, x imaginär werden; es bleiben daher nur noch die Fälle zu erledigen, in welchen die Punkte c und k auf einerlei Seite oder in der Linie ab sich befinden.

A. Der Punkt c liege auf der positiven Seite der Abscissenaxe, also der Punkt k in der Linie ab, oder doch mit c auf derselben Seite der Linie ab.

Liegt der Punkt k außerhalb der Linie ab, so können die beiden Punkte c und k bei irgend einem beliebigen Abstande der Fußpunkte der aus ihnen auf ab gezogenen Perpendikel eine verschiedene oder eine gleiche Entfernung von der Linie ab haben. Im ersten Falle wird es immer zwei mögliche Kreise geben mit den aus den allgemeinen Gleichungen entwickelten Coordinatenwerthen. Im zweiten Falle erscheinen die Werthe von y, x wegen $p=\mathfrak{p}$ unter der Form $\frac{o}{o}$, für deren wahren Werth man nach einmaliger Differentiirung $y=\frac{m}{2}$ und $x=\frac{m^2}{4\mathfrak{p}}+\frac{\mathfrak{p}}{4}$ erhält; daher nur ein berührender Kreis möglich ist. Fallen die Fußpunkte der aus c und k auf ab gefällten Perpendikel zusammen, so erhält man wegen $m=o$ bei verschiedener Entfernung der Punkte c und k von der Linie ab zwei gleiche Kreise mit den Mittelpunkts-Coordinaten $y=\pm\sqrt{\frac{\mathfrak{p}p}{4}}$ und $x=\frac{p+\mathfrak{p}}{4}$.

---

*) Daß in allen möglichen Fällen der Aufgabe die Radien der gesuchten Kreise den absoluten Werthen von x gleich sind, erhellt aus der Lage der Coordinatenaxen zu den gegebenen Stücken.

Liegt der Punkt k in der Linie ab, also $\mathfrak{p}=o$, so kann der Fußpunkt des aus c auf ab gefällten Perpendikels eine beliebige Entfernung m vom Punkte k haben, oder dieselben können zusammenfallen. Im ersten Falle erhält man einen berührenden Kreis mit den Mittelpunkts-Coordinaten $y=o$ und $x=\frac{m^2}{p}+\frac{p}{4}$; im zweiten Falle werden wegen gleichzeitigen Verschwindens von m die Coordinaten des einen möglichen Kreises $y=o$ und $x=\frac{p}{4}$ sein.

B. Der Punkt c liege in der Ordinatenaxe ab, also $p=o$.

Befindet sich der Punkt k außerhalb der Linie ab, so daß der Fußpunkt des aus k auf ab gefällten Perpendikels nicht mit c zusammenfällt, so erhält man nach den allgemeinen Formeln einen möglichen Kreis mit den Mittelpunkts-Coordinaten $y=m$ und $x=\frac{m^2}{\mathfrak{p}}+\frac{\mathfrak{p}}{4}$; fällt aber jener Fußpunkt mit dem Punkte c zusammen, so erhält man für die Mittelpunkts-Coordinaten des einzig möglichen Kreises $y=o$ und $x=\frac{\mathfrak{p}}{4}$.

Befindet sich der Punkt k ebenfalls in der Linie ab, jedoch in einer Entfernung m von dem Punkte c, so ist kein berührender Kreis möglich, indem die allgemeinen Formeln die Werthe $y=\frac{m}{2}$ und $x=\infty$ geben.

**2. Auflösung.** Die Mittelpunkte der verlangten Kreise befinden sich in gleicher Entfernung von dem Punkte c und der Linie ab, desgleichen von dem Punkte k und der Linie ab; dieselben sind daher durch die Durchschnittspunkte zweier Parabeln bestimmt. Der Brennpunkt der ersten Parabel ist der Punkt c, die Leitlinie derselben die Linie ab, der Brennpunkt der zweiten Parabel der Punkt k und die Leitlinie derselben die Linie ab. Bezeichnet man nun die Entfernungen der Punkte c und k von der Linie ab, so wie den Abstand der Fußpunkte dieser Entfernungen wieder mit $\frac{p}{2}$, $\frac{\mathfrak{p}}{2}$ und m, und bezieht man die Gleichungen der beiden Parabeln auf das in der vorhergehenden Auflösung angedeutete rechtwinkliche Coordinatensystem, so erhält man für die Gleichungen der beiden Parabeln:

$$1)\ (y-m)^2=p\left(x-\frac{p}{4}\right),$$

$$2)\ y^2=\mathfrak{p}\left(x-\frac{\mathfrak{p}}{4}\right).$$

Diese Gleichungen bleiben wieder bei allen möglichen Lagen der gegebenen Stücke zu einander dieselben, nur daß man das Vorzeichen von p zu ändern hat, wenn der Punkt c auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegen sollte. Verbindet man nun auch diese beiden Gleichungen zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der durch diese Gleichungen vorgestellten Parabeln, so erhält man:

$$y=\frac{\mathfrak{p}m\pm\sqrt{p\mathfrak{p}\left[\left(\frac{\mathfrak{p}-p}{2}\right)^2+m^2\right]}}{\mathfrak{p}-p}\ \text{und}\ x=\frac{\left(\mathfrak{p}m\pm\sqrt{\mathfrak{p}p\left[\left(\frac{\mathfrak{p}-p}{2}\right)^2+m^2)\right]}\right)^2}{\mathfrak{p}(\mathfrak{p}-p)^2}+\frac{\mathfrak{p}}{4},$$

also genau dieselben Ausdrücke für die Mittelpunkts-Coordinaten der verlangten Kreise, wie die in der vorhergehenden Auflösung gefundenen.

Vergleicht man nun die beiden vorstehenden Auflösungen mit einander, so ergibt sich leicht folgender Satz:

Die Durchschnittspunkte zweier zu derselben Directrix gehörenden und auf einerlei Seite derselben liegenden Parabeln befinden sich immer auf einer geraden Linie, welche im Mittelpunkte auf der die Brennpunkte der beiden Parabeln verbindenden Geraden senkrecht steht.

Berücksichtigt man ferner bei Vergleichung der vorstehenden Auflösungen Größe und Vorzeichen des Werthes von y in den verschiedenen besondern Fällen, so erhellt über die Zahl und Art der Durchschnittspunkte jener Parabeln nach Folgendes:

Sind die Parameter der Parabeln von verschiedener Größe, und haben die Hauptaxen der beiden Parabeln irgend eine bestimmte Entfernung von einander, so werden beide Zweige der Parabel mit kleinerm Parameter von dem einen zugewandten Zweige der andern Parabel durchschnitten. Fallen aber bei verschiedenen Parametern die Hauptaxen der Parabeln zusammen, so schneidet ein jeder Zweig der einen Parabel den auf derselben Seite liegenden Zweig der andern Parabel. Sind endlich die Parameter beider Parabeln gleich, und haben die Hauptaxen der beiden Parabeln irgend eine bestimmte Entfernung von einander, so schneiden sich nur die zugewandten Zweige der Parabeln in einem Punkte.

---

**Aufgabe.** Die Mittelpunkte sämmtlicher Kreise zu bestimmen, welche zwei der Lage nach gegebene sich schneidende gerade Linien a c und b c berühren, und durch einen gegebenen Punkt k gehen, welche Lage auch immer die gegebenen Stücke zu einander haben.

**1. Auflösung.** Die Mittelpunkte der verlangten Kreise befinden sich in gleicher Entfernung von den beiden gegebenen Linien, desgleichen von dem gegebenen Punkte k und der dem Punkte k zunächst liegenden gegebenen Geraden; daher sind dieselben durch die Durchschnittspunkte einer Parabel mit zwei geraden Linien, von welchen die eine den Winkel a c b, die andere den Nebenwinkel des Winkels a c b halbirt, gegeben. Das Perpendikel, welches von dem Punkte k auf die demselben zunächst liegende Linie b c gefällt wird, mache man zur Abscissenaxe eines rechtwinklichen Coordinatensystems, so daß der positive Theil der Abscissenaxe auf der dem Punkte k zugekehrten Seite der Linie b c genommen wird. Die Linie bc mache man zur Ordinatenaxe und ihr positiver Theil werde auf der von dem Scheitelpunkte der beiden gegebenen Linien abgewandten Seite der Abscissenaxe genommen. Bezeichnet man ferner die Entfernung der Abscissenaxe von dem Scheitelpunkte c der beiden gegebenen geraden Linien mit m, die Entfernung des Punktes k von der Linie b c mit $\frac{p}{2}$, den Winkel der gegebenen geraden Linien, in welchen sich der Punkt k befindet mit $2\alpha$, und den Nebenwinkel desselben mit $2R-2\alpha$, so erhält man für die Gleichung der Parabel:

$$1)\ y^2 = p\left(x - \frac{p}{4}\right).$$

Die Gleichung der den Winkel $2\alpha$ halbirenden Geraden ist, da diese Linie mit der Abscissenaxe einen Winkel $R-\alpha$ bildet und durch einen festen Punkt c geht, dessen Coordinaten $y' = -m$ und $x' = o$ sind,

$$2)\ y = x.\ \cot\alpha - m,$$

wie aus der allgemeinen Form $y - y' = (x - x')a$ hervorgeht, wenn man die angeführten Werthe in dieselben aufnimmt. Die Gleichung der den Winkel $2R-2\alpha$ halbirenden Geraden ist, da diese Linie ebenfalls durch den festen Punkt c geht, zunächst unter der Form $(y - y') = a'(x - x')$ darzustellen. Da ferner diese Linie auch auf der den Winkel $2\alpha$ halbirenden Geraden senkrecht steht, und somit die bei rechtwinklichen Coordinaten für senkrechte Linien geltende Bedingungsgleichung $1+aa'=o$ Anwendung findet, also $a'=-\frac{1}{\cot\alpha}$, oder $a'=-\operatorname{tang}\alpha$ ist, so wird die Gleichung derselben nach Einführung dieser besondern Werthe:

$$3)\quad y=-x\operatorname{tang}\alpha-m\,^{*)}$$

Verbindet man nun die erste Gleichung mit der zweiten zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der den Winkel $2\alpha$ halbirenden geraden Linie mit der durch Gleichung 1) vorgestellten Parabel, so erhält man:

$$x=\frac{p+2m\cot\alpha\pm\sqrt{p[p+\cot\alpha(4m-p\cot\alpha)]}}{2\cot^2\alpha}\text{ und } y=\frac{p\pm\sqrt{p[p+\cot\alpha(4m-p\cot\alpha)]}}{2\cot\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der den Winkel $2R-2\alpha$ halbirenden geraden Linie verwandle man in den für x und y gefundenen Werthen $\cot\alpha$ in $-\operatorname{tang}\alpha$; daher sind die Coordinaten derselben:

$$x'=\frac{p-2m\operatorname{tang}\alpha\pm\sqrt{p[p-\operatorname{tang}\alpha(4m+p\operatorname{tang}\alpha)]}}{2\operatorname{tang}^2\alpha}\text{ und } y'=\frac{p\pm\sqrt{p[p-\operatorname{tang}\alpha(4m+p\operatorname{tang}\alpha)]}}{-2\operatorname{tang}\alpha}$$

Aus diesen Resultaten scheint hervorzugehen, daß man im Allgemeinen vier berührende Kreise erhalten könne. Bei näherer Beachtung derselben erhellt jedoch, daß es nie mehr als zwei geben kann, indem der Punkt k immer in dem Winkel $2\alpha$ oder in der Linie bc sich befinden muß, somit $\frac{p}{2}$ eine positive Größe oder Null ist, und daher im ersten Falle die Werthe von $y', x'$, weil schon $m\operatorname{tang}\alpha$ immer größer als $\frac{p}{2}$ und um so mehr $\operatorname{tang}\alpha(4m+p\operatorname{tang}\alpha)$ größer als p ist, unmögliche Wurzeln enthalten, im zweiten Falle aber sowohl in $y, x$ als in $y', x'$ die Wurzelwerthe verschwinden. Es gibt also nie mehr als zwei berührende Kreise, deren Mittelpunkte, wenn p irgend eine positive Größe ist, in dem Winkel $2\alpha$ liegen, oder von denen der eine in dem Winkel $2\alpha$, der andere in dem Nebenwinkel liegt, wenn $p=o$ ist. Auch gibt es nie weniger als zwei berührende Kreise, wenn nicht grade der Punkt k mit dem Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Geraden zusammenfällt, indem $4m$ immer größer als $p.\cot\alpha$ ist, und somit die in $x, y$ enthaltenen Wurzelwerthe immer mögliche Größen sind. Die allgemeinen für die Mittelpunkts-Coordinaten der verlangten Kreise gefundenen Resultate erlangen eine mehr oder weniger einfache Form, wenn der Punkt k in der den Winkel $2\alpha$ halbirenden Linie oder in der Linie bc vorkommend angenommen wird, oder wenn der Winkel $\alpha$ von der Art ist, daß seine goniometrischen Funktionen einfachen Zahlwerthen entsprechen **).

Befindet sich z. B. der Punkt k in der den Winkel $2\alpha$ halbirenden Linie, so ist $2p.\cot\alpha=4m$, daher nach gehöriger Vereinfachung

$$x=\frac{p}{2}\left(\frac{\sin\alpha\pm1}{\cos\alpha.\cot\alpha}+1\right)\text{ und } y=\frac{p(\sin\alpha\pm1)}{2\cos\alpha}.$$

Ist der Winkel $\alpha$ gleich $45^0$, so ist wegen $\cot\alpha=1$

---

*) Die angegebenen drei Gleichungen bleiben für alle möglichen Lagen der gegebenen Stücke unverändert, so daß keine Größe derselben eine Verwechslung des Vorzeichens bedarf, welcher Fall auch immer eintreten mag.

**) Daß die Radien der verlangten Kreise den absoluten Werthen der gefundenen Mittelpunktsabscissen gleich sind, erhellt aus der angenommenen Lage der Coordinatenaxen zu den gegebenen Stücken.

$$x=\frac{p}{2}+m\pm\sqrt{mp} \text{ und } y=\frac{p}{2}\pm\sqrt{mp}.$$

Eine mehr oder weniger ähnliche Vereinfachung der Resultate würde man erhalten, wenn $\alpha=30^0$ oder $=60^0$ oder $=18^0$ u. s. w. wäre.

Befindet sich der Punkt k in der den Winkel $2\alpha$ halbirenden Linie und ist gleichzeitig Winkel $\alpha=45^0$, so erhält man wegen $\cot\alpha=1$ und $\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$x=p\pm p\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und } y=\frac{p\pm p\sqrt{2}}{2}.$$

Befindet sich der Punkt k in der Linie bc selbst, also $p=o$, so erhält man zwei Kreise mit den Mittelpunkts-Coordinaten

$$x=\frac{m}{\cot\alpha},\ y=o \text{ und } x'=-\frac{m}{\tan\alpha},\ y'=o.$$

Befindet sich der Punkt k in der Linie bc und ist gleichzeitig der Winkel $\alpha=45^0$, so erhält man:

$$x=m,\ y=o \text{ und } x'=-m,\ y'=o.$$

Andere Auflösungen der vorhergehenden Aufgabe ergeben sich, wenn man statt der beiden die Winkel $2\alpha$ und $2R-2\alpha$ halbirenden Linien den Ort nimmt, welcher alle Punkte enthält, die von dem Punkte k und der Linie ac gleich weit entfernt sind, oder wenn man diesen Ort statt der in der vorigen Auflösung benutzten Parabel wählt. In dem einen Falle sind die Mittelpunkte der verlangten Kreise die Durchschnittspunkte zweier Parabeln; in dem andern Falle sind dieselben Durchschnittspunkte der die Winkel $2\alpha$ und $2R-2\alpha$ halbirenden Linien mit jener neuen Parabel, welche k zum Brennpunkte und die Linie ac zur Leitlinie hat. Um beide Auflösungen zu dem verlangten Endresultate zu bringen, und die schon gefundenen Gleichungen wieder anwenden zu können, wird es am einfachsten sein, die Gleichung der neuen Parabel auf dasselbe rechtwinkliche Coordinatensystem zu beziehen, welches in der vorhergehenden Auflösung benutzt worden. Bezeichnen wir daher die Entfernung des Punktes k von der Linie ac mit $\frac{P}{2}$, den Abstand des Fußpunktes jener Entfernung von dem Punkte c mit M, nehmen wir ferner die Richtung derselben zur Abscissenaxe, die Linie ac zur Ordinatenaxe eines rechtwinklichen Coordinatensystems, und wählen wir den positiven Theil der Abscissenaxe auf der dem Punkte k zugewandten Seite der Linie ac, den positiven Theil der Ordinatenaxe aber in der Richtung der Verlängerung von ac über c hinaus, so ist die Gleichung der neuen Parabel:

$$y'^2=P\left(x'-\frac{P}{4}\right).$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt dieses Coordinatensystems in den Scheitelpunkt c bei gleicher Richtung und Deutung der Axen, so erhält man:

$$(\alpha)\quad (y'+M)^2=P\left(x'-\frac{P}{4}\right),$$

wo M eine positive oder eine negative Größe oder auch Null sein kann. Welchen Werth und welches Vorzeichen aber auch M haben mag, immer wird man

$$M=m.\cos2\alpha+\frac{p}{2}\sin2\alpha$$

setzen können, desgleichen kann man in allen Fällen

$P = 2m \sin 2\alpha - p.\cos 2\alpha$ setzen.

Es macht aber die Axe der $x'$ mit der Axe der $x$ einen Winkel $\beta = 2R - 2\alpha$, die Axe der $y'$ mit der Axe der $x$ einen Winkel $\beta' = 3R - 2\alpha$; daher folgt, daß wenn man von dem Coordinatensystem der $x', y'$ auf ein anderes $x'', y''$ übergehen will, dessen Axen mit denen der $y, x$ gleiche Richtung haben, man allgemein erhält:

$$x' = \frac{x'' \sin\beta' - y'' \cos\beta'}{\sin(\beta' - \beta)} \text{ und } y' = \frac{y'' \cos\beta - x'' \sin\beta}{\sin(\beta' - \beta)},$$

und da $\beta' - \beta$ einem Rechten gleich, also $\sin(\beta' - \beta) = 1$, so folgt nach Einführung der besonderen Werthe von $\beta$ und $\beta'$ in die Ausdrücke für $x'$ und $y'$

$$x' = y'' \sin 2\alpha - x'' \cos 2\alpha \text{ und } y' = -y'' \cos 2\alpha - x'' \sin 2\alpha.$$

Führt man nun die Werthe von $M, P, x'$ und $y'$ in die Gleichung $(\alpha)$ ein, so erhält man für die Gleichung der Parabel:

$$(\beta)\ m^2 + \frac{p^2}{4} + (y'' \cos 2\alpha + x'' \sin 2\alpha)^2 = 2my'' + px''.$$

Geht man endlich von den Axen der $x'', y''$ zu denen der $x, y$ über, so hat man nur $y'' = y + m$ und $x'' = x$ zu setzen, woraus folgt:

$$(\gamma)\ m^2 + \frac{p^2}{4} \pm [(y+m)\cos 2\alpha + x \sin 2\alpha]^2 = 2m(y+m) + px$$

als Endgleichung der neuen Parabel.

Verbindet man nun diese Gleichung mit den Gleichungen 2) und 3) oder mit der Gleichung 1) der vorhergehenden Auflösung, so erhält man nach gehöriger Vereinfachung auf eine eben so einfache Weise genau dieselben Resultate wie in der vorhergehenden Auflösung.

Vergleichen wir nun die verschiedenen Auflösungsarten dieser Aufgabe, und berücksichtigt man bei den verschiedenen möglichen Lagen der gegebenen Stücke zu einander die Größe und das Vorzeichen der Mittelpunkts-Coordinaten, so wird uns die Wahrheit folgender Sätze leicht erhellen:

Zwei Parabeln mit gemeinschaftlichem Brennpunkte und verschiedener Richtung der Hauptaxen schneiden sich immer nur in zwei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen, die den Winkel der beiden Leitlinien, worin der gemeinschaftliche Brennpunkt liegt, halbirt, welchen Parameter und welche Lagen zu einander auch immer die beiden Parabeln haben mögen.

Haben a) jene zwei sich schneidenden Parabeln gleiche Parameter, so schneidet immer der eine Zweig der einen Parabel den einen der andern, und der andere Zweig der einen den andern der andern Parabel.

Haben b) dieselben verschiedene Parameter und trifft die Hauptaxe der Parabel, wozu der größere Parameter $P$ gehört, ihre Leitlinie in einer Entfernung vom Scheitelpunkte beider Leitlinien (nicht in der Verlängerung der Leitlinie über den Scheitelpunkt hinaus) größer als $\frac{P}{4}\cot\alpha$, (wenn durch $2\alpha$ der Winkel der beiden Leitlinien bezeichnet wird, worin der gemeinschaftliche Brennpunkt liegt) so befindet sich in jedem Zweige sowohl der einen als der andern Parabel ein Durchschnittspunkt.

Haben c) dieselben verschiedene Parameter, trifft aber die Hauptaxe der Parabel, wozu der größere Parameter gehört, ihre Leitlinie in einer Entfernung vom Scheitelpunkte der beiden Leitlinien (nicht in der Verlängerung über diesen Scheitelpunkt hinaus) gleich $\frac{p}{4}\cot\alpha$, so hat die Parabel mit kleinerem Parameter in jedem Zweige einen Durchschnittspunkt, dagegen die andere Parabel in ihrem Anfangspunkte und in demjenigen Zweige, welcher vom Scheitelpunkte der beiden Leitlinien abgewandt ist, getroffen wird.

Haben d) dieselben verschiedene Parameter, trifft jedoch die Hauptaxe der Parabel, wozu der größere Parameter gehört, ihre Leitlinie in einer Entfernung vom Scheitelpunkte der beiden Leitlinien kleiner als $\frac{p}{4}\cot\alpha$, oder im Scheitelpunkte selbst, oder gar in der Verlängerung der Leitlinie über diesen Scheitelpunkt hinaus, so findet sich wieder in jedem Zweige der Parabel mit kleinerem Parameter ein Durchschnittspunkt, dagegen beide Durchschnittspunkte der andern Parabel in demjenigen Zweige derselben liegen, welcher nicht mit seiner erhabenen Seite gegen die Verlängerung der Leitlinie über ihren Scheitelpunkt hinaus gerichtet ist*).

Jede durch den Brennpunkt irgend einer Parabel in beliebiger Richtung gehende Linie schneidet die Parabel in zwei Punkten, von welchen der eine in der Halbirungslinie desjenigen Winkels, welchen die Leitlinie mit der in dem Brennpunkte auf die beliebige Linie gezogenen Senkrechten bildet, der andere in der Halbirungslinie des Nebenwinkels jenes Winkels liegt **). Hieraus folgt:

a) Errichtet man auf eine durch den Brennpunkt einer Parabel in beliebiger Richtung gehende Linie ein Perpendikel in dem Brennpunkte, und verlängert dasselbe bis zum Durchschnitte mit der Leitlinie, so schließen die Linien, welche diesen Durchschnittspunkt mit den Endpunkten der durch die Parabel begränzten beliebigen Linien verbinden, einen rechten Winkel ein.

b) Wenn zwei durch den Brennpunkt einer beliebigen Parabel gehende Linien auf einander senkrecht stehen, man jede derselben bis zum Durchschnitte mit der Leitlinie verlängert, und den Durchschnittspunkt der einen mit den durch die Parabel begränzten Punkten der andern, und den Durchschnittspunkt der andern mit den durch die Parabel begrenzten Punkten der einen verbindet, so schließen sowohl diese als auch jene Verbindungslinien einen rechten Winkel ein.

Hat man zwei beliebige Punkte k und k′, verbindet dieselben durch eine gerade Linie, errichtet im Mittelpunkte dieser Linie eine Senkrechte auf dieselbe, zieht dann von einem beliebigen Punkte der Senkrechten auf beiden Seiten derselben gleich geneigte Linien, so daß die Punkte k und k′ in den dadurch entstandenen Winkeln liegen, und wählt man hierauf k und k′ zu Parabel-Brennpunkten, die gleich geneigten Linien aber als dazu gehörende Leitlinien, so schneiden sich die zu diesen Elementen denkbaren vier Parabeln in denselben zwei in der Senkrechten liegenden Punkten***).

~~der größere Parameter~~

*) Daß die Parabel mit dem kleinern Parameter p immer in beiden Zweigen getroffen wird, erhellt aus dem Endresultate der ersten Auflösung, indem in allen Fällen, in welchen zwei Parabeln zum Durchschnitte kommen, der eine Werth von y eine positive, der andere eine negative Größe ist. Die Richtigkeit der Behauptungen in Bezug auf die andere Parabel wird leicht erkannt, wenn man statt die beiden Parabeln unmittelbar auf einander zu beziehen, die Parabel mit dem größern Parameter in Bezug auf die Durchschnittspunkte mit der den Winkel der beiden Leitlinien halbirenden geraden Linie beachtet.

**) Die Wahrheit dieses Satzes erhellt aus den allgemein entwickelten Formeln für die Mittelpunkts-Coordinaten, wenn man jenen Fall der Aufgabe beachtet, in welchem der Punkt k in der Linie bc liegt.

***) Die Wahrheit dieses so wie der drei folgenden Sätze wird man leicht erkennen, wenn man bedenkt, daß ein Punkt k′, der mit dem Punkte k auf den verschiedenen Seiten der den Winkel der beiden Linien ac und bc halbirenden Linien in einer symmetrischen Lage sich befindet, auch die an ac und bc berührenden Kreise mit dem Punkte k gemeinschaftlich hat.

Hat man zwei beliebige Punkte k und k', errichtet im Mittelpunkte der Verbindungslinie beider Punkte eine Senkrechte, zieht jederseits in gleicher Entfernung von derselben eine Parallele der Art, daß die Punkte k und k' von derselben eingeschlossen werden, und wählt man hierauf k und k' zu Parabel-Brennpunkten, die parallelen Linien als dazu gehörende Leitlinien, so werden die vier zu diesen Elementen gehörenden Parabeln sich in denselben zwei in der Senkrechten liegenden Punkten schneiden.

Hat man zwei einander sich berührende Kreise, zieht man an dieselben zwei beide Kreise zugleich berührende Linien, und wählt den Berührungspunkt beider Kreise zum gemeinschaftlichen Brennpunkte zweier Parabeln, deren Leitlinien die berührenden Geraden sind, so schneiden sich diese zwei Parabeln in den beiden Mittelpunkten der gegebenen Kreise.

Hat man zwei einander sich schneidende Kreise, zieht man an dieselben zwei beide Kreise zugleich berührende Linien, und wählt die beiden Durchschnittspunkte der Kreise zu Parabel-Brennpunkten, die berührenden Geraden zu Leitlinien, so schneiden sich die vier zu diesen Stücken gehörenden Parabeln in den beiden Mittelpunkten der gegebenen Kreise.

Zieht man an irgend einen gegebenen Kreis eine beliebige Tangente, und denkt man sich sämmtliche Punkte der Peripherie des Kreises als Parabel-Brennpunkte, die Tangente aber als dazu gehörende Leitlinie, so treffen alle Parabeln mit ihren einen Zweigen im Mittelpunkte des Kreises zusammen.

Zieht man an irgend einen gegebenen Kreis zwei beliebige parallele oder sich schneidende Tangenten, und denkt man sich sämmtliche Punkte der Peripherie des Kreises als Parabel-Brennpunkte, die Tangenten aber als die dazu gehörenden Leitlinien, so treffen alle diese Parabeln mit ihren einen Zweigen im Mittelpunkte des Kreises zusammen*).

Beschreibt man um einen gegebenen Kreis ein beliebiges reguläres oder irreguläres Vieleck, von wie vielen Seiten auch immer, und betrachtet man sämmtliche Punkte der Kreislinie als Parabel-Brennpunkte, sämmtliche Seiten des Vielecks als dazu gehörende Leitlinien, so werden alle denkbaren Parabeln mit ihren einen Zweigen im Mittelpunkte des Kreises sich schneiden.

---

*) Die Richtigkeit dieses Satzes folgt ganz einfach daraus, daß jeder Punkt des durch k gehenden die Linie bc und ac berührenden Kreises mit dem Punkte k wenigstens diesen einen berührenden Kreis gemeinschaftlich hat. Der diesem Satze unmittelbar vorhergehende so wie folgende Satz sind einfache Folgerungen aus demselben.