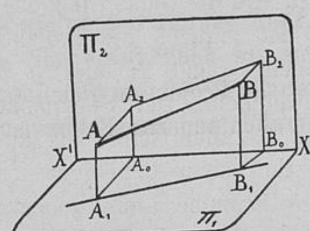
und um dies anzudeuten, nennt man diese Abbildung auch die **schräge, klinogonale** oder **schiefwinklige Parallelprojektion;** die durch sie entstandenen Abbildungen eines Körpers wollen wir kurz **Schrägbilder** nennen. Bilden dagegen die Projektionsstrahlen mit der Bildebene einen rechten Winkel, stehen also senkrecht zu ihr, so heisst diese Abbildung **senkrechte** oder **Orthogonal**-Projektion; die von ihr gelieferten Darstellungen wollen wir kurz als **Lotbilder** bezeichnen. Da bei diesen die Verhältnisse leichter zu überschauen sind, so wollen wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen.

II. Lotbilder
(Orthogonalprojektion).

3. Der Punkt, die Strecke.

Das Lotbild eines Punktes A ist der Fusspunkt A_1 des von A auf die Bildebene Π_1 gefällten Lotes. A_1 ist aber auch die Projektion aller auf dem Projektionsstrahle $A A_1$ gelegenen Punkte. Also kann man umgekehrt, wenn A_1 gegeben ist, nicht auf die Lage von A schliessen. Um dies zu ermöglichen, nehmen wir noch eine zweite Bildebene Π_2 hinzu, die wir als senkrecht zu Π_1 und vertikal annehmen, so dass also Π_1 horizontal zu denken ist. Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden $X^1 X$, die wir als die **Projektionsaxe** bezeichnen. Die durch $A\, A_1\, A_2$ gelegte Ebene steht senkrecht zu Π_1 und Π_2 und also auch senkrecht zur Axe, die sie in A_0 schneiden möge. Es ist nun $A A_1$, der Abstand von Π_1, gleich der Entfernung $A_2\, A_0$ der zweiten Projektion von der Axe, ebenso ist $A A_2 = A_1\, A_0$. Durch die beiden Lotbilder A_1 und A_2 ist der Punkt A eindeutig bestimmt als Treffpunkt der in A_1 und A_2 errichteten Senkrechten. Liegt A_1 auf der Axe, so liegt A in Π_2, liegt A_2 auf der Axe, so liegt A in Π_1.

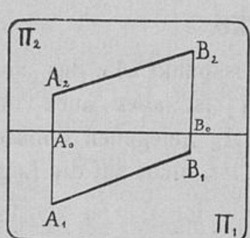


Figur 2.

Nehmen wir jetzt eine Strecke $A B$ (Fig. 2). Die projizierende Ebene, senkrecht zu Π_1, enthält auch die von den Endpunkten gefällten

Lote AA_1 und BB_1 und demnach ist $A_1 B_1$ das Bild von AB. Umgekehrt ist $A_1 B_1$ das Lotbild aller der unendlich vielen Strecken, die ihre Endpunkte auf den beiden Strahlen $A_1 A$, $B_1 B$ haben, daher kann man aus $A_1 B_1$ keine Schlüsse auf $A B$ ziehen. Projizieren wir nun $A B$ auch auf die Π_2 als $A_2 B_2$, so ist durch die beiden Bilder $A B$ der Grösse, Lage und Richtung nach bestimmt. Da nun das Zeichnen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen nicht gut möglich ist, so denkt man sich die Ebene Π_1 um die Axe gedreht, sodass sie mit der Π_2 in eine Ebene fällt. Da nun die in Π_1 und Π_2 liegenden Geraden $A_1 A_0$, $A_2 A_0$ auf der Axe senkrecht stehen, so fallen sie, wie auch $B_1 B_0$, $B_2 B_0$, nach erfolgter Drehung in eine Gerade und wir haben dann das Bild, wie es Fig. 3 zeigt.

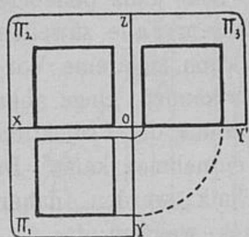
Das Bild in der Π_1 zeigt uns, wie die Strecke $A B$ einem in unendlicher Entfernung befindlichen Auge, das senkrecht von oben her auf Π_1 blickt, erscheint. Dieses Bild heisst der **Grundriss.** Das Bild in Π_2 zeigt, wie die Strecke $A B$ von vorn aus unendlicher Entfernung senkrecht auf Π_2 gesehen erscheint; es heisst der **Aufriss.** Dementsprechend werden auch die Ebenen Π_1 und Π_2 als **Grundriss**- bezw. **Aufrissebene** bezeichnet. Ist eine Strecke parallel zu einer der beiden Ebenen, so ist die Projektion auf diese Ebene so lang wie die Strecke; ist sie senkrecht dazu, so ist die Projektion gleich 0, d. h. die Strecke projiziert sich als Punkt. In allen anderen Fällen ist das Lotbild kürzer als die Strecke selbst.



Figur 3.

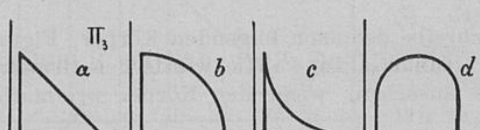
4. Einführung einer dritten Bildebene.

Denken wir uns einen Würfel, der mit einer Fläche auf der Π_1 steht, projiziert, so erhalten wir, wie sich aus dem Vorigen ergiebt, als Bild ein Quadrat von der Grösse der Würfelfläche; die senkrechten Kanten projizieren sich ja als Punkte. Legen wir nun die Π_2 parallel zu einer Seitenfläche, so ist auch das Bild in Π_2 ein Quadrat, dessen eine Seite auf der Axe liegt. Der Abstand des Quadrates in Π_1 von der Axe zeigt uns dagegen, wie weit der Würfel vor der Π_2 steht. Aber auch aus diesen beiden Bildern geht noch nicht hervor, dass der dargestellte Körper ein Würfel ist, insbesondere wenn wir nicht die Zusammengehörigkeit der entsprechenden Punkte genau angeben oder in der Zeichnung wiedergeben können. Ein gerades, rechtwinklig dreiseitiges Prisma mit zwei quadratischen Seitenflächen würde dieselben Bilder in Grund- und Aufriss geben, und noch unzählig viele andere Körper. Wir nehmen daher noch eine d r i t t e Projektionsebene Π_3 hinzu, die senkrecht zu den beiden vorigen steht und die als **Seitenrissebene** bezeichnet wird. Das in ihr entstehende Bild wird als Seitenriss bezeichnet. Diese Ebene Π_3, welche wir uns rechts liegend und nach vorn verlaufend denken, schneidet Π_1 und Π_2 in zur ersten Axe OX senkrechten Geraden OY und OZ. Die drei Bildebenen bilden also eine dreirechtwinklige Ecke, so wie die vom Fussboden, Vorder- und Seitenwand eines Zimmers gebildete Ecke. Um nun auch hier in e i n e r Ebene zeichnen zu können, denken wir uns die Figur längs der Kante OY aufgeschnitten, und legen alle 3 Ebenen in eine einzige, die Zeichenebene, nieder; dann haben wir das Bild, wie es Figur 4 zeigt.



Figur 4.

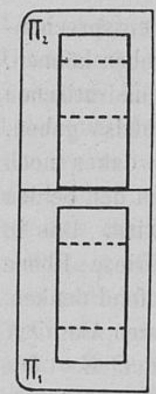
Die Gerade OY kommt dann als OY^1 in die Verlängerung an OX zu liegen. Projizieren wir nun auch unseren Würfel auf die Π_3, so erhalten wir abermals ein Quadrat, dessen eine Seite auf der Axe OY^1 liegt, und soweit rechts von der OZ, als der Würfel vor der Π_2 steht. (Daher die Uebertragung dieser Entfernung durch die um O beschriebenen Bögen von OY auf OY^1.) Nun erst können wir aus den drei Bildern auf einen Würfel schliessen. Würde der Seitenriss die Figur 5 a sein, so hätten wir es mit dem vorher genannten Prisma zu tun.



Figur 5.

Aufg.: Welcher Körper liegt vor, wenn der Seitenriss die Gestalt der Figur 5 b, c, d hat, Grund- und Aufriss aber Quadrate sind?

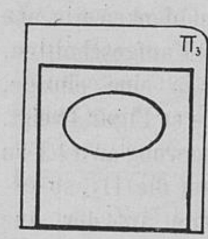
In Figur 6 kann weder aus dem Grundriss, noch aus dem Aufriss erkannt werden, um welchen Körper es sich handelt. Die punktierten Linien bedeuten hierbei solche, die von oben, bezw. von vorn betrachtet, nicht sichtbar sind, sondern durch darüber,



Figur 6.

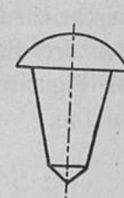
bezw. davor liegende Flächen verdeckt werden. Erst der Seitenriss (Fig. 7) belehrt uns, dass wir es mit einer quadratischen Platte zu tun haben, die von einer elliptischen Oeffnung durchbohrt ist.

Ein Seitenriss wird immer dann notwendig sein, wenn Seitenflächen des Körpers senkrecht zu Π_1 und Π_2 stehen (also parallel zu Π_3), weil sie sich dann mit allen in ihr befindlichen Figuren in eine Gerade projizieren. Wir können dies zwar vermeiden, wenn wir dem abzubildenden Körper eine ganz beliebige Lage geben. Man würde in diesem Falle zuweilen schon aus einer einzigen Projektion sich eine Vorstellung von dem Körper machen können, ginge aber dann des besonderen Vorzuges verlustig, dass man aus der Projektion sofort die wahren Dimensionen des Körpers entnehmen kann. In der Architektur und Technik werden daher diejenigen Zeichnungen, nach welchen das Objekt konstruiert werden soll, immer als Grundriss, Aufriss und Seitenriss hergestellt. Da nun sehr viele Gebilde der Technik drei zueinander senkrechte Ebenen enthalten (Gebäude, Maschinenteile u. s. w.) so ist ein Seitenriss meist unumgänglich. Bei Rotationskörpern, deren Axe senkrecht zu Π_1 steht, ist der Seitenriss mit dem Aufriss kongruent, also entbehrlich, ebenso ist meistens auch der Grundriss entbehrlich, wenn man weiss, dass ein Rotationskörper vorliegt, was man in der Technik dadurch andeutet, dass man die Axe strichpunktiert anzeichnet.



Figur 7.

Aufg.: Beschreibe demnach folgenden Körper, Figur 8. Wie sieht der Grundriss aus? Wie würde der Grundriss und Seitenriss aussehen, wenn der Körper prismatisch wäre?



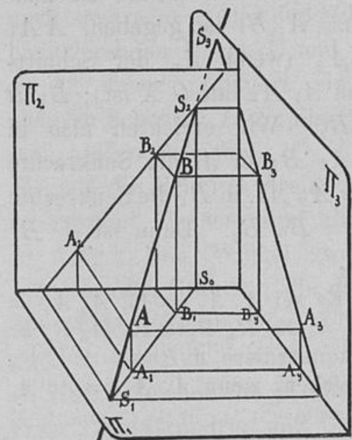
Figur 8.

---

5. Die Gerade.

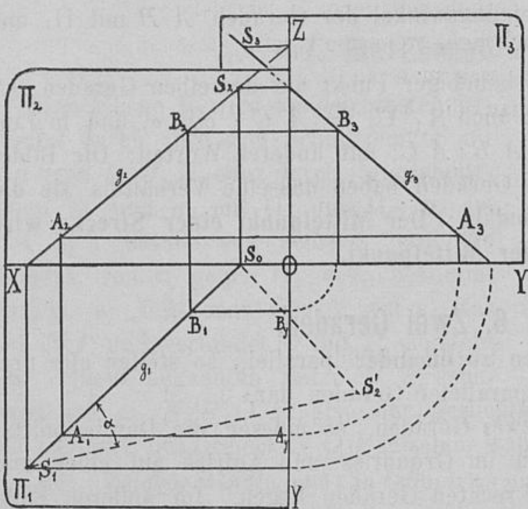
Aufgabe: Eine Gerade g sei durch zwei ihrer Punkte A und B gegeben. Man bestimme ihre drei Lotbilder g_1, g_2, g_3, die Spurpunkte in den Bildebenen S_1, S_2, S_3 und die Neigungen gegen diese α, β, γ.

Aufl.: Wir loten A und B auf Π_1 und Π_2 als A_1, A_2 und B_1, B_2. Die Verbindungslinien A_1 B_1 und A_2 B_2 geben den Grundriss g_1, bezw. den Aufriss g_2. Um auch den Seitenriss g_3 aus den beiden anderen Bildern zu erhalten, loten wir A_1 und B_1 auf die Axe OY als A_y B_y, übertragen die Entfernungen auf OY^1 und errichten in den Endpunkten die Lote, welche die durch A_2 und B_2 zu OX gezogenen Parallelen in A_3 bezw. B_3 treffen. Die Verbindungslinie A_3 B_3 gibt den Seitenriss g_3. Siehe Fig. 9 und 10.



Figur 9.

Um den Spurpunkt S_1 der Geraden mit der Π_1 zu finden, beachte man, dass er erstens auf g_1 liegen muss, zweitens, dass seine zweite Projektion auf OX und auf g_2 liegen muss. Ebenso findet man S_2, indem man im Schnittpunkte S_0 der g_1 mit OX die Senkrechte errichtet; sie schneidet g_2 in S_2. Ebenso trifft die im Schnittpunkte von g_2 mit OZ errichtete Senkrechte die g_3 in S_3. (Da in unserem Beispiele S_3 hinter Π_2 fällt, so wird nach Ausbreitung der drei Ebenen in e i n e Zeichenebene der der Π_3 angehörige Punkt S_3 links von OZ fallen in das gewöhnliche Gebiet der Π_2).



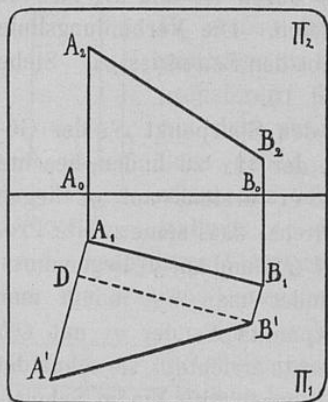
Figur 10.

Der Neigungswinkel α ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke S_0 S_1 S_2, das wir uns in wahrer Grösse leicht zeichnen können: Wir errichten in S_0 eine Senkrechte S_0 $S_2{}^1$ gleich S_0 S_2 und verbinden S_1 mit $S_2{}^1$. Wir haben damit auch S_1 S_2 in seiner wahren Grösse.

Aufg.: Wo ist der Winkel β, wo γ? Konstruiere diese beiden Winkel. Wie lang ist $S_2\ S_3$?

Zeichne die drei Lot-Bilder einer zu OX parallelen, aber im übrigen beliebigen Geraden.

Aufg.: Aus zwei Projektionen einer Strecke (Fig. 11) ihre wahre Länge zu bestimmen.



Figur 11.

Aufl.: Wir haben nur das rechtwinklige Trapez $A B\ A_1 B_1$ zu konstruieren. $A_1 B_1$ ist gegeben, $A A_1 = A_0\ A_2$ (wenn A_0 der Schnittpunkt von $A_1\ A_2$ mit $O\ X$ ist); $B_1\ B = B_0\ B_2$. Wir errichten also in Π_1 aut $A_1\ B_1$ in A_1 die Senkrechte $A_1\ A^1 = A_0\ A_2$, in B_1 die Senkrechte $B_1\ B^1 = B_0\ B_2$. Dann ist $A^1\ B^1 = A\ B$.

Aufg.: Es sei $A_0\ A_1 = 15$, $A_0\ A_2 = 48$, $B_0\ B_1 = 30$, $B_0\ B_2 = 10$, $A_0\ B_0 = 55$ mm; konstruiere $A\ B$.

Desgleichen, wenn $A_0\ A_1 = A_0\ A_2 = 40$, $B_0\ B_1 = B_0\ B_2 = 0$, $A_0\ B_0 = 60$ mm.

Kennt man umgekehrt die wahre Länge einer Strecke und die Projektion, so kann man den zur Π senkrechten Abstand der Endpunkte bestimmen.

Ziehen wir durch B^1 die Parallele $B^1\ D$, so ist Winkel $D\ B^1\ A^1 = \alpha$ der Neigungswinkel der Geraden $A\ B$ mit Π_1 und es ist
$$A_1\ B_1 = A\ B \cdot \cos\ \alpha.$$

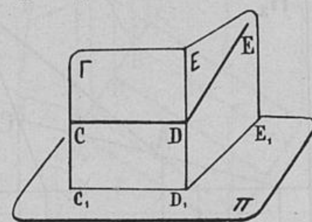
Ist C ein dritter beliebiger Punkt auf derselben Geraden, C_1 seine Projektion, so ist auch $A_1\ C_1 = A\ C \cdot \cos\ \alpha$, und hieraus folgt $A_1 B_1 : A_1\ C_1 = A\ B : A\ C$; mit anderen Worten: Die Bilder von Strecken derselben Geraden haben dasselbe Verhältnis wie die Strecken selbst, inbesondere: **Der Mittelpunkt einer Strecke wird auch im Lotbilde wieder Mittelpunkt.**

6. Zwei Geraden.

Sind zwei Geraden zu einander parallel, so stellen alle drei Projektionen ein Paar paralleler Geraden dar.

Schneiden sich zwei Geraden, so müssen die Durchschnittspunkte der Projektionen im Grundriss und Aufriss auf einer und derselben zur Axe senkrechten Geraden liegen. Im anderen Falle sind die Geraden windschief; ihre Projektionen werden sich dann allerdings auch schneiden, dieser Schnitt ist aber nur der Spurpunkt der Durchschnittslinie der projizierenden Ebenen.

Bilden zwei sich schneidende Geraden einen rechten Winkel, so bleibt dieser im Lotbilde erhalten, wenn nur der eine Schenkel $C\,D$ zur Π parallel läuft. Beweis: (Fig. 12) Alle zu $C\,D$ rechtwinklige Geraden liegen in einer zu $C\,D$ senkrechten Ebene E; diese steht auch senkrecht zu der den Schenkel $D\,C$ projizierenden Ebene Γ und somit auch zu Π, daher projiziert sie auch den anderen Schenkel $D\,E$; die Projektionen der beiden Schenkel, $D_1\,C_1$ und $D_1\,E_1$, als die Schnitte dreier zu einander senkrechter Ebenen, sind also auch senkrecht zu einander.

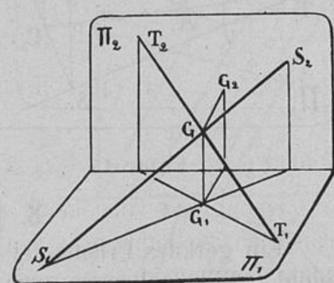


Figur 12.

Aufg.: Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden, die durch ihre Spurpunkte S_1 und S_2, T_1 und T_2 gegeben sind, zu zeichnen.

Aufl.: Zeichne die perspektivische Figur 13 in Grundriss und Aufriss, und zeichne das Dreieck $T_1\,S_1\,G_1$ in seiner wahren Grösse in der Ebene Π_1.

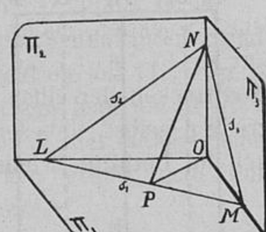
Füge auch den Seitenriss bei.



Figur 13.

7. Die Ebene.

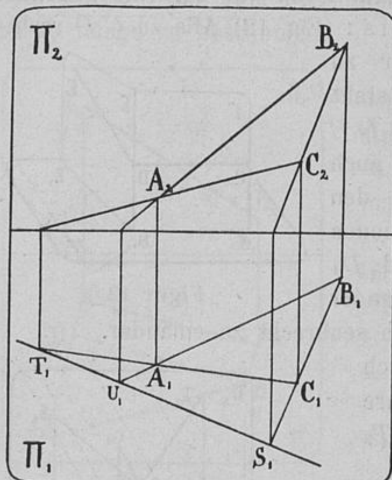
Eine Ebene E wird am leichtesten bestimmt durch ihre drei Schnittpunkte mit den Axen L, M, N, oder durch ihre Schnittlinien s_1 und s_2 mit Π_1 und Π_2 (s_3 ergibt sich daraus von selbst). Soll die Neigung von E gegen Π_1 etwa bestimmt werden, so fällt man von N auf s_1 das Lot $N\,P$ und verbindet O mit P, so steht nach einem bekannten Satze $O\,P$ senkrecht auf s_1, $N\,P\,O$ ist also der gesuchte Neigungswinkel; man hat demnach das Dreieck $N\,O\,P$ in seiner wahren Grösse zu zeichnen.



Figur 14.

Aufg.: Zeichne die Figur 14 in Grundriss und Aufriss und bestimme die Neigungen auch mit Π_2 und Π_3. Nimm $O\,L = 5$, $O\,M = 4$, $O\,N = 3$ cm. — Welche Figur entsteht, wenn E parallel zu $O\,X$?

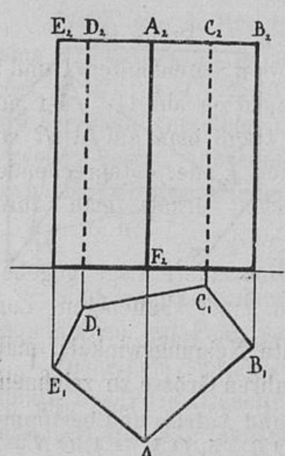
Verwickelter wird die Aufgabe, wenn die Ebene E durch drei Punkte A, B, C gegeben ist. Diese Punkte seien durch ihre Projektionen gegeben. Man bestimme zuerst den Spurpunkt S_1 der Geraden $B\ C$ (Nach 5) mit Π_1, durch diesen muss die Ebene gehen, da sie ja durch $B\ C$ geht; ebenso den Spurpunkt T_1 der Geraden $A\ C$ mit Π_1, auch durch diesen geht die Ebene und es ist also $S_1\ T_1$ die Schnittlinie von E mit Π_1. Ähnlich bestimme man die Spurpunkte S_2 und T_2 und damit die Schnittlinie von E mit Π_2, dann ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. Hat man richtig gezeichnet, so muss auch der Spurpunkt U_1 von $A\ B$ auf $S_1\ T_1$ liegen.



Figur 15.

8. Das Prisma.

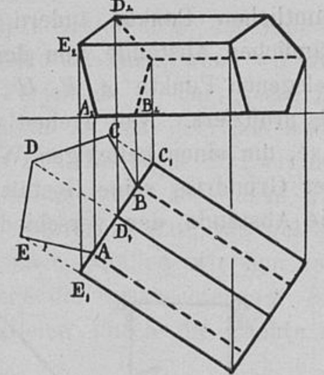
Ein gerades Prisma sei durch seine Grundfläche und Höhe bestimmt. Wir stellen es zunächst mit seiner Grundfläche $F\ G\ H \ldots$ auf die Π_1. Die Seitenkanten projizieren sich als Punkte, da sie senkrecht zu Π_1 stehen. Das Bild der Deckfläche $A_1\ B_1\ C_1 \ldots$ fällt mit der Grundfläche zusammen.



Figur 16.

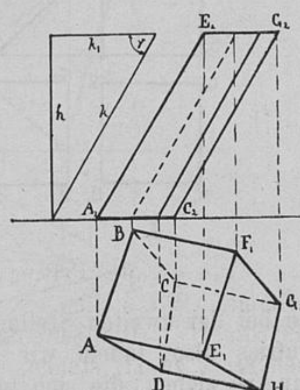
Im Aufriss projizieren sich die Seitenkanten als Senkrechte zur Axe. Fällt man also von den Punkten A_1, $B_1 \ldots$ Senkrechte auf die Axe und trägt von der Axe aus die gegebene Höhe auf diesen ab, so bekommt man den Aufriss der Deckfläche.

Liegt das Prisma mit einer seiner Seitenflächen auf der Π_1 (Figur 17), so behält diese Seitenfläche ihre wahre Grösse im Grundriss bei. Die Grundfläche projiziert sich, weil senkrecht zu Π_1, auf die zu dieser Seitenfläche gehörige Seite $A\ B$. Denken wir uns nun diese Grundfläche um $A\ B$ gedreht, bis sie in die Π_1 fällt, so beschreibt jede Ecke, z. B. E, einen Viertelkreis, dessen Ebene senkrecht zu $A\ B$, also auch senkrecht zu Π_1 steht. Dieser Kreis projiziert sich also in Π_1 als eine Senkrechte zu $A\,B$ durch E; die von E auf $A\,B$ gefällte Senkrechte liefert uns also den Punkt E_1; auf der von E_1 zur Axe gefällten Senkrechten $E_1\ E_0$, und zwar im Abstande $E_1\ E$ von dieser liegt E_2. Ebenso findet man die anderen Ecken; A_2 und B_2 dagegen liegen auf der Axe.



Figur 17.

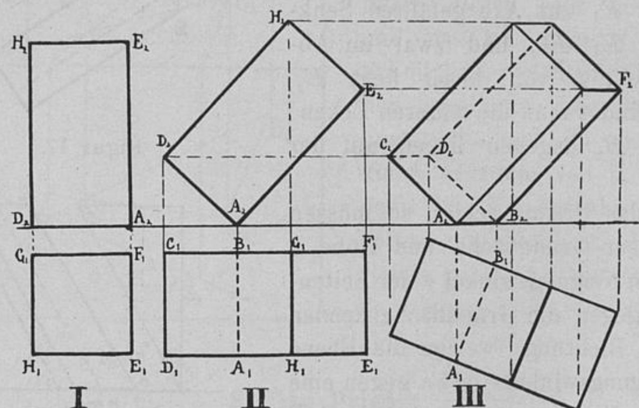
Ist das Prisma schief, so müssen wir ausser Grundfläche und Höhe h noch den Neigungswinkel γ der Seitenkanten gegen die Grundfläche kennen und die Richtung, welche die Ebene des Neigungswinkels (etwa gegen eine der Grundkanten) hat. Sei $A\ B\ C\ D$ die Grundfläche, die wir auf Π_1 legen, so fällt diese mit ihrem Grundriss zusammen, ihr Aufriss fällt in die Axe. Das aus der Kathete h und dem gegenüberliegenden Winkel γ konstruierte rechtwinklige Dreieck liefert in seiner Hypotenuse die wahre Länge der Seitenkanten k und in der anderen Kathete die Länge k_1 der Projektion auf Π_1. Ist nun $A\ R$ die Richtung der Neigungsebene, so trage man auf $A\ R$ von A aus k_1 ab, dann erhält man die Projektion E_1 der entsprechenden Ecke E der Deckfläche; die übrigen Ecken erhält man durch Parallele, und den Aufriss in bekannter Weise.



Figur 18.

Bisher haben wir dem Prisma eine besondere Lage gegeben. Wir wollen nun zeigen, wie man es in einer beliebigen Lage abbilden kann. Nehmen wir, um das Verfahren klar zu legen, eine quadratische Säule und stellen sie zuerst auf die Π_1, so dass eine Seitenfläche der Π_2 parallel läuft (erste Stellung). Dann gibt uns Figur 19 I den Grundriss und Aufriss. Jetzt kippen wir die Säule um die zu Π_2 senkrechte Kante $A\ B$ um einen beliebigen Winkel α

(zweite Stellung), dann behält der Aufriss seine Gestalt, und die sämtlichen Punkte ändern wohl ihre Lage, behalten aber die nämlichen Abstände **von der** Π_2 bei, daher bleiben z. B. die vorn gelegenen Punkte A E H D in der Verlängerung von H_1 E_1 auf Π_1 projiziert. Nun drehen wir die Säule um eine zu Π_1 senkrechte Axe, um einen beliebigen Winkel β (d r i t t e Stellung), dann behält der Grundriss seine Gestalt bei; bei dieser Drehung aber bleiben die Abstände der verschiedenen Punkte von der Π_1 dieselben wie



Figur 19.

sie bei der zweiten Stellung im Aufriss waren. Wir erhalten den Aufriss also, indem wir durch die Punkte im Aufriss II Parallele zur Axe ziehen, die sich mit den von dem Grundriss III auf die Axe gefällten Senkrechten in den zugehörigen Punkten schneiden. Will man vermeiden, dass die eine Kante noch auf der Axe liegt, so kann man den Aufriss senkrecht zur Axe verschieben, soll die Kante auch nicht parallel zu ihr sein, so kann man das Verfahren nochmals wiederholen. Wichtig ist hier das Prinzip des Verfahrens: **Dreht man einen Körper um eine zu Π senkrechte Axe, so behalten alle Punkte denselben Abstand von Π.**

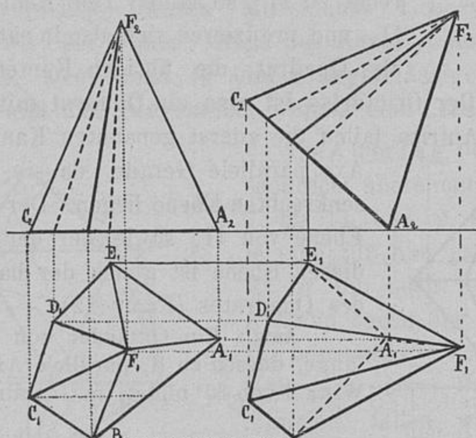
Aufg.: Zeichne ein regulär dreieckiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen aus der Kante a = 25 mm.

Zeichne eine regulär sechsseitige Säule, deren Grundkante 18, deren Höhe 50 mm ist in Grundriss, Aufriss, Seitenriss.

Zeichne einen würfelförmigen Trog, dessen Kanten 48 mm lang, dessen Wandungen 6 mm dick sind, in beliebiger Stellung.

9. Die Pyramide.

Die Pyramide sei gegeben durch ihre Grundfläche, die Höhe h und den Fusspunkt der Höhe. Der letztere ist dann, wenn wir die Grundfläche auf Π_1 legen, zugleich die Projektion F_1 der Spitze F. Im Aufriss haben wir F_2 in dem Abstande h von der Axe senkrecht oberhalb F_1 zu zeichnen, so dass sich die Figur 20 I ergibt. Wollen wir auch hier eine beliebige Lage abbilden, so drehen wir die Pyramide zunächst um eine zu Π_2 senkrechte Axe, als welche wir z. B. die Gerade $A_1 A_2$ nehmen können. Fällen wir nun von den Punkten in Π_2 bei der neuen Lage die Senkrechten auf die Axe und schneiden sie mit den Parallelen durch die Punkte in



I Figur 20. II

Π_1, so bekommen wir auch den neuen Grundriss. Hierbei hat die Pyramide schon eine allgemeine Lage; wenn nicht, kann man nochmals drehen und verfahren wie oben angegeben.

Aufg. Zeichne eine reguläre quadratische Pyramide, deren Höhe gleich der Diagonale der Grundfläche ist, in beliebiger Lage und füge auch den Seitenriss bei.

Bei welchem Körper stellt Grundriss und Aufriss ein gleichseitiges Dreieck dar mit einer zur Axe senkrechten Höhe?

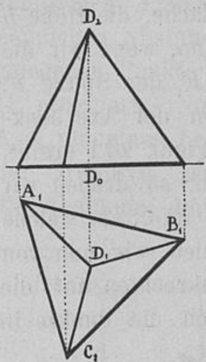
---

10. Die regulären Polyeder.

1. **Das Tetraeder.** Legen wir eine seiner Flächen $A\,B\,C$ in Π_1, so fällt das Bild D_1 der vierten Ecke in den Schnittpunkt der Mittellinien, auf welche sich auch die Seitenkanten projizieren. **Der Grundriss ist ein regelmässiges Dreieck mit den Umkreisradien.** Die Höhe $D_0\,D_2 = h_1$ ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks,

dessen Hypotenuse die Höhe h einer Seitenfläche, dessen andere Kathete $\frac{h}{3}$ ist.

Aufg.: Zeichne zu dieser Figur den Seitenriss. Zeichne die Figur so, dass $A\ C$ senkrecht zur Axe läuft und drehe dann das Tetraeder um $A\ C$ um einen Winkel von 30⁰.

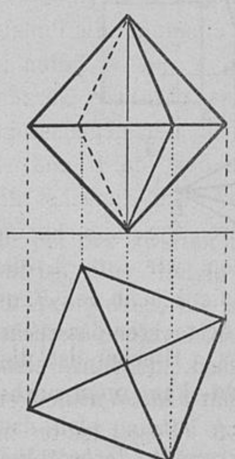


Figur 21.

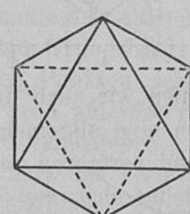
Stellt man die Verbindungslinie der Mitten zweier windschiefer Kanten senkrecht auf Π_1, so ist der Grundriss **ein regelmässiges Viereck mit seinen Diagonalen.**

2. **Das Oktaeder**. Stellen wir eine Axe senkrecht zu Π_1, so laufen vier Kanten parallel zu Π_1 und projizieren sich also in natürlicher Grösse als Quadrat, die übrigen Kanten fallen in die Diagonalen. **Der Grundriss ist also ein Quadrat mit den Umkreisradien.** Im Aufriss fallen die zuerst genannten Kanten in eine zur Axe parallele Gerade, da sie in einer zu Π_2 senkrechten Ebene liegen. Der Abstand dieser Ebene von Π_1 sowie der der Ecke oberhalb dieser Ebene ist gleich der halben Diagonale des Quadrates (Figur 22).

Aufg.: Ein Oktaeder von 30 mm Kantenlänge, dessen zu Π_2 parallele Axe mit Π_1 einen Winkel von 30⁰ bildet, im Grundriss zu zeichnen.



Figur 22.

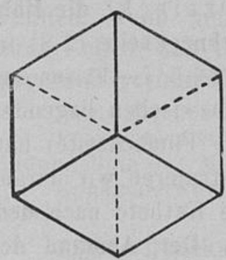


Figur 23.

Projiziert man auf eine Seitenfläche, so erhält man ein regelmässiges Sechseck mit den Diagonalen, die eine Ecke überschlagen (Figur 23).

3. **Der Würfel.** In der ersten Stellung haben wir ihn schon in Figur 4 gezeichnet; aus den Angaben in Nr. 8 (Zeichnung der quadratischen Säule) ist nun leicht die

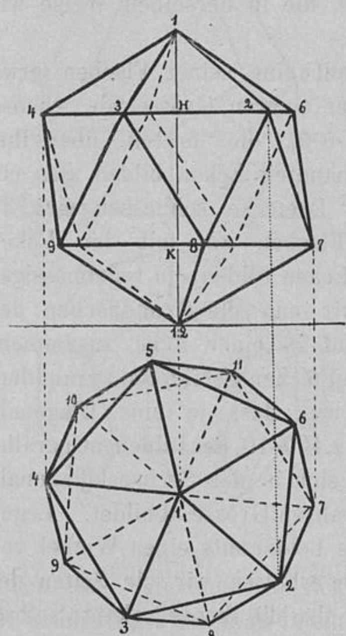
Aufg.: Einen Würfel von 32 mm Kantenlänge in beliebiger Stellung zu zeichnen.



Figur 24.

Steht die Diagonale auf Π_1 senkrecht, so ist der Grundriss ein regelmässiges Sechseck mit den Umkreisradien. (Fig. 24.)

4. **Das Ikosaeder.** Es hat 12 Ecken, die wir der Einfachheit halber (auch in den Bildern) mit 1, 2, 3 usw. bis 12 bezeichnen. Die Axe 1—12 stellen wir senkrecht auf Π_1, dann liegen 2—6 sowohl wie 7—11 je in einer zu Π_2 parallelen Ebene und sind die Ecken zweier regelmässigen Fünfecke, die aber um 36° gegeneinander gedreht sind, also bilden sie in der Projektion insgesamt ein regelmässiges 10-Eck, dessen Mittelpunkt 1 bezw. 12 ist; in 2—3 haben wir die wahre Länge der Kante. **Man erhält also den Grundriss, wenn man in einem regelmässigen 10-Ecke die Radien zieht und die Diagonalen, welche eine Ecke überschlagen.**



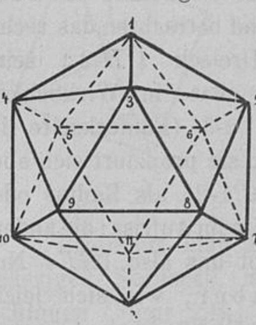
Figur 25.

Im Aufriss liegen 12 und 1 senkrecht übereinander; die Punkte 7 bis 11 und 2 bis 6 fallen in je eine zur Axe parallele Gerade. Es ist nur noch der gegenseitige Abstand sowie der von 1 und 12 zu bestimmen. Um zunächst die Höhe der oberen Pyramide zu bestimmen, fällen wir von 1 das Lot 1 H auf die Fläche des Fünfecks 2—6 und betrachten das rechtwinklige Dreieck 1 H 2; seine Hypotenuse hat in Wirklichkeit die Länge 2-3 (Fünfeckseite im Grundriss); sie projiziert sich aber als $H\,2 = 1\text{-}2$, als Radius oder Sechseckseite im Aufriss; die andere Kathete gibt uns also 1 H. Nun bilden aber, wie sich leicht zeigen lässt,*) Fünfeck-, Sechseck- und Zehneckseite im

*) Denn $\left(\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2$.

selben Kreise ein rechtwinkliges Dreieck; **die Höhe der beiden Pyramiden ist also gleich der Zehneckseite** (2-8) **im Grundriss.** Um den Abstand der beiden Fünfecke 2—6, 7—11 von einander zu finden, beachte man, dass eine der dazwischen liegenden Kanten, etwa 2-8, in Wirklichkeit die Länge 2-3 (Fünfeckseite) hat, sich aber als 2-8 (Zehneckseite) projiziert; konstruieren wir daraus ein rechtwinkliges Dreieck, so wird seine zweite Kathete nach dem Obigen gleich der Sechseckseite 1-2 werden. **Der Abstand der beiden Fünfecksflächen ist also gleich dem Radius des ihnen umbeschriebenen Kreises. Die beiden gesuchten Abstände haben also zueinander das Verhältnis des goldenen Schnittes.** Tragen wir also im Aufriss auf der in 12 über 1 errichteten Senkrechten das Stück 2-8 als 12-K ab und dahinter $K\ H = $ 1-2 und dahinter wieder 2-8 als H 1, so liefern die durch H und K zur Axe gezogenen Parallelen und die aus dem Grundriss heraufgezogenen Senkrechten die Eckpunkte im Aufriss, die in derselben Weise wie dort zu verbinden sind.

Projiziert man das Ikosaeder auf eine seiner Flächen (etwa 5-6-11), so bildet sich diese in ihrer wahren Grösse ab, ebenso die ihr parallel gegenüberliegende 3-8-9, die mitten über ihr, aber um 60^0 gedreht liegt; die genannten Ecken bilden also ein reguläres Sechseck. An jedes dieser Dreiecke schliessen sich in gleicher Neigung drei kongruente Flächen an, mit den Ecken 1, 7, 10 bezw. 2, 4, 12; auch diese Ecken bilden ein regelmässiges Sechseck. S. Fig. 26. Betrachten wir nun die Grundflächen der von je fünf in einer Ecke zusammenstossenden Flächen gebildeten Pyramiden, so sehen wir, dass je eine Diagonale derselben, z. B. 7-10, der Bildebene parallel läuft und sich in der Sechseckdiagonale in ihrer wahren Grösse abbildet. Legen wir an sie beiderseits einen Winkel von 36^0 an, so erhalten wir die Seiten des Fünfecks, also die Ikosaederkante selbst, und diese Länge müssen die Seiten der beiden zuerstgenannten Dreiecke haben.



Figur 26.

Diagonale und Seite eines Fünfecks verhalten sich aber wie die Teile einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke, folglich tuen es auch die Umkreisradien der beiden Sechsecke, und wir haben den Satz: **Das Lotbild eines Ikosaeders auf eine seiner Flächen wird**

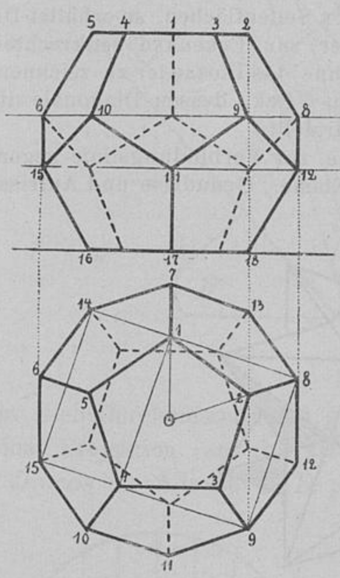
erhalten, wenn man die Ecken zweier konzentrischer Sechsecke, deren Seiten das Verhältnis des goldenen Schnittes haben, entsprechend verbindet.

Aufg.: Zeichne zu Fig. 26 den Aufriss.

Projiziere das Ikosaeder auf eine Ebene, die senkrecht zur Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegender Kanten steht.

Konstruiere den Radius der dem Ikosaeder ein- und umschriebenen Kugel.

5. **Das Dodekaeder.** Es hat 20 Ecken, die wir der Reihe nach mit 1—20 bezeichnen wollen; 1—5 sollen die obere oder Deckfläche bilden, 16—20 die Grundfläche, die wir in die Π_1 legen und die folglich ihre wahre Grösse beibehält; die Ecken 6—10 sowohl wie 11—15 bilden je ein reguläres Fünfeck, dessen Seite die Länge der Grundflächendiagonale hat, und dessen Ebene parallel zu Π_1 liegt. Die beiden Fünfecke sind aber um 36° gegeneinander gedreht,

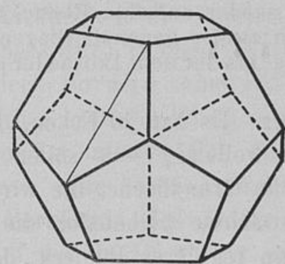


Figur 27.

daher bilden sie in der Projektion ein regelmässiges Zehneck; die Seiten desselben sind die Projektionen der zwischen den Ecken 6—17 auf- und absteigenden Dodekaederkanten. Da nun die Diagonalen 8-9 sowohl wie 14-15 der Diagonale 1-4 der Deckfläche gleich und parallel sind und ebenfalls symmetrisch zu der durch 2—3 gelegten Mittelsenkrechten liegen, anderseits die Ecken 1 und 4 auf den vom Mittelpunkte O des Fünfecks ausgehenden Strahlen liegen, so findet man diese Ecken als Schnitt der Radien 0-7 und 0-10 mit den Diagonalen 8-14 und 9-15 des Zehnecks. Aehnlich ergeben sich die anderen Ecken. **Man bekommt also die Ecken im Grundriss, wenn man in einem regelmässigen Zehneck die Radien und die Diagonalen zieht, welche zwei Ecken überschlagen.**

Für den Aufriss beachte man, dass die von der Grund- und Deckfläche ausgehenden Seitenflächen-Diagonalen, die alle die wahre Länge 8-9 (Fünfeckseite) haben, sich in Π_1 teils als 8-1 = 8-0 (Radius) oder die zu der entferntesten Ecke laufenden sich auf 1-14 14-7 (Zehneckseite) projizieren. Daraus folgt, dass die

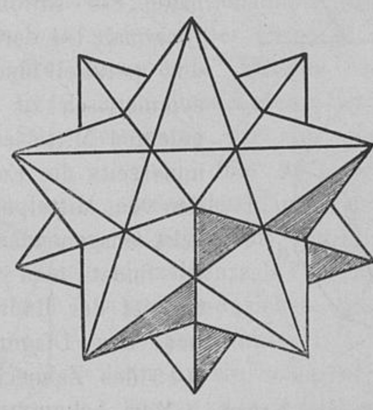
Höhe der Punkte 11—15 über der Π_1 gleich der 10-Eck-Seite, der von 6—10 gleich dem Radius des Grundrissumkreises ist. Die gesuchten Abstände haben also das Verhältnis des goldenen Schnittes.



Figur 28.

Aufg.: Zeichne die Figur des Ikosaeders (Fig. 26) in doppelter Grösse und verbinde die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhältst Du das Lotbild eines Dodekaeders auf einer zur Eckenaxe senkrechten Ebene (Figur 28). Versuche die Figur ohne das Ikosaeder zu zeichnen. (Anweisung: 6 Ecken liegen auf einem 6-Eck, dessen Diagonale die Fünfecks-Diagonale in wahrer Länge darstellt.)

Projiziere das Dodekaeder auf eine zur Verbindungslinie gegenüberliegender Kantenmitten senkrechte Ebene. Grundriss und Aufriss!

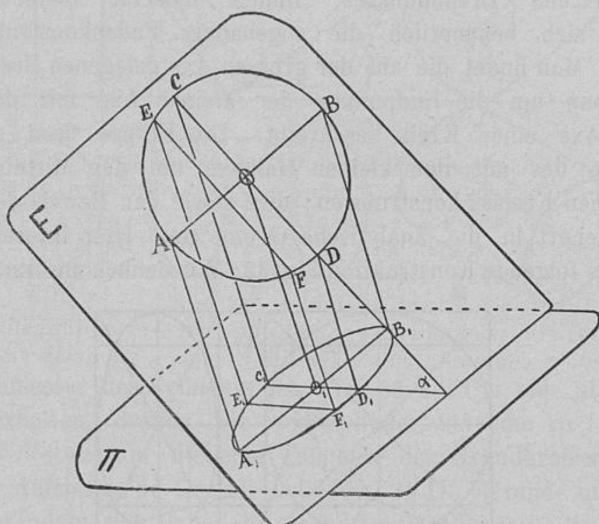


Figur 29.

Auch die Lotbilder der sämtlichen Sternpolyeder lassen sich aus dem Zehneck durch blosses Ziehen von Diagonalen konstruieren. Hiervon liefert Figur 29, die das konvexe Sterndodekaeder zeigt, ein Beispiel.

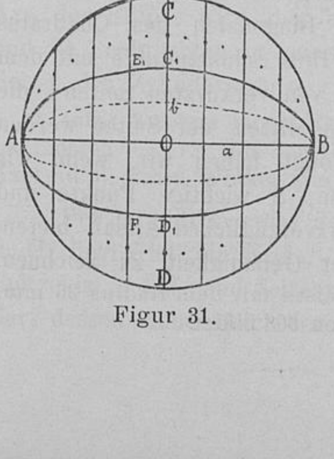
11. Projektion des Kreises.

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte O in der beliebigen Ebene E, der auf die Ebene Π projiziert werden soll. Von allen Durchmessern des Kreises gibt es einen, der zu Π parallel ist; es ist der zur Schnittlinie s von Π und E parallele AB. Seine Projektion $A_1 B_1$ ist daher gleich AB. Der zu AB senkrechte Durchmesser CD bildet mit seiner Projektion den Neigungswinkel α der Ebenen Π und E. Da dieser nach einem Satz der Stereometrie



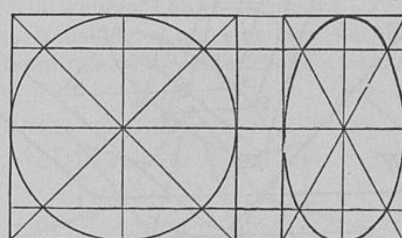
Figur 30.

von allen Durchmessern den grössten Winkel mit Π bildet, so wird seine Projektion am kleinsten ausfallen; sie wird $C_1 D_1 = CD \cdot \cos \alpha$. Alle zu CD parallelen Sehnen, z. B. EF, werden in derselben Weise verkürzt; es wird $E_1 F_1 = EF \cdot \cos \alpha$. Da die Mittelpunkte erhalten bleiben, so gilt dasselbe auch von den Halbsehnen. Man erhält also die Projektion eines Kreises, indem man die zu einem Durchmesser senkrechten Halbsehnen alle nach demselben Verhältnis verkürzt. S. Fig. 31, worin dieses Verhältnis für die ausgezogene Linie $\frac{1}{2}$, für die beiden



Figur 31.

anderen $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{3}{4}$ ist. Die so entstehende Linie ist eine **Ellipse.** $A_1 B_1$ heisst die grosse Axe. $C_1 D_1$ ist die kleine Axe, $OA = OB$ ist der Radius a des erzeugenden Kreises, $O D_1 = b_1 = a \cdot \cos \alpha$; daraus folgt $\cos \alpha = \frac{b}{a}$. Das Verhältnis, in welchem alle Halbsehnen verkürzt werden, ist also gleich dem Verhältnis der Axen bezw. Halbaxen. Ist E parallel zu Π, so ist das Verhältnis = 1, und der Kreis projiziert sich als Kreis; ist E senkecht zu Π, so projiziert sich der Kreis als Strecke. Die Ellipse ist zugleich der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, immer dieselbe bleibt; hierauf gründet sich bekanntlich die sogenannte Fadenkonstruktion der Ellipse. Man findet die auf der grossen Axe gelegenen Brennpunkte, indem man um die Endpunkte der kleinen Axe mit der halben grossen Axe einen Kreis beschreibt. Die Ellipse lässt sich auch mit Hilfe des mit der kleinen Halbaxe um den Mittelpunkt beschriebenen Kreises konstruieren; dies sowie der Beweis des vorigen Satzes gehört in die analytische Geometrie. Hier interessiert uns besonders folgende Konstruktion Fig. 32: Wir denken uns um den Kreis



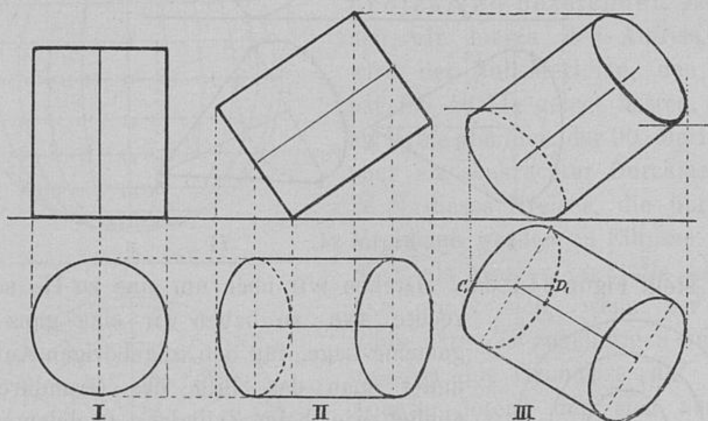
Figur 32.

dasjenige Quadrat beschrieben, dessen zwei Seiten der Π parallel laufen. Es projiziert sich als Rechteck, dessen Längsseiten gleich denen des Quadrats $= 2a$ sind, dessen Breitseiten $= 2b = 2a \cdot \cos \alpha$ werden. Die Seiten, die Tangenten des Kreises waren, werden Tangenten der Ellipse. Die Diagonalen des Quadrates werden zu Diagonalen des Rechtecks. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreise bleiben in derselben Entfernung von verkürzten Seiten; die Berührungspunkte des Kreises auf den Mitten der Seiten werden zu Berührungspunkten der Ellipse. Somit haben wir, wenn wir das Rechteck wie beschrieben zeichnen, 8 wichtige Punkte und 4 Tangenten der Ellipse, die uns einen vorzüglichen Anhalt bieten, die Ellipse mit praktisch hinlänglicher Genauigkeit zu zeichnen.

Aufg.: Zeichne das Lotbild eines Kreises mit dem Radius 36 mm, dessen Ebene mit der Π einen Winkel von 60° bildet.

12. Zylinder und Kegel.

Der Grundriss eines geraden Kreiszylinders, der mit der Grundfläche auf Π_1 steht, ist ein Kreis, der Aufriss und Seitenriss ein Rechteck, dessen Länge gleich der Höhe, dessen Breite gleich

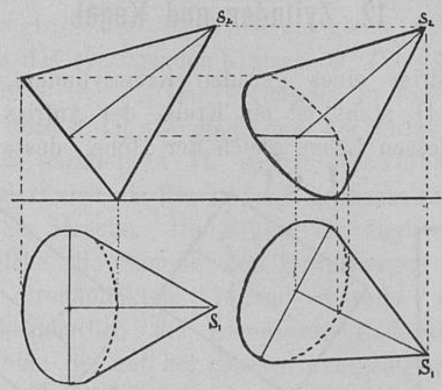


Figur 33.

dem Durchmesser des Zylinders ist. Fig. 33 I. Um eine allgemeine Lage zu erhalten, drehen wir den Zylinder um eine zu Π_2 senkrechte Axe (etwa um die eine Tangente des Grundkreises), dann behält der Aufriss seine Gestalt bei. Fig. 33 II. Grund- und Deckfläche verwandeln sich dabei im Grundriss in Ellipsen, die wir mit Hilfe des im Vorigen beschriebenen Rechtecks leicht zeichnen können. Drehen wir jetzt auch noch den Grundriss II, so ist eine allgemeine Lage schon erreicht; will man auch hierzu den Aufriss, so beachte man, dass das der Ellipse umbeschriebene Rechteck in ein Parallelogramm übergeht, dessen Seiten Tangenten der Ellipse bleiben. Grosse Axe der Ellipse wird aber der zu Π_2 parallele Durchmesser $C\ D$, und die Senkrechten in seinen Endpunkten werden die begrenzenden Seiten des Zylinders.

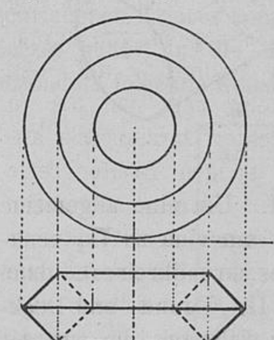
Aufg.: Zeichne einen Hohlzylinder, vom Radius $r = 18$, Radius im Lichten $\varrho = 12$, mit der Höhe $h = 60$ mm, dessen zu Π_2 parallele Axe mit Π_1 einen Winkel von 45^0 bildet.

Der Grundriss eines geraden Kreis-Kegels, dessen Grundfläche in Π_1 liegt, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt das Bild S_1 der Spitze ist. Auf- und Seitenriss stellen ein gleichschenkliges Dreieck dar, dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist; eine allgemeinere



I Figur 34. II

Lage stellt Figur 34 I dar. Drehen wir noch um eine zu Π_2 senkrechte Axe, so haben wir eine ganz allgemeine Lage, für den zugehörigen Aufriss findet man das Bild des Grundkreises ähnlich wie beim Zylinder; nachdem man die Spitze S_2 gefunden hat, sind von S_2 an die Ellipse die Tangenten zu ziehen.



Figur 35.

Aufg.: Bei welchen Lagen des Kegels bleibt die ganze Mantelfläche unsichtbar?

Zeichne Grund- und Aufriss eines Kegelstumpfes in beliebiger Lage.

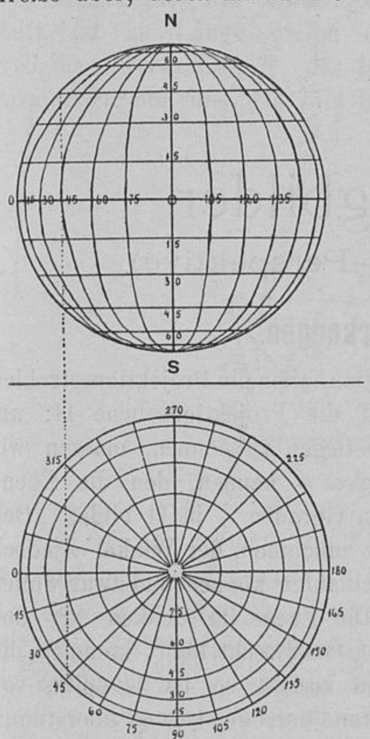
Beschreibe den durch Figur 35 dargestellten Körper, und zeichne ihn auch, nachdem er um eine zu Π_1 senkrechte Axe eine Drehung von 45° erfahren hat.

---

13. Die Kugel.

Die Orthogonalprojektion einer Kugel ist in allen Fällen ein Kreis, dessen Radius gleich dem der Kugel ist. — Kreise auf der Kugel, mögen sie nun grösste oder kleine Kreise sein, projizieren sich wieder als Kreise, wenn ihre Ebene parallel, als Strecken, wenn ihre Ebene senkrecht zu Π ist, in allen anderen Fällen als Ellipsen. Denken wir uns daher die Erdkugel auf eine zu ihrer Axe senkrechte Ebene, z. B. auf die des Äquators projiziert, so gehen die Meridiane alle in Geraden über, die sich im Mittelpunkte des Kreises, dem Nordpol, unter gleichen

Winkeln schneiden; die Parallelkreise aber gehen in konzentrische Kreise über, deren Radius $r_1 = r \cdot \cos \varphi$ wird, wenn φ jedesmal die Breite bezeichnet. Diese Darstellung der Erdoberfläche wird als orthographische Polarprojektion bezeichnet. Zeichnen wir hierzu den Aufriss, so wird der Null-Meridian, den wir parallel zu Π_2 gelegt hatten, sich als Kreis abbilden, der 90. Meridian aber als senkrechter Durchmesser $N\,S$ dieses Kreises, die übrigen Meridiane werden zu Ellipsen, mit $N\,S$ als grosser Axe; die kleine Axe ergibt sich, wenn wir die Endpunkte des zugehörigen Durchmessers im Grundriss auf den Äquator loten, der sich als zu $N\,S$ senkrechter Durchmesser abbildet; die übrigen Breitenkreise bilden sich als Sehnen ab, deren Endpunkte durch den Winkel φ bestimmt werden. Die so erhaltene Darstellung der Erdoberfläche wird als orthographische Äquatorialprojektion bezeichnet. Bei beiden Darstellungen werden die in der Mitte liegenden Gegenden recht genau abgebildet, weshalb man z. B. die Polargebiete gern in dieser Art abbildet; dagegen erfahren die zum Rande hin liegenden Teile eine bedeutende Verzerrung. Für die Darstellung der Himmelskörper Mond, Mars, Jupiter usw., die sich etwa in solchem Bilde uns zeigen, eignet sich diese Projektion recht gut. Für andere Gegenden der Erde als Äquatorial- und Polargegenden kann man die Orthogonalprojektion nur dann gut anwenden, wenn man auf die in der Mitte der abzubildenden Gegend an die Erde gelegte Berührungsebene projiziert; man erhält dann die orthographische Horizontalprojektion. Diese lässt sich aus den vorigen Bildern leicht ableiten, indem man den Aufriss soweit neigt, dass der zu der Mitte der Gegend hinlaufende Erdradius auf Π_1 senkrecht steht und nun mit Hilfe des



Figur 36.