Anfangsgründe

der

Darstellenden Geometrie

für Gymnasien.

Von

FRITZ SCHÜTTE

Oberlehrer am Gymnasium zu Düren.

Beilage zum Programm des Gymnasiums
Ostern 1905.

Düren (Rhld.) 1905.

Hamel'sche Buchdruckerei.

Vorwort.

Durch die Lehrpläne von 1901 sind erfreulicher Weise die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie auch in den Lehrstoff des Gymnasiums eingefügt. Viele der eingeführten mathematischen Lehrbücher liefern aber bis jetzt noch keine Behandlung dieses Themas, oder enthalten nur kurze Andeutungen hierüber. Die seither besonders für diesen Zweig der Mathematik herausgegebenen Lehrbücher sind für das Gymnasium viel zu umfangreich und für die Schüler zu teuer. Auch überschütten sie zum Teil den Lernenden mit einer solchen Fülle von gelösten Aufgaben, dass die Prinzipien des Verfahrens — und darauf muss es uns auf dem Gymnasium besonders ankommen — dagegen zurücktreten. Auch wird meistens der schrägen Parallelperspektive (wohl infolge einer zu engen Auffassung der Worte des Lehrplanes „Anleitung zum perspektivischen Zeichnen räumlicher Gebilde") zu grosse Bedeutung beigelegt. Aus didaktischen Gründen sollte doch gerade die Orthogonalprojektion, die auch in wissenschaftlicher wie in praktischer Hinsicht die wertvollste ist, in erster Linie in Frage kommen. Denn sie ist besonders geeignet, die Verhältnisse und Beziehungen an den räumlichen Gebilden auf Grund logischer Überlegungen zu studieren, und fördert in höherem Masse als die schräge Parallelperspektive das abstrakte Denken. Darum ist hier die Orthogonalprojektion ausführlicher behandelt, als die beiden anderen Arten der Abbildung; jedoch ist überall nur das Notwendigste in knapper Form geboten. — Die Figuren des Textes sind sämtlich von dem Schüler nachzuzeichnen, am besten in doppelter Grösse; nur dadurch kann der Schüler sich die Methoden und Konstruktionen wirklich aneignen; für die Aufgaben sind Dimensionen meistens angegeben.

Düren, im März 1905.

Fr. Schütte.

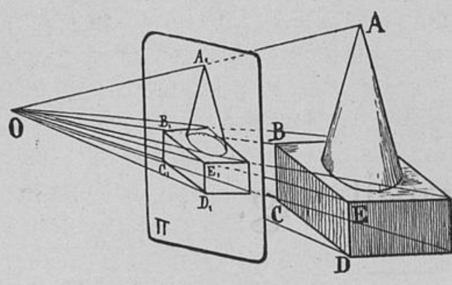
I. Einleitung.

1. Zweck der darstellenden Geometrie.

Von räumlichen Gebilden Modelle herzustellen, derart, dass alle Teile des Modelles den entsprechenden des Objektes kongruent oder auch nur ähnlich sind, ist, wenn nicht unmöglich, so doch oft sehr schwierig. Man pflegt daher die räumlichen, dreidimensionalen Gebilde, in einer Ebene oder einer anderen Fläche als zweidimensionale Figuren abzubilden, um dann an diesen Figuren die Untersuchungen über gegenseitige Beziehungen der Gebilde anzustellen, oder stereometrische Konstruktionen auszuführen. Die Abbildung muss nun so beschaffen sein, dass man wiederum umgekehrt aus dieser das räumliche Gebilde konstruieren kann. Zu zeigen nun, wie man derartige Abbildungen durch Zeichnung herstellt, ist die Aufgabe der darstellenden Geometrie. Sie ist daher nicht nur von grossem Werte für das Studium der Stereometrie, sondern sie ist auch die unentbehrliche Grundlage für viele Zweige der Technik und der Kunst, insbesondere weil sie es ermöglicht, für projektierte Bauwerke, Anlagen, Maschinen u. s. w. Pläne anzufertigen, auf Grund deren die tatsächliche Ausführung erst möglich wird. Abgesehen davon hat sie einen hervorragenden Bildungswert, indem sie in besonderer Weise geeignet ist, das räumliche Anschauungsvermögen zu fördern.

2. Verfahren der darstellenden Geometrie.

Das einfachste Verfahren, räumliche Gebilde auf einer Ebene darzustellen, ist die **Projektion.** Wir nehmen im Raume einen beliebigen Punkt O an, den wir das **Projektionszentrum** oder den Augenpunkt nennen. Ihn verbinden wir durch gerade Linien, die wir die **Projektionsstrahlen** nennen, mit sämtlichen Punkten A, B,



Figur 1.

C, D . . . des abzubildenden Körpers. Jetzt bestimmen wir die Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 . . . der Strahlen OA, OB, OC, . . . mit der Ebene Π, auf welcher wir abbilden wollen, und die die **Projektions-** oder **Bildebene** heisst. Die Gesamtheit aller Punkte A_1, B_1, C_1 . . . ist dann die Projektion oder das **„Bild"** des Körpers auf der Ebene Π. **Die Projektion eines Punktes P ist wieder ein Punkt,** nämlich der Schnitt- oder **Spurpunkt** P_1 der Geraden OP mit Π. — Verbindet man die sämtlichen Punkte einer Geraden g mit dem Zentrum O, so liegen alle diese Projektionsstrahlen (zufolge der Definition der Ebene) in einer Ebene Γ, welche die projizierende Ebene von g heisst; da sie die Π in einer Geraden schneidet, so gilt der Satz: **Die Projektion einer Geraden g ist wieder eine Gerade g_1.** Nur wenn g durch das Projektionszentrum geht, projiziert sie sich in einen Punkt P_1. P_1 ist somit die Projektion aller auf dieser Geraden gelegenen Punkte. Damit hätten wir eine Umkehr unseres ersten Satzes, während die Umkehrung des zweiten Satzes besagen würde: Die Gerade g_1 ist zugleich die Projektion aller in der Ebene Γ gelegenen Geraden. Liegt P oder g in Π, so fallen sie mit ihrer Projektion zusammen. Der Spurpunkt einer Geraden g gehört daher sowohl der Geraden selbst als auch ihrer Projektion g_1 an. — Die Projektion einer beliebigen krummen Linie ist im Allgemeinen wieder eine krumme Linie; nur wenn sie ganz in einer durch O gehenden Ebene liegt, projiziert sie sich in eine Gerade, bezw. Strecke. —

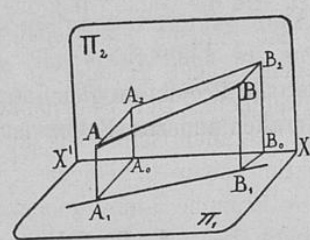
Liegt, wie wir bislang angenommen haben, das Projektionszentrum in endlicher Entfernung von der Bildebene, so heisst diese Art der Abbildung **Zentral-Projektion** oder **Perspektive** im engeren Sinne. Die so entstehenden Bilder wollen wir kurz **Schaubilder** nennen, da bei der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes wir mit unserem Auge als Projektionszentrum die Gegenstände der Aussenwelt so erschauen. Liegt aber das Zentrum unendlich fern, so dass die Projektionsstrahlen parallel laufen, so heisst die Abbildung **Parallelprojektion;** die Projektionsstrahlen werden im allgemeinen einen spitzen bezw. stumpfen Winkel mit der Projektionsebene bilden, und um dies anzudeuten, nennt man diese Abbildung auch die **schräge, klinogonale** oder **schiefwinklige Parallelprojektion;** die durch sie entstandenen Abbildungen eines Körpers wollen wir kurz **Schrägbilder** nennen. Bilden dagegen die Projektionsstrahlen mit der Bildebene einen rechten Winkel, stehen also senkrecht zu ihr, so heisst diese Abbildung **senkrechte** oder **Orthogonal**-Projektion; die von ihr gelieferten Darstellungen wollen wir kurz als **Lotbilder** bezeichnen. Da bei diesen die Verhältnisse leichter zu überschauen sind, so wollen wir uns zunächst mit ihnen beschäftigen.

II. Lotbilder

(Orthogonalprojektion).

3. Der Punkt, die Strecke.

Das Lotbild eines Punktes A ist der Fusspunkt A_1 des von A auf die Bildebene Π_1 gefällten Lotes. A_1 ist aber auch die Projektion aller auf dem Projektionsstrahle $A A_1$ gelegenen Punkte. Also kann man umgekehrt, wenn A_1 gegeben ist, nicht auf die Lage von A schliessen. Um dies zu ermöglichen, nehmen wir noch eine zweite Bildebene Π_2 hinzu, die wir als senkrecht zu Π_1 und vertikal annehmen, so dass also Π_1 horizontal zu denken ist. Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden $X^1 X$, die wir als die **Projektionsaxe** bezeichnen. Die durch $A A_1 A_2$ gelegte Ebene steht senkrecht zu Π_1 und Π_2 und also auch senkrecht zur Axe, die sie in A_0 schneiden möge. Es ist nun $A A_1$, der Abstand von Π_1, gleich der Entfernung $A_2 A_0$ der zweiten Projektion von der Axe, ebenso ist $A A_2 = A_1 A_0$. Durch die beiden Lotbilder A_1 und A_2 ist der Punkt A eindeutig bestimmt als Treffpunkt der in A_1 und A_2 errichteten Senkrechten. Liegt A_1 auf der Axe, so liegt A in Π_2, liegt A_2 auf der Axe, so liegt A in Π_1.

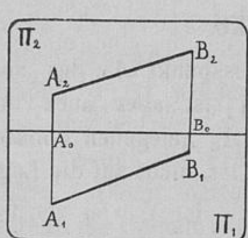


Figur 2.

Nehmen wir jetzt eine Strecke $A B$ (Fig. 2). Die projizierende Ebene, senkrecht zu Π_1, enthält auch die von den Endpunkten gefällten

Lote AA_1 und BB_1 und demnach ist $A_1 B_1$ das Bild von AB. Umgekehrt ist $A_1 B_1$ das Lotbild aller der unendlich vielen Strecken, die ihre Endpunkte auf den beiden Strahlen $A_1 A$, $B_1 B$ haben, daher kann man aus $A_1 B_1$ keine Schlüsse auf $A B$ ziehen. Projizieren wir nun $A B$ auch auf die Π_2 als $A_2 B_2$, so ist durch die beiden Bilder $A B$ der Grösse, Lage und Richtung nach bestimmt. Da nun das Zeichnen in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen nicht gut möglich ist, so denkt man sich die Ebene Π_1 um die Axe gedreht, sodass sie mit der Π_2 in eine Ebene fällt. Da nun die in Π_1 und Π_2 liegenden Geraden $A_1 A_0$, $A_2 A_0$ auf der Axe senkrecht stehen, so fallen sie, wie auch $B_1 B_0$, $B_2 B_0$, nach erfolgter Drehung in eine Gerade und wir haben dann das Bild, wie es Fig. 3 zeigt.

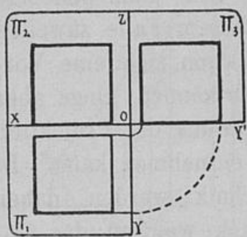
Das Bild in der Π_1 zeigt uns, wie die Strecke $A B$ einem in unendlicher Entfernung befindlichen Auge, das senkrecht von oben her auf Π_1 blickt, erscheint. Dieses Bild heisst der **Grundriss.** Das Bild in Π_2 zeigt, wie die Strecke $A B$ von vorn aus unendlicher Entfernung senkrecht auf Π_2 gesehen erscheint; es heisst der **Aufriss.** Dementsprechend werden auch die Ebenen Π_1 und Π_2 als **Grundriss**- bezw. **Aufrissebene** bezeichnet. Ist eine Strecke parallel zu einer der beiden Ebenen, so ist die Projektion auf diese Ebene so lang wie die Strecke; ist sie senkrecht dazu, so ist die Projektion gleich 0, d. h. die Strecke projiziert sich als Punkt. In allen anderen Fällen ist das Lotbild kürzer als die Strecke selbst.



Figur 3.

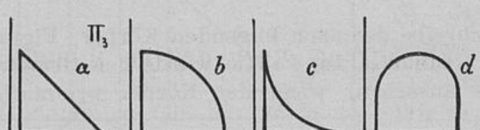
4. Einführung einer dritten Bildebene.

Denken wir uns einen Würfel, der mit einer Fläche auf der Π_1 steht, projiziert, so erhalten wir, wie sich aus dem Vorigen ergiebt, als Bild ein Quadrat von der Grösse der Würfelfläche; die senkrechten Kanten projizieren sich ja als Punkte. Legen wir nun die Π_2 parallel zu einer Seitenfläche, so ist auch das Bild in Π_2 ein Quadrat, dessen eine Seite auf der Axe liegt. Der Abstand des Quadrates in Π_1 von der Axe zeigt uns dagegen, wie weit der Würfel vor der Π_2 steht. Aber auch aus diesen beiden Bildern geht noch nicht hervor, dass der dargestellte Körper ein Würfel ist, insbesondere wenn wir nicht die Zusammengehörigkeit der entsprechenden Punkte genau angeben oder in der Zeichnung wiedergeben können. Ein gerades, rechtwinklig dreiseitiges Prisma mit zwei quadratischen Seitenflächen würde dieselben Bilder in Grund- und Aufriss geben, und noch unzählig viele andere Körper. Wir nehmen daher noch eine dritte Projektionsebene Π_3 hinzu, die senkrecht zu den beiden vorigen steht und die als **Seitenrissebene** bezeichnet wird. Das in ihr entstehende Bild wird als Seitenriss bezeichnet. Diese Ebene Π_3, welche wir uns rechts liegend und nach vorn verlaufend denken, schneidet Π_1 und Π_2 in zur ersten Axe OX senkrechten Geraden OY und OZ. Die drei Bildebenen bilden also eine dreirechtwinklige Ecke, so wie die vom Fussboden, Vorder- und Seitenwand eines Zimmers gebildete Ecke. Um nun auch hier in einer Ebene zeichnen zu können, denken wir uns die Figur längs der Kante OY aufgeschnitten, und legen alle 3 Ebenen in eine einzige, die Zeichenebene, nieder; dann haben wir das Bild, wie es Figur 4 zeigt.



Figur 4.

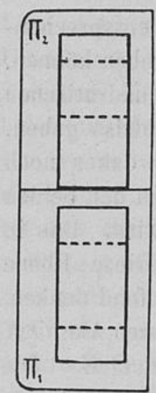
Die Gerade OY kommt dann als OY^1 in die Verlängerung an OX zu liegen. Projizieren wir nun auch unseren Würfel auf die Π_3, so erhalten wir abermals ein Quadrat, dessen eine Seite auf der Axe OY^1 liegt, und soweit rechts von der OZ, als der Würfel vor der Π_2 steht. (Daher die Uebertragung dieser Entfernung durch die um O beschriebenen Bögen von OY auf OY^1.) Nun erst können wir aus den drei Bildern auf einen Würfel schliessen. Würde der Seitenriss die Figur 5 a sein, so hätten wir es mit dem vorher genannten Prisma zu tun.



Figur 5.

Aufg.: Welcher Körper liegt vor, wenn der Seitenriss die Gestalt der Figur 5 b, c, d hat, Grund- und Aufriss aber Quadrate sind?

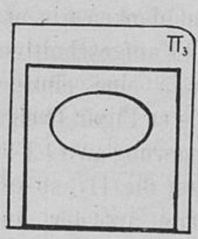
In Figur 6 kann weder aus dem Grundriss, noch aus dem Aufriss erkannt werden, um welchen Körper es sich handelt. Die punktierten Linien bedeuten hierbei solche, die von oben, bezw. von vorn betrachtet, nicht sichtbar sind, sondern durch darüber,



Figur 6.

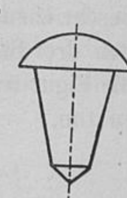
bezw. davor liegende Flächen verdeckt werden. Erst der Seitenriss (Fig. 7) belehrt uns, dass wir es mit einer quadratischen Platte zu tun haben, die von einer elliptischen Oeffnung durchbohrt ist.

Ein Seitenriss wird immer dann notwendig sein, wenn Seitenflächen des Körpers senkrecht zu Π_1 und Π_2 stehen (also parallel zu Π_3), weil sie sich dann mit allen in ihr befindlichen Figuren in eine Gerade projizieren. Wir können dies zwar vermeiden, wenn wir dem abzubildenden Körper eine ganz beliebige Lage geben. Man würde in diesem Falle zuweilen schon aus einer einzigen Projektion sich eine Vorstellung von dem Körper machen können, ginge aber dann des besonderen Vorzuges verlustig, dass man aus der Projektion sofort die wahren Dimensionen des Körpers entnehmen kann. In der Architektur und Technik werden daher diejenigen Zeichnungen, nach welchen das Objekt konstruiert werden soll, immer als Grundriss, Aufriss und Seitenriss hergestellt. Da nun sehr viele Gebilde der Technik drei zueinander senkrechte Ebenen enthalten (Gebäude, Maschinenteile u. s. w.) so ist ein Seitenriss meist unumgänglich. Bei Rotationskörpern, deren Axe senkrecht zu Π_1 steht, ist der Seitenriss mit dem Aufriss kongruent, also entbehrlich, ebenso ist meistens auch der Grundriss entbehrlich, wenn man weiss, dass ein Rotationskörper vorliegt, was man in der Technik dadurch andeutet, dass man die Axe strichpunktiert anzeichnet.



Figur 7.

Aufg.: Beschreibe demnach folgenden Körper, Figur 8. Wie sieht der Grundriss aus? Wie würde der Grundriss und Seitenriss aussehen, wenn der Körper prismatisch wäre?



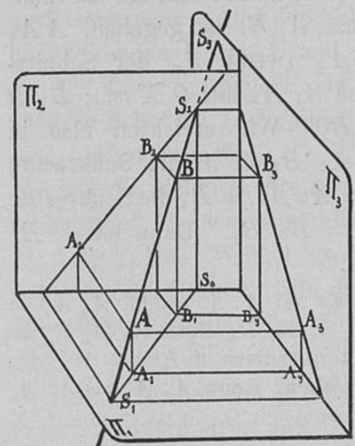
Figur 8.

---

5. Die Gerade.

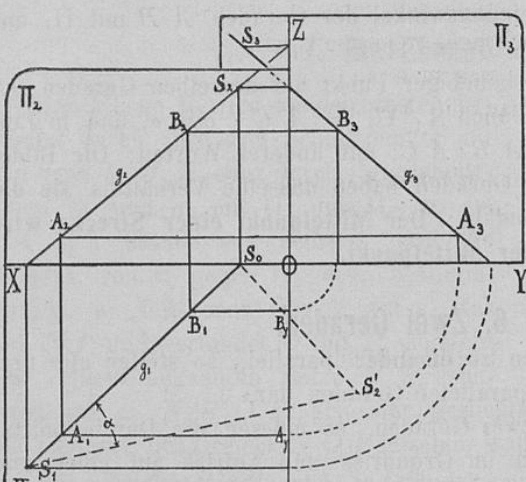
Aufgabe: Eine Gerade g sei durch zwei ihrer Punkte A und B gegeben. Man bestimme ihre drei Lotbilder g_1, g_2, g_3, die Spurpunkte in den Bildebenen S_1, S_2, S_3 und die Neigungen gegen diese α, β, γ.

Aufl.: Wir loten A und B auf Π_1 und Π_2 als A_1, A_2 und B_1, B_2. Die Verbindungslinien $A_1\ B_1$ und $A_2\ B_2$ geben den Grundriss g_1, bezw. den Aufriss g_2. Um auch den Seitenriss g_3 aus den beiden anderen Bildern zu erhalten, loten wir A_1 und B_1 auf die Axe OY als $A_y\ B_y$, übertragen die Entfernungen auf OY^1 und errichten in den Endpunkten die Lote, welche die durch A_2 und B_2 zu OX gezogenen Parallelen in A_3 bezw. B_3 treffen. Die Verbindungslinie $A_3\ B_3$ gibt den Seitenriss g_3. Siehe Fig. 9 und 10.



Figur 9.

Um den Spurpunkt S_1 der Geraden mit der Π_1 zu finden, beachte man, dass er erstens auf g_1 liegen muss, zweitens, dass seine zweite Projektion auf OX und auf g_2 liegen muss. Ebenso findet man S_2, indem man im Schnittpunkte S_0 der g_1 mit OX die Senkrechte errichtet; sie schneidet g_2 in S_2. Ebenso trifft die im Schnittpunkte von g_2 mit OZ errichtete Senkrechte die g_3 in S_3. (Da in unserem Beispiele S_3 hinter Π_2 fällt, so wird nach Ausbreitung der drei Ebenen in eine Zeichenebene der der $\Pi_3$angehörige Punkt S_3 links von OZ fallen in das gewöhnliche Gebiet der Π_2).



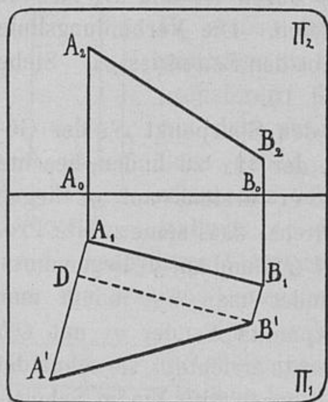
Figur 10.

Der Neigungswinkel α ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke $S_0\ S_1\ S_2$, das wir uns in wahrer Grösse leicht zeichnen können: Wir errichten in S_0 eine Senkrechte $S_0\ S_2{}^1$ gleich $S_0\ S_2$ und verbinden S_1 mit $S_2{}^1$. Wir haben damit auch $S_1\ S_2$ in seiner wahren Grösse.

Aufg.: Wo ist der Winkel β, wo γ? Konstruiere diese beiden Winkel. Wie lang ist $S_2\ S_3$?

Zeichne die drei Lot-Bilder einer zu OX parallelen, aber im übrigen beliebigen Geraden.

Aufg.: Aus zwei Projektionen einer Strecke (Fig. 11) ihre wahre Länge zu bestimmen.



Figur 11.

Aufl.: Wir haben nur das rechtwinklige Trapez $A B\ A_1 B_1$ zu konstruieren. $A_1 B_1$ ist gegeben, $A A_1 = A_0\ A_2$ (wenn A_0 der Schnittpunkt von $A_1\ A_2$ mit $O\ X$ ist); $B_1\ B = B_0\ B_2$. Wir errichten also in Π_1 aut $A_1\ B_1$ in A_1 die Senkrechte $A_1\ A^1 = A_0\ A_2$, in B_1 die Senkrechte $B_1\ B^1 = B_0\ B_2$. Dann ist $A^1\ B^1 = A\ B$.

Aufg.: Es sei $A_0\ A_1 = 15$, $A_0\ A_2 = 48$, $B_0\ B_1 = 30$, $B_0\ B_2 = 10$, $A_0\ B_0 = 55$ mm; konstruiere $A\ B$.

Desgleichen, wenn $A_0\ A_1 = A_0\ A_2 = 40$, $B_0\ B_1 = B_0\ B_2 = 0$, $A_0\ B_0 = 60$ mm.

Kennt man umgekehrt die wahre Länge einer Strecke und die Projektion, so kann man den zur Π senkrechten Abstand der Endpunkte bestimmen.

Ziehen wir durch B^1 die Parallele $B^1\ D$, so ist Winkel $D\ B^1\ A^1 = \alpha$ der Neigungswinkel der Geraden $A\ B$ mit Π_1 und es ist

$$A_1\ B_1 = A\ B \cdot \cos \alpha.$$

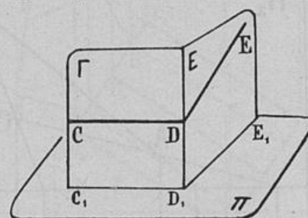
Ist C ein dritter beliebiger Punkt auf derselben Geraden, C_1 seine Projektion, so ist auch $A_1\ C_1 = A\ C \cdot \cos \alpha$, und hieraus folgt $A_1 B_1 : A_1\ C_1 = A\ B : A\ C$; mit anderen Worten: Die Bilder von Strecken derselben Geraden haben dasselbe Verhältnis wie die Strecken selbst, inbesondere: **Der Mittelpunkt einer Strecke wird auch im Lotbilde wieder Mittelpunkt.**

6. Zwei Geraden.

Sind zwei Geraden zu einander parallel, so stellen alle drei Projektionen ein Paar paralleler Geraden dar.

Schneiden sich zwei Geraden, so müssen die Durchschnittspunkte der Projektionen im Grundriss und Aufriss auf einer und derselben zur Axe senkrechten Geraden liegen. Im anderen Falle sind die Geraden windschief; ihre Projektionen werden sich dann allerdings auch schneiden, dieser Schnitt ist aber nur der Spurpunkt der Durchschnittslinie der projizierenden Ebenen.

Bilden zwei sich schneidende Geraden einen rechten Winkel, so bleibt dieser im Lotbilde erhalten, wenn nur der eine Schenkel $C\,D$ zur Π parallel läuft. Beweis: (Fig. 12) Alle zu $C\,D$ rechtwinklige Geraden liegen in einer zu $C\,D$ senkrechten Ebene E; diese steht auch senkrecht zu der den Schenkel $D\,C$ projizierenden Ebene Γ und somit auch zu Π, daher projiziert sie auch den anderen Schenkel $D\,E$; die Projektionen der beiden Schenkel, $D_1\,C_1$ und $D_1\,E_1$, als die Schnitte dreier zu einander senkrechter Ebenen, sind also auch senkrecht zu einander.

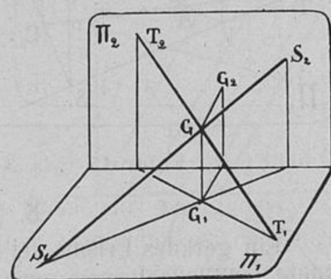


Figur 12.

Aufg.: Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden, die durch ihre Spurpunkte S_1 und S_2, T_1 und T_2 gegeben sind, zu zeichnen.

Aufl.: Zeichne die perspektivische Figur 13 in Grundriss und Aufriss, und zeichne das Dreieck $T_1\,S_1\,G_1$ in seiner wahren Grösse in der Ebene Π_1.

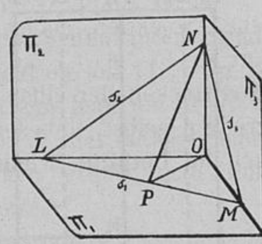
Füge auch den Seitenriss bei.



Figur 13.

7. Die Ebene.

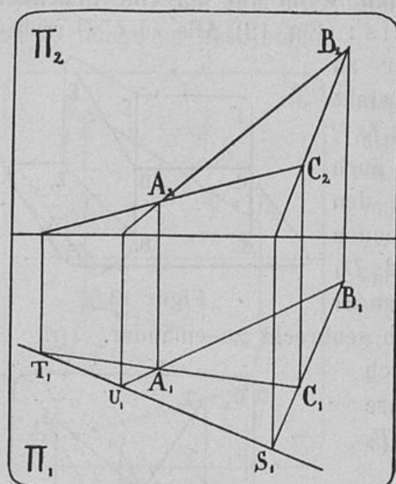
Eine Ebene E wird am leichtesten bestimmt durch ihre drei Schnittpunkte mit den Axen L, M, N, oder durch ihre Schnittlinien s_1 und s_2 mit Π_1 und Π_2 (s_3 ergibt sich daraus von selbst). Soll die Neigung von E gegen Π_1 etwa bestimmt werden, so fällt man von N auf s_1 das Lot $N\,P$ und verbindet O mit P, so steht nach einem bekannten Satze $O\,P$ senkrecht auf s_1, $N\,P\,O$ ist also der gesuchte Neigungswinkel; man hat demnach das Dreieck $N\,O\,P$ in seiner wahren Grösse zu zeichnen.



Figur 14.

Aufg.: Zeichne die Figur 14 in Grundriss und Aufriss und bestimme die Neigungen auch mit Π_2 und Π_3. Nimm $O\,L = 5$, $O\,M = 4$, $O\,N = 3$ cm. — Welche Figur entsteht, wenn E parallel zu $O\,X$?

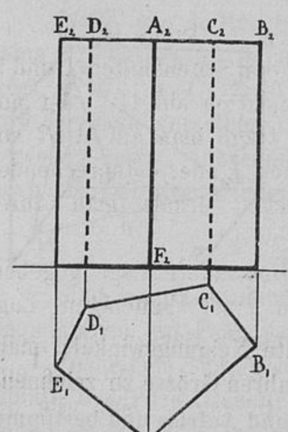
Verwickelter wird die Aufgabe, wenn die Ebene E durch drei Punkte A, B, C gegeben ist. Diese Punkte seien durch ihre Projektionen gegeben. Man bestimme zuerst den Spurpunkt S_1 der Geraden $B\,C$ (Nach 5) mit Π_1, durch diesen muss die Ebene gehen, da sie ja durch $B\,C$ geht; ebenso den Spurpunkt T_1 der Geraden $A\,C$ mit Π_1, auch durch diesen geht die Ebene und es ist also $S_1\,T_1$ die Schnittlinie von E mit Π_1. Ähnlich bestimme man die Spurpunkte S_2 und T_2 und damit die Schnittlinie von E mit Π_2, dann ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt. Hat man richtig gezeichnet, so muss auch der Spurpunkt U_1 von $A\,B$ auf $S_1\,T_1$ liegen.



Figur 15.

8. Das Prisma.

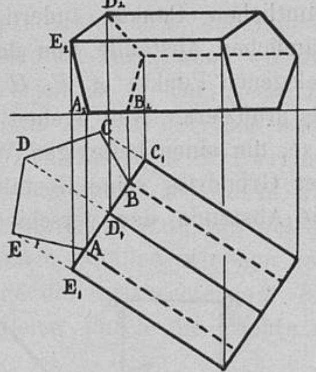
Ein gerades Prisma sei durch seine Grundfläche und Höhe bestimmt. Wir stellen es zunächst mit seiner Grundfläche $F\,G\,H\ldots$ auf die Π_1. Die Seitenkanten projizieren sich als Punkte, da sie senkrecht zu Π_1 stehen. Das Bild der Deckfläche $A_1\,B_1\,C_1\ldots$ fällt mit der Grundfläche zusammen.



Figur 16.

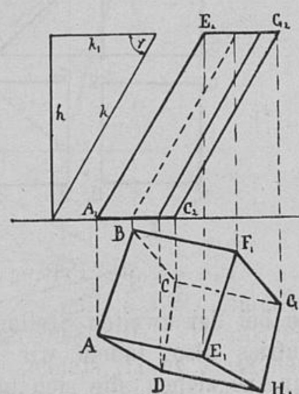
Im Aufriss projizieren sich die Seitenkanten als Senkrechte zur Axe. Fällt man also von den Punkten A_1, $B_1\ldots$ Senkrechte auf die Axe und trägt von der Axe aus die gegebene Höhe auf diesen ab, so bekommt man den Aufriss der Deckfläche.

Liegt das Prisma mit einer seiner Seitenflächen auf der Π_1 (Figur 17), so behält diese Seitenfläche ihre wahre Grösse im Grundriss bei. Die Grundfläche projiziert sich, weil senkrecht zu Π_1, auf die zu dieser Seitenfläche gehörige Seite $A\,B$. Denken wir uns nun diese Grundfläche um $A\,B$ gedreht, bis sie in die Π_1 fällt, so beschreibt jede Ecke, z. B. E, einen Viertelkreis, dessen Ebene senkrecht zu $A\ B$, also auch senkrecht zu Π_1 steht. Dieser Kreis projiziert sich also in Π_1 als eine Senkrechte zu $A\ B$ durch E; die von E auf $A\ B$ gefällte Senkrechte liefert uns also den Punkt E_1; auf der von E_1 zur Axe gefällten Senkrechten $E_1\ E_0$, und zwar im Abstande $E_1\ E$ von dieser liegt E_2. Ebenso findet man die anderen Ecken; A_2 und B_2 dagegen liegen auf der Axe.



Figur 17.

Ist das Prisma schief, so müssen wir ausser Grundfläche und Höhe h noch den Neigungswinkel γ der Seitenkanten gegen die Grundfläche kennen und die Richtung, welche die Ebene des Neigungswinkels (etwa gegen eine der Grundkanten) hat. Sei $A\ B\ C\ D$ die Grundfläche, die wir auf Π_1 legen, so fällt diese mit ihrem Grundriss zusammen, ihr Aufriss fällt in die Axe. Das aus der Kathete h und dem gegenüberliegenden Winkel γ konstruierte rechtwinklige Dreieck

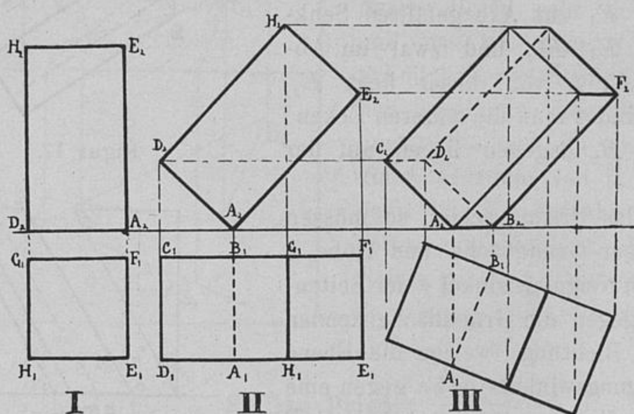


Figur 18.

liefert in seiner Hypotenuse die wahre Länge der Seitenkanten k und in der anderen Kathete die Länge k_1 der Projektion auf Π_1. Ist nun $A\ R$ die Richtung der Neigungsebene, so trage man auf $A\ R$ von A aus k_1 ab, dann erhält man die Projektion E_1 der entsprechenden Ecke E der Deckfläche; die übrigen Ecken erhält man durch Parallele, und den Aufriss in bekannter Weise.

Bisher haben wir dem Prisma eine besondere Lage gegeben. Wir wollen nun zeigen, wie man es in einer beliebigen Lage abbilden kann. Nehmen wir, um das Verfahren klar zu legen, eine quadratische Säule und stellen sie zuerst auf die Π_1, so dass eine Seitenfläche der Π_2 parallel läuft (erste Stellung). Dann gibt uns Figur 19 I den Grundriss und Aufriss. Jetzt kippen wir die Säule um die zu Π_2 senkrechte Kante $A\ B$ um einen beliebigen Winkel α

(zweite Stellung), dann behält der Aufriss seine Gestalt, und die sämtlichen Punkte ändern wohl ihre Lage, behalten aber die nämlichen Abstände **von der** Π_2 bei, daher bleiben z. B. die vorn gelegenen Punkte $A\ E\ H\ D$ in der Verlängerung von $H_1\ E_1$ auf Π_1 projiziert. Nun drehen wir die Säule um eine zu Π_1 senkrechte Axe, um einen beliebigen Winkel β (dritte Stellung), dann behält der Grundriss seine Gestalt bei; bei dieser Drehung aber bleiben die Abstände der verschiedenen Punkte von der Π_1 dieselben wie



Figur 19.

sie bei der zweiten Stellung im Aufriss waren. Wir erhalten den Aufriss also, indem wir durch die Punkte im Aufriss II Parallele zur Axe ziehen, die sich mit den von dem Grundriss III auf die Axe gefällten Senkrechten in den zugehörigen Punkten schneiden. Will man vermeiden, dass die eine Kante noch auf der Axe liegt, so kann man den Aufriss senkrecht zur Axe verschieben, soll die Kante auch nicht parallel zu ihr sein, so kann man das Verfahren nochmals wiederholen. Wichtig ist hier das Prinzip des Verfahrens: **Dreht man einen Körper um eine zu Π senkrechte Axe, so behalten alle Punkte denselben Abstand von Π.**

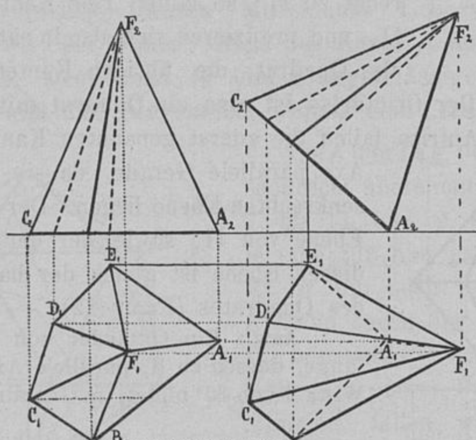
Aufg.: Zeichne ein regulär dreieckiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen aus der Kante a = 25 mm.

Zeichne eine regulär sechsseitige Säule, deren Grundkante 18, deren Höhe 50 mm ist in Grundriss, Aufriss, Seitenriss.

Zeichne einen würfelförmigen Trog, dessen Kanten 48 mm lang, dessen Wandungen 6 mm dick sind, in beliebiger Stellung.

9. Die Pyramide.

Die Pyramide sei gegeben durch ihre Grundfläche, die Höhe h und den Fusspunkt der Höhe. Der letztere ist dann, wenn wir die Grundfläche auf Π_1 legen, zugleich die Projektion F_1 der Spitze F. Im Aufriss haben wir F_2 in dem Abstande h von der Axe senkrecht oberhalb F_1 zu zeichnen, so dass sich die Figur 20 I ergibt. Wollen wir auch hier eine beliebige Lage abbilden, so drehen wir die Pyramide zunächst um eine zu Π_2 senkrechte Axe, als welche wir z. B. die Gerade $A_1 A_2$ nehmen können. Fällen wir nun von den Punkten in Π_2 bei der neuen Lage die Senkrechten auf die Axe und schneiden sie mit den Parallelen durch die Punkte in



I Figur 20. II

Π_1, so bekommen wir auch den neuen Grundriss. Hierbei hat die Pyramide schon eine allgemeine Lage; wenn nicht, kann man nochmals drehen und verfahren wie oben angegeben.

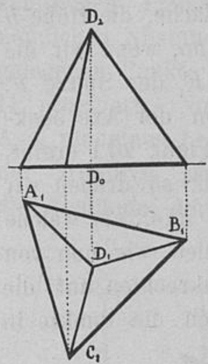
Aufg. Zeichne eine reguläre quadratische Pyramide, deren Höhe gleich der Diagonale der Grundfläche ist, in beliebiger Lage und füge auch den Seitenriss bei.

Bei welchem Körper stellt Grundriss und Aufriss ein gleichseitiges Dreieck dar mit einer zur Axe senkrechten Höhe?

---

10. Die regulären Polyeder.

1. **Das Tetraeder.** Legen wir eine seiner Flächen $A B C$ in Π_1, so fällt das Bild D_1 der vierten Ecke in den Schnittpunkt der Mittellinien, auf welche sich auch die Seitenkanten projizieren. **Der Grundriss ist ein regelmässiges Dreieck mit den Umkreisradien.** Die Höhe $D_0 D_2 = h_1$ ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks,



Figur 21.

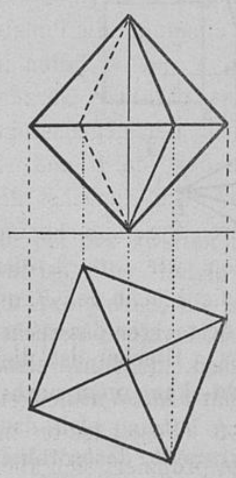
dessen Hypotenuse die Höhe h einer Seitenfläche, dessen andere Kathete $\frac{h}{3}$ ist.

Aufg.: Zeichne zu dieser Figur den Seitenriss. Zeichne die Figur so, dass $A\ C$ senkrecht zur Axe läuft und drehe dann das Tetraeder um $A\ C$ um einen Winkel von 30^0.

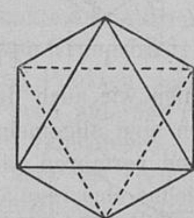
Stellt man die Verbindungslinie der Mitten zweier windschiefer Kanten senkrecht auf Π_1, so ist der Grundriss **ein regelmässiges Viereck mit seinen Diagonalen.**

2. **Das Oktaeder.** Stellen wir eine Axe senkrecht zu Π_1, so laufen vier Kanten parallel zu Π_1 und projizieren sich also in natürlicher Grösse als Quadrat, die übrigen Kanten fallen in die Diagonalen. **Der Grundriss ist also ein Quadrat mit den Umkreisradien.** Im Aufriss fallen die zuerst genannten Kanten in eine zur Axe parallele Gerade, da sie in einer zu Π_2 senkrechten Ebene liegen. Der Abstand dieser Ebene von Π_1 sowie der der Ecke oberhalb dieser Ebene ist gleich der halben Diagonale des Quadrates (Figur 22).

Aufg.: Ein Oktaeder von 30 mm Kantenlänge, dessen zu Π_2 parallele Axe mit Π_1 einen Winkel von 30^0 bildet, im Grundriss zu zeichnen.



Figur 22.

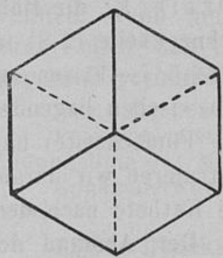


Figur 23.

Projiziert man auf eine Seitenfläche, so erhält man ein regelmässiges Sechseck mit den Diagonalen, die eine Ecke überschlagen (Figur 23).

3. **Der Würfel.** In der ersten Stellung haben wir ihn schon in Figur 4 gezeichnet; aus den Angaben in Nr. 8 (Zeichnung der quadratischen Säule) ist nun leicht die

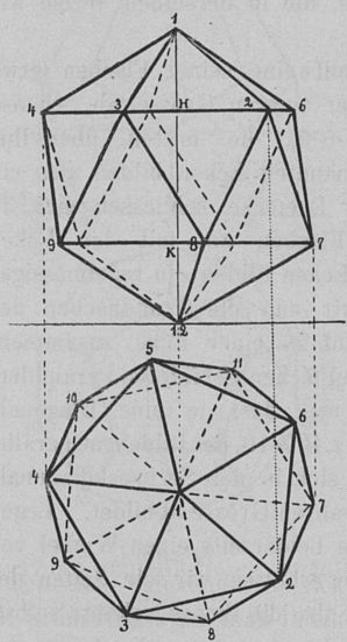
Aufg.: Einen Würfel von 32 mm Kantenlänge in beliebiger Stellung zu zeichnen.



Figur 24.

Steht die Diagonale auf Π_1 senkrecht, so ist der Grundriss ein regelmässiges Sechseck mit den Umkreisradien. (Fig. 24.)

4. **Das Ikosaeder.** Es hat 12 Ecken, die wir der Einfachheit halber (auch in den Bildern) mit 1, 2, 3 usw. bis 12 bezeichnen. Die Axe 1—12 stellen wir senkrecht auf Π_1, dann liegen 2—6 sowohl wie 7—11 je in einer zu Π_2 parallelen Ebene und sind die Ecken zweier regelmässigen Fünfecke, die aber um 36° gegeneinander gedreht sind, also bilden sie in der Projektion insgesamt ein regelmässiges 10-Eck, dessen Mittelpunkt 1 bezw. 12 ist; in 2—3 haben wir die wahre Länge der Kante. **Man erhält also den Grundriss, wenn man in einem regelmässigen 10-Ecke die Radien zieht und die Diagonalen, welche eine Ecke überschlagen.**



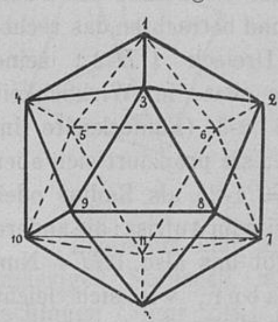
Figur 25.

Im Aufriss liegen 12 und 1 senkrecht übereinander; die Punkte 7 bis 11 und 2 bis 6 fallen in je eine zur Axe parallele Gerade. Es ist nur noch der gegenseitige Abstand sowie der von 1 und 12 zu bestimmen. Um zunächst die Höhe der oberen Pyramide zu bestimmen, fällen wir von 1 das Lot 1 H auf die Fläche des Fünfecks 2—6 und betrachten das rechtwinklige Dreieck 1 H 2; seine Hypotenuse hat in Wirklichkeit die Länge 2-3 (Fünfeckseite im Grundriss); sie projiziert sich aber als $H\,2 = 1\text{-}2$, als Radius oder Sechseckseite im Aufriss; die andere Kathete gibt uns also 1 H. Nun bilden aber, wie sich leicht zeigen lässt,*) Fünfeck-, Sechseck- und Zehneckseite im

*) Denn $\left(\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2$.

s e l b e n K r e i s e e i n r e c h t w i n k l i g e s D r e i e c k; **die Höhe der beiden Pyramiden ist also gleich der Zehneckseite** (2-8) **im Grundriss.** Um den Abstand der beiden Fünfecke 2—6, 7—11 von einander zu finden, beachte man, dass eine der dazwischen liegenden Kanten, etwa 2-8, in Wirklichkeit die Länge 2-3 (Fünfeckseite) hat, sich aber als 2-8 (Zehneckseite) projiziert; konstruieren wir daraus ein rechtwinkliges Dreieck, so wird seine zweite Kathete nach dem Obigen gleich der Sechseckseite 1-2 werden. **Der Abstand der beiden Fünfecksflächen ist also gleich dem Radius des ihnen umbeschriebenen Kreises. Die beiden gesuchten Abstände haben also zueinander das Verhältnis des goldenen Schnittes.** Tragen wir also im Aufriss auf der in 12 über 1 errichteten Senkrechten das Stück 2-8 als 12-K ab und dahinter $K\ H$ = 1-2 und dahinter wieder 2-8 als H 1, so liefern die durch H und K zur Axe gezogenen Parallelen und die aus dem Grundriss heraufgezogenen Senkrechten die Eckpunkte im Aufriss, die in derselben Weise wie dort zu verbinden sind.

Projiziert man das Ikosaeder auf eine seiner Flächen (etwa 5-6-11), so bildet sich diese in ihrer wahren Grösse ab, ebenso die ihr parallel gegenüberliegende 3-8-9, die mitten über ihr, aber um 60° gedreht liegt; die genannten Ecken bilden also ein reguläres Sechseck. An jedes dieser Dreiecke schliessen sich in gleicher Neigung drei kongruente Flächen an, mit den Ecken 1, 7, 10 bezw. 2, 4, 12; auch diese Ecken bilden ein regelmässiges Sechseck. S. Fig. 26. Betrachten wir nun die Grundflächen der von je fünf in einer Ecke zusammenstossenden Flächen gebildeten Pyramiden, so sehen wir, dass je eine Diagonale derselben, z. B. 7-10, der Bildebene parallel läuft und sich in der Sechseckdiagonale in ihrer wahren Grösse abbildet. Legen wir an sie beiderseits einen Winkel von 36° an, so erhalten wir die Seiten des Fünfecks, also die Ikosaederkante selbst, und diese Länge müssen die Seiten der beiden zuerstgenannten Dreiecke haben.



Figur 26.

Diagonale und Seite eines Fünfecks verhalten sich aber wie die Teile einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke, folglich tuen es auch die Umkreisradien der beiden Sechsecke, und wir haben den Satz: **Das Lotbild eines Ikosaeders auf eine seiner Flächen wird**

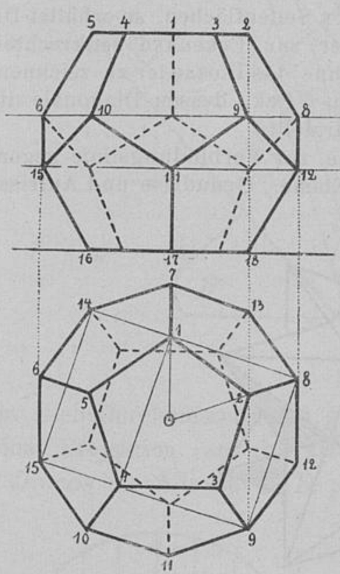
erhalten, wenn man die Ecken zweier konzentrischer Sechsecke, deren Seiten das Verhältnis des goldenen Schnittes haben, entsprechend verbindet.

Aufg.: Zeichne zu Fig. 26 den Aufriss.

Projiziere das Ikosaeder auf eine Ebene, die senkrecht zur Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegender Kanten steht.

Konstruiere den Radius der dem Ikosaeder ein- und umschriebenen Kugel.

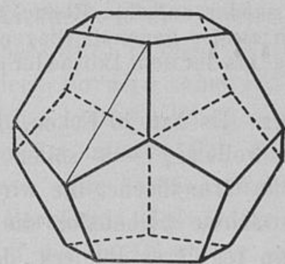
5. **Das Dodekaeder.** Es hat 20 Ecken, die wir der Reihe nach mit 1—20 bezeichnen wollen; 1—5 sollen die obere oder Deckfläche bilden, 16—20 die Grundfläche, die wir in die Π_1 legen und die folglich ihre wahre Grösse beibehält; die Ecken 6—10 sowohl wie 11—15 bilden je ein reguläres Fünfeck, dessen Seite die Länge der Grundflächendiagonale hat, und dessen Ebene parallel zu Π_1 liegt. Die beiden Fünfecke sind aber um 36⁰ gegeneinander gedreht, daher bilden sie in der Projektion ein regelmässiges Zehneck; die Seiten desselben sind die Projektionen der zwischen den Ecken 6—17 auf- und absteigenden Dodekaederkanten. Da nun die Diagonalen 8-9 sowohl wie 14-15 der Diagonale 1-4 der Deckfläche gleich und parallel sind und ebenfalls symmetrisch zu der durch 2—3 gelegten Mittelsenkrechten liegen, anderseits die Ecken 1 und 4 auf den vom Mittelpunkte *O* des Fünfecks ausgehenden Strahlen liegen, so findet man diese Ecken als Schnitt der Radien 0-7 und 0-10 mit den Diagonalen 8-14 und 9-15 des Zehnecks. Aehnlich ergeben sich die anderen Ecken. **Man bekommt also die Ecken im Grundriss, wenn man in einem regelmässigen Zehneck die Radien und die Diagonalen zieht, welche zwei Ecken überschlagen.**



Figur 27.

Für den Aufriss beachte man, dass die von der Grund- und Deckfläche ausgehenden Seitenflächen-Diagonalen, die alle die wahre Länge 8-9 (Fünfeckseite) haben, sich in Π_1 teils als 8-1 = 8-0 (Radius) oder die zu der entferntesten Ecke laufenden sich auf 1-14 14-7 (Zehneckseite) projizieren. Daraus folgt, dass die

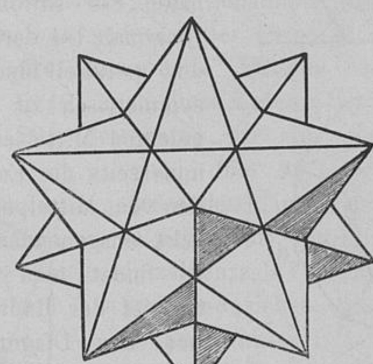
Höhe der Punkte 11—15 über der Π_1 gleich der 10-Eck-Seite, der von 6—10 gleich dem Radius des Grundrissumkreises ist. Die gesuchten Abstände haben also das Verhältnis des goldenen Schnittes.



Figur 28.

Aufg.: Zeichne die Figur des Ikosaeders (Fig. 26) in doppelter Grösse und verbinde die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhältst Du das Lotbild eines Dodekaeders auf einer zur Eckenaxe senkrechten Ebene (Figur 28). Versuche die Figur ohne das Ikosaeder zu zeichnen. (Anweisung: 6 Ecken liegen auf einem 6-Eck, dessen Diagonale die Fünfecks-Diagonale in wahrer Länge darstellt.)

Projiziere das Dodekaeder auf eine zur Verbindungslinie gegenüberliegender Kantenmitten senkrechte Ebene. Grundriss und Aufriss!

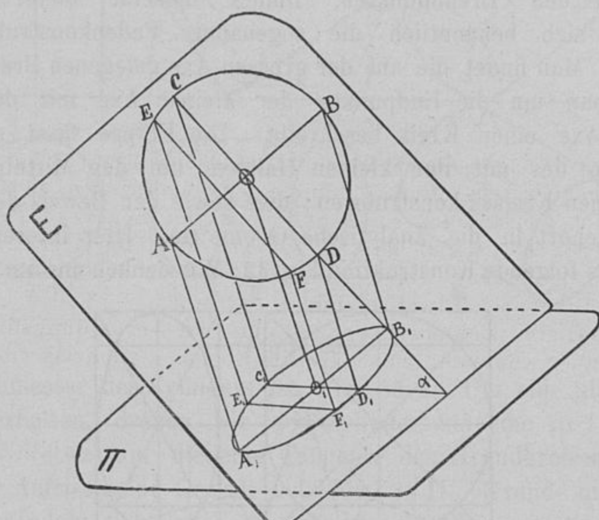


Figur 29.

Auch die Lotbilder der sämtlichen Sternpolyeder lassen sich aus dem Zehneck durch blosses Ziehen von Diagonalen konstruieren. Hiervon liefert Figur 29, die das konvexe Sterndodekaeder zeigt, ein Beispiel.

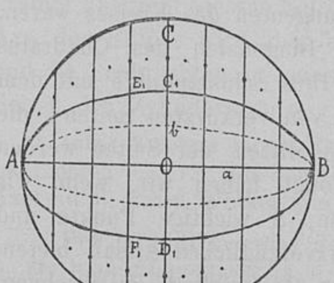
11. Projektion des Kreises.

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte O in der beliebigen Ebene E, der auf die Ebene Π projiziert werden soll. Von allen Durchmessern des Kreises gibt es einen, der zu Π parallel ist; es ist der zur Schnittlinie s von Π und E parallele $A\,B$. Seine Projektion $A_1\,B_1$ ist daher gleich $A\,B$. Der zu $A\,B$ senkrechte Durchmesser $C\,D$ bildet mit seiner Projektion den Neigungswinkel α der Ebenen Π und E. Da dieser nach einem Satz der Stereometrie



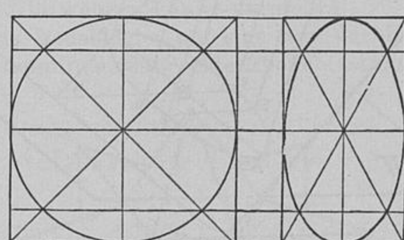
Figur 30.

von allen Durchmessern den grössten Winkel mit Π bildet, so wird seine Projektion am kleinsten ausfallen; sie wird $C_1\,D_1 = C\,D \cdot \cos\alpha$. Alle zu $C\,D$ parallelen Sehnen, z. B. $E\,F$, werden in derselben Weise verkürzt; es wird $E_1\,F_1 = EF \cdot \cos\alpha$. Da die Mittelpunkte erhalten bleiben, so gilt dasselbe auch von den Halbsehnen. Man erhält also die Projektion eines Kreises, indem man die zu einem Durchmesser senkrechten Halbsehnen alle nach demselben Verhältnis verkürzt. S. Fig. 31, worin dieses Verhältnis für die ausgezogene Linie $\frac{1}{2}$, für die beiden



Figur 31.

anderen $\frac{1}{4}$ bezw. $\frac{3}{4}$ ist. Die so entstehende Linie ist eine **Ellipse.** $A_1\,B_1$ heisst die grosse Axe. $C_1\,D_1$ ist die kleine Axe, $OA = OB$ ist der Radius a des erzeugenden Kreises, $O\,D_1 = b_1 = a \cdot \cos\alpha$; daraus folgt $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. Das Verhältnis, in welchem alle Halbsehnen verkürzt werden, ist also gleich dem Verhältnis der Axen bezw. Halbaxen. Ist E parallel zu Π, so ist das Verhältnis $= 1$, und der Kreis projiziert sich als Kreis; ist E senkecht zu Π, so projiziert sich der Kreis als Strecke. Die Ellipse ist zugleich der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, immer dieselbe bleibt; hierauf gründet sich bekanntlich die sogenannte Fadenkonstruktion der Ellipse. Man findet die auf der grossen Axe gelegenen Brennpunkte, indem man um die Endpunkte der kleinen Axe mit der halben grossen Axe einen Kreis beschreibt. Die Ellipse lässt sich auch mit Hilfe des mit der kleinen Halbaxe um den Mittelpunkt beschriebenen Kreises konstruieren; dies sowie der Beweis des vorigen Satzes gehört in die analytische Geometrie. Hier interessiert uns besonders folgende Konstruktion Fig. 32: Wir denken uns um den Kreis



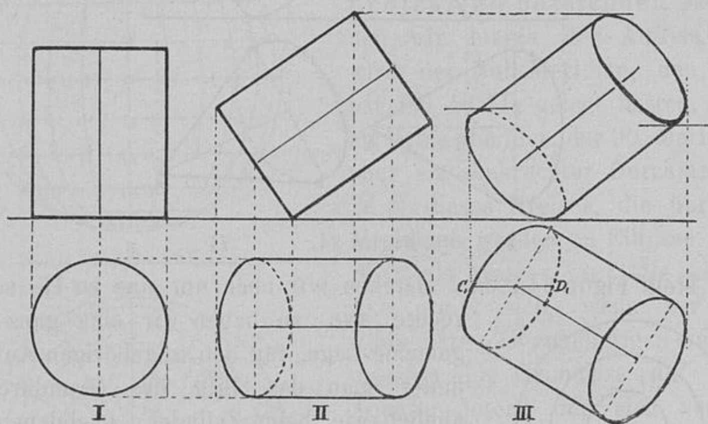
Figur 32.

dasjenige Quadrat beschrieben, dessen zwei Seiten der Π parallel laufen. Es projiziert sich als Rechteck, dessen Längsseiten gleich denen des Quadrats $= 2a$ sind, dessen Breitseiten $= 2b = 2a \cdot \cos\alpha$ werden. Die Seiten, die Tangenten des Kreises waren, werden Tangenten der Ellipse. Die Diagonalen des Quadrates werden zu Diagonalen des Rechtecks. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreise bleiben in derselben Entfernung von verkürzten Seiten; die Berührungspunkte des Kreises auf den Mitten der Seiten werden zu Berührungspunkten der Ellipse. Somit haben wir, wenn wir das Rechteck wie beschrieben zeichnen, 8 wichtige Punkte und 4 Tangenten der Ellipse, die uns einen vorzüglichen Anhalt bieten, die Ellipse mit praktisch hinlänglicher Genauigkeit zu zeichnen.

Aufg.: Zeichne das Lotbild eines Kreises mit dem Radius 36 mm, dessen Ebene mit der Π einen Winkel von 60° bildet.

12. Zylinder und Kegel.

Der Grundriss eines geraden Kreiszylinders, der mit der Grundfläche auf Π_1 steht, ist ein Kreis, der Aufriss und Seitenriss ein Rechteck, dessen Länge gleich der Höhe, dessen Breite gleich

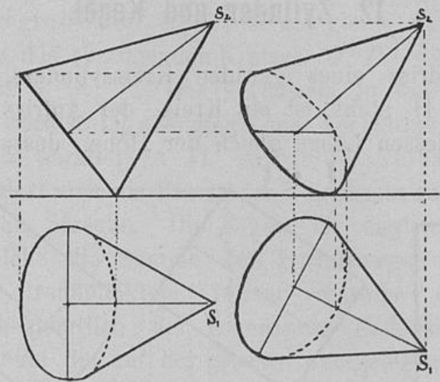


Figur 33.

dem Durchmesser des Zylinders ist. Fig. 33 I. Um eine allgemeine Lage zu erhalten, drehen wir den Zylinder um eine zu Π_2 senkrechte Axe (etwa um die eine Tangente des Grundkreises), dann behält der Aufriss seine Gestalt bei. Fig. 33 II. Grund- und Deckfläche verwandeln sich dabei im Grundriss in Ellipsen, die wir mit Hilfe des im Vorigen beschriebenen Rechtecks leicht zeichnen können. Drehen wir jetzt auch noch den Grundriss II, so ist eine allgemeine Lage schon erreicht; will man auch hierzu den Aufriss, so beachte man, dass das der Ellipse umbeschriebene Rechteck in ein Parallelogramm übergeht, dessen Seiten Tangenten der Ellipse bleiben. Grosse Axe der Ellipse wird aber der zu Π_2 parallele Durchmesser $C\,D$, und die Senkrechten in seinen Endpunkten werden die begrenzenden Seiten des Zylinders.

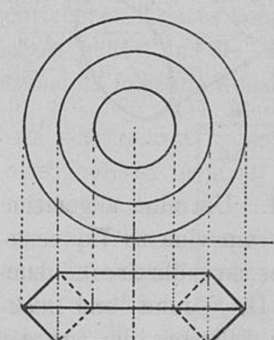
Aufg.: Zeichne einen Hohlzylinder, vom Radius $r = 18$, Radius im Lichten $\varrho = 12$, mit der Höhe $h = 60$ mm, dessen zu Π_2 parallele Axe mit Π_1 einen Winkel von 45^0 bildet.

Der Grundriss eines geraden Kreis-Kegels, dessen Grundfläche in Π_1 liegt, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt das Bild S_1 der Spitze ist. Auf- und Seitenriss stellen ein gleichschenkliges Dreieck dar, dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist; eine allgemeinere



I Figur 34. II

Lage stellt Figur 34 I dar. Drehen wir noch um eine zu Π_2 senkrechte Axe, so haben wir eine ganz allgemeine Lage, für den zugehörigen Aufriss findet man das Bild des Grundkreises ähnlich wie beim Zylinder; nachdem man die Spitze S_2 gefunden hat, sind von S_2 an die Ellipse die Tangenten zu ziehen.



Figur 35.

Aufg.: Bei welchen Lagen des Kegels bleibt die ganze Mantelfläche unsichtbar?

Zeichne Grund- und Aufriss eines Kegelstumpfes in beliebiger Lage.

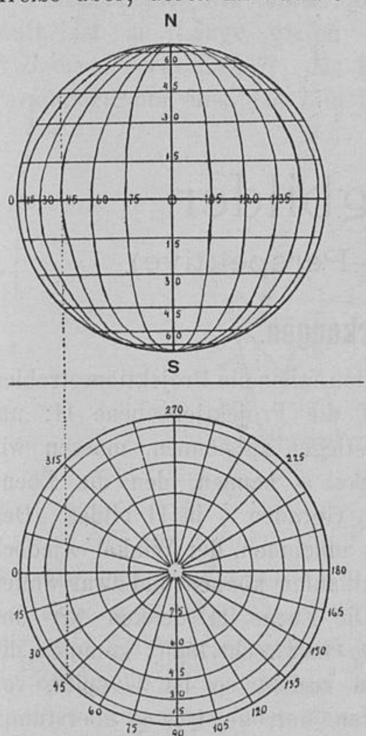
Beschreibe den durch Figur 35 dargestellten Körper, und zeichne ihn auch, nachdem er um eine zu Π_1 senkrechte Axe eine Drehung von 45° erfahren hat.

---

13. Die Kugel.

Die Orthogonalprojektion einer Kugel ist in allen Fällen ein Kreis, dessen Radius gleich dem der Kugel ist. — Kreise auf der Kugel, mögen sie nun grösste oder kleine Kreise sein, projizieren sich wieder als Kreise, wenn ihre Ebene parallel, als Strecken, wenn ihre Ebene senkrecht zu Π ist, in allen anderen Fällen als Ellipsen. Denken wir uns daher die Erdkugel auf eine zu ihrer Axe senkrechte Ebene, z. B. auf die des Äquators projiziert, so gehen die Meridiane alle in Geraden über, die sich im Mittelpunkte des Kreises, dem Nordpol, unter gleichen

Winkeln schneiden; die Parallelkreise aber gehen in konzentrische Kreise über, deren Radius $r_1 = r \cdot \cos \varphi$ wird, wenn φ jedesmal die Breite bezeichnet. Diese Darstellung der Erdoberfläche wird als orthographische Polarprojektion bezeichnet. Zeichnen wir hierzu den Aufriss, so wird der Null-Meridian, den wir parallel zu Π_2 gelegt hatten, sich als Kreis abbilden, der 90. Meridian aber als senkrechter Durchmesser $N\,S$ dieses Kreises, die übrigen Meridiane werden zu Ellipsen, mit $N\,S$ als grosser Axe; die kleine Axe ergibt sich, wenn wir die Endpunkte des zugehörigen Durchmessers im Grundriss auf den Äquator loten, der sich als zu $N\,S$ senkrechter Durchmesser abbildet; die übrigen Breitenkreise bilden sich als Sehnen ab, deren Endpunkte durch den Winkel φ bestimmt werden. Die so erhaltene Darstellung der Erdoberfläche wird als orthographische Äquatorialprojektion bezeichnet. Bei beiden Darstellungen werden die in der Mitte liegenden Gegenden recht genau abgebildet, weshalb man z. B. die Polargebiete gern in dieser Art abbildet; dagegen erfahren die zum Rande hin liegenden Teile eine bedeutende Verzerrung. Für die Darstellung der Himmelskörper Mond, Mars, Jupiter usw., die sich etwa in solchem Bilde uns zeigen, eignet sich diese Projektion recht gut. Für andere Gegenden der Erde als Äquatorial- und Polargegenden kann man die Orthogonalprojektion nur dann gut anwenden, wenn man auf die in der Mitte der abzubildenden Gegend an die Erde gelegte Berührungsebene projiziert; man erhält dann die orthographische Horizontalprojektion. Diese lässt sich aus den vorigen Bildern leicht ableiten, indem man den Aufriss soweit neigt, dass der zu der Mitte der Gegend hinlaufende Erdradius auf Π_1 senkrecht steht und nun mit Hilfe des



Figur 36.

Grundrisses in der bekannten Weise die zugehörigen Punkte sucht. Jetzt werden auch die Breitenkreise zu Ellipsen, deren grosse Axen zur Π_1 parallel laufen.

III. Schrägbilder.

(Schiefe Parallel-Perspektive).

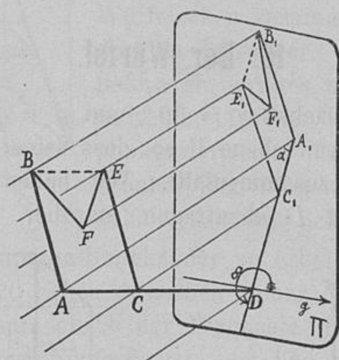
14. Vorbemerkungen.

Bei der schrägen Parallelprojektion fallen die Projektionsstrahlen unter einem beliebigen Winkel α auf die Projektionsebene Π; um die Richtung der Strahlen jedoch festlegen zu können, müssen wir ausser dem Winkel α noch den Winkel ω kennen, den die Ebene des Neigungswinkels mit einer festen Geraden , in Π bildet. Den Winkel α wollen wir immer als spitz annehmen, der Winkel ω jedoch soll alle Werte von 0 bis 360^0 durchlaufen können und zwar wollen wir folgende Festsetzung machen: Die Ebene Π denken wir uns vertikal vor uns aufgestellt, so dass g wagerecht läuft; kommen diu Projektionsstrahlen von oben her und rechts, so ist ω spitz, von oben links, so ist ω stumpf, von unten her, so ist ω überstumpf und zwar kleiner als 270^0, wenn die Strahlen von links her kommen grösser als 270^0, wenn sie von rechts einfallen. Fallen sie von obee und vorne her, so ist $\omega = 90^0$, von unten und vorne, gleich 270^0. Dem Falle $\omega = 0$ und $\omega = 180^0$ entspricht, dass die Strahlen genau von rechts bezw. von links herkommen. Im Falle $\alpha = 90^0$ ist ω unbestimmt, und wir haben dann den Fall der Orthogonal-Projektion. Die Verhältnisse kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man beachtet, dass die Schattenfigur eines Körpers auf dem Boden, oder einer anderen Ebene, nicht blos von der Höhe der Sonne sondern auch von ihrem Azimut (Himmelsrichtung) abhängt. Verschiebt man die Bildebene Π parallel zu sich selbst, so verändert das Bild nur seine Lage, nicht seine Gestalt; soll die Lage des abzubildenden Körpers festgelegt werden, so kann man ihn etwa auf die durch g zu Π senkrecht gelegte Ebene Γ, die wir die Grundebene nennen wollen, beziehen.

---

15. Die Strecke.

Das Schrägbild einer Strecke, die der Bildebene parallel läuft, ist an Länge gleich der Strecke. Ist z. B. Figur 37 AB die Strecke, $A_1 B_1$ das Bild, so ist offenbar $A B B_1 A_1$ ein Parallelogramm, und das Bild bleibt der Strecke parallel. Eine zu



Figur 37.

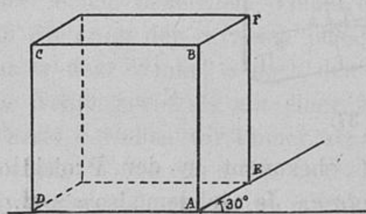
Π senkrechte Strecke wie AD, AC, bekommt in der Projektion die Länge $AD \cdot ctg\,\alpha$, bezw. $AC \cdot ctg\,\alpha$. Je nachdem also $\alpha >$ od. $<$ 45^0 wird die Strecke verkürzt oder verlängert. Für die Anfertigung der Zeichnung ist es nun viel bequemer, wenn man statt des Winkels α seinen Kotangens, also das Verhältnis der Bildlänge zur Originallänge kennt. Diese Zahl wollen wir die Verzerrungszahl nennen und mit p bezeichnen. Man wählt nun für p am besten einfache Zahlen wie $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, u. s. w. denen die Winkel $\alpha = 45^0, 56^0, 63^0, 68^0, 72^0, 76^0$ etwa entsprechen. Will man unmittelbar aus der Zeichnung die richtigen Längen entnehmen können, so wählt man $p = 1$. Will man ein Bild haben, welches dem wirklichen Eindrucke des Körpers mehr entspricht, so nimmt man $p > \frac{1}{2}$, am besten und bequemsten ist $p = \frac{1}{3}$.

Das Bild einer zu Π senkrechten Strecke a bekommt also die Länge $a \cdot p$; seine Richtung bildet mit g den Winkel ω, bezw. $180^0 - \omega$ je nachdem sie hinter oder vor der Π liegt.

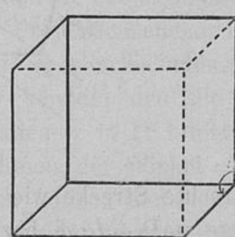
Will man das Schrägbild einer beliebig gelegenen Strecke zeichnen, so gelingt das am leichtesten, wenn man ausser ihrer Länge noch ihre senkrechte Projektion auf Π kennt. **Strecken, die untereinander parallel sind, bleiben auch im Schrägbilde zu einander parallel.** Die projizierenden Ebenen laufen nämlich parallel und werden von Π in parallelen Geraden geschnitten. — Auch für die schiefe Parallelprojektion gilt der Satz: **Das Verhältnis der Teilstücke einer Strecke wird durch die Projektion nicht verändert.**

16. Der Würfel.

Wir nehmen zunächst $\omega = 30^0$ und $p = \frac{1}{3}$. Den Würfel stellen wir auf die Grundebene Γ so, dass seine Vorderfläche in Π, also mit ihrem Bilde zusammenfällt. Wir haben dem die Kantenlänge a auf g als $A\ D$ abzutragen, darüber errichten wir das



Figur 38.


Figur 39.

Quadrat $A\ B\ C\ D$ (Fig. 38). Jetzt legen wir in A an g den Winkel $\omega = 30^0$ an und tragen auf dem Schenkel $A\ E = \frac{1}{3}\ a$ ab; durch B, C und D ziehen wir ebenso lange, zu $A\ E$ parallele Strecken, deren Endpunkte wir verbinden. Oder wir ziehen $E\ F$ parallel und gleich $A\ D$, $F\ G$ gleich und parallel zu $D\ C$ u. s. w. In ähnlicher Weise entsteht das Bild (Fig. 39), wo aber $\omega = 225^0$, p $= \frac{1}{2}$ genommen wurde.

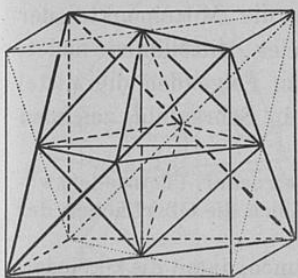
Aufg.: Zeichne einen Würfel mit der Kante $a = 52$ mm, $\omega = 150^0$, $p = 1$. Desgleichen für $\omega = 20^0$, p $= \frac{2}{5}$, $a = 60$ mm.

Zeichne eine quadratische Säule, die 3mal so hoch als breit ist, $\omega = 40^0$, $p = \frac{1}{3}$.

Wie fallen die Projektionsstrahlen bei Figur 39?

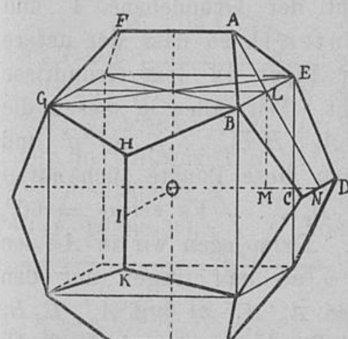
17. Die regulären Polyeder.

Aus dem Würfel lassen sich die übrigen regulären Polyeder, wie Figur 40 zeigt, leicht ableiten. Wir zeichnen wieder den Würfel ($\omega = 30^0$, $p = \frac{1}{3}$). Ziehen wir diejenigen Diagonalen der Seitenflächen, die in vier nicht in einer Ebene liegenden Würfelecken zusammenstossen, so erhalten wir ein **Tetraeder.** Die anderen 4 Ecken liefern ein zweites um 90^0 gegen das erste gedrehte Tetraeder. Verbindet man die Mittelpunkte der sechs Würfelflächen (die man als Schnitte der Diagonalen leicht findet) so erhält man das Schrägbild des **Oktaeders.**



Figur 40.

Um das **Pentagon-Dodekaeder** zu erhalten, beachte man, dass je acht von den 20 Ecken desselben immer die Ecken eines Würfels bilden, dessen Kante gleich der Diagonale der das Dodekaeder begrenzenden regulären Fünfecke ist. Ist nun a die Kante des Dodekaeders, so zeichnen wir uns zunächst das reguläre Fünfeck aus der Seite a, nämlich $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}$ *) und zeichnen dann den Würfel aus der Diagonale $d = \mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ (etwa mit $\omega = 30^0$, $p = \frac{1}{3}$). Jetzt legen wir das Fünfeck an den Würfel so an, dass die Diagonale, etwa $\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ auf die Würfelkante $B\,E$ und die gegenüberliegende Seite $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}$ über der Mitte der Würfelfläche zu liegen kommt. Steht nun $B\,E$ senkrecht zu Π, so wird die Mittellinie $\mathfrak{A}\,\mathfrak{N}$ des Fünfecks, weil sie parallel zu Π läuft, im Bilde unverkürzt bleiben; sie schneide $\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{L}$. Wir errichten daher im Mittelpunkte M der Würfelfläche die Senkrechte, beschreiben um L, den Mittelpunkt von $B\,E$ mit $\mathfrak{L}\,\mathfrak{N}$ den Kreis, der die Senkrechte in N schneidet. $N\,L$ verlängern wir um $\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}$ und erhalten den Punkt A. Durch N ziehen wir eine Parallele zu $B\,E$ und tragen auf ihr nach beiden Seiten $\frac{1}{3}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{D}$ ab; dadurch erhalten wir die Punkte C und D. Eine durch A zur Würfelkante $B\,G$ gezogene Parallele von der Länge $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ liefert die Ecke F.



Figur 41.

*) Von diesem Fünfeck ist hier keine Zeichnung gemacht.

Die Ecken H und I liegen auf einer zu den senkrechten Würfelkanten parallelen Geraden, die im Abstande $M\ N$, im Bilde also $\frac{1}{3}\ M\ N$ vom Mittelpunkte der Vorderfläche gezogen ist und gleich $A\ F$ ist, u. s. w.

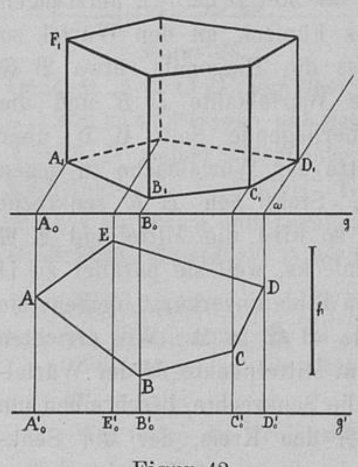
Das **Ikosaeder** erhält man, wenn man die Mittelpunkte der Dodekaederflächen, die man als Schnitt zweier Mittellinien findet, miteinander verbindet. Wir werden jedoch im Folgenden die Mittel an die Hand bekommen, um auch direkt sein Schrägbild zeichnen zu können.

Aufg.: Zeichne in einen Würfel beide Tetraeder (Tetraederzwilling) und ziehe auch die Kanten aus, in denen sich die Oberflächen der beiden Körper schneiden.

Wie gross muss man die Würfelkante nehmen, damit die Oktaederkante die Länge $b = 21$ mm erhält?

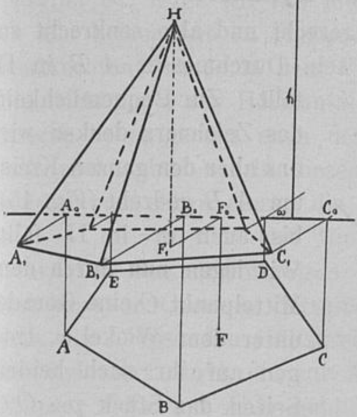
18. Prisma und Pyramide.

Das Prisma sei gerade, und durch seine Grundfläche $A\ B\ C\ D\ E$ und die Höhe h gegeben. Es stehe auf der Grundebene Γ und zwar hinter Π, so dass der untere Teil der Figur 42 dem Grundrisse entspricht. Wir fällen in diesem die Lote $A\ A_0'$, $B\ B_0'$ .... auf g' und übertragen diese Punkte auch auf g als A_0, B_0 ... Es sei $\omega = 60^0$, $p = \frac{1}{3}$. Dann legen wir in A_0 den Winkel ω an und tragen auf den Schenkeln $A_0\ A_1 = \frac{1}{3}\ A\ A_0'$, $B_0\ B_1$ $\frac{1}{3}\ B\ B_0'$ ab .... $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1$ ist nun das Bild der Grundfläche. Errichten wir nun in A_1, B_1, C_1 ... die Senkrechten zu g und machen sie gleich h, so liefern die Endpunkte $F_1\ G_1$ ... die Deckfläche.



Figur 42.

Die Pyramide sei ebenfalls durch ihre Grundfläche $A\ B\ C\ D\ E$, ihre Höhe h und deren Fusspunkt F gegeben; sie möge auf Γ vor der Π stehen, so wie es der untere Teil der Figur 43 angibt. (Man stelle sich vor, dass die Γ in die Π herunterge-

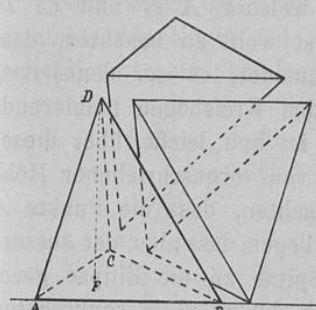


Figur 43.

klappt sei.) Wir loten die Punkte A, B, C . . als A_0, B_0, C_0 auf g, legen in diesen Punkten den Winkel $180^0 - \omega$ an und machen auf den Schenkeln die Strecken $A_0 A_1$, $B_0 B_1$ . . . und $F_0 F_1$ gleich $p \cdot A A_0$, $p \cdot B B_0$ . . . $p \cdot F F_0$, dann ist $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ das Bild der Grundfläche. (Da die Pyramide vor Π liegt, und da in unserer Figur $\omega = 30^0$ ist, so kommt das Bild unterhalb der g zu liegen.) Jetzt ist noch in F_1 die Senkrechte $F_1 H_1 = h$ zu errichten und H_1 mit den Ecken der Grundfläche zu verbinden, dann ist das Schrägbild der Pyramide fertig.

Aufg.: 1) Zeichne eine reguläre 6-seitige Pyramide mit der Grundkante $a = 24$, der Höhe $h = 54$ mm.

2) Zeichne ein reguläres, 8-seitiges, gerades Prisma aus dem Umkreisradius der Grundfläche $r = 25$ und der Höhe $h = 50$ mm.



Figur 44.

3) Die nebenstehende Figur 44 stellt eine dreiseitige Pyramide dar, deren Grundfläche auf der Γ steht, und die mit $\omega = 45^0$, $p = \frac{1}{2}$ gezeichnet wurde. Zeichne diese in doppelter Grösse und ermittele die wahren Dimensionen. Zeichne auch die Pyramiden, die sie zu einem Prisma ergänzen, aus ihrer ursprünglichen Lage etwas verschoben (ohne zu drehen). Welches Prinzip genügt für die Zeichnung?

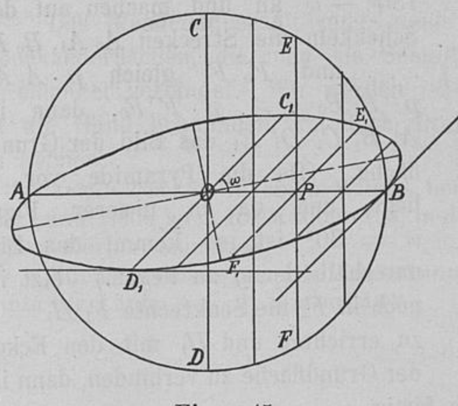
4. Zeichne einen Würfel, von dem alle Ecken so abgeschnitten sind, dass die Flächen in reguläre 8-Ecke übergehen.

5) Zeichne einen Steintrog 85 cm lang, 40 cm breit, 30 cm hoch mit 5 cm dicker Wandung in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse.

6) Versuche mit Hülfe des früher gezeichneten Grund- und Aufrisses des Ikosaeders von diesem Körper ein Schrägbild anzufertigen.

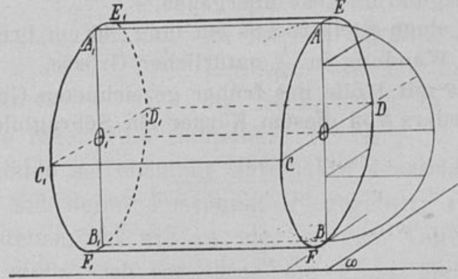
19. Kreis, Kegel und Zylinder.

Die Ebene des Kreises liege wagerecht und also senkrecht zu Π; wir verschieben ihn soweit, dass sein Durchmesser $A\,B$ in Π fällt. Zur Bequemlichkeit des Zeichners denken wir uns aber den ganzen Kreis um $A\,B$ gedreht (Fig. 45) bis auch er in Π fällt Wir legen nun durch den Mittelpunkt O eine Gerade unter dem Winkel ω, tragen auf ihr nach beiden Seiten das Stück $p \cdot O\,C$ ab und erhalten so die Punkte C_1 und D_1 des Schrägbildes. Um weitere Punkte zu erhalten, errichten wir in dem beliebigen Punkte P von AB die Senkrechte $P\,E$, ziehen durch P die Parallele zu $O\,C_1$ und tragen auf ihr $p \cdot P\,E$ ab u. s. w.



Figur 45.

Wir erhalten so eine Ellipse, in welcher $A\,B$ und $C_1\,D_1$ konjugierte Durchmesser werden. Es ist wohl zu beachten, dass diese Ellipse den Kreis immer überschneidet, es sei denn, dass $\omega = 90^0$ ist. Der den dazwischen liegenden Kreisbogen halbierende Durchmesser liefert die grosse Axe. Es ist nun leicht, über dieser Grundfläche einen Kegel oder Zylinder von vorgeschriebener Höhe zu zeichnen. Es ist jedoch wohl zu beachten, dass die Punkte A und B in dem zu Π parallelen Axenschnitte liegen, dass aber der äussere Umriss des Kegels durch die von der Spitze an die Ellipse gezogenen Tangenten, der des Zylinders durch die zu $A\,B$ senkrechten Tangenten der Ellipse gebildet wird.



Figur 46

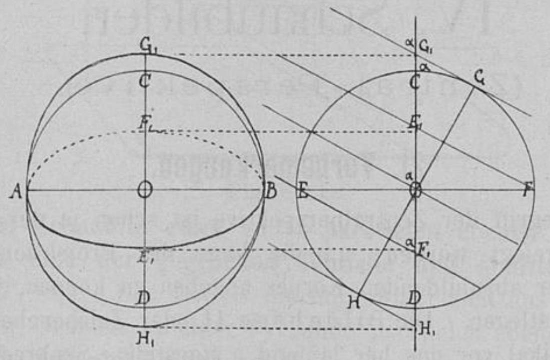
Um einen liegenden Zylinder zu zeichnen, dessen Axe der Π parallel ist, legen wir ihn mit dem Axenschnitte $A B B_1 A_1$ in Π. In den beiden nun zu Π senkrechten Kreisflächen werden alle zu Π senkrechten Sehnen in dem Verhältnisse p verkürzt und bekommen die Richtung ω zur Horizontalen. Denken wir uns den einen dieser Kreise — es genügt auch der Halbkreis — gedreht, bis er in Π fällt und ziehen wir in diesem beliebige zu $A B$ senkrechte Halbsehnen und geben diesen die entsprechende Länge (in Figur 46 ist $p = \frac{1}{2}$, $\omega = 30^0$) und Richtung, so erhalten wir zunächst das Schrägbild des Grundkreises als Ellipse; das des Deckkreises ist ihm kongruent und in derselben Lage. Es ist auch hier zu beachten, dass die Ellipse den Hülfskreis überschneidet und dass der Umriss des Zylinders durch die zur Axe $O O_1$ parallelen Tangenten an die Ellipse, $E E_1$ und $F F_1$ gebildet wird.

Aufg.: Zeichne einen gleichseitigen Zylinder aus $r = 30$ mm, der zentral durchbohrt ist von einem Zylinder, dessen Radius $\varrho = 18$ mm ist, in stehender und liegender Stellung.

---

20. Die Kugel.

Wir legen die Projektionsebene durch den Mittelpunkt der abzubildenden Kugel und nehmen zunächst $\omega = 90^0$, $p = \frac{1}{2}$; die Projektionsstrahlen kommen also von vorn und oben. Sie berühren

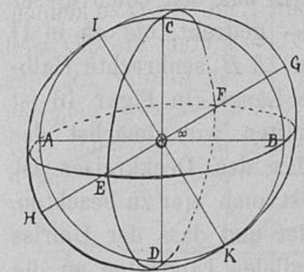


Figur 47.

die Kugel in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zu ihnen liegts und dessen Bild den äusseren Umriss der Kugel liefert. Dieser ist also eine Ellipse, deren grosse Axe gleich $2 r : sin\ \alpha$ wird, während die kleine Axe $2 r$ wird. Der zu Π senkrechte grösste Kreis, geht über in eine Ellipse, deren grosse Axe gleich $2 r$, deren kleine gleich

r wird, da hier $p = \frac{1}{2}$. Die Figur 47, in welcher der Seitenriss beigefügt ist, macht die Verhältnisse sofort klar, zumal die entsprechenden Punkte sich nur durch die Indizes unterscheiden.

Auch wenn ω einen beliebigen Wert hat, z. B. 30°, wie in Figur 48, berühren die Projektionsstrahlen die Kugel in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zu ihnen liegt. **Das Schrägbild einer Kugel ist also eine Ellipse,** deren grosse Axe mit der Horizontalen den Winkel ω bildet und an Länge gleich $2r : \sin \alpha$ ist, wo $\operatorname{ctg} \alpha = p$, während die kleine Axe (hierzu senkrecht) die Länge $2r$ behält. Alle grössten Kugelkreise, mit Ausnahme des zu Π parallelen, gehen in Ellipsen über, die die Umriss-Ellipse berühren. Die Figur zeigt dies für die beiden zu Π senkrechten grössten Kreise.



Figur 48.

Aufg.: Zeichne die Figur zum Archimedischen Beweise für den Inhalt der Kugel; $\omega = 270°$, $p = \frac{1}{2}$. Desgl. für $\omega = 45°$, $p = \frac{2}{5}$.

Wie lang wird die grosse Axe der Umrissellipse einer Kugel vom Radius $r = 50$ mm, wenn $p = \frac{1}{2}$?

IV. Schaubilder.

(Zentral-Perspektive).

21. Vorbemerkungen.

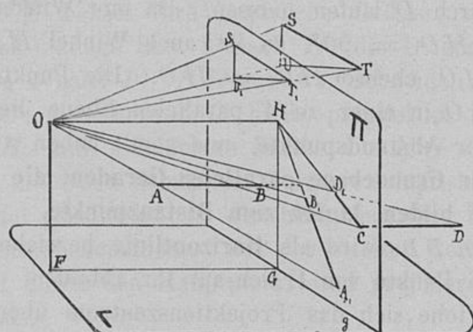
Der Begriff der Zentralperspektive ist schon in der Einleitung unter 2 dargelegt worden; um die Lage des Projektionszentrums sowie die der abzubildenden Körper angeben zu können, wollen wir Folgendes festlegen. Die Bildebene Π oder Zeichenebene denken wir uns vertikal vor uns her laufend aufgestellt. Senkrecht zu ihr, aber wagerecht laufend, nehmen wir eine zweite Ebene an, die Grundebene Γ, welche die Π in einer wagerechten Geraden g, die wir die Grundlinie nennen wollen, schneidet.

Das Projektionszentrum sei O. Um seine Lage festzustellen, müssen wir 1. seinen Abstand OH von der Π wissen, 2. seinen Abstand OF von Γ, 3) die Lage des Punktes H oder F. Fällen wir von H und F die Lote auf g, so treffen sich diese in einem Punkte G der Grundlinie. **Der Punkt H, der Fusspunkt des vom Projektionszentrum auf die Bildebene gefällten Lotes, heisst der Hauptpunkt.** Ist dieser gegeben, so braucht man nur noch die Entfernung OH oder FG zu haben, um die Lage von O zu kennen. Das abzubildende Objekt stellt man gewöhnlich hinter die Π, weil dann, was meist wünschenswert ist, das Schaubild kleiner als das Objekt ausfällt; es kann auch vor Π liegen und zwar zwischen O und Π, oder noch weiter als O von Π entfernt. Oft auch legt man das Objekt mit einer seiner Flächen in die Π, dann behält offenbar diese Fläche im Schaubilde ihre Grösse bei.

---

22. Sätze über Schaubilder.

1. **Das Schaubild $S_1 T_1$ einer zu Π parallelen Strecke ST** (s. Fig 49) **ist eine zu ST parallele Strecke.**

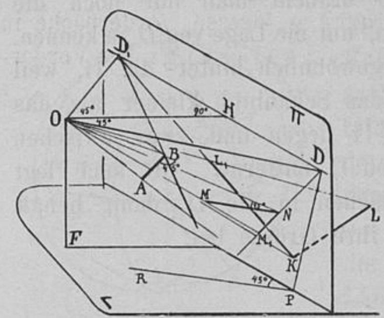


Figur 49.

2. **Das Schaubild einer zu Π parallelen ebenen Figur** (wie STU) **ist eine der gegebenen ähnliche und ähnlich gelegene Figur** ($S_1 T_1 U_1$). Der Beweis hierfür ergiebt sich aus dem Satze über die zur Grundfläche einer Pyramide parallelen ebenen Schnitte.

3. **Das Schaubild einer zu Π senkrechten Geraden ist eine durch den Hauptpunkt gehende Gerade.**

Beweis: Die durch O und zwei Punkte A und B einer solchen Geraden gelegte Ebene E ist die projizierende Ebene. Da nun OH senkrecht zu Π, also auch parallel zu AB ist, so liegt OH in E, also schneidet E die Π in einer durch H gehenden Geraden. Oder anders ausgedrückt: Die projizierende Ebene muss auch den zu den unendlich entfernten Punkten solcher Geraden laufenden Projektionsstrahl enthalten, d. i. aber OH. In Figur 49 ist noch eine zweite solche Gerade CD gezeichnet.



Figur 50.

Ist AB (Figur 50) eine zu Γ parallele Gerade, die mit Π einen Winkel von 45^0 bildet, so enthält die AB projizierende Ebene auch den durch O zu AB parallel gezogenen Strahl OD_1 und daher geht die Projektion von AB auch durch D_1. Ist KL eine andere solche Gerade, so sieht man, dass auch ihre Projektion KL_1 durch D_1 gehen muss. Ist der Winkel 45^0, den die Gerade mit Π bildet, nach der anderen Seite hin geöffnet wie bei RP, MN, so ziehe man den hierzu parallelen Strahl OD, dann sieht man, dass die Projektionen durch D laufen müssen. Da nun Winkel $ODH = 45^0$, Winkel $DHO = 90^0$, so ist auch Winkel $HOD = 45^0$, also $HD = HO$, ebenso $HD_1 = HO$. Die Punkte D und D_1, die mit H und O in einer zu Γ parallelen Ebene liegen, heissen die **Distanz-** oder **Abstandspunkte**, und somit haben wir den Satz:

4. **Alle zur Grundebene parallelen Geraden, die mit Π einen Winkel von 45^0 bilden, laufen zum Distanzpunkte.**

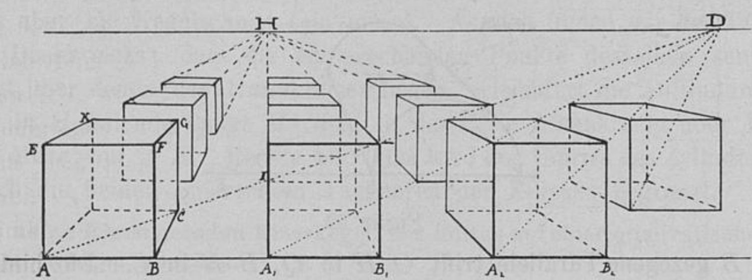
Die Gerade DD_1 wird als **Horizontlinie** bezeichnet, weil alle unendlich fernen Punkte von Γ sich auf ihr abbilden. Sie gibt uns an, in welcher Höhe sich das Projektionszentrum über Γ befindet, während der Distanzpunkt uns seine Entfernung von Π liefert.

Durch ähnliche Überlegungen wie vorhin finden wir, dass die Schaubilder aller parallelen Geraden von irgend einer Richtung sich immer in einem Punkte, dem **Fluchtpunkte**, treffen; laufen die Geraden zu Γ parallel, so liegt dieser auf der Horizontlinie. Man findet den Fluchtpunkt als Schnitt des durch O zu den Geraden parallel laufenden Strahles mit Π.

Diese Sätze genügen für uns, um alle Schaubilder zu zeichnen.

23. Beispiele.

Gegeben seien in allen Fällen die Grundlinie, die Horizontlinie und auf letzterer der Hauptpunkt H und ein Distanzpunkt D. — **I.** Einen Würfel zu zeichnen aus der Kante a, dessen Vorderfläche in Π liegt und der auf Γ steht. (Figur 51). Auflösung: Die Vorder-



Figur 51.

fläche $ABFE$ behält ihre natürliche Grösse; die anstossenden Kanten laufen zufolge Satz 3 nach H, die Diagonale der Grundfläche gemäss 4 nach D. BH und AD schneiden sich also in der Würfelecke C; die Kante CG bleibt parallel zu BF (Satz 1), G liegt auf FH, und die hintere Fläche $CDKG$ wird ein Quadrat gemäss Satz 2. Nach demselben Verfahren sind in Figur 52 noch weitere Würfel gezeichnet, in gleichen Abständen a hintereinander und in Reihen nebeneinander. Bei der zweiten Reihe laufen Seitenflächen selbst durch den Hauptpunkt und projizieren sich demnach in eine Gerade.

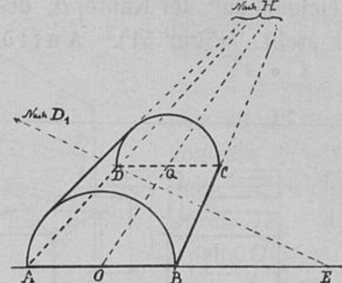
Aufg.: Zeichne ähnlich einen Würfel, der oberhalb der Grundlinie, ferner einen, der oberhalb der Horizontlinie sich befindet.

Zeichne ein Kreuz, dass aus 5 Würfeln gebildet ist, dessen Vorderfläche in Π liegt. Desgleichen so, das die Endfläche eines Querarmes in Π liegt.

Zeichne das Schaubild eines Schachbrettes.

II. Einen Halbzylinder zu zeichnen, dessen Stirnfläche in Π mit dem Durchmesser auf g liegt, aus dem Radius r und der Länge l. Aufl.: Der vordere Halbkreis (Figur 52), dessen Durchmesser AOB sei, behält seine Grösse bei. Die von A und B ausgehenden Kanten sowie die durch O gehende Axe laufen, weil senkrecht zu Π_1, zum Hauptpunkte H. Trägt man die Länge l auf g von A

aus als AE ab nnd zieht durch E die Gerade zum Distanzpunkte D_1, so trifft diese AH in D, dem Endpunkte der Kante (denn Winkel DEH ist in Wirklichkeit $= 45^0$!) Die durch D zu

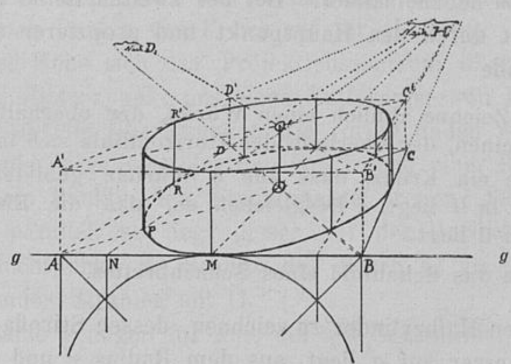


Figur 52.

$A\ B$ gezogene Parallele trifft $O\ H$ in Q, $B\ H$ in C. Die hintere Fläche wird der über $D\ C$ um Q beschriebene Halbkreis. Der äussere Umriss wird links durch die (auch durch H gehende) gemeinsame Tangente der Halbkreise gebildet.

Aufg.: Zeichne das Schaubild eines Zimmers, das 6 m lang und breit und 4 m hoch ist, wie es einem der Mitte der Hinterwand in 10 m Entfernung gegenüberliegenden Auge auf die Vorderwand abgebildet erscheint, 100fach verkleinert.

Zeichne einen Vollzylinder, der 24 mm von Π entfernt, auf Γ liegt, dessen Axe senkrecht zu Π ist, aus dem Radius $r = 20$ und der Länge $l = 70$ mm. Anweisung: Verlängere ihn zunächst bis an Π!



Figur 53.

III. Einen auf Γ stehenden Zylinder, der die Π berührt, aus dem Radius r und der Höhe h zu zeichnen. Aufl.: Wir konstruieren uns zunächst das Schaubild $A\ B\ C\ D$ desjenigen der Grundfläche umschriebenen Quadrates, dessen Seite auf g fällt, mitsamt den Diagonalen, und denjenigen Linien, die durch die Schnittpunkte jener mit dem Kreise gehen und senkrecht zu g laufen, indem wir das Lotbild (s. den unteren Teil der Figur) zu Hülfe nehmen. So finden wir, indem wir auch mit Hülfe des Diagonalen-Schnittpunktes O die Mitten der Seiten aufsuchen, 8 Punkte und 4 Tangenten des Schaubildes des Grundkreises, das hier eine Ellipse darstellt (jedenfalls aber ein Kegelschnitt sein muss). Ähnlich finden wir das Bild des Deckkreises; dass die entsprechenden Punkte desselben senkrecht über denen des Grundkreises liegen, erleichtert die Auffindung. Der in Π fallende Punkt M^1 liegt in der Höhe h senkrecht über M, der Mitte von $A\,B$. Rechts und links wird der Umriss des Zylinders durch die beiden senkrechten Tangenten der Ellipsen begrenzt.

Aufg.: Einen geraden Kreiskegel, der mitten auf einer quadratischen Platte steht zu zeichnen.

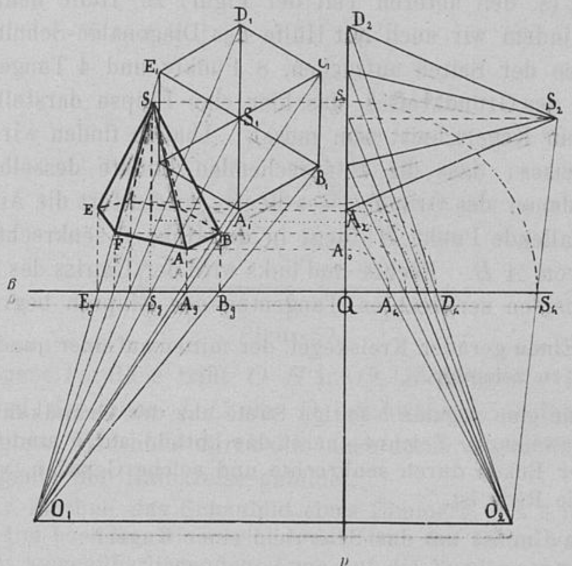
Zeichne eine regulär 5-seitige Säule aus der Grundkante a und Höhe h. Anweisung: Zeichne zuerst das Lotbild auf Γ und bestimme die Lage der Ecken durch senkrechte und solche Geraden, von denen in Satz 4 die Rede ist.

Welchen Umriss hat das Schaubild einer Kugel?

---

24. Andere Methode der Herstellung von Schaubildern.

Aus dem Grundriss und Seitenriss lässt sich ebenfalls leicht das Schaubild eines Körpers herstellen. Als Beispiel nehmen wir eine gerade sechsseitige Pyramide. Wir projizieren sie mitsamt dem Projektionszentrum, den Projektionsstrahlen und der Π auf Γ und erhalten so das Bild $A_1\,B_1\,C_1\,.\,.\,.\,S_1$, O_1 und die Grundlinie g. sowie die Strahlen $O_1\,A_1$, $O_1\,B_1$, ..., welche die g in A_g, B_g . . . S_g schneiden. Ebenso zeichnen wir uns den Seitenriss, den wir auch in Γ niederlegen, und erhalten die Punkte $A_2, B_2\,C_2\,.\,.\,.\,S_2$ und O_2, sowie die Strahlen $O\,A_2$ $O\,B_2$ . . ., welche die Schnittlinie h der Seitenrissebene E mit Π in A_h, $B_h\,.\,.\,.\,S_h$ schneiden. Denken wir uns nun die Π in g senkrecht errichtet, so liegt z. B. das Bild der Spitze S senkrecht über S_g und in der Höhe $Q\,S_h$ über g, wenn Q der gemeinsame Schnittpunkt der drei Ebenen E Π, Γ ist. Errichten wir daher in S_g die Senkrechte in Π und ziehen im Abstande $Q\,S_h$ zu g die Parallele, so erhalten wir im Schnitt S dieser beiden Geraden das Bild der Spitze in Π. Wir haben hier auch die Π in die Γ niedergeklappt, um in einer Ebene



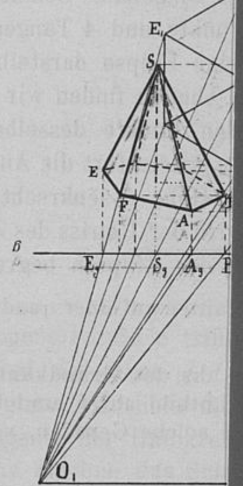
Figur 54.

zeichnen zu können, daher beschreiben wir mit $Q\,A_h$ um Q einen Kreis, der die Schnittlinie p von E und Γ in A_0 trifft und ziehen durch A_0 die Parallele zu g, die die in A_g erreichte Senkrechte in A trifft u. s. w. In den meisten Fällen wird man besser das Schaubild auf eine andere Stelle der Zeichenebene übertragen.

Aufg.: Stelle so das Schaubild einiger Körper her, deren Lotbild früher gezeichnet wurde.

Mit der umgekehrten Aufgabe, aus dem Schaubilde, z. B. aus dem Photogramm eines Gebäudes, den Grund- und Aufriss herzustellen, beschäftigt sich ein zur Zeit recht blühender Zweig der darstellenden Geometrie, die Photogrammetrie.

ziehen im Abstande $Q\,S_h$ z … m
Schnitt S dieser beiden Ge … ir
haben hier auch die Π in d … ne



zeichnen zu können, daher … nen
Kreis, der die Schnittlinie … nen
durch A_0 die Parallele zu … hte
in A trifft u. s. w. In … ser
das Schaubild auf eine and … en.

Aufg.: Stelle so das … ren
Lotbild früher gezeichnet wu …

Mit der umgekehrten … aus
dem Photogramm eines G … er-
zustellen, beschäftigt sich … der
darstellenden Geometrie, di …