Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen.

Einleitung.

Vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Teile. In dem ersteren werden einige geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen vorgetragen, welche nicht über die einfachsten Hülfsmittel hinausgehen und Unterrichtszwecken dienen sollen. Im zweiten Teile dagegen wenden wir die Hülfsmittel der höheren Analysis auf eine von Euler behandelte Aufgabe an. Wie schon C. G. Jacobi, Crelles Journal, Bd. 13, S. 353, bemerkt hat, besteht ein Zusammenhang zwischen der Lösung der Gleichung

$$y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

in rationalen Zahlen und dem Abelschen Theorem. Meines Wissens ist dieser Zusammenhang noch nicht so genau erforscht worden, wie er es verdient und ich für die Eulersche Aufgabe es zu thun beabsichtige. Wie sich zeigen wird, bietet diese Anwendung auf eine besondere Aufgabe viel Interessantes, indem die Umkreisung eines Unstetigkeitspunktes zu der einfachsten auch von Euler gefundenen Lösung führt. Übrigens sind die angewandten Methoden von ziemlicher Allgemeinheit und gelten daher für eine ausgedehnte Klasse ähnlicher Untersuchungen. Während ferner bei Aufgaben, welche dem Gebiete der elliptischen Funktionen angehören, die Transformation auf die Legendresche oder Weierstrasssche Normalform gewöhnlich in den Vordergrund tritt, scheint bei den hier untersuchten Fragen die Transformation ganz Nebensache zu sein und das Additionstheorem mit einzig entscheidender Bedeutung hervorzutreten.

Erster Teil.

§ 1.

Ein Dreieck ABC möge so beschaffen sein, dass seine Seiten durch die ganzzahligen Werte a, b, c gegeben sind. Dann lehrt der Kosinussatz, dass die Kosinus seiner Winkel rationale Brüche sind. Ferner lehrt die Inhaltsformel

$$2J = bc \sin \alpha, \tag{1}$$

dass die Sinus der Winkel gleichfalls rationale Brüche sind oder sämtlich die gleiche Irrationalität als Faktor besitzen. Ist umgekehrt die Irrationalität vorgeschrieben und sollen Dreieckswinkel angegeben werden, welche rationale Kosinus und (Sinus mit vorgeschriebener gleicher Irrationalität) besitzen, so geht man am einfachsten von den Formeln aus:

$$\cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{2\, tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Sind zwei Dreieckswinkel α und β in dieser Weise bestimmt, so liefern die Additionstheoreme den dritten alsbald in der gewünschten Form. Der Sinussatz ergibt dann die Seiten des Dreiecks durch rationale Quotienten oder nach Multiplikation mit dem Hauptnenner als ganze Zahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir können hiernach sofort die Aufgabe lösen: Dreiecke anzugeben, deren Seiten ganzzahlig seien und deren Inhalt eine vorgeschriebene Irrationalität als Faktor besitze.

Zahlenbeispiel. Die Irrationalität sei $\sqrt{5}$. Wir setzen

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3},\; tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

so ergibt sich das Dreieck $a = 9$, $b = 8$, $c = 7$.

Ferner wird uns im folgenden die Aufgabe begegnen, die Gleichung

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha$$

in rationalen Zahlen zu befriedigen. Wir sehen davon ab, hier die Terminologie und Ergebnisse der sehr ausgebildeten Theorie der quadratischen Formen anzuwenden und stellen uns zunächst die bestimmte Aufgabe: Es soll ein Dreieck mit ganzzahligen Seiten angegeben werden, in welchem ein Winkel $\alpha = 120^0$ sei.

Lösung. Nach dem Kosinussatze muß sein:

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Setzen wir nun $a = b + x$, also $(b+x)^2 = b^2 + c^2 + bc$, so folgt

$$b = \frac{c^2 - x^2}{2x - c},\quad a = \frac{x^2 + c^2 - cx}{2x - c}.$$

Um die Nenner fortzuschaffen, multiplizieren wir mit $2x - c$, vertauschen dann die Buchstaben x und c mit n und m und erhalten die Lösung:

$$a = m^2 + n^2 - mn,\; b = m^2 - n^2,\; c = 2mn - m^2. \tag{2}$$

Damit die Seiten positive Werte erhalten, muß sein

$$2n > m > n.$$

Da nun $b + c > a$, so ist die Lösung jedesmal eine eigentliche. Alle irgendmöglichen Lösungen sind ferner in der gegebenen enthalten. Denn wenn irgend eine Lösung unserer Aufgabe angegeben werden kann, so setze man $a = b + x$, woraus sich x ergibt. Aus dieser Annahme ergaben sich aber alle unsere Schlüsse.

Zahlenbeispiele:

n	m	a	b	c
2	3	7	5	3,
4	5	21	9	15,
3	4	13	7	8,
5	7	39	24	21.
3	5	19	16	5,
4	7	37	33	7,
5	6	31	11	24.

Wie man ohne Mühe erkennt, hängt die Bestimmung des Dreiecks a, b, c von dem Quotienten $\lambda = \frac{n}{m}$ ab. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, zu einem gegebenen Werte λ einen Wert μ derartig zu bestimmen, dass b und c ihre Werte vertauschen. Das geschieht durch die Annahme

$$(1 + \lambda)(1 + \mu) = 3.$$

Für $\lambda = \frac{3}{4}$ wird $\mu = \frac{5}{7}$, für $\lambda = \frac{2}{3}$ wird $\mu = \frac{4}{5}$, vergl. die vier ersten Zahlenbeispiele.

Die Winkel β und γ unserer Dreiecke haben die Summe $\beta + \gamma = 60^0$. Ihre Kosinus sind rational, ihre Sinus rational mit dem Faktor $\sqrt{3}$. Folglich lösen ihre Sinus und Kosinus rational die unbestimmte Gleichung:

$$3x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beseitigt man die Nenner, so hat man die unbestimmte Gleichung

$$3\,x^2 + y^2 = z^2$$

in ganzen Zahlen gelöst. Unsern Dreiecken 7, 5, 3 und 13, 7, 8 entnehmen wir die Lösungen:

$$x = 5,\ 3,\ 4,\ 7,$$
$$y = 11\ 13,\ 11,\ 23,$$
$$z = 14,\ 14,\ 13,\ 26.$$

Wir wollen die gelöste Aufgabe jetzt durch die allgemeine ersetzen, ein Dreieck mit rationalen Seiten anzugeben, sodaß der Winkel α einen vorgeschriebenen rationalen Kosinus erhalte.

Lösung. Man setze

$$(b + x)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

und verfahre dann wie vorhin. Das Ergebnis kann die Form erhalten

$$a = m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha, \qquad b = m^2 - n^2, \qquad c = 2mn + 2m^2 \cos \alpha.$$

Damit das Dreieck ein wirkliches sei, ist zu nehmen:

$$m > n, \quad n + m \cos \alpha > o,$$

wenn m und n positive ganze Zahlen sind.

Für $\cos \alpha = o$ erhält man das bekannte Ergebnis:

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn.$$

Für $\alpha = 60^0$ wird

$$a = m^2 + n^2 + mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = 2mn + m^2.$$

Zahlenbeispiele:

n,	m,	a,	b,	c.
1,	2.	7,	3,	8,
1,	3,	13,	8,	15,
1,	4,	7,	5.	8,
1,	5,	31.	24,	35,
2,	3,	19,	5,	21,
2,	5,	13.	7,	15.

Die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$Dx^2 + y^2 = z^2,$$

wo D eine positive ganze Zahl, ist nun leicht anzugeben.

§ 2.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen setzen uns in den stand, folgende merkwürdige Aufgabe zu lösen.

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit der rationalen Seite a. Im Innern der Dreiecksfläche soll ein Punkt O derartig bestimmt werden, dass die Entfernungen von den Ecken $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ auch rational seien. Sei $\sphericalangle\ OAB = \delta$, $OAC = \varepsilon$. Da $\varepsilon + \delta = 60^0$ und $\cos \varepsilon$ wie $\cos \delta$ rationale Zahlen sind, so sind $\sin \varepsilon$ und $\sin \delta$ rationale Zahlen mutipliziert mit $\sqrt{3}$. Diese Eigenschaft besitzen alle Winkel der Figur. Nun sei

$$y^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \delta = (x + \lambda)^2,$$
$$z^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varepsilon = (x + \mu)^2.$$

Es folgt durch Bestimmung von x

(4) $$\frac{a^2 - \lambda^2}{\lambda + a \cos \delta} = \frac{a^2 - \mu^2}{\mu + a \cos \varepsilon}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gleichung ist durch rationale λ und μ zu befriedigen. Es ist leicht, zu besonderen Lösungen zu gelangen. Nehmen wir z. B. $\lambda = -\mu$, so folgt

$$\lambda = \frac{a}{2} (\cos \varepsilon - \cos \delta).$$

Wird aber die allgemeine Lösung verlangt, so stehen wir vor einer grossen Schwierigkeit. Wir müssen dann bei gegebenen Zahlwerten a, $\cos \delta$, $\cos \varepsilon$ angeben, ob die Gleichung (4) rational lösbar ist, und falls sie es ist, müssen sämtliche Lösungen gegeben werden. In diesem Sinne muß die Aufgabe noch als nicht gelöst bezeichnet werden. Wir kommen auf die hier bezeichnete Schwierigkeit in anderem Zusammenhange zurück.

Zahlenbeispiele. Nach § 1 nehmen wir $\cos \varepsilon = \frac{13}{14}$, $\cos \delta = \frac{11}{14}$ und finden in ganzen Zahlen

$$a = 112,\ x = 65,\ y = 57,\ z = 73.$$

Für $\cos \varepsilon = \frac{23}{26}$, $\cos \delta = \frac{11}{13}$ wird

$$a = 1560,\ x = 901,\ y = 931,\ z = 871.$$

Rechnet man die erhaltenen Ergebnisse völlig aus. so erhält man:

$$\begin{aligned} a &= 8\,(2mn - n^2)\,(m^2 + n^2 - mn), \\ x &= 4m^4 + 5n^4 - 8m^3n - 12mn^3 + 16m^2n^2, \\ y &= 4m^4 + 3n^4 - 16m^3n - 12mn^3 + 28m^2n^2, \\ z &= 4m^4 + 7n^4 - 12mn^3 + 4m^2n^2. \end{aligned}$$

Nimmt man nun $m = n = 1$, so folgt $a = 8$, $x = 5$, $y = 7$, $z = 3$. D. h. wenn man die Dreiecke 5, 7, 8 und 3, 7, 8 mit der gleichen Seite 7 zweckmäßig aneinanderlegt, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Die Aufgabe, solche Dreiecke allgemein anzugeben, ist leicht lösbar. Die Lösung ist in folgenden Gleichungen enthalten:

$$a = 4mn,\ x = (m - n)(m + 3n),\ y = m^2 + 3n^2,\ z = (3n - m)(m + n)$$
$$n < m < 3n;\quad x + z = a;$$

y ist die Seite, mit welcher die Dreiecke a, y, x und a, y, z aneinander zu legen sind. Das Paar

$$n' = m,\ m' = 3n$$

liefert dieselbe Lösung wie das Paar n, m.

Beispiele.

n,	m,	a,	x,	z,	y.
1,	2,	8.	5,	3.	7,
2,	3,	8,	3,	5,	7,
2,	5,	40,	33,	7,	37,
3,	4,	48,	13,	35,	43,
3,	5,	15,	7,	8,	13,
3,	7,	21,	16,	5,	19.
3,	8,	96,	85,	11,	91.

Die Gleichung (4) ist quadratisch inbezug auf λ wie auf μ. Daher kann man zu einem gegebenen rationalen Paar λ, μ leicht 3 weitere finden Verwendet man die gewonnenen Lösungen zur Bestimmung von y und z, so erhält man unbrauchbare Nebenlösungen, welche den Doppellösungen $y = \pm (x + \lambda)$ und $z = \pm (x + \mu)$ entsprechen.

§ 3.

Im Journal von Crelle-Fuchs Bd. 115, S. 303 fgd. habe ich die Aufgabe gelöst, ein Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt anzugeben. Diese Aufgabe enthält die berühmte auch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von Kummer (Crelle Bd. 37, S 1) behandelte Aufgabe vom rationalen Viereck als besonderen Fall. Wir beabsichtigen hier eine neue Lösung der Tetraederaufgabe vorzutragen und beginnen mit der Vierecksaufgabe.

Wir bezeichnen die Ecken des Vierecks der Reihe nach mit den Buchstaben A, B, C, D, setzen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Ferner bezeichnen wir: $\sphericalangle DAC = \delta$, $BAC = \varepsilon$, $DAB = \alpha = \delta + \varepsilon$.

Da alle Seiten rationale Werte haben, so besitzen sämtliche Winkel unserer Figur rationale Kosinus. Da $\alpha = \delta + \varepsilon$, so muss auch $\sin \delta \sin \varepsilon$ rational sein, also $\sin \delta$ und $\sin \varepsilon$ entweder rational oder rational mit gleichem irrationalen Faktor sein. Folglich sind die Sinus aller Winkel unserer Figur entweder rational oder besitzen die gleiche Irrationalität. Im ersteren Falle ist auch der Inhalt des Vierecks rational.

Wir greifen nun irgend einen rationalen Bruch heraus, den wir als $\cos \alpha$ bezeichnen, und bestimmen nach § 1 ein rationales Dreieck, in welchem ein Winkel $180^0 - \alpha$ vorkommt; dann betragen die beiden andern zusammen α. liefern also passende Werte für δ und ε. Dann ist

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de \cos \delta, \qquad b^2 = a^2 + e^2 - 2ae \cos \varepsilon.$$

Wenn wir also setzen $c = e + d\lambda$, $b = e + a\mu$, so wird

$$2e = \frac{d\,(1 - \lambda^2)}{\lambda + \cos \delta} = \frac{a\,(1 - \mu^2)}{\mu + \cos \varepsilon}. \tag{5}$$

Diese Gleichung entspricht genau der bereits behandelten (3) und ist von derselben Schwierigkeit wie jene. Wir lösen sie durch die Annahme $\lambda = \mu$ und $\lambda = -\mu$. In beiden Fällen wird

$$2e = \frac{d(1 - \lambda^2)}{\lambda + \cos \delta},$$

im ersteren

$$\lambda = \frac{d \cos \varepsilon - a \cos \delta}{a - d}, \quad ac - db = e(a - d),$$

im letzteren

$$\lambda = \frac{d \cos \varepsilon - a \cos \delta}{a + d}, \quad ac + db = e(a + d).$$

Zahlenbeispiele.

1) $\cos \alpha = \frac{1}{8}$, $\cos \varepsilon = \cos \delta = \frac{3}{4}$.

$a = 288$, $b = 193$, $c = 337$, $d = 480$, $e = 247$, $f = 528$.

2) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \varepsilon = \frac{7}{8}$, $\cos \delta = \frac{11}{16}$.

$a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 2$, $e = 4$, $f = 4$.

3) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos \delta = \frac{7}{8}$, $\cos \varepsilon = \frac{11}{16}$.

$a = 60$, $b = 38$, $c = 23$, $d = 30$, $e = 28$, $f = 60$.

4) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \delta = \frac{7}{9}$, $\cos \varepsilon = \frac{23}{27}$.

$a = 81$, $b = 59$, $c = 76$, $d = 54$, $e = 110$, $f = 81$.

Die Lösung der Tetraederaufgabe vollzieht sich in durchaus gleicher Weise Zunächst bestimmen wir 3 Seiten $\alpha, \delta, \varepsilon$ einer körperlichen Ecke A derartig, daß der Ausdruck

$$F = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \delta - \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \alpha \cos \delta \cos \varepsilon$$

ein rationales Quadrat wird. Für das Viereck ist $F = 0$, weil $\alpha = \delta + \varepsilon$. Solche Winkel $\alpha, \delta, \varepsilon$, welche F zu einem Quadrate machen, können nach dem Crelles Journal Bd. 115, S. 303 von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mir erklärten Verfahren leicht gefunden werden. Setzen wir nun $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $DA = f$, $DB = g$, $DC = h$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $DAB = \delta$, $DAC = \varepsilon$, so wird

$$g^2 = (f + \lambda)^2 = f^2 + c^2 - 2fc \cos \delta, \quad h^2 = (f + \mu)^2 = f^2 + b^2 - 2bf \cos \varepsilon.$$

$$f = \frac{c^2 - \lambda^2}{2\lambda + 2c \cos \delta} = \frac{b^2 - \mu^2}{2\mu + 2b \cos \varepsilon}. \tag{6}$$

Wir sehen nun a, b, c als gegeben an und bestimmen λ, μ rational, so daß (6) erfüllt ist. Dies kann in mehrfacher Weise durch besondere Annahmen geschehen. Die einfachste ist wohl

$$\lambda + c \cos \delta = \mu + b \cos \varepsilon; \; c^2 - \lambda^2 = b^2 - \mu^2.$$

Nehmen wir

$$\cos \alpha = -\frac{3}{7}, \; \cos \delta = 0, \; \cos \varepsilon = +\frac{2}{7}, \; c = 6, \; b = 7.$$

Es wird

$$a = 88, \; b = 56, \; c = 48, \; f = 55, \; g = 73, \; h = 89.$$

Hiernach kann man leicht über einem Dreieck mit rationalen Seiten ein Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt errichten. Man findet z. B.

$$a = 16, \; b = 16. \; c = 16, \; f = 19, \; g = 21. \; h = 23.$$

Die Aufgabe, ein Parallelogramm mit rationalen Seiten und Diagonalen anzugeben, ist ein sehr besonderer Fall der hier behandelten Gruppe. Dieselbe ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, ein rationales Dreieck mit einer rationalen Mittellinie anzugeben. Nennt man die Mittellinie t_a, so heißt die Lösung:

$$b = mn + 1 + m - n, \qquad c = mn + 1 - m + n, \qquad a = 2(m + n),$$
$$t_a = mn - 1, \; m > n > 1.$$
$$m = 4, \; n = 2, \; a = 12, \; b = 11, \; c = 7, \; t_a = 7.$$
$$m = 5, \; n = 2, \; a = 14, \; b = 16, \; c = 6, \; t_a = 9.$$

Es ist leicht, Dreiecke anzugeben, in welchen außer den Seiten zwei Mittellinien rational sind, z. B.

$a = 42.$	$b = 28,$	$c = 26,$	$t_a = 17,$	$t_b = 32,$
61,	53,	63,	67,	85.
34,	44,	18,	29,	16.

Einen andern Charakter und zwar der gleichen Schwierigkeit wie die Aufgabe des rationalen Vierecks hat diejenige, welche rationale Dreiecke mit drei rationalen Mittellinien verlangt. Diese Aufgabe scheint Euler besonders interessiert zu haben, da er in seinen opera minora nicht weniger als fünfmal auf dieselbe eingeht. Er gibt folgende Lösungen:

$a = 158,$	$b = 127,$	$c = 131,$	$2t_a = 204,$	$2t_b = 261.$	$2t_c = 255,$
491,	807,	466,	1223,	515,	1252,
477,	277,	446,	569,	881,	640,
68,	87,	85,	158,	127,	131,
2491,	1266,	3593,	4777,	6052,	1645.

Eine weitere hergehörige Aufgabe ist die Angabe eines rationalen Dreiecks, in welchem der fünfte merkwürdige Punkt (welcher die Seiten unter gleichen Sehwinkeln zeigt) von den Ecken rationale Entfernungen hat. Ein Zahlenbeispiel der Auflösung des Systems:

$$x^2 + y^2 + xy = c^2, \; y^2 + z^2 + zy = a^2, \; z^2 + x^2 + zx = b^2$$

ist $a = 2917$, $b = 5672$. $c = 6223$, $x = 4928$, $y = 2065$, $z = 1272$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweiter Teil.

§ 4.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang der bisher behandelten Probleme mit den Additionstheoremen der elliptischen Funktionen darlegen. Wir stellen uns zu diesem Zwecke eine Aufgabe, welche zu den einfachsten auf dem ganzen Gebiete gehört, nämlich die Lösung des Systems

(7) $$x^2 + y^2 = c^2, \qquad y^2 + z^2 = a^2, \qquad z^2 + x^2 = b^2$$

in ganzen Zahlen. Die Aufgabe verlangt Angabe eines rechtwinkligen Tetraeders mit ganzzahligen Kanten. Sie ist von Euler sowohl in seiner Algebra als auch in der nachgelassenen Arbeit (opera minora, tom. II am Schlusse) behandelt worden.

Wir wollen zunächst eine neue besondere Lösung durch einen Kunstgriff geben. Die Quotienten $x:z$ und $y:z$ haben die Eigenschaft, daß ihre Quadrate um die Einheit vermehrt rationale Quadrate werden. Daher kann man ihnen die Form erteilen:

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), \; \frac{y}{z} = \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right).$$

Folglich muß, um auch die dritte Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

zu befriedigen,

$$\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2 = Q$$

ein rationales Quadrat sein. Entwickeln wir, so kommt

$$\lambda^2 + \mu^2 - 4 + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda^2\mu^2} = Q.$$

Nehmen wir nun $\lambda^2 + \mu^2 = 4$, so wird $Q = \frac{4}{\lambda^2\mu^2}$ und die Aufgabe ist gelöst. Wir setzen also

$$\lambda = 2\,\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}, \; \mu = \frac{4p}{p^2 + 1}.$$

Zahlenbeispiele. $p = 2$, $\lambda = \frac{6}{5}$, $\mu = \frac{8}{5}$, $\frac{x}{z} = \frac{11}{60}$, $\frac{y}{z} = \frac{39}{80}$, also in ganzen Zahlen

$$x = 44, \; y = 117, \; z = 240,$$

$$44^2 + 117^2 = 125^2, \qquad 44^2 + 240^2 = 244^2, \qquad 117^2 + 240^2 = 267^2.$$

Da $\lambda^2 + \mu^2 = 4$, so ist die Größenfolge der λ, μ durch diejenige der pythagoreischen Zahlendreiheiten bestimmt. Die drei kleinsten sind 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17. Das nächste Paar λ, μ ist also

$$\lambda = \frac{10}{13}, \; \mu = \frac{24}{13}.$$

Aus demselben entspringt die Lösung

$$x = 828, \; y = 2035, \; z = 3120,$$
$$a = 3725, \; b = 3228, \; c = 2197.$$

Wenn man die Ausdrücke der x, y, z in p ausrechnet, so ergibt sich leicht, daß c immer ein ganzzahliger Kubus wird. Bei dem nächsten Paare wird $c = 17^3$ werden.

Wenden wir uns nun der Lösung unserer allgemeinen Aufgabe zu, da die vorgetragene als besondere Lösung klar hervortritt.

Wir haben die Aufgabe auf die Untersuchung der Zahlen $\varDelta$ von der Form

(8) $$\varDelta = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zurückgeführt und verlangt, daß die Summe der Quadrate zweier solcher Zahlen ein rationales Quadrat sein soll. Diese Zahlen Λ sind jedem Primaner, der sich mit pythagoreischen oder heronischen Dreiecken beschäftigt hat, geläufig. Wir stellen die einfachsten zusammen:

Zähler: 3, 5, 8, 7, 20, 9, 12, 11, 28, 33, 13, 16, 39,
Nenner: 4, 12, 15, 24, 21, 40, 35, 60, 45, 56, 84, 63, 80.

Durch die Substitution $\lambda = \frac{\lambda' + 1}{\lambda' - 1}$ kehrt sich die Zahl Λ um:

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\lambda' - \frac{1}{\lambda'}\right) = 1.$$

Folglich sind auch die Zahlen $\frac{4}{3}$, $\frac{12}{5}$ u. s. w. Zahlen der Form Λ.

Nun können wir die Gleichungen (7) durch die Aufgabe ersetzen, drei Zahlen von der Form Λ derartig anzugeben, daß das Produkt derselben gleich Eins sei; oder daß der Quotient oder das Produkt zweier derselben gleich der dritten sei. Denn die sechs Quotienten $x : y$, $x : z$, u. s. w. sind sämtlich Zahlen von der Form Λ.

In unserem ersten Beispiel erhielten wir die beiden Zahlen $\Lambda = \frac{11}{60}$, $\Lambda' = \frac{39}{80}$. Ihr Quotient ist $\frac{44}{117}$; es ist aber

$$\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} - \frac{2}{11}\right) = \frac{117}{44}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{13}{9} - \frac{9}{13}\right) = \frac{44}{117}.$$

Ferner ist

$$\frac{60}{11} \cdot \frac{39}{80} \cdot \frac{44}{117} = 1.$$

Hiernach können wir unserm Problem die Form geben, es soll die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) \tag{9}$$

in rationalen Zahlen λ, μ, ν gelöst werden. Es ergibt sich aus (9)

$$\frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\lambda^2 - 1}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{\mu}{\lambda}, \qquad \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\sqrt{Q}}{\mu - \frac{1}{\mu}}$$

daraus folgt leicht ν und $\frac{1}{\nu}$.

Die Beziehung zu den elliptischen Funktionen gewinnen wir wie folgt. Sei

$$R(\lambda) = \lambda^2 Q = \lambda^4 + 1 + \lambda^2 \varrho, \qquad \varrho = \mu^2 + \frac{1}{\mu^2} - 4;$$

$$u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad \lambda = \psi(u), \qquad \sqrt{R(\lambda)} = \psi'(u).$$

Dann ist die Funktion $\psi(u)$ eine sehr bekannte elliptische Transcendente (vergl. Jacobi Werke, Bd. 1, S. 266, ferner Kronecker Sitzungsbericht vom 29. Juli 1886). Da nun das Additionstheorem lautet:

$$\psi(u + v) = \frac{\psi(u) \cdot \psi'(v) + \psi(v)\, \psi'(v)}{1 - \psi^2(u) \cdot \psi^2(v)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und darin keine andere Irrationalität als $\psi'(u)$ und $\psi'(v)$ vorkommt, so sind $\psi(2u)$, $\psi(3u)$ u. s. w. ebenso $\psi'(2u)$, $\psi'(3u)$ u. s. w. rational, sobald $\psi(u)$ und $\psi'(u)$ rational sind. Aus einer Lösung λ, μ ergeben sich also unendlich viel neue. Als Beispiel wählen wir die Verdopplung des Arguments. Es ist

$$\psi(2u) = \frac{2\psi(u) \cdot \psi'(u)}{1 - \psi^4(u)} = \frac{2\lambda^2}{1 - \lambda^4} \cdot \sqrt{Q}.$$

Setzen wir nun $2\frac{x}{z} = \lambda - \frac{1}{\lambda}$, $2\frac{y}{z} = \mu - \frac{1}{\mu}$ und berechnen $\lambda' = \psi(2u)$, dann $2\frac{x'}{z'} = \lambda' - \frac{1}{\lambda'}$, $2\frac{y'}{z'} = \mu - \frac{1}{\mu} = \frac{y}{z}$, so erhalten wir aus der ursprünglichen Lösung x, y, z, a, b, c folgende neue

$$x' = z^2y^2 - x^4, \qquad y' = 2xy\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}, \qquad z' = 2xz\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2};$$
$$a' = 2x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+z^2}\sqrt{y^2+z^2}, \quad b' = x^4 + 2x^2z^2 + z^2y^2, \quad c' = x^4 + 2x^2y^2 + z^2y^2.$$

Diese Formeln bevorzugen x. Folglich können wir ihnen zwei andere Gruppen von Formeln mit Bevorzugung von y und z an die Seite stellen. Haben $x^2 + y^2$ und $x^2 + z^2$ einen gemeinsamen Teiler, so hat ihn auch x'. Er kann also entfernt werden.

Setzt man $\psi(\alpha) = 1$, $\psi'(\alpha) = \mu - \frac{1}{\mu}$, so kann man ν sehr einfach durch $\psi(\alpha + u)$ ausdrücken.

§ 5.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Beziehung zum Abelschen Satze zu ermitteln. Die Betrachtung des Ausdruckes

$$Q = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)^2$$

veranlaßt uns, zwischen λ und μ einen näheren Zusammenhang herzustellen. Als einfachste Verbindung könnte man die lineare wählen. Allein dann würde nach Wegschaffung der Nenner sich der Grad von Q erhöhen, wenn nicht besondere Vorkehrungen getroffen werden. Wir wählen als solche die Bestimmung, daß μ gleichzeitig mit λ die Werte ± 1 annehmen soll. Also:

$$\mu = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad \alpha + \beta = \gamma + \delta, \qquad \gamma - \delta = -\alpha + \beta.$$

Nehmen wir $\alpha = \gamma p$, so wird

$$\mu = \frac{p\lambda + 1}{\lambda + p}. \tag{10}$$

Durch diese Festsetzung ist der Allgemeinheit der Lösung nicht im mindesten geschadet. Denn wenn irgend ein Paar λ, μ der Aufgabe genügt, so ist dazu immer ein bestimmtes p angebbar.

Nun ergibt sich aus Gleichung (8)

$$\frac{1}{2}\left(\nu - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{(\lambda + p)\,(p\lambda + 1)}{(p^2 - 1)\,\lambda}, \qquad \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{(p^2 - 1)\lambda}, \tag{11}$$

wo ohne Beziehung auf die frühere Bedeutung gesetzt ist:

$$R(\lambda) = p^2\lambda^4 + 2p(p^2 + 1)\,\lambda^3 + 2(p^4 + p^2 + 1)\,\lambda^2 + 2p(p^2 + 1)\,\lambda + p^2. \tag{12}$$

Es kommt also alles darauf an, über λ und p so zu verfügen, daß $R(\lambda)$ ein vollständiges Quadrat ist. Dann sind die Größen λ, μ, ν rational. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$R(\lambda) = (p\lambda^2 + a\lambda + b)^2 + A(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3). \tag{13}$$

Die Gleichung ist eine Identität. Sind a und b festgegeben, so kann man A, λ_1, λ_2, λ_3 bestimmen. Sind a und b stetig veränderlich, etwa von einer unabhängigen Variablen t abhängige eindeutige

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Funktionen, so ändern sich λ_1, λ_2, λ_3 in stetiger Weise. Ja, man braucht nur Anfangswerte für λ_1, λ_2, λ_3 festzulegen, um sogar innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutige Änderungen zu erhalten. Umgekehrt findet man Folgendes. Es ist

$$\sqrt{R(\lambda_\alpha)} = p\lambda_\alpha^2 + a\lambda_\alpha + b; \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Hier ist das Wurzelzeichen für λ_1 und λ_2 etwa willkürlich mit positivem oder negativem Zeichen zu nehmen. Dann sind a und b völlig bestimmt, mithin auch $\sqrt{R(\lambda_3)}$, und zwar eindeutig. Nehmen wir nun an, λ_1 und λ_2 seien bekannte Werte, für welche die Wurzelgrößen $\sqrt{R(\lambda_1)}$ und $\sqrt{R(\lambda_2)}$ rationale Werte haben. Dann liefert Gleichung (13) nach gehöriger Elimination eindeutig einen dritten Wert λ_3, für welchen $\sqrt{R(\lambda_3)}$ auch rational ist. Dieses Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen und so gewinnen wir beliebig viele Lösungen unserer Aufgabe, wenn zwei bekannt sind. Ja, es genügt eine einzige λ_1, denn wir nehmen in (13) $\lambda_2 = \lambda_1$, finden hieraus eindeutig eine weitere Lösung λ_3 u. s. w. Das ist der Gedanke, den Euler zur Lösung nicht blos der vorliegenden Aufgabe, sondern bei allen ähnlichen wieder und wieder anwendet. In unserem Falle setzen wir z. B. $\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$; d. h. wir nehmen an

$$R(\lambda) - (p\lambda^2 + a\lambda + b)^2 = 0$$

und verfügen über a und b derartig, daß die Koefficienten von λ^3 und λ^2 wegfallen. Wir erhalten dann genau die Eulersche Lösung unserer Aufgabe. Der Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem ist nun folgender. Sei

$$du_\alpha = \frac{d\lambda_\alpha}{\sqrt{R(\lambda_\alpha)}} = \frac{d\lambda_\alpha}{p\lambda_\alpha^2 + a\lambda_\alpha + b}; \text{ Gl. (14).}$$

Die rechte Seite lässt sich nun so umformen, daß $d\lambda_\alpha$ nicht vorkommt. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{R'(\lambda_\alpha)}{\sqrt{R(\lambda_\alpha)}}\,d\lambda_\alpha = (2p\lambda_\alpha + a)\,d\lambda_\alpha + \lambda_\alpha\,da + db,$$

$$\frac{d\lambda_\alpha}{\sqrt{R(\lambda_\alpha)}} = \frac{\lambda_\alpha da + db}{\frac{1}{2}R'(\lambda_\alpha) - (2p\lambda_\alpha + a)\sqrt{R(\lambda_\alpha)}}. \tag{15}$$

Wenn wir nun kurz setzen $F(\lambda) = A\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3)$, so wird, wenn wir (13) nach λ differentiiren, aus (15) mit Hülfe von (14)

$$\frac{d\lambda_\alpha}{\sqrt{R\lambda_\alpha}} = \frac{\lambda_\alpha da + db}{\frac{1}{2}F'(\lambda_\alpha)}. \tag{16}$$

Die Wichtigkeit dieser Umformung ist unverkennbar groß. Denn rechts sind die Differentiale $d\lambda_\alpha$ verschwunden. Wenn man also λ_α durch λ_1, λ_2, λ_3 ersetzt und addirt, so erhält man rechts durch Addition der entstehenden Gleichungen einen rationalen Ausdruck, dessen Integration sicher gelingt. In unserem Falle ist, da $F'(\lambda_1) = A(\lambda_1 - \lambda_2)\,(\lambda_1 - \lambda_3)$ u. s. w., die rechte Seite Null.

Wir haben hier fast mit Abels Worten sein berühmtes Theorem abgeleitet. Erteilen wir dem Wurzelzeichen $\sqrt{R(\lambda_1)}$ und $\sqrt{R(\lambda_2)}$ für kleine Werte λ_1, λ_2 das Vorzeichen von p, so ergibt sich durch Reihenentwicklung $\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0$; mithin wird λ_3 vom Werte ∞ ausgehen müssen. Wir haben also nach (15) durch Integration:

$$\int_0^{\lambda_1} + \int_0^{\lambda_2} + \int_\infty^{\lambda_3} = 0.$$

Die Differentialgröße ist der Einfachheit wegen ausgelassen. Ersetzen wir nun λ_3 durch $\frac{1}{\lambda_3}$ so wird

$$\int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} + \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} = \int_0^{\lambda_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}. \tag{17}$$

Ferner setzen wir

$$u = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}},\ \lambda = \varphi(u); \tag{18}$$

dann wird folgerichtig zu schreiben sein

$$\lambda_1 = \varphi(u_1), \qquad \lambda_2 = \varphi(u_2), \qquad \lambda_3 = \varphi(u_1 + u_2).$$

Aus (12) ergibt sich durch Koefficientenvergleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &2p(p^2+1) = 2ap + A, \qquad 2p^4 + 2p^2 + 2 = a^2 + 2bp - A\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{3\lambda_3}\right), \\ &2p(p^2+1) = 2ab + A\left(\lambda_1\lambda_2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3}\right), \qquad p^2 = b^2 - A\,\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\sqrt{R(\lambda_1)} = p\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b, \qquad \sqrt{R(\lambda_2)} = p\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b, \tag{20}$$
$$\sqrt{R(\lambda_3)} = p + a\lambda_3 + b\lambda_3^2.$$

Diese Gleichungen liefern das Additionstheorem und Subtraktionstheorem der Funktion $\varphi(u)$. Für ersteres sucht man λ_3 aus λ_1 und λ_2, für letzteres λ_2 aus λ_1 und λ_3. Indem man die Wurzelzeichen so bestimmt, wie wir oben festgesetzt haben, wird:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2\sqrt{R(\lambda_1)} + \lambda_1\sqrt{R(\lambda_2)} + p(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1\lambda_2)}{-\lambda_2\sqrt{R(\lambda_1)} + \lambda_1\sqrt{R(\lambda_2)} + p(\lambda_1 - \lambda_2)(1 + \lambda_1\lambda_2)}, \tag{21}$$

wo $\lambda_1 = \varphi(u_1 + u_2)$, $\lambda_2 = \varphi(u_2)$, $\lambda_2 = \varphi(u_2)$.

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2\sqrt{R(\lambda_1)} - \lambda_1\sqrt{R(\lambda_2)} - p(\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_2\sqrt{R(\lambda_1)} + \lambda_1\sqrt{R(\lambda_2)} + p(\lambda_1 - \lambda_2)(1 + \lambda_1\lambda_2)}, \tag{22}$$

wo $\lambda_1 = \varphi(u_1)$, $\lambda_2 = \varphi(u_2)$, $\lambda_3 = \varphi(u_1 - u_2)$.

Schreiten wir nun zur Bestimmung der Perioden unserer Funktion $\varphi(u)$.

Die Wurzeln der Gleichung $R(\lambda) = 0$ sind alle 4 imaginär. Wir nennen sie α, β, γ, δ. Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\gamma + p(\alpha + \gamma) + 1 = 0, \\ &\beta\delta + p(\beta + \delta) + 1 = 0, \\ &\alpha\beta = 1,\ \gamma\delta = 1. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Das Additionstheorem liefert, wenn $R(\lambda_1) = R(\lambda_2) = 0$ und $\lambda_1\lambda_2$ **nicht** gleich Eins ist,

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}.$$

Nehmen wir nun $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \gamma$, so wird $\lambda_3 = -\frac{1}{p}$. Setzen wir in (20) um, so folgt $\sqrt{R(\lambda_3)} = -p + \frac{1}{p}$. Nennen wir den zugehörigen Wert des Arguments ω, so wird

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{p}, \qquad \varphi'(\omega) = -p + \frac{1}{p}. \tag{24}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun liefert das Additionstheorem (22) sofort

$$\varphi(u+\omega) = -\frac{p\varphi(u)+1}{\varphi(u)+p}. \tag{25}$$

Hieraus folgt $\varphi(u+2\omega) = \varphi(u)$. Also ist 2ω eine Periode der Funktion $\varphi(u)$. Man findet leicht eine zweite Periode $2\omega'$. Nehmen wir $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \delta$, so folgt $\lambda_3 = -p$, $\sqrt{R\lambda_3} = p^3 - p$, also für

$$\varphi(\omega') = -p,\ \varphi'(\omega') = p^3 - p$$

wird

$$\varphi(u+\omega') = -\frac{\varphi(u)+p}{p\varphi(u)+1}, \qquad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u). \tag{26}$$

Aus den Gleichungen (25) und (26) folgt

$$\varphi(u+\omega)\cdot\varphi(u+\omega') = 1.$$

Folglich

$$\varphi(u+\omega+\omega') = \frac{1}{\varphi(u)}.$$

Daraus ergibt sich $\varphi(\omega+\omega') = \infty$.

§ 6.

Wir haben nun die halben Perioden unserer Funktion durch die Werte der elliptischen Funktion $\varphi(u)$ und ihrer Ableitung ausgedrückt. Diese Werte sind rational und genügen also der Eulerschen Aufgabe. Bei näherem Zusehen gewahrt man aber, daß man es mit uneigentlichen Lösungen zu thun hat. Denn für $\lambda = -\frac{1}{p}$ wird $\mu = 0$ und für $\lambda = -p$ wird $\mu = \infty$. Dagegen legen es die gefundenen Lösungen nahe, diejenigen Werte zu untersuchen, welche den Gleichungen genügen:

$$\varphi(\varepsilon) = -p, \qquad \varphi'(\varepsilon) = -p^3 + p.$$

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{p}, \qquad \varphi'(\xi) = p - \frac{1}{p}.$$

Das Argument ε unterscheidet sich von ω' um ein Integral, welches beim Umkreisen eines Unstetigkeitspunktes gewonnen wird. Daher ist es keine Periode, und hat auch zu einer solchen im allgemeinen kein rationales Verhältnis. Folglich müssen die unendlich vielen Werte $\varphi(n\varepsilon)$ ebensoviele Lösungen der Eulerschen Aufgabe liefern, für welche n einen positiven oder negativen ganzzahligen Wert hat. Die Lösungen werden für $\varphi(n\xi)$ nicht wesentlich verschieden. Am einfachsten gestalten sich die Rechnungen wohl für ein Argument η, welches wir erklären:

$$\varphi(\eta) = 0, \qquad \varphi'(\eta) = -p. \tag{27}$$

Das Duplikationstheorem von $\varphi(u)$ lautet:

$$\varphi(2u) = \frac{2\sqrt{R(\lambda)}}{p(1-\lambda^2)} \cdot \frac{(p\lambda^2+2\lambda+p)(\lambda^2+2p\lambda+1)-(1-\lambda^2)\sqrt{R(\lambda)}}{(p\lambda^2+2\lambda+p)^2+(\lambda^2+2p\lambda+1)^2}; \tag{28}$$

$$\lambda = \varphi\, 2(u),\ \sqrt{R(\lambda)} = \varphi'(u) = p + (p^2+1)\,u + \ldots \text{ für kleine } u.$$

(29) Es ist $\varphi(2\eta) = \varphi(2\xi) = \psi(2\varepsilon) = -\frac{4p}{p^2+1}$.

Das Additionstheorem liefert weiter

$$\varphi(u+\eta) = \frac{2\varphi'(u) - 2p\,\varphi^2(u) - 3(p^2+1)\,\varphi(u) - 2p}{4p\,\varphi(u) + p^2 + 1}. \tag{30}$$

Mit Hülfe des Subtraktionstheorems ergibt sich $\varphi(-u) = \varphi(u+\eta)$. Folglich $\varphi(-\eta) = \varphi(2\eta)$, $\varphi(-2\eta) = \varphi(3\eta)$, u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun liefert das Additions

(25)

Hieraus folgt $\varphi(u + 2\omega)$ … de der Funktion $\varphi(u)$. Man findet leicht eine zweite Peri … $\lambda_2 = \delta$, so folgt $\lambda_3 = -p$, $\sqrt{R\lambda_3} = p^3 - p$, also für

wird

(26) $\varphi(u + \omega'$ … $') = \varphi(u)$.

Aus den Gleichungen (25)

Folglich

Daraus ergibt sich $\varphi(\omega +$

Wir haben nun die halben … Werte der elliptischen Funktion $\varphi(u)$ und ihrer Ableitung ausge … d genügen also der Eulerschen Aufgabe. Bei näherem Zusehe … mit uneigentlichen Lösungen zu thun hat. Denn für $\lambda = -\frac{1}{p}$ … ird $\mu = \infty$. Dagegen legen es die gefundenen Lösungen nahe, … elche den Gleichungen genügen:

$\varphi($ … p.

φ … .

Das Argument ε unterschei … welches beim Umkreisen eines Unstetigkeitspunktes gewonnen w … d hat auch zu einer solchen im allgemeinen kein rationales Verh … vielen Werte $\varphi(n\varepsilon)$ ebensoviele Lösungen der Eulerschen Aufgab … n oder negativen ganzzahligen Wert hat. Die Lösungen werde … den. Am einfachsten gestalten sich die Rechnungen wohl für ei

(27)

Das Duplikationstheorem v

(28) $\varphi(2u) = \frac{2\sqrt{R(\lambda)}}{p(1 - \lambda^2)} \cdot$ … $- (1 - \lambda^2)\sqrt{R(\lambda)}$ … $2p\lambda + 1)^2$;

$\lambda = \varphi\ 2(u)$, $\sqrt{R(\lambda}$ … . . . für kleine u.

(29) Es ist $\varphi(2\eta) = \varphi(2\xi) = \varphi$

Das Additionstheorem liefe

(30) $\varphi(u + \eta) =$ … $(u) - 2p$.

Mit Hülfe des Subtraktions … $+ \eta)$. Folglich $\varphi(-\eta) = \varphi(2\eta)$, $\varphi(-2\eta) = \varphi(3\eta)$, u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führt man die Rechnungen für 2η und 3η durch, so ergibt sich zunächst die bereits früher § 4 gefundene Lösung:

$$\varphi(2\eta) = \lambda = -\frac{4p}{p^2+1}, \qquad \mu = \frac{3p^2+1}{p^3-3p}, \qquad \nu = -\frac{p^2+1}{2(p^2-1)}.$$

Ferner: $$\varphi(3\eta) = \lambda = \frac{(3p^2-1)(-7p^4+10p^2+1)}{p(p^2-3)(p^4+10p^2-7)}; \; \mu = \frac{4p(5p^4-6p^2+5)}{(p^2+1)(p^4-14p^2+1)}$$

$$\nu = \frac{(3p^2-1)(p^4+10p^2-7)}{(p^2-3)(-7p^4+10p^2+1)}.$$

Für $p = 2$ erhält man $\lambda = -\frac{8}{5}$, $\mu = -\frac{11}{2}$, $\nu = -\frac{5}{6}$ als dem $\varphi(2\eta)$ entsprechende Lösung. Rechnet man die x, y, z aus, so kommt man genau auf die frühere Lösung. Dem $\varphi(3\eta)$ entsprechen die Werte:

$$\lambda = -\frac{781}{98}, \qquad \mu = \frac{488}{195}, \qquad \nu = -\frac{539}{71}.$$

Die allgemeine Lösung ist in den Formeln enthalten

$$\lambda = \varphi(n\eta), \qquad \mu = \varphi(n\eta + \omega).$$

Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, daß das Auftreten besonderer Lösungen, aus denen wie aus $\lambda = \varphi(\omega)$ keine neuen und eigentlichen Lösungen abgeleitet werden können, in der Lehre von den höheren diophantischen Gleichungen nichts seltenes ist. So hat die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ die Lösung $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, während eigentliche Lösungen nicht existieren. Es unterliegt kaum einem Zweifel, daß für viele dieser Aufgaben die hier durchgeführte Methode zu Ergebnissen führen wird, zumal die Natur der Argumente η funktionentheoretisch ebenso bedeutsam wie grundlegend ist.

Düren, im November 1897. *K. Schwering.*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf