

73, 33<sup>b</sup>

BEITRÄGE

ZUR THEORIE

DER

ISOAGONALEN VERWANDTSCHAFTEN

VON

DR. GUSTAV HOLZMÜLLER.

ELBERFELD 1873.

9el  
1 (1873)





Beiträge  
zur  
Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

---

§ 1. Vorbemerkungen.

Man denke sich zwei Ebenen, von denen die eine alle complexen Zahlen  $z = x + yi$ , die andere alle Zahlen  $Z = X + Yi$  enthält. Ist dann  $Z = f(z)$ , so entspricht, wenn die Function eindeutig ist, jedem Punkte der  $z$ -Ebene ein Punkt der  $Z$ -Ebene; ist sie hingegen mehrdeutig, so gehören zu jedem Punkte der ersteren Ebene mehrere Punkte der letzteren. Geometrischen Gebilden der einen Ebene entsprechen bestimmte geometrische Gebilde der anderen. Bekanntlich sind diese „Abbildungen“ in den kleinsten Theilen ähnlich. Ausgenommen von dieser Conformität sind nur gewisse singuläre Punkte, die sich dadurch bestimmen, dass der Differentialcoefficient der Function dort verschwindet oder unendlich gross wird. Im Allgemeinen aber entsprechen Curven der einen Ebene Curven der andern, die sich unter denselben Winkeln schneiden. Jeder Function complexen Arguments entspricht in diesem Sinne eine conforme Abbildung oder, wie man auch sagt, eine isogonale Verwandtschaft.

Von diesen Verwandtschaften sind bis jetzt nur zwei so allgemein behandelt worden, dass man ihre Theorie als abgeschlossen ansehen kann, die Verwandtschaft der Aehnlichkeit, welche mit der Function  $Z = a + bz$  zusammenfällt, und die sogenannte Kreisverwandtschaft, die sich allgemein aus der Function  $Z = \frac{a + bz}{c + dz}$  ableiten lässt (auch die Constanten dürfen complexe Zahlen sein). Allgemeineres Interesse haben die Abhandlungen von Siebeck im 55., 57. und 59. Bande des Crell. Journals. Einen kurzen Ueberblick über die geschichtliche Entwicklung der Theorie der

conformen Abbildungen und ein Verzeichniss der einschlagenden Literatur findet sich in der Inauguraldissertation von H. Amstein: „Ueber die conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel“. Zürich 1872.

Von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der isogonalen Verwandtschaften ist nun folgende Frage:

Welche Curven der einen Ebene entsprechen den Parallelen zur reellen und imaginären Axe in der andern Ebene?

Diese Frage führt auf orthogonale Curvensysteme, durch welche man die Ebene in ein System rechtwinkliger Flächenräume eintheilen kann, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Diese Curvenschaaren leisten oft Dienste als krummlinige Coordinaten, aber abgesehen von ihrem geometrischen Interesse sind sie von besonderer Wichtigkeit für die allgemeine Kartographie und für die Wärmetheorie. In letzterer werden sie als „isothermische Curvensysteme“ bezeichnet, und dieser Name soll hier beibehalten werden.

So entspricht z. B. bei der Abbildung  $Z = e^z$  dem Systeme der Parallelen zur  $x$ - und  $y$ -Axe ein System concentrischer Kreise um den Nullpunkt und ihre Radien. (Vergl. meine Abhandlung über die logarithmische Ab-

bildung im 16. Jahrgange dieser Zeitschrift.) Die Transformation  $Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  verwandelt diese Kreise in confocale Ellipsen mit den Brennpunkten  $\pm 1$ , die Radien in die dazu gehörigen confocalen Hyperbeln. Die Abbildung  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  verwandelt dieselben Kreise in ein System confocaler Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm 1$ , während die Geraden in gleichseitige Hyperbeln übergehen, die durch die Punkte  $\pm 1$  gehen. Ferner zeigte Siebeck, dass die Abbildungen  $Z = \sin am z$ ,  $Z = \cos am z$ ,  $Z = \Delta am z$  auf Curvengruppen vierter Ordnung führen, welche interessante geometrische Eigenschaften besitzen.

Die allgemeine Lösung der aufgestellten Frage könnte auf folgendem Wege geschehen: Man setze in der Gleichung  $X + Yi = f(x + yi)$  die reellen und imaginären Theile gleich und bestimme  $x$  und  $y$  aus beiden Gleichungen als Functionen von  $X$  und  $Y$ . Ist dann  $x = F(XY)$  und  $y = \Phi(XY)$ , so entspricht den Parallelen von der Form  $x = a$  das Curvensystem  $F(XY) = a$ , den Parallelen  $y = b$  das System  $\Phi(XY) = b$ .

Die Lösung selbst bietet oft grosse Schwierigkeiten. Nur in einer beschränkten Anzahl von Fällen ist sie ohne Weiteres durchführbar. Eine besondere Vereinfachung gewährt folgender Satz der Functionentheorie:

Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des Arguments eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte Werthe der Function.

Für solche Functionen ergibt sich aus der Gleichung

- 1)  $X + Yi = f(x + yi)$   
 folgende Reihe von Relationen:  
 2)  $X - Yi = f(x - yi),$   
 3)  $X = \frac{f(x + yi) + f(x - yi)}{2},$   
 4)  $Yi = \frac{f(x + yi) - f(x - yi)}{2}.$

Oft ist es nützlich, auf Polarcoordinaten überzugehen. Dann folgen aus Multiplication und Division der Gleichungen 1) und 2) noch folgende:

- 5)  $R^2 = f(x + yi) \overline{f(x - yi)},$   
 6)  $\cos 2 \Phi + i \sin 2 \Phi = \frac{f(x + yi)}{f(x - yi)}.$

Zu den Functionen, die sich auf die angegebene Methode behandeln lassen, gehören z. B.  $\sin z, \cos z, \tan z, \sin am z, \cos am z, \Delta am z.$

In Folgendem soll zunächst die Abbildung  $Z = \cos z$  der Betrachtung unterworfen werden, welche schon Siebeck von anderen Gesichtspunkten aus behandelt hat. Der Zusammenhang der Abbildungen  $Z = \cos z$  und  $Z = \sin z$  wird uns auf die Transformation  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  führen. Dabei wird sich ein interessanter Zusammenhang zwischen den lemniscatischen und den Polarcoordinaten ergeben, der durch elliptische Coordinaten vermittelt wird. An diese Betrachtung schliesst sich eine wichtige Verallgemeinerung des obengenannten Satzes über das System confocaler Lemniscaten und gleichseitiger Hyperbeln an. Endlich soll nach specieller Betrachtung der Abbildung  $Z = \sin am z$  der Zusammenhang zwischen den bei den Transformationen  $Z = \sin am z, Z = \cos am z, Z = \Delta am z$  auftretenden Curvenschaaren untersucht werden.

Als Beispiele für gewisse Capitel der Riemann'schen Functionentheorie, auf welche die neueren Lehrbücher die Theorie der elliptischen Functionen begründen, werden die folgenden Betrachtungen manchem Leser nicht unwillkommen sein. Übrigens wird die Abhandlung auf synthetischem Wege eine Anzahl von Abbildungsaufgaben lösen, die sich mit Hilfe des Dirichlet'schen Princips analytisch behandeln lassen.

## § 2. Die Abbildung $(X + Yi) = \cos(x + yi).$

Das Additionstheorem giebt folgende Gleichungen:

$$X \pm Yi = \cos(x \pm yi) = \cos x \cos yi \mp \sin x \sin yi.$$

Aus demselben ergibt sich durch Addition und Subtraction die Zerlegung in den réellen und imaginären Theil:

$$X = \cos x \cos yi, \quad Yi = \sin x \sin yi.$$

Elimination von  $yi$  führt auf die Gleichung

1)  $\frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1,$

Elimination von  $x$  hingegen auf

$$2) \frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1 \text{ oder } 2^*) \frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^y - e^{-y})^2} = 1.$$

Dies sind die Gleichungen von Hyperbeln und Ellipsen mit den Brennpunkten  $\pm 1$ . Nimmt man Rücksicht auf die reelle Periode des Cosinus, so findet demnach folgende Beziehung statt:

Sämmtlichen Linien  $x = a \pm 2n\pi$  in der  $z$ -Ebene entspricht in der  $Z$ -Ebene die eine Hyperbel

$$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{\sin^2 a} = 1 \text{ oder } p - p_1 = 2 \cos a;$$

den Linien  $y = \pm c$  hingegen entspricht die Ellipse

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^c + e^{-c})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^c - e^{-c})^2} = 1 \text{ oder } p + p_1 = e^c + e^{-c}.$$

Daraus folgt, dass die confocalen Ellipsen und Hyperbeln sich rechtwinklig schneiden und ausserdem ein isothermisches Curvensystem in dem oben angegebenen Sinne bilden. Will man die Eintheilung der  $Z$ -Ebene in rechtwinklige Flächenräume, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, wirklich durchführen, so verfährt man folgendermassen.

Die congruenten Rechtecke der  $z$ -Ebene mögen durch folgende Linien gebildet werden:

$$\begin{aligned} \pm x &= 0, a, 2a, 3a \dots, \\ \pm y &= 0, c, 2c, 3c \dots \end{aligned}$$

Dann haben die entsprechenden Hyperbeln und Ellipsen folgende Halbachsen:

$$\begin{aligned} \frac{p - p_1}{2} &= 1, \cos a, \cos 2a, \cos 3a \dots, \\ \frac{p + p_1}{2} &= 1, \frac{e^c + e^{-c}}{2}, \frac{e^{2c} + e^{-2c}}{2}, \frac{e^{3c} + e^{-3c}}{2} \dots, \end{aligned}$$

oder, wenn man  $e^c = b$  setzt:

$$\frac{p + p_1}{2} = 1, \frac{1}{2} \left( b + \frac{1}{b} \right), \frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{1}{b^2} \right), \frac{1}{2} \left( b^3 + \frac{1}{b^3} \right) \dots$$

Die Ausdrücke für die Halbachsen der Ellipsen sind leicht zu construiren. Denkt man sich für die Hyperbeln den Einheitskreis gezeichnet, so erkennt man, dass, wenn ihre Halbachse gleich  $\cos a$  ist, ihre Asymptoten mit der reellen Axe die Winkel  $\pm a$  bilden. Folglich: Bei der genannten Eintheilung der Ebene folgen die Asymptoten der Hyperbeln unter gleichen Winkeln aufeinander.

Hat man also die nothwendigen Elemente für ein „Rechteck“ der  $Z$ -Ebene, so lässt sich die ganze Eintheilung elementar durchführen.

Das obige Resultat ergibt sich auch auf folgendem Wege: Bedenkt man, dass die Multiplication des Arguments mit  $i$  einer Drehung des Co-

ordinatensystems der  $z$ -Ebene um  $90^\circ$  entspricht, so lässt sich das, was in § 1 von der Abbildung  $Z = e^z$  gesagt wurde, leicht auf die Transformation  $Z = e^{zi}$  übertragen. Bei der letzteren gehen nämlich die Parallelen  $x = a \pm 2n\pi$  in Gerade durch den Nullpunkt mit der Neigung  $\vartheta = a$  über, während die Parallelen  $y = c$  sich in Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius  $r = c$  verwandeln. Nach demselben Paragraphen werden aber durch die Function  $Z = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right)$  die concentrischen Kreise und ihre Radien in confocale Ellipsen und Hyperbeln transformirt. Combinirt man Beides, indem man  $u = e^{zi}$  setzt, so erhält man das obige Resultat für die Abbildung  $Z = \frac{1}{2} (e^{zi} + e^{-zi}) = \cos z$ .

Aus  $Z = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right)$  folgt umgekehrt  $u = Z \pm \sqrt{Z^2 - 1}$ , es findet demnach mit Ausnahme der Punkte  $\pm 1$  Zweideutigkeit statt. Nach Riemann muss man sich daher die  $Z$ -Ebene zunächst doppelt denken, jedoch so, dass ihre beiden Schichten in den Verzweigungspunkten  $\pm 1$  zusammenhängen. Beide Punkte müssen ferner durch einen „Schnitt“ verbunden werden, dessen Ueberschreitung aus der einen Schicht in die andere führt. Wir wollen ihn direct als Gerade von  $-1$  nach  $+1$  legen.

Bei der andern Hilfsabbildung  $Z = e^{zi}$  wird jeder unendlich lange Flächenstreif von der Breite  $2\pi$ , welcher der imaginären Axe parallel ist, auf die ganze  $Z$ -Ebene abgebildet. Letztere ist also unendlichfach zu denken, und der Nullpunkt und der unendliche Punkt sind als Windungspunkte unendlicher Ordnung durch einen Schnitt zu verbinden, der am bequemsten längs der positiv reellen Axe gelegt wird.

Beide Betrachtungen combiniren sich bei der Abbildung  $Z = \cos z = \frac{1}{2} (e^{zi} + e^{-zi})$  in folgender Weise: Jeder der genannten Flächenstreifen wird nicht auf die einfache, sondern auf die doppelt zu denkende  $Z$ -Ebene abgebildet. Dem directen Schnitte von  $+1$  nach  $-1$  entspricht eine Theilung des Flächenstreifs durch die reelle Axe. Es mag nun festgesetzt werden, dass der Theil des Streifens, der auf derselben Seite mit der positiv imaginären Axe liegt, der oberen Schicht des Blattes entsprechen soll, der andere Theil der unteren Schicht. Die ganze  $z$ -Ebene wird jedoch auf unendlich viele Blätter der  $Z$ -Ebene abgebildet, deren jedes aus zwei Schichten besteht.

Würden die einzelnen Flächenstreifen durch die Linien  $x = 2n\pi$  bestimmt, so müsste man in der  $Z$ -Ebene noch einen Schnitt von  $+1$  nach  $+\infty$  legen, und dann liesse sich der Zusammenhang der einzelnen doppelschichtigen Blätter folgendermassen festsetzen:

Ein Ueberschreiten des Schnittes von  $-1$  nach  $+1$  führt aus der einen Schicht eines Blattes in die andere Schicht desselben Blattes, ein Ueberschreiten des Schnittes von  $+1$  nach  $+\infty$  führt aus der oberen Schicht eines Blattes in die

obere Schicht eines benachbarten Blattes, oder aus der unteren Schicht eines Blattes in die untere eines benachbarten.

Fig. 1 und 2 d. Taf. stellen das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen dar. Die Rechtecke der  $z$ -Ebene werden auf die gleichbenannten der  $Z$ -Ebene abgebildet. Die gleichnamigen Rechtecke der  $z$ -Ebene fallen auf ein und dieselbe Stelle der  $Z$ -Ebene. Dort sind Blätter und Schichten in der oben angegebenen Weise übereinander liegend zu denken.

Geht man in der  $z$ -Ebene auf einer Parallelen zur  $x$ -Axe, die oberhalb der letzteren liegt, von links nach rechts, so durchwandert man in der  $Z$ -Ebene eine Ellipse in negativer Drehung, und zwar liegt dieselbe in einer oberen Schicht.

Macht man denselben Weg auf der Parallelen, welche gegen die  $x$ -Axe symmetrisch zur obigen liegt, so beschreibt man in einer unteren Schicht der  $Z$ -Ebene dieselbe Ellipse in positiver Drehung.

Ebenso einfach lässt sich das Wandern auf Parallelen zur  $y$ -Axe und den ihnen entsprechenden Hyperbelarmen feststellen.

Beiläufig mag noch folgende Frage erörtert werden:

Wie lautet die Gleichung der Curven, welche das System der confocalen Ellipsen mit den Brennpunkten  $\pm 1$  unter constantem Winkel schneiden?

Man hat nur nöthig, die Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  der Transformation  $Z = \cos z$  zu unterwerfen. Der Geraden  $y = y_1$  entspricht die Ellipse  $p + p_1 = e^{y_1} + e^{-y_1}$ , woraus sich folgende Relationen ergeben:

$$e^{y_1} = \frac{(p + p_1) \pm \sqrt{(p + p_1)^2 - 4}}{2} \quad \text{oder} \quad y_1 = \lg \frac{(p + p_1) \pm \sqrt{(p + p_1)^2 - 4}}{2}.$$

Den Geraden  $x = x_1 \pm 2n\pi$  entspricht die Hyperbel  $p - p_1 = 2 \cos x_1$ , folglich ist

$$x_1 = \arccos \frac{p - p_1}{2}.$$

Der Geraden  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  entspricht also die Curve

$$\frac{1}{a} \arccos \frac{p - p_1}{2} + \frac{1}{b} \lg \frac{(p + p_1) \pm \sqrt{(p + p_1)^2 - 4}}{2} = 1$$

oder

$$\frac{(p + p_1) \pm \sqrt{(p + p_1)^2 - 4}}{2} = e^{\frac{b}{a} \left( a - \arccos \frac{p - p_1}{2} \right)}.$$

Hat man die Ebene durch confocale Ellipsen und Hyperbeln in die entsprechenden „Rechtecke“ eingetheilt, so sind die eben behandelten Curven bestimmt durch die Eckpunkte der diagonal aufeinander folgenden Rechtecke. Auch sie geben ein isothermisches Curvensystem. Ihre Ortho-



gonalen und überhaupt alle Trajectorien, die sie unter constantem Winkel schneiden, gehören derselben Classe von Curven an. Sie sind einer ähnlichen Behandlung fähig, wie die Trajectorien der durch zwei Punkte gehenden Kreisschaar, welche in meinem oben citirten Aufsätze als logarithmische Doppelspiralen bezeichnet wurden. Beiläufig sei bemerkt, dass die Gleichung der letzteren ihre einfachste Gestalt bei Anwendung der Bicircular-coordinaten erhält.

§ 3. Zusammenhang der Abbildungen  $Z = \cos z$ ,  $Z = \sin z$ ,  $Z = \sqrt{1 - z^2}$ , und die Beziehungen zwischen elliptischen, lemniscatischen und Polar-Coordinaten.

Die Abbildung  $Z = \sin z$  ist von der in § 2 untersuchten nicht wesentlich unterschieden. Auf dieselbe Weise, wie dort, ergeben sich aus dem Additionstheoreme die Gleichungen:

$$1) \quad X = \sin x \cos yi, \quad Yi = \cos x \sin yi.$$

Eliminirt man erst  $x$ , dann  $yi$ , so erhält man

$$2) \quad \frac{X^2}{\sin^2 x} - \frac{Y^2}{\cos^2 x} = 1 \quad \text{oder} \quad p - p_1 = 2 \sin x.$$

$$3) \quad \frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1 \quad \text{oder} \quad p + p_1 = e^c + e^{-c}.$$

Hier entspricht also den Linien  $y = \pm c$  dieselbe Ellipse, wie dort; den Linien  $x = a \pm 2n\pi$  hingegen entspricht eine Hyperbel mit der Halbaxe  $\sin a$ , während die des § 2 die Halbaxe  $\cos a$  hatte. Die Summe der Quadrate beider Halbaxen giebt die Einheit, und die Winkel, welche die entsprechenden Asymptoten mit der reellen Axe bilden, ergänzen sich zu  $90^\circ$ . Wir wollen deshalb jedesmal die eine Hyperbel als „Complementarhyperbel“ der anderen bezeichnen.

Die Periodicitätsverhältnisse sind dieselben, wie vorher. Jedes der unendlich vielen Blätter besteht aus zwei Schichten, die sich längs des Schnittes von  $-1$  nach  $+1$  durchkreuzen. Ueberschreitet man hingegen den Schnitt von  $+1$  nach  $+\infty$ , so gelangt man aus der oberen Schicht eines Blattes in die obere eines benachbarten Blattes, aus der untern Schicht eines Blattes hingegen in die untere eines andern.

Vorher entsprach dem Wege von  $0$  bis  $2\pi$  in der  $z$ -Ebene der geradlinige Weg von  $-1$  nach  $+1$  und zurück nach  $-1$  in der  $Z$ -Ebene. Jetzt entspricht demselben der Weg von  $0$  nach  $+1$ , zurück bis  $-1$  und von dort nach Null. Beachtet man bei jenen Wanderungen, welche Flächenräume man zur Linken, welche man zur Rechten hat, so ergibt sich für das gegenseitige Entsprechen der Quadranten Folgendes: Dem 1., 2., 3., 4. Quadranten der oberen Schichten der Ebene  $Z = \sin z$  entspricht

bezüglich der 4., 1., 2., 3. Quadrant der oberen Schichten der Ebene  $Z = \cos z$ ; dem 1., 2., 3., 4. Quadranten der unteren Schichten der Ebene  $Z = \sin z$  entspricht bezüglich der 2., 3., 4., 1. Quadrant der unteren Schichten der Ebene  $Z = \cos z$ .

Da nun  $\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z}$  und gleichzeitig  $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$  ist, so ergibt sich für die involutorische Verwandtschaft  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  folgendes Resultat:

Bei der Abbildung  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  entspricht dem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten  $\pm 1$  der einen Ebene dasselbe System confocaler Kegelschnitte in der anderen, und zwar erzeugt jede Ellipse sich selbst wieder, während jede Hyperbel in ihre Complementarhyperbel übergeht.

Die speciellen Fälle, in denen die Ellipsen oder Hyperbeln Gerade sind, erläutern sich selbst. Die gleichseitige Hyperbel erzeugt sich selbst wieder. Das Entsprechen der einzelnen Quadranten ist oben festgestellt. Gleichzeitig ergibt sich, dass jedem Gebilde der einen Ebene, welches gegen beide Axen symmetrisch ist, ein ebenfalls symmetrisches Gebilde der andern Ebene entspricht.

Eine andere wichtige Consequenz ist folgende:

Hat man die Gleichung einer Curvenschaar in elliptischen Coordinaten, bezogen auf die Brennpunkte  $\pm 1$ , und setzt man in derselben  $\sqrt{4 - d^2}$  an Stelle von  $d = p - p_1$ , während man  $s = p + p_1$  unverändert lässt, so erhält man die Gleichung des Curvensystems, welches dem ersteren bei der Abbildung  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  entspricht.

Bei der Untersuchung, inwiefern die einzelnen Individua sich gegenseitig entsprechen, vergesse man nicht, dass Doppalebene auf Doppalebene abgebildet wird.

Nun ist, wie oben angegeben wurde, bekannt, dass durch die Transformation  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  das System der Geraden durch den Nullpunkt übergeht in ein System gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte  $\pm 1$ , während die Kreise um den Nullpunkt in das orthogonale System confocaler Lemniscaten übergehen. (Umgekehrt findet dasselbe statt.)

Die Richtigkeit dieses interessanten Satzes lässt sich schon folgendermassen übersehen:  $P$  sei ein Punkt  $z$  der  $z$ -Ebene.  $J$  und  $J_1$  seien die Brennpunkte  $\pm 1$ , ferner seien  $p$  und  $p_1$  die absoluten Beträge der Strecken  $JP$  und  $J_1P$ ,  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  ihre Winkel mit der positiv reellen Axe. Dann ist offenbar

$$p(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = z + 1, \quad p_1(\cos \vartheta_1 - i \sin \vartheta_1) = z - 1,$$

folglich findet für die Abbildung  $Z = \sqrt{1-z^2} = i\sqrt{(z+1)(z-1)}$  folgende Beziehung statt:

$$\begin{aligned} Z &= i\sqrt{p_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \cdot p(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \\ &= \pm i\sqrt{p \cdot p_1} \left( \cos \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} + i \sin \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \right) \end{aligned}$$

oder

$$4) R(\cos \Phi + i \sin \Phi) = \sqrt{p \cdot p_1} \left[ \cos \left( \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

woraus sich ergibt

$$5) R = \sqrt{p \cdot p_1}$$

$$6) \Phi = \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2} \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad \vartheta + \vartheta_1 = 2\Phi.$$

Jedem Kreise mit Radius  $R = c$  entspricht eine Lemniscate (Cassinische Linie)  $p p_1 = c^2$ , jeder Geraden mit der Neigung  $\Phi = \Phi_1$  eine Curve, deren Radii vectores dem Gesetze  $\vartheta + \vartheta_1 = 2\Phi_1$  folgen. Diese Curven sind bekanntlich gleichseitige Hyperbeln, deren eine Asymptote die Neigung  $\Phi_1 \pm \frac{\pi}{2}$  hat, während die andere senkrecht auf ihr steht.\*

Einer doppelt zu denkenden Geraden durch den Nullpunkt mit der Neigung  $\Phi_1$  im ersten Quadranten entsprechen zwei getrennte Arme derselben Hyperbel, der eine im oberen, der andere im unteren Blatte liegend, und zwar der eine im vierten, der andere im dritten Quadranten. Die rückwärtsgehende Verlängerung der Geraden entspricht denselben Hyperbelarmen, nur vertauschen sich die beiden Schichten der Ebene. Die Senkrechte zu der besprochenen Geraden würde die Hyperbel vervollständigen.

Es geht aus dieser Betrachtung Folgendes hervor:

Hat man die Gleichung einer Curvenschaar in Polarcordinaten, und setzt man  $p \cdot p_1$  an Stelle von  $r^2$ , und  $\frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta_1)$  an Stelle von  $\varphi$ , so erhält man die Gleichung der Curvenschaar, welche der ersteren bei der Transformation  $Z = \sqrt{1-z^2}$  entspricht, und zwar in lemniscatischen Coordinaten, bezogen auf die Brennpunkte  $\pm 1$ .

So geht z. B. die Gleichung der logarithmischen Spirale

$$7) r = ck^\varphi$$

durch diese Operation über in

$$8) p \cdot p_1 = c^2 k^{\vartheta + \vartheta_1},$$

und dies ist also die Gleichung des Curvensystems, welches die confocalen Lemniscaten unter constantem Winkel schneidet.

\* Vergl. *Lame: „Leçons sur les coordonnées curvilignes“* etc., pag. 217.

Es ergibt sich ferner aus den letzten Untersuchungen eine eigenthümliche Constructionsmethode des Systems der confocalen Lemniscaten und ihrer orthogonalen gleichseitigen Hyperbeln, ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen und den Polarcoordinaten mittelst des Systems confocaler Ellipsen und Hyperbeln, der im Wesentlichen auf der oben erwähnten Vertauschung von  $d^2$  mit  $(4 - d^2)$  beruht.

Man denke sich in das System concentrischer Kreise um den Nullpunkt und ihrer Radien ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten  $\pm a$  gezeichnet. Jeder Punkt bewege sich auf der durch ihn gehenden Ellipse bis zum Durchschnitt mit der Complementaryhyperbel der durch ihn gehenden Hyperbel im gleichen Quadranten. Dann bilden die Punkte der Kreise in der neuen Lage ein System confocaler Lemniscaten, die Punkte der Radien ein System gleichseitiger Hyperbeln, welche durch die Brennpunkte der Lemniscaten gehen.

Der durch die Brennpunkte gehende Kreis verwandelt sich in die gewöhnliche, durch den Nullpunkt gehende Lemniscate, die grösseren Kreise geben geschlossene Lemniscaten, die kleineren solche, die aus zwei getrennten Ovalen bestehen. Umgekehrt gehen durch diese Uebertragung confocale Lemniscaten um  $\pm a$  und ihre orthogonalen Hyperbeln in Kreise und Gerade über.

Bei der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementaryhyperbel geht die gleichseitige Hyperbel in sich selbst über. Daraus folgt z. B.:

Schneidet einer der Kreise die gleichseitige Hyperbel, so geht die entsprechende Lemniscate durch dieselben vier Durchschnittspunkte. Schneidet eine der Geraden dieselbe Hyperbel, so geht die entsprechende Hyperbel der ersteren durch dieselben zwei Durchschnittspunkte. Wird eine der Ellipsen durch einen Kreis von Innen berührt, so wird sie auch von der entsprechenden Lemniscate von Innen berührt, jedoch auf anderer Axe.

Jeder Kreis, dessen Radius  $> 1$  ist ( $\pm 1$  mögen die Brennpunkte sein), berührt zwei der confocalen Ellipsen, die eine auf der reellen, die andere auf der imaginären Axe. Dasselbe findet bei der entsprechenden Lemniscate statt, nur jedesmal auf der anderen Axe. Ist hingegen der Radius  $< 1$ , so berühren die beiden sich entsprechenden Curven eine Hyperbel, resp. ihre Complementaryhyperbel und eine der Ellipsen. Aehnliche Bemerkungen lassen sich über die Geraden und Hyperbeln machen. Es folgen aus diesen Verhältnissen eine ganze Reihe geometrischer Sätze über diese Curvensysteme.

Um das System der confocalen Lemniscaten und ihrer orthogonalen Hyperbeln zu zeichnen, erinnere man sich noch des folgenden, analytisch leicht zu beweisenden Satzes:

Der Einheitskreis wird von den ihn schneidenden Lemniscaten horizontal, von jeder der Hyperbeln in zwei Punkten vertical durchschnitten.

Theilt man die Ebene durch concentrische Kreise und ihre Radien in ein System ähnlicher Flächenräume ein, so folgen die Geraden unter gleichen Winkeln aufeinander, während die Radien der Kreise eine geometrische Reihe bilden, z. B.

$$\dots \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3 \dots$$

Will man die Ebene durch confocale Lemniscaten und die orthogonalen Hyperbeln in ein System rechtwinkliger Flächenräume eintheilen, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit znstreben, so folgt hieraus, dass die Asymptoten der Hyperbeln unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, während die Producte  $p.p_1$  für die Lemniscaten folgende Reihe bilden:

$$\dots \frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^2}, 1, a^2, a^4, a^6 \dots$$

Die grossen Halbaxen der letzteren bilden demnach die Reihe:

$$\dots \sqrt{1 + \frac{1}{a^6}}, \sqrt{1 + \frac{1}{a^4}}, \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}, \sqrt{2}, \sqrt{1 + a^2}, \sqrt{1 + a^4}, \sqrt{1 + a^6} \dots,$$

aus der sich ohne Schwierigkeit die Reihe für die kleinen Halbaxen ergibt.

Fig. 3 stellt ein solches System der besprochenen Curven dar. — Es sei noch bemerkt, dass auch hier die Eckpunkte diagonal aufeinanderfolgender Rechtecke die Construction der Trajectorien ermöglichen, die durch Gleichung 8) dargestellt sind.

Die folgenden Paragraphen machen noch einige Verallgemeinerungen nöthig. Es ergibt sich leicht, dass die Abbildung  $Z = \sqrt{1 - \kappa^2 z^2}$  ebenfalls Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten um  $\pm 1$  verwandelt, nur wird nicht der Einheitskreis, sondern der Kreis durch  $\pm \frac{1}{\kappa}$  in die durch den Nullpunkt gehende Lemniscate transformirt. Demnach ist auch die Abbildung  $Z = \sqrt{1 + z^2} = \sqrt{1 - (iz)^2}$  nicht wesentlich von der oben behandelten unterschieden.

Die Abbildungen  $Z = \lambda \sqrt{1 - z^2}$  und  $Z = \lambda \sqrt{1 - \kappa^2 z^2}$  verwandeln die Kreise in Lemniscaten um die Punkte  $\pm \lambda$ . Die Factoren  $\kappa$  und  $\lambda$  dürfen auch complexe Werthe annehmen. Sie verändern die geometrischen Gebilde nur in Bezug auf den Massstab und bringen höchstens eine Drehung des entsprechenden Coordinatensystems hervor.

Für unsere Zwecke ist noch folgende Frage von Wichtigkeit: In welche Curven werden confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \lambda$  verwandelt, wo  $\lambda$  eine complexe Zahl ist?

Die Abbildung  $Z = \lambda \sqrt{1 - z^2}$  verwandelt die Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten um  $\pm \lambda$ . Unterwerfen wir diese Lemniscaten der Transformation  $Z = \sqrt{1 - \xi^2}$ , so ist das Resultat offenbar dasselbe, als wenn wir die Kreise direct der Transformation  $Z = \sqrt{1 - (\lambda \sqrt{1 - z^2})^2}$  unterwerfen. Nun ist aber der Ausdruck  $Z = \sqrt{1 - \lambda^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} z^2}$  mit dem vorgehenden identisch. Durch diese Transformation werden aber Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{1 - \lambda^2}$  verwandelt. Wir haben also folgenden allgemeinen Satz:

Durch die Transformation  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  verwandeln sich confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \lambda$  in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{1 - \lambda^2}$  und die gleichseitigen Hyperbeln durch die Punkte  $\pm \lambda$  in solche durch die Punkte  $\pm \sqrt{1 - \lambda^2}$ .

Ist im speciellen Falle  $\lambda$  reell und  $< 1$ , so liegen auch die Brennpunkte des zweiten Systems auf der reellen Axe. Ist  $\lambda = 1$ , so fallen die Brennpunkte der zweiten Gruppe in den Nullpunkt, sie gehen also in Kreise über. Ist  $\lambda = 0$ , d. h. ist das erste System das der concentrischen Kreise, so geht das zweite in Lemniscaten um  $\pm 1$  über.

Ist  $\lambda$  reell und  $> 1$ , so liegen die Brennpunkte des zweiten Systems auf der imaginären Axe. Ist endlich  $\lambda$  imaginär, so liegen sie auf der reellen Axe ausserhalb der Strecke  $\pm 1$ .

Der oben bewiesene Satz war also nur ein specieller Fall eines viel allgemeineren Theorems. Dasselbe gilt auch von der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel.

Noch allgemeiner verwandelt die Transformation  $Z = a \sqrt{1 - x^2 z^2}$  die Lemniscaten um  $\pm \lambda$  in solche um  $\pm a \sqrt{1 - x^2 \lambda^2}$ .

Auf die geometrischen Consequenzen dieses interessanten Satzes wollen wir jetzt nicht näher eingehen.

#### § 4. Die Abbildung $Z = \sin am z$ (für $x +$ , reell und $< 1$ ).

In derselben Weise, wie die Abbildung  $Z = \sin z$ , lässt sich auch die der elliptischen Function  $Z = \sin am z$  entsprechende behandeln. Hier gelten die Gleichungen

$$1) \sin am(x \pm yi) = X \pm Yi = \frac{\sin am x \cos am yi \Delta am yi \pm \sin am yi \cos am x \Delta am x}{1 - x^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}$$

Addition und Subtraction geben als reellen und imaginären Theil

$$2) \quad X = \frac{\sin am x \cos am yi \Delta am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

$$3) \quad Yi = \frac{\sin am yi \cos am x \Delta am x}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

Schliesslich erhält man durch Multiplication von  $\sin am (x + yi)$  und  $\sin am (x - yi)$

$$4) \quad X^2 + Y^2 = \frac{\sin^2 am x - \sin^2 am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

Zur Abkürzung mag gesetzt werden

$$\sin am x = l, \quad \sin am yi = \lambda,$$

$$\cos am x = m, \quad \cos am yi = \mu,$$

$$\Delta am x = n, \quad \Delta am yi = v.$$

Dann folgen aus Gleichung 4) die Relationen

$$l^2 = \frac{\lambda^2 + (X^2 + Y^2)}{1 + \kappa^2 \lambda^2 (X^2 + Y^2)}, \quad \lambda^2 = \frac{l^2 - (X^2 + Y^2)}{1 - \kappa^2 l^2 (X^2 + Y^2)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 2) und 3) ein, so ergeben sich neue, die sich auf folgende Form bringen lassen:

$$5) \quad (X^2 + Y^2)^2 + (X^2 + Y^2) \frac{1 + \kappa^2 \lambda^4}{\kappa^2 \lambda^2} - X^2 \frac{(1 - \kappa^2 \lambda^4)^2}{\kappa^2 \lambda^2 \mu^2 v^2} + \frac{1}{\kappa^2} = 0,$$

$$6) \quad (X^2 + Y^2)^2 - (X^2 + Y^2) \frac{1 + \kappa^2 l^4}{\kappa^2 l^2} + Y^2 \frac{(1 - \kappa^2 l^4)^2}{\kappa^2 l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{\kappa^2} = 0.$$

Ist nun  $x$  constant, also

$$x = c = \int_0^l \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\kappa^2 Z^2)}},$$

so werden auch  $l$ ,  $m$  und  $n$  constant. Ebenso entsprechen constantem  $y$  constante Werthe von  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$ , wobei  $\lambda$  ebenfalls durch die obere Grenze eines bestimmten Integrals obiger Form dargestellt wird.

Beachtet man die doppelte Periodicität der elliptischen Function, so ergibt sich demnach folgender Satz:

Sämmtlichen Parallelen zur  $y$ -Axe der  $z$ -Ebene von der Gleichung  $x = a \pm 4nK$  entspricht eine Curve vierten Grades, deren Gleichung die Form 6) hat. Sämmtlichen Parallelen zur  $x$ -Axe von der Gleichung  $y = \alpha \pm 2nK'$  entspricht eine Curve, deren Gleichung von der Form 5) ist.

Die beiden Curvensysteme sind orthogonal und gehören wieder zu den isothermischen. Da  $X$  und  $Y$  nur in geraden Potenzen vorkommen, so sind beide Systeme symmetrisch gegen beide Axen.

In Polarcordinaten lauten die Gleichungen:

$$7) \quad R^4 + R^2 \frac{1 + \kappa^2 \lambda^4}{\kappa^2 \lambda^2} - R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(1 - \kappa^2 \lambda^4)^2}{\kappa^2 \lambda^2 \mu^2 v^2} + \frac{1}{\kappa^2} = 0,$$

$$8) \quad R^4 - R^2 \frac{1 + \kappa^2 l^4}{\kappa^2 l^2} + R^2 \sin^2 \vartheta \frac{(1 - \kappa^2 l^4)^2}{\kappa^2 l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{\kappa^2} = 0.$$

Nur in Gleichung 7) kann der Factor von  $R^2 \cos^2 \vartheta$  verschwinden. Dies geschieht für  $\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{x}}$ . Dann geht die Gleichung über in  $R^4 - R^2 \cdot \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0$  oder in

$$7^*) \quad R^2 = \frac{1}{x}.$$

Nun ist aber

$$\sin am \left( \pm \frac{iK'}{2} \right) = \pm \frac{i}{\sqrt{x}};$$

folglich gilt der Satz:

Beider Abbildung  $Z = \sin am z$  ( $x +$ , reell und  $< 1$ ) entspricht den Parallelen  $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$  der  $z$ -Ebene stets ein Kreis um den Nullpunkt der  $Z$ -Ebene mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Im nächsten Paragraphen wird sich ferner zeigen, dass den Parallelen  $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$  stets eine Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm \frac{1}{x}$  entspricht, welche durch die Punkte  $\pm \frac{1}{x} \sqrt{1-x'}$  und  $\pm \frac{1}{x} \sqrt{1+x'}$  geht. (Wir können auch schreiben: durch die Punkte  $\pm \frac{1}{\sqrt{1+x'}}$  und  $\pm \frac{1}{\sqrt{1-x'}}$ ). Dies lässt sich auch direct zeigen. Setzt man nämlich  $\sin am \left( \pm \frac{2n+1}{2} K \right)$ , also  $\pm \frac{1}{\sqrt{1+x'}}$  wirklich in Gleichung 6) ein, so geht sie über in

$$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Lemniscate.

Für einen Augenblick werde jener Kreis als Einheitskreis betrachtet, was man durch die Transformation  $R = R \cdot \sqrt{x}$  erreicht. Dann nehmen die Gleichungen 7) und 8), wenn man sie noch mit  $\frac{x^2}{R^2}$  multiplicirt, folgende Gestalt an:

$$9) \quad R^2 + \frac{1+x^2 \lambda^4}{x \lambda^2} - \cos^2 \vartheta \frac{(1-x^2 \lambda^4)^2}{x \lambda^2 \mu^2 \nu^2} + \frac{1}{R^2} = 0,$$

$$10) \quad R^2 - \frac{1+x^2 l^4}{x l^2} + \sin^2 \vartheta \frac{(1-x^2 l^4)^2}{x l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{R^2} = 0.$$

Diese Gleichungen sind reciprok. Für unsere Curvensysteme ergibt sich also der Satz:



Der ausserhalb jenes Kreises liegende Theil beider Curvenschaaren lässt sich durch Transformation mittels reziproker Radii vectores aus dem innerhalb liegenden erzeugen.

Hieraus folgt beiläufig für die aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate, dass sie reciprok gegen den Kreis um den Nullpunkt ist, der sie rechtwinklig schneidet.

Der genannten Reciprocität entspricht eine gewisse Symmetrie innerhalb des rechtwinkligen Periodenparallelogramms.

Untersucht man die Specialfälle  $x = \pm K$ ,  $x = \pm 2K$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pm K'$ , d. h. also  $l = \pm 1$ ,  $l = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \infty$ , so erkennt man, dass für diese Werthe die Curven in Gerade übergehen, und zwar entspricht sämtlichen Linien  $y = \pm 2nK'$  der Weg von  $-1$  nach  $+1$ , hin und zurück unendlich oft durchlaufen; sämtlichen Linien  $x = (1 \pm 4n)K$  die Strecke der reellen Axe von  $+1$  nach  $+\frac{1}{z}$ , den Parallelen  $x = -(1 \pm 4nK)$  oder  $x = (3 \pm 4nK)$  die Strecke zwischen  $-1$  und  $-\frac{1}{z}$ , allen Parallelen  $y = \pm (2n+1)K'$  der Weg von  $+\frac{1}{z}$  längs der reellen Axe nach  $\infty$  und von  $-\infty$  nach  $-\frac{1}{z}$ , schliesslich allen Parallelen  $x = \pm 4nK$  die ganze  $Y$ -Axe.

Beobachtet man bei diesen Wanderungen, welche Flächenräume man zur Linken, welche man zur Rechten hat, so ergiebt sich zunächst, dass jedes rechtwinklige Periodenparallelogramm der  $z$ -Ebene auf eine doppelt zu denkende Ebene abgebildet wird, das halbe Periodenparallelogramm auf die einfache Ebene, der vierte Theil desselben auf das Innere oder Aeussere eines Kreises mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{z}}$ , wobei jedoch von  $+1$ , resp.  $+\frac{1}{z}$ , und von  $-1$ , resp.  $-\frac{1}{z}$  nach der Peripherie desselben Schnitte zu denken sind.\*

Im Riemann'schen Sinne wird man schliesslich zu folgender Vorstellung genöthigt: Es liegen in der  $Z$ -Ebene doppelt unendlich viele Blätter übereinander, deren jedes aus zwei Schichten besteht. Die Schnitte legt man am bequemsten in die reelle Axe, z. B. einen von  $-\frac{1}{z}$  nach  $-1$ , den zweiten von  $+1$  nach  $+\frac{1}{z}$ , einen dritten endlich von  $+\frac{1}{z}$  über  $\infty$  nach  $-\frac{1}{z}$ . Nur die Strecke von  $+1$  nach  $-1$  bleibt ohne Schnitt. Jedem dieser

\* Hierauf beruht im Wesentlichen die von Herrn Prof. Schwarz gegebene Abbildung des Innern eines Kreises auf ein Rechteck. Vergl. dessen Abhandlung im 70. Bande des Crelle'schen Journals: „Ueber einige Abbildungsaufgaben“. Es ist nur noch nöthig, durch Transformation mittels reziproker Radii vectores die Halbebene in das Innere eines nicht eingeschnittenen Kreises zu verwandeln.

Schnitte entspricht eine besondere Art von Durchkreuzungen. Man kann z. B. folgende Anordnung treffen: Längs des Schnittes von  $+1$  nach  $+\frac{1}{\varkappa}$  durchkreuzen sich stets die obere und untere Schicht desselben Blattes. Ueberschreitung des Schnittes von  $-1$  nach  $-\frac{1}{\varkappa}$  führt aus der untern Schicht eines Blattes in die obere Schicht eines benachbarten Blattes, oder umgekehrt. Längs des Schnittes von  $\frac{1}{\varkappa}$  über  $\infty$  nach  $-\frac{1}{\varkappa}$  hängt die untere Schicht jedes Blattes mit der untern Schicht eines benachbarten, die obere Schicht jedes Blattes mit der oberen eines benachbarten zusammen. Es wäre wohl möglich, diese complicirte Art der gegenseitigen Durchkreuzung durch ein Modell darzustellen. Fig. 4 und 5 stellen das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen dar. Die gleichnamigen Flächenräume der  $z$ -Ebene fallen sämmtlich auf einen entsprechenden Raum der  $Z$ -Ebene. Das halbe Periodenparallelogramm mit den Ecken  $K \pm iK'$  und  $-K \pm iK'$  ist besonders hervorgehoben.\*

Die Conformität der Abbildung  $Z = \sin am z$  hört, abgesehen vom unendlichen Punkte, noch auf in den Punkten  $\pm 1$  und  $\pm \frac{1}{\varkappa}$ . Dort entspricht jedem rechten Winkel der  $z$ -Ebene ein gestreckter in der  $Z$ -Ebene, jedem gestreckten der ersteren ein voller Winkel in der andern. Alle Linien, welche durch die entsprechenden Punkte der  $z$ -Ebene gehen, werden demnach in solche verwandelt, die in  $\pm 1$  und  $\pm \frac{1}{\varkappa}$  Rückkehrpunkte haben. Bekanntlich beruht dies darauf, dass für diese Punkte der Differentialquotient von  $\sin am z$  verschwindet. Nach Siebeck sind solche Punkte Brennpunkte für die betreffenden Curvenschaaren.

Will man die Ebene durch beide Curvensysteme in rechtwinklige Flächenräume eintheilen, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, und sind die nöthigen Elemente für ein „Rechteck“ gegeben, so lassen sich die übrigen mit Hilfe des Additionstheorems construiren. Folgen z. B. die Parallelen zur imaginären Axe der  $z$ -Ebene folgendermassen aufeinander:

$$x = 0, x = a, x = 2a \dots,$$

so schneiden die entsprechenden Curven der  $Z$ -Ebene die reelle Axe in folgenden Punkten:

$$X = 0, x = \sin am a, x = \sin am 2a = \frac{2 \sin am a \cos am a \Delta am a}{1 - \varkappa^2 \sin^4 am a} \dots,$$

Tabellen lassen sich also ohne Schwierigkeit darstellen.

\* Das ganze Curvensystem ist dargestellt in der citirten Siebeck'schen Abhandlung im 57. Bande des Crelle'schen Journals.

Die Eckpunkte der diagonal aufeinander folgenden Rechtecke bestimmen wieder das System der Trajectorien. Nur zwei Gruppen derselben sind von besonderem Interesse und führen auf verhältnissmässig einfache Gleichungen, die Curvenschaaren nämlich, welche den Parallelen zu den Diagonalen des rechtwinkligen Periodenparallelogramms entsprechen. Diese schneiden die Axen unter Winkeln, welche sich durch die Gleichung

$$\tan \varphi = \pm \frac{K'}{2K}$$

bestimmen. Jede dieser Curven umschliesst entweder die Brennpunkte  $+1$  und  $-\frac{1}{z}$ , oder  $-1$  und  $+\frac{1}{z}$  und kehrt dann in sich selbst zurück. Aus jener Gleichung folgt nun

$$\cos \varphi \pm i \sin \varphi = \frac{2K \pm iK'}{\sqrt{4K^2 + K'^2}}.$$

Multiplication des Arguments mit  $(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$  bringt aber eine Drehung des Coordinatensystems um den Winkel  $\pm \varphi$  hervor. Man findet also die Gleichung jener Trajectorien, wenn man folgende Frage untersucht:

Welche Curven entsprechen den Parallelen zur reellen Axe bei den Abbildungen

$$11) \quad X + Yi = \sin am \left[ (x + yi) \frac{2K \pm iK'}{\sqrt{4K^2 + K'^2}} \right] ?$$

Die Schwierigkeit dieses noch nicht behandelten Problems beruht darauf, dass die in § 1 angedeuteten Vereinfachungen hier nicht stattfinden. Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung in dem Falle, wo  $2K = K'$  ist. Dann ist  $\varphi = \pm 45^\circ$ , und Gleichung 11) geht über in

$$12) \quad X + Yi = \sin am [(x + yi) (1 \pm i) \sqrt{\frac{1}{2}}],$$

wo jedoch der Modul  $z$  dem Periodenverhältniss  $\frac{K'}{2K} = 1$  gemäss zu bestimmen ist.

Einer der hierher gehörigen Specialfälle ist durch eine kurze Anmerkung am Schluss der Jochmann'schen Abhandlung im 14. Jahrgange dieser Zeitschrift erledigt.

Beiläufig sei bemerkt, dass die Behandlung der Abbildungen 11) und 12) auf interessante Resultate führt, die sich auf die Oberfläche der Kugel und des dreiaxigen Ellipsoids beziehen. Es ergibt sich z. B., dass die Oberfläche des Ellipsoids durch zwei Systeme in sich selbst zurücklaufender Curven, welche die Krümmungslinien unter constantem, näher zu bestimmendem Winkel schneiden, in ein System schiefwinkliger Flächenräume eingetheilt werden kann, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Für die Kugel gehen bekanntlich die Krümmungslinien in zwei Systeme confocaler sphärischer Kegelschnitte über. Theilen im speciellen

Falle die Brennpunkte derselben den durch sie gehenden grössten Kreis in vier gleiche Theile, so ist das System von Trajectorien dasjenige, welches die sphärischen Kegelschnitte unter dem Winkel  $\pm 45^\circ$  schneidet. Die vier durch die Brennpunkte gehenden Curven haben dort Rückkehrpunkte und bilden zusammen zwei grösste Kreise. Projicirt man dieses System stereographisch von einem Pole des Kreises aus, auf dem die Brennpunkte liegen, auf eine Ebene, so erhält man, wie aus der Schlussanmerkung der Jochmann'schen Abhandlung gefolgert werden kann, eine Gruppe der durch  $Z = \cos am z$  (mit einem bestimmten Modul) dargestellten Curven.

Man vergleiche an dieser Stelle den Schlussparagraphen meiner oben citirten Abhandlung über die logarithmische Abbildung, welcher speeiieller auf den Zusammenhang der besprochenen Curvenschaaren mit den Krümmungslinien des Ellipsoids und den sphärischen Kegelschnitten hinweist.

Beiläufig ergibt sich aus einer oben gemachten Anmerkung, dass eine bestimmte stereographische Projection desjenigen sphärischen Kegelschnitts, welcher die Halbkugel in zwei correspondirende Flächenräume eintheilt, auf eine aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate führt.

Die Betrachtungen des folgenden Paragraphen machen es nöthig, für einen Augenblick auf die Siebeck'sche Abhandlung im 57. Bande des Crelle'schen Journals Bezug zu nehmen. Dort werden die Gleichungen unserer Curvenschaaren in elliptischen Coordinaten mit den Brennpunkten  $\pm 1$  dargestellt, und zwar stimmt die Entwicklung im Wesentlichen mit derjenigen überein, welche in § 3 für die Untersuchung der Abbildung  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  angewendet wurde.

$P$  sei ein Punkt  $Z$  der  $Z$ -Ebene,  $P_1$  der conjugirte Punkt,  $J$  und  $J_1$  die Brennpunkte  $\pm 1$ , dann gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} JP &= (X + Yi) - 1, & J_1 P &= (X + Yi) + 1, \\ J_1 P_1 &= (X - Yi) - 1, & J P_1 &= (X - Yi) + 1. \end{aligned}$$

Das Product zweier conjugirter Zahlen ist bekanntlich das Quadrat ihres absoluten Betrags. Der absolute Betrag von  $JP$  und  $J_1 P_1$  werde mit  $p$ , der von  $J_1 P$  und  $J P_1$  mit  $p_1$  bezeichnet. Dann finden für die Transformation  $X + Yi = \sin am(x + yi)$  folgende Gleichungen statt:

$$p_1^2 = [1 + \sin am(x + yi)][1 + \sin am(x - yi)] = \frac{(\sin am x \Delta am yi + \cos am yi)^2}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

$$p^2 = [1 - \sin am(x + yi)][1 - \sin am(x - yi)] = \frac{(\sin am x \Delta am yi - \cos am yi)^2}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

Setzt man jetzt  $JP + J_1 P = S$ ,  $JP - J_1 P = D$ , so ergibt sich

$$S = \frac{2 \sin am x \Delta am x}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}}, \quad D = \frac{2 \cos am yi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}}.$$

Elimination von  $x$  führt auf die Gleichung:

$$13) \quad \frac{D^2}{\cos^2 am yi} - \frac{S^2 \kappa^2 \cos^2 co am yi}{\kappa'^2} = 4$$

oder

$$13^*) \quad \cos^2 \operatorname{co am}(y\kappa') S^2 + \cos^2 \operatorname{am}(y\kappa') D^2 = 4.$$

Durch Elimination von  $yi$  hingegen findet man

$$14) \quad \frac{S^2}{\cos^2 \operatorname{co am} x} - \frac{D^2 \kappa^2 \cos^2 \operatorname{am} x}{\kappa'^2} = 4.$$

Die Brennpunkte  $\pm \frac{1}{\kappa}$  sind gleichberechtigt mit  $\pm 1$ . Wir wollen die Gleichungen derselben Curven in elliptischen Coordinaten mit den Brennpunkten  $\pm \frac{1}{\kappa}$  darstellen. Der entsprechende Gang ist bei analoger Bezeichnung folgender:

$$p^2 = \left[ \frac{1}{\kappa} - \sin \operatorname{am}(x + yi) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\kappa} - \sin \operatorname{am}(x - yi) \right]$$

$$= \frac{(\Delta \operatorname{am} yi - \kappa \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi)^2}{\kappa^2 (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)},$$

$$p_1^2 = \left[ \frac{1}{\kappa} + \sin \operatorname{am}(x + yi) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\kappa} + \sin \operatorname{am}(x - yi) \right]$$

$$= \frac{(\Delta \operatorname{am} yi + \kappa \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi)^2}{\kappa^2 (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)},$$

folglich

$$S = \frac{2 \Delta \operatorname{am} yi}{\kappa \sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)}}, \quad D = \frac{2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} yi}{\sqrt{(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x \sin^2 \operatorname{am} yi)}}$$

Elimination von  $x$  führt auf die Gleichung

$$15) \quad \frac{\kappa_2 S^2}{\Delta^2 \operatorname{am} yi} - \kappa^2 D^2 \tan^2 \operatorname{am} yi = 4$$

oder

$$15^*) \quad \kappa^2 S^2 \sin^2 \operatorname{co am}(y\kappa') + \kappa^2 D^2 \sin^2 \operatorname{am}(y\kappa') = 4.$$

Elimination von  $yi$  führt auf

$$16) \quad \frac{\kappa^2 S^2 \Delta^2 \operatorname{am} x}{\kappa'^2} - \frac{\kappa^2 D^2}{\kappa'^2 \tan^2 \operatorname{am} x} = 4.$$

Betrachtet man die Strecken  $\frac{1}{\kappa}$  als Einheit, so verändern sich diese Gleichungen nur insofern, als der Factor  $\kappa^2$  einfach wegfällt.

Die durch Gleichung 13), 13\*), 15), 15\*) dargestellten Curven entsprechen den Parallelen zur  $x$ -Axe, die durch 14) und 16) dargestellten den Parallelen zur  $y$ -Axe.

### § 5. Zusammenhang der Abbildungen $Z = \sin \operatorname{am} z$ , $Z = \cos \operatorname{am} z$ , $Z = \Delta \operatorname{am} z$ .

Die Abbildungen  $Z = \cos \operatorname{am} z$  und  $Z = \Delta \operatorname{am} z$  lassen sich ebenso behandeln, wie  $Z = \sin \operatorname{am} z$ . Sowohl die Anwendung des Additionstheorems, als auch der Siebeck'sche Weg führen zum Ziele. Einfacher erreichen

wir dasselbe, indem wir die oben gefundenen Resultate mit den Abbildungen  $Z = \sqrt{1-z^2}$  und  $Z = \sqrt{1-x^2z^2}$  combiniren.

Man würde z. B. die Gleichungen der Curven, welche bei der Abbildung  $Z = \cos am z$  den Parallelen zu beiden Axen entsprechen, in lemniscatischen Coordinaten sofort erhalten, wenn man in den Gleichungen 7) und 8) des § 4  $p.p_1$  an Stelle von  $R^2$ , und  $(\varphi + \varphi_1)$  an Stelle von  $2\vartheta$  setze.

Ebenso leicht ergeben sie sich, wenn man in den Gleichungen 13) und 14) von § 4  $4-D^2$  an Stelle von  $D^2$  setzt.

Geometrisch lassen sie sich aus den  $\sin am$ -Curven construiren durch Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel unter Zugrundelegung des Systems confocaler Kegelschnitte um  $\pm 1$ .

Die Brennpunkte der  $\cos am$ -Curven sind  $\pm 1$  und  $\pm \frac{x'}{x}i$ , denn für die entsprechenden Werthe des Arguments verschwindet der Differentialquotient von  $\cos am z$ .

Der Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , der bei den  $\sin am$ -Curven auftrat, verwandelt sich in die Lemniscate  $p.p_1 = \frac{1}{x}$  mit den Brennpunkten  $\pm 1$ , die Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm \frac{1}{x}$  verwandelt sich nach den Resultaten des § 3 in eine Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm i \frac{x'}{x}$ , welche durch die Punkte  $\pm \sqrt{\frac{x'}{1+x}}$  und  $\pm i \sqrt{\frac{x'}{1-x}}$  geht.

Es gilt demnach folgender Satz:

Bei der Abbildung  $Z = \cos am z$  entspricht stets den Linien  $y = \frac{2n+1}{2}K'$  eine Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm 1$  welche durch die Punkte  $\pm \sqrt{\frac{1+x}{x}}$  und  $\pm i \sqrt{\frac{1-x}{x}}$  geht; den Linien  $x = \frac{2n+1}{2}K$  eine Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm i \frac{x'}{x}$ , welche durch die Punkte  $\pm \sqrt{\frac{x'}{1+x}}$  und  $\pm i \sqrt{\frac{x'}{1-x}}$  geht.

Durch Vertauschung von  $D^2$  mit  $4-D^2$  geht Gleichung 14) des § 4 nach einigen Umformungen über in

$$1) \quad \frac{S^2}{\sin^2 am x} + D^2 \cdot x^2 \sin^2 co am x = 4.$$

Verwandelt man das Argument  $x$  in  $u = K - x$ , so geht die Gleichung über in

$$1^*) \quad \frac{S^2}{\sin^2 \operatorname{co} am u} + D^2 \kappa^2 \sin^2 am u = 4,$$

und dies ist die Form, in welcher sie Siebeck nach seiner Methode findet.

Durch dieselbe Operation geht Gleichung 13) des § 4 über in

$$2) \quad \frac{D^2}{\sin^2 am yi} + S^2 \kappa^2 \sin^2 \operatorname{co} am yi = 4.$$

Verwandelt man hier das Argument  $yi$  in  $v = yi \pm K$ , so entsteht die Gleichung

$$2^*) \quad D^2 \mathcal{A}^2 am(v \kappa') - S^2 \kappa^2 \tan^2 am(v \kappa') = 4,$$

was ebenfalls mit dem Siebeck'schen Resultate übereinstimmt. Ebenso würde man von Gleichung 13\*) gelangen auf

$$3) \quad \frac{\kappa^2 S^2}{\mathcal{A}^2 am(y \kappa')} - \frac{D^2}{\tan^2 am(y \kappa')} = 4,$$

wo die Vertauschung des Arguments  $y$  mit  $y \pm iK$  auf Gleichung 2\*) zurückführen würde.

Die Verschiebung des Coordinatensystems um  $\pm K$  ist hier überhaupt oft von Vortheil, da  $\operatorname{co} am(\pm K) = 0$  ist und demnach durch jene Veränderung ein günstigeres Entsprechen beider Ebenen herbeigeführt wird.

Auch bei dieser Abbildung handelt es sich um doppelt unendlich viele Blätter, deren jedes aus zwei Schichten besteht. Schnitte und Durchkreuzungen lassen sich in ähnlicher Weise, wie oben, feststellen.

Auf die Abbildung  $Z = \mathcal{A} am z$  gelangen wir, wenn wir die Ebene  $Z = \sin am z$  der Transformation  $Z = \sqrt{1 - \kappa^2 z^2}$  unterwerfen.  $Z = \kappa z$  verwandelt zunächst die Strecke  $\frac{1}{\kappa}$  in die Einheit. Dadurch gehen die Gleichungen 15), 15\*) und 16) des § 4 über in folgende:

$$4) \quad \frac{S^2}{\mathcal{A}^2 am yi} - D^2 \tan^2 am yi = 4$$

oder

$$4^*) \quad S^2 \sin^2 \operatorname{co} am(y \kappa') + D^2 \sin^2 am(y \kappa') = 4,$$

$$5) \quad \frac{S^2 \mathcal{A}^2 am x}{\kappa'^2} - \frac{D^2}{\kappa'^2 \tan^2 am x} = 4.$$

Setzt man  $4 - D^2$  an Stelle von  $D^2$ , so geht Gleichung 4\*), resp. 5) über in

$$6) \quad \frac{S^2}{\mathcal{A}^2 am(y \kappa')} - D^2 \tan^2 am(y \kappa') = 4,$$

$$7) \quad S^2 \sin^2 am x + D^2 \sin^2 \operatorname{co} am x = 4.$$

Gleichung 6) entspricht den Parallelen zur  $x$ -Axe, Gleichung 7) den Parallelen zur  $y$ -Axe. Durch die Transformation  $Z = \kappa z$  war zunächst der Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  in einen andern mit Radius  $\sqrt{\kappa}$  verwandelt. Derselbe geht durch die Transformation  $Z = \sqrt{1 - \zeta^2}$  in eine Lemniscate  $pp_1 = \kappa$ , bezogen auf die Brennpunkte  $\pm 1$ , über. Folglich:

Bei der Abbildung  $Z = \Delta am z$  entspricht den Parallelen zur  $x$ -Axe von der Gleichung  $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$  stets eine Lemniscate mit den Brennpunkten  $\pm 1$ , welche durch die Punkte  $\pm \sqrt{1+\kappa}$  und  $\pm \sqrt{1-\kappa}$  geht.

Hier ist  $\kappa < 1$ , folglich besteht die Lemniscate aus zwei getrennten Ovalen.

Es muss noch folgender bereits angewendeter Satz bewiesen werden:

Bei der Abbildung  $Z = \Delta am z$  entspricht den Parallelen zur  $y$ -Axe von der Form  $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$  ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius  $R = \sqrt{\kappa}$ .

Um den Beweis zu liefern, entwickeln wir die Gleichungen der  $\Delta am$ -Curven mit Hilfe des Additionstheorems in gewöhnlichen Coordinaten.

Aus

$$8) \Delta am(x \pm yi) = \frac{\Delta am x \Delta am yi \mp \kappa^2 \sin am x \cos am x \sin am yi \cos am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}$$

folgt durch Addition und Subtraction

$$9) \quad X = \frac{\Delta am x \Delta am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi},$$

$$Yi = - \frac{\kappa^2 \sin am x \cos am x \sin am yi \cos am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi},$$

und durch Multiplication von  $\Delta am(x + yi)$  und  $\Delta am(x - yi)$  ergibt sich

$$10) X^2 + Y^2 = \frac{\Delta^2 am x - \kappa^2 \cos^2 am x \sin^2 am yi}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi} = \frac{\Delta^2 am yi - \kappa^2 \cos^2 am yi \sin^2 am x}{1 - \kappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am yi}.$$

Führt man wieder die Bezeichnungen des § 4 ein, so folgt aus der letzten Gleichung

$$11) \quad \lambda^2 = \frac{n^2 - R^2}{\kappa^2 (m^2 - R^2 l^2)}, \quad l^2 = \frac{\nu^2 - R^2}{\kappa^2 (\mu^2 - R^2 \lambda^2)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 9) ein, so ergeben sich nach einigen Umformungen folgende Relationen:

$$12) \quad R^4 - R^2 \frac{\mu^4 + \kappa'^2 \lambda^4}{\lambda^2 \mu^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{\lambda^2 \mu^2 \nu^2} + \kappa'^2 = 0,$$

$$13) \quad R^4 - R^2 \frac{m^4 + \kappa'^2 l^4}{l^2 m^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(m^2 - l^2 n^2)^2}{l^2 m^2 n^2} + \kappa'^2 = 0.$$

Der Factor von  $R^2 \cos^2 \vartheta$  kann nur in Gleichung 13) verschwinden, und zwar geschieht dies für  $l^2 = \frac{1}{1+\kappa}$ . Nun ist aber

$$\sin am \left[ \pm (2n+1) \frac{K}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}},$$

und für diesen Werth geht die Gleichung über in

$$14) \quad R^2 = \kappa'.$$



Allen Parallelen  $x = (2n + 1) \frac{K}{2}$  entspricht also, wie behauptet wurde, ein Kreis mit Radius  $\sqrt{\kappa'}$ . Führt man in den Gleichungen 12) und 13) die Transformation  $R = \frac{R}{\sqrt{\kappa}}$  ein, wodurch dieser Kreis in den Einheitskreis verwandelt wird, so erkennt man, dass die  $\Delta am$ -Curven reciprok gegen denselben sind. (Mit geringen Veränderungen der Bezeichnung könnte Fig 5 das System der  $\Delta am$ -Curven veranschaulichen.)

Aus den Gleichungen zwischen  $\sin amz$ ,  $\cos amz$  und  $\Delta amz$  ergeben sich nun folgende geometrische Beziehungen zwischen den einzelnen Curvensystemen:

Legt man die confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm 1$  zu Grunde, so verwandelt die Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel, wenn wir von Vergrößerungsverhältnissen absehen, die  $\sin am$ -Curven in die  $\cos am$ -Curven, die  $\cos am$ -Curven in die  $\sin am$ -Curven, die  $\Delta am$ -Curven im Wesentlichen in die  $\sin am$ -Curven. Das Kegelschnittsystem um  $\pm \frac{1}{\kappa}$  führt die  $\sin am$ -Curven in die  $\Delta am$ -Curven, das Kegelschnittsystem um  $\pm i \frac{\kappa'}{\kappa}$  die  $\cos am$ -Curven in die  $\Delta am$ -Curven über. Legt man schliesslich die Brennpunkte  $\pm \kappa'$  zu Grunde, so verwandelt die genannte Operation die  $\Delta am$ -Curven in die  $\cos am$ -Curven.

Es bleibt uns noch übrig, einige Specialfälle ins Auge zu fassen.

Ist zunächst der Modul  $\kappa = 0$ , so gehen  $\sin amz$  und  $\cos amz$  in  $\sin z$  und  $\cos z$  über. Dieser Fall ist in §§ 2 und 3 erledigt.

Ist hingegen  $\kappa = 1$ , so fällt zunächst  $\cos amz$  mit  $\Delta amz$  zusammen, während  $\kappa'$  verschwindet. Zwei der Brennpunkte fallen also im Nullpunkte zusammen. Für diesen Fall verwandelt sich

$$z = \int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\kappa^2 Z^2)}}$$

in

$$z = \int_0^Z \frac{dZ}{1-Z^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+Z}{1-Z},$$

$Z = \sin amz$  geht also über in

$$Z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan z i,$$

während  $\cos amz$  und  $\Delta amz$  in  $\frac{1}{\cos z i}$  übergehen.

Geometrisch ergibt sich daraus Folgendes:

Für  $z=1$  verwandeln sich die  $\sin am$ -Curven in ein System von Kreisen durch die Punkte  $\pm 1$  und in die orthogonale Kreisschaar; die  $\cos am$ -Curven und  $\Delta am$ -Curven gehen in Linien vierter Ordnung über, die man erhält, wenn man das System confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm 1$  vom Nullpunkte aus durch reciproke Radii vectores abbildet.\*

Der oben besprochene Kreis mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{z}}$  wird dabei der Einheitskreis, die entsprechende Lemniscate wird die durch den Nullpunkt gehende, der Kreis mit Radius  $\sqrt{z}$  und die Lemniscate durch  $\sqrt{\frac{z'}{1+z}}$  und  $\pm i\sqrt{\frac{z'}{1-z}}$  werden unendlich klein. Man findet dabei den Satz bestätigt, dass die durch den Nullpunkt gehende Lemniscate die reciproke Curve der gleichseitigen Hyperbel ist. Gleichzeitig ergibt sich folgender neue Beitrag zur Theorie der Abbildung  $Z = \sqrt{1-z^2}$ :

Bei der Abbildung  $Z = \sqrt{1-z^2}$  verwandelt sich das System von Kreisen durch die Punkte  $\pm 1$  und die orthogonale Kreisschaar in die reciproken Curven der confocalen Kegelschnitte um  $\pm 1$ .

Ein Gleiches gilt von der geometrischen Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel.

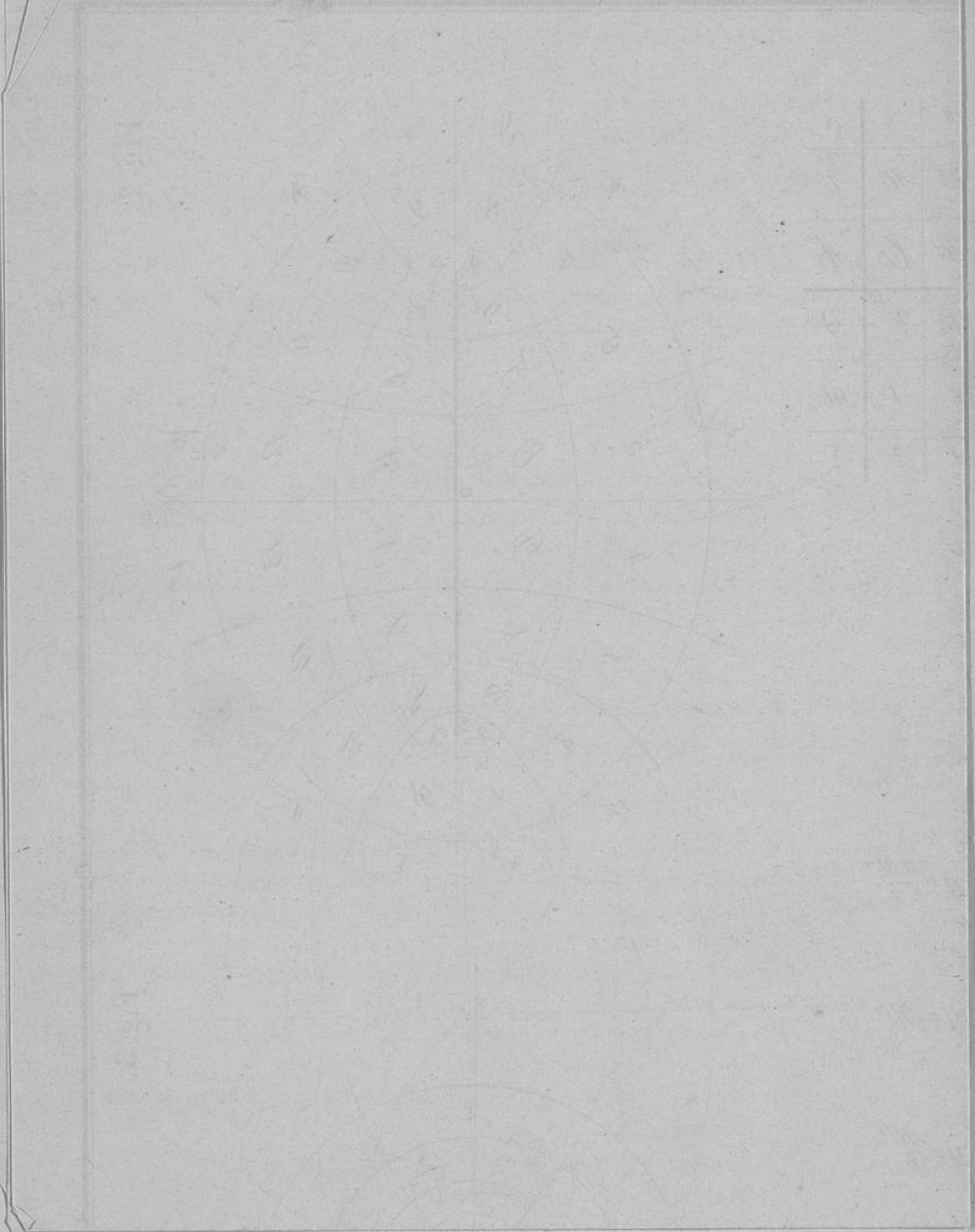
### § 6. Zusammenstellung der wesentlichen Resultate.

Die Transformation  $Z = \sqrt{1-z^2}$  ist im Wesentlichen identisch mit der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel, bei welcher das System confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm 1$  zu Grunde gelegt wird.

Durch beide Transformationen, welche übrigens involutorisch sind, verwandeln sich

1. Gerade durch den Nullpunkt in gleichseitige Hyperbeln durch  $\pm 1$  und umgekehrt;
2. Kreise um den Nullpunkt in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm 1$  und umgekehrt;
3. gleichseitige Hyperbeln durch die Punkte  $\pm \lambda$  in gleichseitige Hyperbeln durch  $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$ ;
4. confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \lambda$  in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$ ;

\* Ueber die Abbildung  $Z = \tan z$  vergl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen, S. 341 etc.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Fig. 1.

$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\alpha$
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1
Q	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	A
$\gamma^0$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$\eta$	$\theta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
$\nu$	$\delta$	$\kappa$	$\omicron$	$\alpha$	$\eta$	$\nu$	$\mu$	$\rho$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\alpha$

Fig. 4.

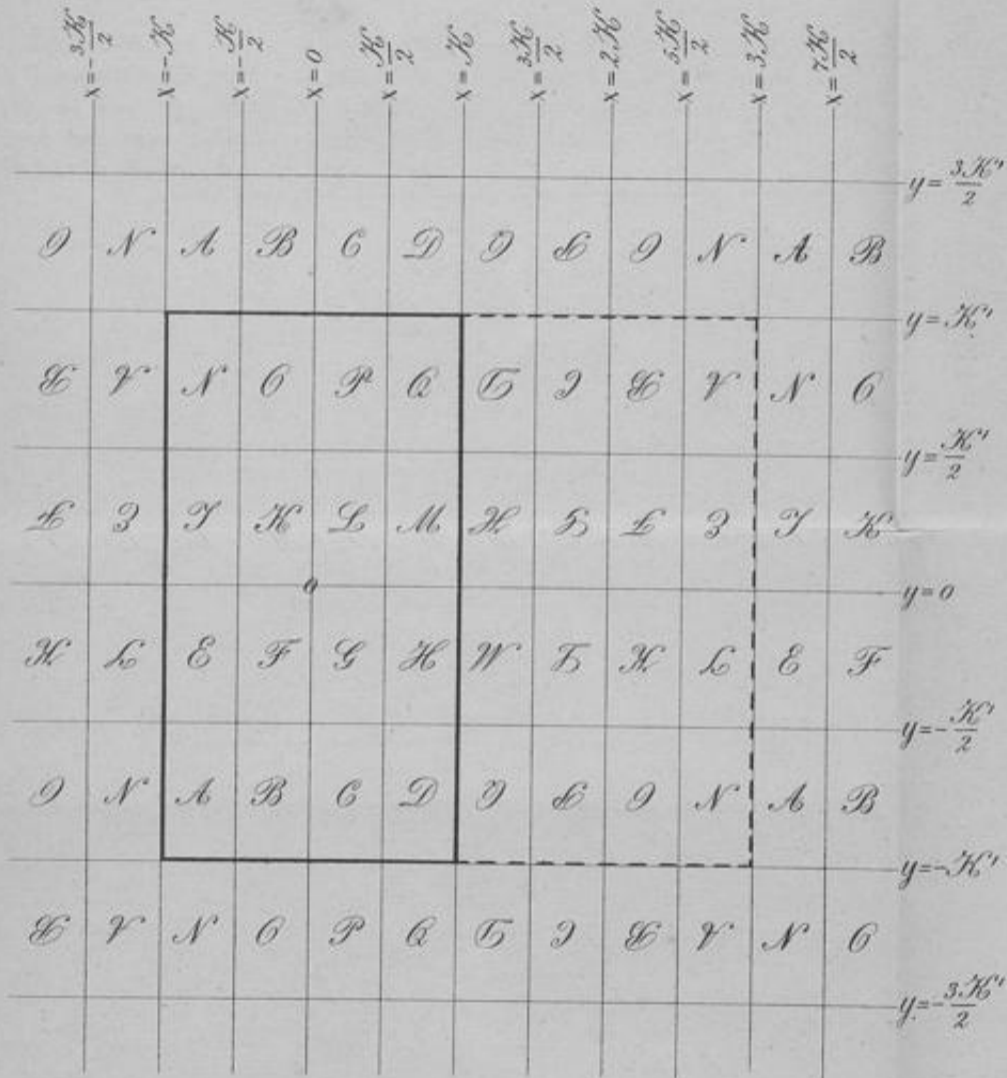


Fig. 5.

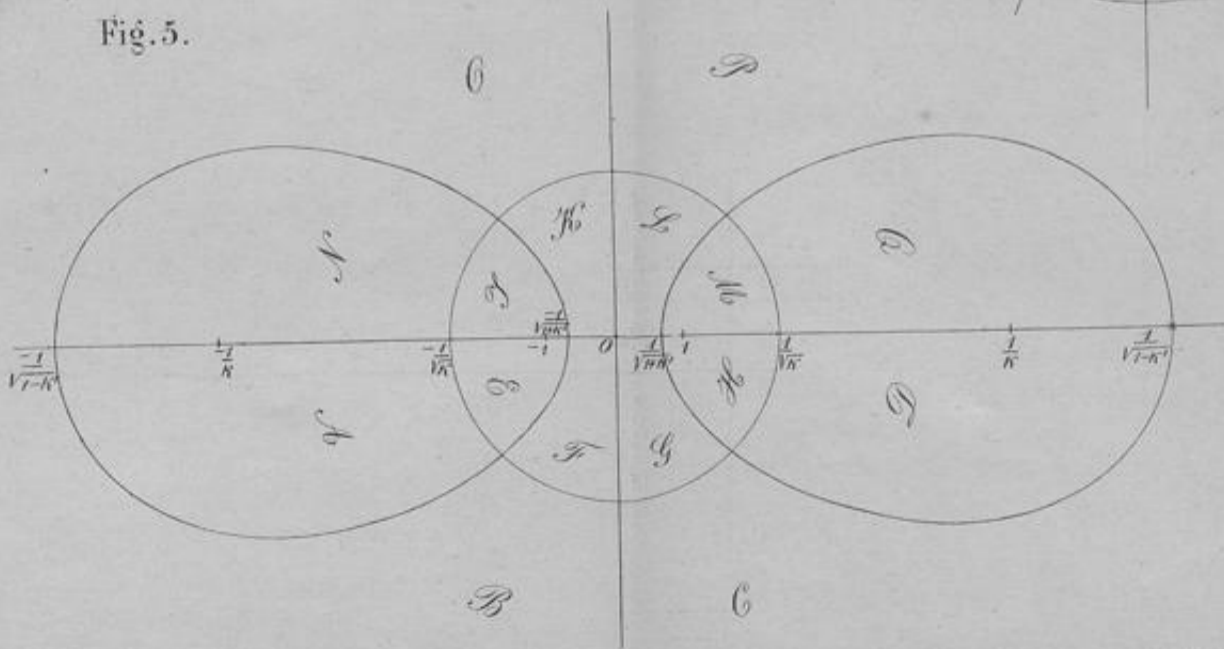


Fig. 2.

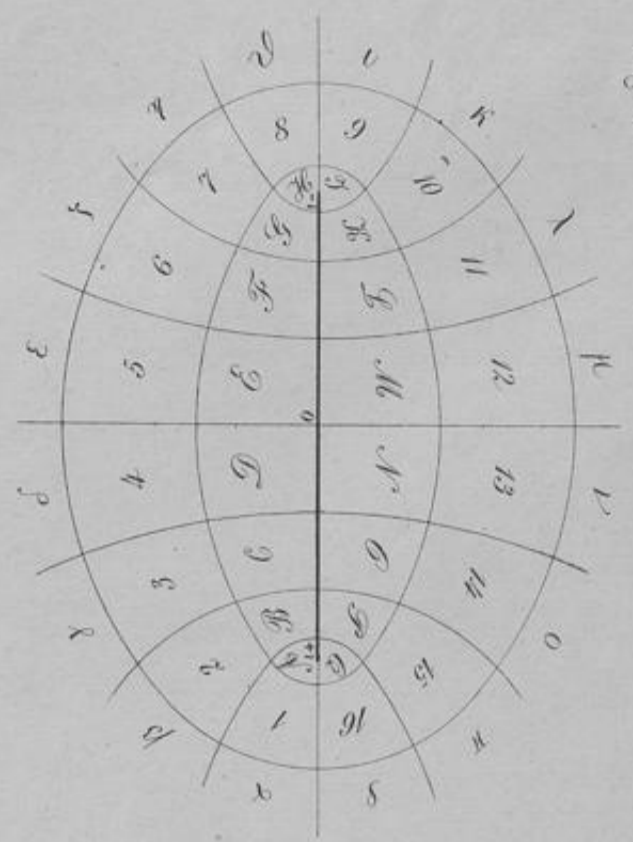
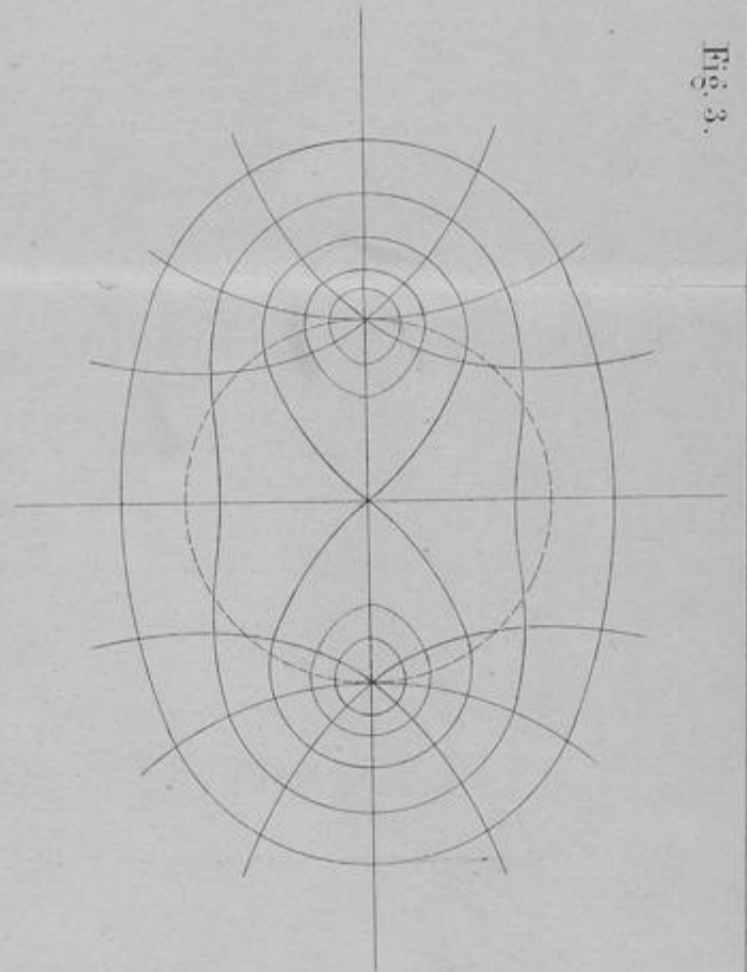
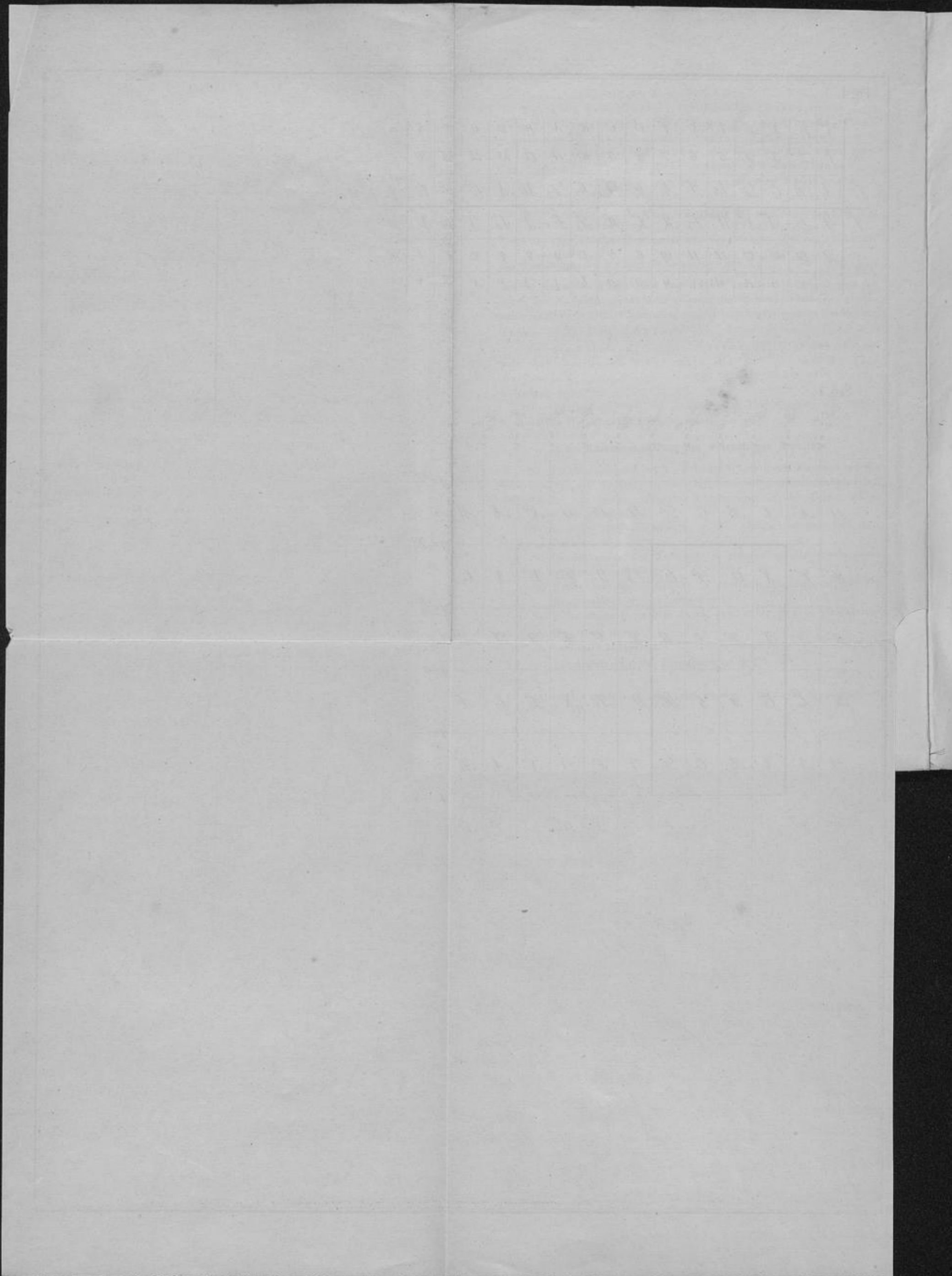


Fig. 3.





4. confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$ ;  
Lemniscaten mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$ ;

\* Ueber die Abbildung  $Z=\tan z$  vergl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen, S. 341 etc.

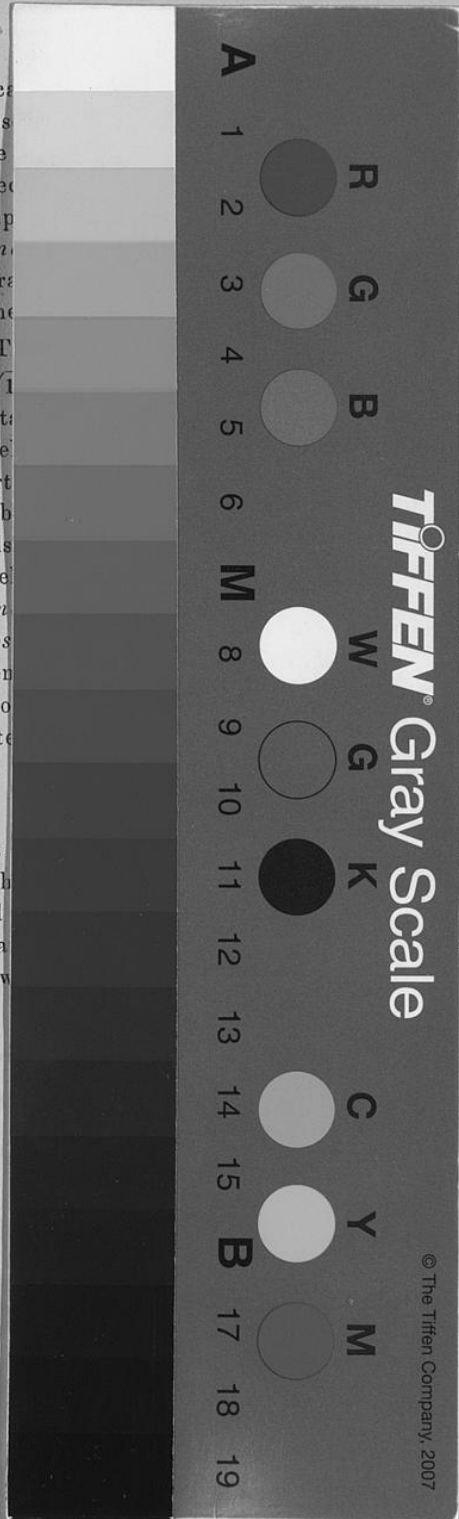
5. confocale Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm 1$  in confocale Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten;
6. Kreise durch die Punkte  $\pm 1$  und die orthogonale Kreisschaar in die reciproken Curven der confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten  $\pm 1$ ;
7. die  $\sin am$ -Curven in die  $\cos am$ -Curven und umgekehrt;
8. die Trajectorien jedes dieser Systeme in die Trajectorien des entsprechenden Systems.
9. Die Transformation  $Z = a\sqrt{1 - x^2 z^2}$  ist nicht wesentlich von  $Z = \sqrt{1 - z^2}$  unterschieden. Es kommen nur Veränderungen des Massstabes der Figuren und Drehungen der Coordinatensysteme zur Geltung. Man kann auch diese Abbildung geometrisch durch Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel deuten, jedoch muss in den entsprechenden Fällen ein Kegelschnittsystem mit anderen Brennpunkten gewählt werden. Spezielle Fälle dieser Transformation verwandeln
10. die  $\sin am$ -Curven in die  $\Delta am$ -Curven und umgekehrt;
11. die  $\cos am$ -Curven in die  $\Delta am$ -Curven und umgekehrt.
12. Zu den  $\sin am$ -Curven gehört stets ein Kreis und eine Lemniscate, ebenso zu den  $\Delta am$ -Curven, während zwei von den  $\cos am$ -Curven stets Lemniscaten sind.

---

Vergleicht man die gewonnenen Resultate unter einander, und zieht man namentlich die in § 4 angedeuteten räumlichen Verhältnisse in Betracht, so wird man erkennen, dass der Gegenstand keineswegs erschöpft ist und dass namentlich die Geometrie in diesem Felde noch eine reiche Ausbeute zu erwarten hat.

5. confocale Kegels
6. Kreise die re Brennp
7. die *sin*
8. die Tra spreche
9. Die T  $Z = \sqrt{1}$  Massta zur Ge Uebert hyperb Kegels Specie
10. die *sin*
11. die *cos*
12. Zu den ebenso ven ste

Vergleicht man namentlich tracht, so wird ist und dass na Ausbeute zu erw



$\pm 1$  in confocale  
 ale Kreisschaar in  
 lschnitte mit den  
 egekehrt;  
 ajectorien des ent-  
 t wesentlich von  
 eränderungen des  
 oordinatensysteme  
 geometrisch durch  
 auf Complementar-  
 ehenden Fällen ein  
 n gewählt werden  
 eln  
 ekehrt;  
 ekehrt.  
 d eine Lemniscate,  
 on den *cos am*-Cur-

inander, und zieht  
 erhältnisse in Be-  
 ineswegs erschöpft  
 e noch eine reiche



