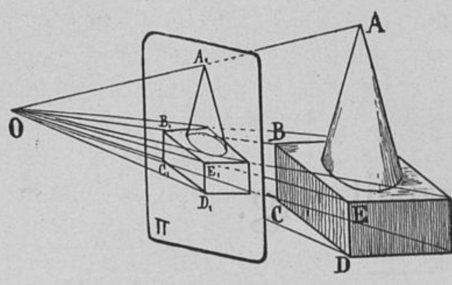
I. Einleitung.

1. Zweck der darstellenden Geometrie.

Von räumlichen Gebilden Modelle herzustellen, derart, dass alle Teile des Modelles den entsprechenden des Objektes kongruent oder auch nur ähnlich sind, ist, wenn nicht unmöglich, so doch oft sehr schwierig. Man pflegt daher die räumlichen, dreidimensionalen Gebilde, in einer Ebene oder einer anderen Fläche als zweidimensionale Figuren abzubilden, um dann an diesen Figuren die Untersuchungen über gegenseitige Beziehungen der Gebilde anzustellen, oder stereometrische Konstruktionen auszuführen. Die Abbildung muss nun so beschaffen sein, dass man wiederum umgekehrt aus dieser das räumliche Gebilde konstruieren kann. Zu zeigen nun, wie man derartige Abbildungen durch Zeichnung herstellt, ist die Aufgabe der darstellenden Geometrie. Sie ist daher nicht nur von grossem Werte für das Studium der Stereometrie, sondern sie ist auch die unentbehrliche Grundlage für viele Zweige der Technik und der Kunst, insbesondere weil sie es ermöglicht, für projektierte Bauwerke, Anlagen, Maschinen u. s. w. Pläne anzufertigen, auf Grund deren die tatsächliche Ausführung erst möglich wird. Abgesehen davon hat sie einen hervorragenden Bildungswert, indem sie in besonderer Weise geeignet ist, das räumliche Anschauungsvermögen zu fördern.

2. Verfahren der darstellenden Geometrie.

Das einfachste Verfahren, räumliche Gebilde auf einer Ebene darzustellen, ist die **Projektion.** Wir nehmen im Raume einen beliebigen Punkt O an, den wir das **Projektionszentrum** oder den Augenpunkt nennen. Ihn verbinden wir durch gerade Linien, die wir die **Projektionsstrahlen** nennen, mit sämtlichen Punkten A, B,



Figur 1.

C, D . . . des abzubildenden Körpers. Jetzt bestimmen wir die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 . . . der Strahlen OA, OB, OC, . . . mit der Ebene Π, auf welcher wir abbilden wollen, und die die **Projektions-** oder **Bildebene** heisst. Die Gesamtheit aller Punkte A_1, B_1, C_1 . . . ist dann die Projektion oder das **„Bild"** des Körpers auf der Ebene Π. **Die Projektion eines Punktes P ist wieder ein Punkt,** nämlich der Schnitt- oder **Spurpunkt** P_1 der Geraden OP mit Π. — Verbindet man die sämtlichen Punkte einer Geraden g mit dem Zentrum O, so liegen alle diese Projektionsstrahlen (zufolge der Definition der Ebene) in einer Ebene Γ, welche die projizierende Ebene von g heisst; da sie die Π in einer Geraden schneidet, so gilt der Satz: **Die Projektion einer Geraden g ist wieder eine Gerade g_1.** Nur wenn g durch das Projektionszentrum geht, projiziert sie sich in einen Punkt P_1. P_1 ist somit die Projektion aller auf dieser Geraden gelegenen Punkte. Damit hätten wir eine Umkehr unseres ersten Satzes, während die Umkehrung des zweiten Satzes besagen würde: Die Gerade g_1 ist zugleich die Projektion aller in der Ebene Γ gelegenen Geraden. Liegt P oder g in Π, so fallen sie mit ihrer Projektion zusammen. Der Spurpunkt einer Geraden g gehört daher sowohl der Geraden selbst als auch ihrer Projektion g_1 an. — Die Projektion einer beliebigen krummen Linie ist im Allgemeinen wieder eine krumme Linie; nur wenn sie ganz in einer durch O gehenden Ebene liegt, projiziert sie sich in eine Gerade, bezw. Strecke. —

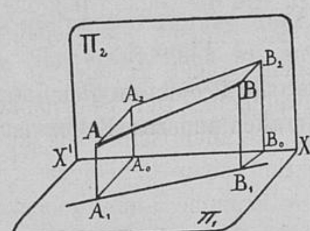
Liegt, wie wir bislang angenommen haben, das Projektionszentrum in endlicher Entfernung von der Bildebene, so heisst diese Art der Abbildung **Zentral-Projektion** oder **Perspektive** im engeren Sinne. Die so entstehenden Bilder wollen wir kurz **Schaubilder** nennen, da bei der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes wir mit unserem Auge als Projektionszentrum die Gegenstände der Aussenwelt so erschauen. Liegt aber das Zentrum unendlich fern, so dass die Projektionsstrahlen parallel laufen, so heisst die Abbildung **Parallelprojektion;** die Projektionsstrahlen werden im allgemeinen einen spitzen bezw. stumpfen Winkel mit der Projektionsebene bilden, und um dies anzudeuten, nennt man diese Abbildung auch die **schräge, klinogonale** oder **schiefwinklige Parallelprojektion;** die durch sie entstandenen Abbildungen eines Körpers wollen wir kurz **Schrägbilder** nennen. Bilden dagegen die Projektionsstrahlen mit der Bildebene einen rechten Winkel, stehen also senkrecht zu ihr, so heisst diese Abbildung **senkrechte** oder **Orthogonal**-Projektion; die von ihr gelieferten Darstellungen wollen wir kurz als **Lotbilder** bezeichnen. Da bei diesen die Verhältnisse leichter zu überschauen sind, so wollen wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen.

II. Lotbilder

(Orthogonalprojektion).

3. Der Punkt, die Strecke.

Das Lotbild eines Punktes A ist der Fusspunkt A_1 des von A auf die Bildebene Π_1 gefällten Lotes. A_1 ist aber auch die Projektion aller auf dem Projektionsstrahle $A A_1$ gelegenen Punkte. Also kann man umgekehrt, wenn A_1 gegeben ist, nicht auf die Lage von A schliessen. Um dies zu ermöglichen, nehmen wir noch eine zweite Bildebene Π_2 hinzu, die wir als senkrecht zu Π_1 und vertikal annehmen, so dass also Π_1 horizontal zu denken ist. Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden $X^1 X$, die wir als die **Projektionsaxe** bezeichnen. Die durch $A\,A_1\,A_2$ gelegte Ebene steht senkrecht zu Π_1 und Π_2 und also auch senkrecht zur Axe, die sie in A_0 schneiden möge. Es ist nun $A A_1$, der Abstand von Π_1, gleich der Entfernung $A_2\,A_0$ der zweiten Projektion von der Axe, ebenso ist $A A_2 = A_1\,A_0$. Durch die beiden Lotbilder A_1 und A_2 ist der Punkt A eindeutig bestimmt als Treffpunkt der in A_1 und A_2 errichteten Senkrechten. Liegt A_1 auf der Axe, so liegt A in Π_2, liegt A_2 auf der Axe, so liegt A in Π_1.



Figur 2.

Nehmen wir jetzt eine Strecke $A B$ (Fig. 2). Die projizierende Ebene, senkrecht zu Π_1, enthält auch die von den Endpunkten gefällten