Die Auflösung der quadratischen und cubischen Gleichungen durch Anwendung der goniometrischen Functionen.

Der Verfasser schickt der nachfolgenden Abhandlung einige Bemerkungen voraus, um anzudeuten, wie er seine Aufgabe aufgefasst zu sehen wünscht. — Auf der letzten Stufe des mathematischen Gymnasial-Unterrichts steht die sogenannte ebene Trigonometrie. Man pflegt beim Unterrichte derselben mit Betrachtung der goniometrischen Functionen zu beginnen, dann schreitet man auf Grund der gewonnenen Resultate zur Betrachtung der Eigenschaften der geradlinigen Dreiecke, welche dann bei einem zweckmässig geleiteten Unterrichte zu Uebungen und Untersuchungen vielfachen Anlass geben. — Andrer Seits geht im Gebiete der Algebra der Unterricht, vornehmlich in Folge neuerer Verfügungen, nicht über die Behandlung der Gleichungen des dritten Grades hinaus, und selbst wo die letztern noch hineingezogen werden, pflegt man sich in der Regel auf die Auflösung derselben mittelst der Cardanischen Formel zu beschränken. Der sogenannte irreductible Fall pflegt in der Regel nicht zur Betrachtung zu gelangen, und noch seltener ist von einer allgemeinen Behandlung der Gleichungen des dritten Grades, z. B. in Betreff der Vorzeichen der Wurzeln, Anzahl derselben, Bedingungen der Reellität und dergl. die Rede.

Der Verfasser wünscht nun durch die gegenwärtige Abhandlung, den Schülern Gelegenheit zu geben, von dem erreichten Standpunkte aus einen Schritt weiter zu thun auf dem Gebiete der Mathematik. Das durch den Gymnasial-Unterricht gewonnene Material an mathematischen Kenntnissen ist gerade ausreichend, um den Schüler in Stand zu setzen, jenen Schritt mit vollständiger Sicherheit zu thun. Das Gebiet um welches es sich hier handelt, grenzt genau an die beiden vorhin angedeuteten Theile des mathematischen Unterrichtes und setzt dieselben, durch Benutzung des einen zum Verständnisse des andern, unter einander genau in Verbindung. Gerade dieser Gegenstand dürfte sich ganz besonders dazu eignen, um im Sinne der Ministerial-Verfügung vom 1. December 1854 die Selbstthätigkeit der Schüler in angemessener Weise anzuregen und zugleich eine richtige Einsicht der Formeln durch Uebung und Anwendung zu vermitteln. Zu diesem Zwecke wird zwar hier die Gelegenheit in mehrfacher Hinsicht geboten werden, damit jedoch die Thätigkeit des Schülers nicht zweckwidrig zersplittert werde, so ist die Auflösung der Gleichungen durch Anwendungen der goniometrischen Functionen als die Hauptsache aufgefasst und hiernach die Darstellung eingerichtet worden. Auf die Ermittelung der imaginären Wurzeln ist der Verfasser nicht eingegangen. Die an einzelnen Stellen befindlichen Andeutungen über die Vorzeichen der Wurzeln, über einzelne Rechnungsvortheile, so wie die Umformungen der vorkommenden algebraischen Ausdrücke, sollen bloss den Zweck haben, auch in dieser Beziehung dem Schüler eine Anregung zu eigener Thätigkeit zu geben, ohne das, was hierüber gesagt werden kann, irgendwie zu erschöpfen. — Nach diesen Andeutungen bedarf es wohl kaum noch der Bemerkung, dass der Verfasser keinen Anspruch darauf macht, irgend wie etwas materiell Neues mittheilen zu wollen.

Zur Erleichterung des Verständnisses sollen zuvörderst einige allgemeine Bemerkungen über die hier zu machende Anwendung der goniometrischen Functionen vorausgeschickt, und dieselben dann an der numerischen Berechnung von allgebraischen Ausdrücken verdeutlicht werden.

A. Berechnung von algebraischen Ausdrücken durch Anwendung goniometrischer Functionen.

Die goniometrischen Functionen nehmen bei der Veränderlichkeit der zugehörigen Winkel die Werthe aller möglichen gebrochenen und ganzen Zahlen an und zwar

a) Sinus und Cosinus eines Winkels alle unbenannten Zahlen, ächte Brüche zwischen 0 und 1, diese selbst mit eingeschlossen;

b) Tangente und Cotangente eines Winkels alle unbenannten Zahlen zwischen den Grenzen 0 und ∞, diese selbst mit eingeschlossen;

c) Sekante und Cosekante eines Winkels alle unbenannten Zahlen zwischen den Grenzen 1 und ∞, diese selbst mit eingeschlossen.

Umgekehrt kann daher auch jede Zahl als Zahlwerth einer goniometrischen Function angesehen und als solche in die Rechnung eingeführt werden. Die gebräuchlichen Tafeln enthalten nun nicht die Functionen selbst, sondern ihre Logarithmen. Die Anwendung von Logarithmen erstreckt sich aber nur auf Producte, Quotienten, Potenzen und Wurzelgrössen; auf Summen und Differenzen finden sie nur dann Anwendung, wenn diese, nachdem sie in ein Product verwandelt worden, in einer solchen Form vorkommen, dass ihre Berechnung die Anwendung der Logarithmen gestattet.

In dem in ein Product verwandelten Ausdruck

$$(a \pm b) = a\,(1 \pm \frac{b}{a})$$

ist der Quotient $\frac{b}{a}$ dem Obigen zufolge ein echter oder ein unechter Bruch; in jenem Falle kann er immer als Sinus, Cosinus, Tangente oder Cotangente eines Winkels angesehen werden; in diesem als Tangente, Cotangente, Sekante oder Cosekante. Im Allgemeinen ist daher der Quotient $\frac{b}{a}$ immer gleich der Function eines Winkels $\varphi = f\,(\varphi)$, der hiernach als aufgefunden angesehen werden kann, sobald a und b gegeben sind; der Winkel φ, der dazu dient, den gegebenen Ausdruck für die logarithmische Berechnung geeignet zu machen, heisst ein Hülfswinkel.

Die Verwandlung eines Ausdrucks in eine für logarithmische Berechnung bequeme Form soll hier an dem Binomium $a + b$ gezeigt werden.

Es ist $a + b = a\,(1 + \frac{b}{a})$. Wird statt $\frac{b}{a}$ die goniometrische Function $\sin. \varphi$ gesetzt, so geht die Gleichung in folgende über:

$$a + b = a\,(1 + \sin. \varphi).$$

Wird in der Gleichung $\sin. a + \sin. b = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \cos. \frac{a-b}{2}$, $\angle\, a = 90^0$ und $b = 2\varphi$ gesetzt, so kommt

$$\begin{aligned} 1 + \sin. 2\varphi &= 2 \sin. (45^0 + \varphi) \cos. (45^0 - \varphi) \\ &= 2 \sin. (45^0 + \varphi)^2 \\ &= 2 \cos. (45^0 - \varphi)^2 \end{aligned}$$

Demnach:

$$\begin{aligned} 1 + \sin. \varphi &= 2 \sin. (45^0 + {}^1/_2\,\varphi)^2 \\ a + b &= 2 \cos. (45^0 - {}^1/_2\,\varphi)^2 \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} &= 2\,a \sin. (45^0 + {}^1/_2\,\varphi)^2 \\ &= 2\,a \cos. (45^0 - {}^1/_2\,\varphi)^2. \end{aligned}$$

Wird statt der goniometrischen Function $\sin. \varphi$ für $\frac{b}{a}$ die Function $\cos. \varphi$ gebraucht, so ist zunächst:

$$a + b = a\,(1 + \cos. \varphi).$$

Wird in der Formel $\cos. a + \cos. b = 2 \cos. (\frac{a+b}{2}) \cos. (\frac{a-b}{2})$ der Winkel $a = 0$, und $b = 2\varphi$ angenommen, so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$\begin{aligned} 1 + \cos. 2\,\varphi &= 2 \cos. \varphi .\ \cos. \varphi \\ &= 2 \cos. \varphi^2; \end{aligned}$$
$$\text{demnach } a + b = 2\,a \cos. {}^1\!/_2\, \varphi^2.$$

In ähnlicher Weise findet man, wenn für $\frac{b}{a}$ die Function tang. φ gesetzt wird,

$$a + b = a\,(1 + \text{tang. } \varphi) = \frac{a\,\sqrt{2}\ .\ \sin.\ (45^0 + \varphi)}{\cos. \varphi}.$$

Es sei der Ausdruck $x = \sqrt[7]{(3\,\sqrt{6,48} - \sqrt[3]{8,68})}$

zu berechnen; es ist $x = \sqrt[7]{3\,\sqrt{6,48}\,\left(1 - \frac{\sqrt[3]{8,68}}{3\sqrt{6,48}}\right)}$.

Es sei $\frac{\sqrt[3]{8,68}}{\sqrt{58,32}} = \cos. \varphi$, so ist

$$x = \sqrt[7]{3\,\sqrt{6,48}\,(1 - \cos. \varphi)}.$$

Wird in der Gleichung $\cos. b - \cos. a = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{a-b}{2}$, $b = 0$ und $a = 2\,\varphi$ gesetzt, so so geht dieselbe über in diese: $1 - \cos. 2\,\varphi = 2 \sin. \varphi^2$, also
$1 - \cos. \varphi = 2 \sin. {}^1\!/_2\,\varphi^2$, demnach
wird aus
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[7]{[\sqrt{58,32}\,(1 - \cos. \varphi)]} \\ &= \sqrt[7]{2\,\sqrt{58,32}\,\sin. {}^1\!/_2\,\varphi^2}. \end{aligned}$$

Es ist zunächst der Hülfswinkel φ zu berechnen; es war oben angenommen $\cos. \varphi = \frac{\sqrt[3]{8,68}}{\sqrt{58,32}}$

$$\log. \frac{8,68}{3} = 0,\ 3123998$$
$$\log. \frac{58,32}{2} = 0,\ 8829088$$
$$\log. \cos. \varphi = 9,\ 4299311 - 10$$
$$\angle\,\varphi = 74^0\ 23'\ 19{,}1''$$
$$\frac{\varphi}{2} = 37^0\ 11'\ 39{,}6''$$
$$\text{und } x = \sqrt[7]{2\,\sqrt{528,32}.\ (\sin.\ 37^0\ 11''\ 39{,}6'')^2}$$
$$\log. x = \frac{\log. 2 + \frac{\log. 58,32}{2} + 2 \log. \sin.\ 37^0\ 11'\ 39{,}6''}{7}$$

$$\log. 2 = 0,\ 3010300$$
$$\frac{\log. 58,32}{2} = 0,\ 8829088$$
$$2 \log. \sin. \frac{\varphi}{2} = 19,\ 5626664 - 20$$
$$0,\ 7466052$$
$$\log. x = 0,\ 1066579;\ x = 1{,}27837.$$

Hätte man $\frac{\sqrt[3]{8,68}}{\sqrt{58,32}} = \sin. \varphi$ gesetzt, so wäre $(a - b)$ in den Ausdruck $2\,a \cos. (45^0 + {}^1\!/_2\,\varphi)^2$ übergegangen und man würde bei Berechnung dieses Zahlenbeispiels mittelst Anwendung dieser goniometrischen Function zu dem nämlichen Resultat gelangt sein. Ueberhaupt ist die Wahl der goniometrischen Function gleichgültig, wenn sie nur mit den für die Werthe derselben bedingten Beschränkungen in Einklang steht und die vorliegende Berechung auf möglichst einfache Weise herbeiführt. —

Es sei der Ausdruck
$$x = \sqrt[5]{\frac{4\sqrt{18} - 2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt{18} + 2\sqrt[3]{12}}}$$
goniometrisch zu berechnen. — Durch Division im Zähler und Nenner mit $4\sqrt{18}$ geht dieser Ausdruck über in
$$x = \sqrt[5]{\frac{1 - \frac{2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt{18}}}{1 + \frac{2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt{18}}}}$$

Es sei $\frac{2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt{18}} = \cos.\ \varphi$, so ist $\quad x = \sqrt[5]{\frac{1 - \cos.\ \varphi}{1 + \cos.\ \varphi}} = \sqrt[5]{\ }\ \text{tang.}\ {}^1\!/_2\varphi^2$

Durch Berechnung findet man $\quad \varphi = 74^0\ 20'\ 49''$ und
$x = 0,\ 89524.$ —

B. Goniometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Die allgemeine Form der qradratischen Gleichungen ist die folgende:
$$x^2 \pm a\,x \pm b = 0.$$
Damit wir im Stande sind, unter den constanten Grössen a und b immer nur positive Zahlen zu verstehen, so unterscheiden wir als einzelne Fälle

I. $x^2 + a\,x + b = 0$
II. $x^2 - a\,x + b = 0$
III. $x^2 + a\,x - b = 0$
IV. $x^2 - a\,x - b = 0$

I. Die Wurzeln der Gleichung $\quad x^2 + a\,x + b = 0 \quad$ goniometrisch auszudrücken.

Werden dieselben mit x_1 und x_2 bezeichnet, so haben dieselben die folgende Form:
$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{({}^1\!/_4\,a^2 - b)};\ x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{({}^1\!/_4\,a^2 - b)}.$$
Beide Wurzeln sind reell, wenn ${}^1\!/_4\,a^2 > b$, was vorausgesetzt wird; da $\sqrt{({}^1\!/_4\,a^2 - b)} < {}^1\!/_2\,a$, so sind beide Wurzeln negativ.

Dividirt man unter dem Wurzelzeichen durch ${}^1\!/_4\,a^2$, so ist $x_1 = -\,{}^1\!/_2\,a + {}^1\!/_2\,a\,\sqrt{(1 - \frac{4\,b}{a^2})}$. Wird nun $\frac{4\,b}{a^2} = \sin.\ \varphi^2$ gesetzt, so hat man daraus $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi}$ und zunächst
$$x_1 = -\frac{a}{2}\left[1 - \sqrt{(1 - \frac{4\,b}{a^2})}\right]$$
$$= -\frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi}\left[1 - \sqrt{(1 - \sin.\ \varphi^2)}\right].$$
Es ist $\sqrt{(1 - \sin.\ \varphi^2)} = \cos.\ \varphi$, also
$$x_1 = -\frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi}\,(1 - \cos.\ \varphi);\ \text{und da}$$
$$1 - \cos.\ \varphi = 2\ \sin.\ {}^1\!/_2\,\varphi^2\ \text{und}\ \sin.\ \varphi = 2\ \sin.\ {}^1\!/_2\,\varphi\ \cos.\ {}^1\!/_2\,\varphi,$$
so ist $\quad x_1 = -\frac{\sqrt{b}\ 2\ \sin.\ {}^1\!/_2\,\varphi^2}{2\ \sin.\ {}^1\!/_2\,\varphi\ \cos.\ {}^1\!/_2\,\varphi} = -\sqrt{b}\ \text{tang.}\ {}^1\!/_2\,\varphi$

Es werde hiernach die Zahlengleichung $\quad x^2 + 16\,x + 63 = 0 \quad$ aufgelöst.

Es ist zunächst der Hülfswinkel $\sin.\ \varphi$ zu berechnen. Es ist dem Obigen zufolge $\sin.\ \varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; da $b = 63$, $a = 16$ ist, so ist $\sin.\ \varphi = \frac{2\sqrt{63}}{16}$ und $\log.\ \sin.\ \varphi = \log.\ 2 \times \log.\ \sqrt{63} - \log.\ 16$

$$\begin{aligned}
\log. 2 &= 0,\ 3010300 \\
\log. \sqrt{63} = \frac{\log. 63}{2} &= 0,\ 8996702 \\
&\quad 1,\ 2007002 \\
\log. 16 &= 1,\ 2041200 \\
\log. \sin. \varphi &= 9,\ 9965802 - 10 \\
\angle \varphi &= 82^{\circ}\ 49'\ 9{,}4'' \\
\frac{\angle \varphi}{2} &= 41^{\circ}\ 24'\ 34{,}7''
\end{aligned}$$

Ferner ist $\log. (-x) = \log. \sqrt{63} \times \log. \operatorname{tang}. \frac{1}{2} \varphi$

$$\begin{aligned}
\log. \sqrt{63} &= 0,\ 8996702 \\
\log. \operatorname{tang}. 41^{\circ}\ 24'\ 34{,}7'' &= 9,\ 9454278 - 10 \\
\log. (-x) &= 0,\ 8450980 \\
-x &= 7.
\end{aligned}$$

Die eine Wurzel der Gleichung hat demnach den Werth -7.

Die andere Wurzel der Gleichung $x_2 = -\frac{a}{2}\left[1 + \sqrt{(1 - \frac{4b}{a^2})}\right]$ nimmt, nachdem für $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}$ und für $\frac{4b}{a^2} = \sin. \varphi^2$ gesetzt ist, die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}\left[1 + \sqrt{(1 - \sin. \varphi^2)}\right] \\
&= -\frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}(1 + \cos. \varphi).
\end{aligned}$$

Da nun $1 + \cos. \varphi = 2 \cos. \frac{1}{2} \varphi^2$, so folgt weiter

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi} . 2 \cos. \tfrac{1}{2} \varphi^2 \\
&= -\frac{\sqrt{b} . 2 \cos. \frac{1}{2} \varphi^2}{2 \sin. \frac{1}{2} \varphi \cos. \frac{1}{2} \varphi} \\
&= -\sqrt{b} . \operatorname{cotg}. \tfrac{1}{2} \varphi
\end{aligned}$$

und $\log. (-x_2) = \log. \sqrt{b} + \log. \operatorname{cotg}. \frac{1}{2} \varphi$.

Behandeln wir hiernach die obige Gleichung, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\log. \sqrt{b} = \log. \sqrt{63} &= 0,\ 8996702 \\
\log. \operatorname{cotg}. 42^{\circ}\ 24'\ 34{,}7'' &= 10,\ 0545723 - 10 \\
\log. (-x_2) &= 0,\ 9542425 \\
-x_2 &= +8, \text{ oder } x_2 = -8.
\end{aligned}$$

II. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ goniometrisch auszudrücken; werden dieselben wieder mit x_1 und x_2 bezeichnet, so haben sie die folgende Form:

1) $x_1 = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - b)}$

2) $x_2 = \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - b)}$.

In ähnlicher Weise wie zuvor, erhält man aus der Gleichung 1): $x_1 = \frac{1}{2} a \left[1 + \sqrt{(1 - \frac{4b}{a^2})}\right]$

und setzen wir wieder $\sin. \varphi^2 = \frac{4b}{a^2}$ und daraus $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}$, so ist

$$\begin{aligned}
x^1 &= \frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}(1 + \sqrt{(1 - \sin. \varphi^2)}) \\
&= \frac{\sqrt{b}}{\sin. \varphi}(1 + \cos. \varphi)
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi} \cdot 2 \cos.\ {}^1/_2\, \varphi^2$$

$$= \frac{\sqrt{b} \cdot 2 \cos.\ {}^1/_2\, \varphi^2}{2 \sin.\ {}^1/_2\, \varphi \cos.\ {}^1/_2\, \varphi} = \sqrt{b} \cdot \text{cotg.}\ {}^1/_2\, \varphi.$$

Es sei die Zahlengleichung $x^2 - 28\,x + 287 = 0$ aufzulösen; vergleicht man diese Gleichung mit der obigen allgemeinen, so ist $a = 28$ und $b = 187$, demnach $\sin.\ \varphi = \frac{2\sqrt{187}}{28}$, folglich

$\log.\ \sin.\ \varphi = \log.\ 2 + \log.\ \sqrt{187} - \log.\ 28$

$$\log.\ 2 = 0,\ 3010300$$
$$\frac{\log.\ 187}{2} = 1,\ 1359208$$
$$\overline{\quad 1,\ 4369508}$$
$$\log.\ 28 = 1,\ 4471580$$
$$\log.\ \sin.\ \varphi = \overline{9,\ 9897928 - 10}$$
$$\angle\ \varphi = 77^0\ 37'\ 15''$$
$$\frac{\angle\ \varphi}{2} = 38^0\ 48'\ 47{,}5''\ \text{und}$$

$\log.\ x_1 = \log.\ \sqrt{b} + \log.\ \text{cotg.}\ {}^1/_2\, \varphi$

$$\log.\ \sqrt{b} = \log.\ \sqrt{187} = 1,\ 1359208$$
$$\log.\ \text{cotg.}\ 38^0\ 48'\ 47{,}5'' = 10,\ 0945281 - 10$$
$$\log.\ x_1 = \overline{1,\ 2304489}$$
$$x_1 = 17,$$

die eine Wurzel der Gleichung.

Die andere Wurzel der Gleichung $x_2 = {}^1/_2\, a - \sqrt{({}^1/_4\, a^2 - b)}$ geht, wenn man mit ihr auf die nämliche Weise verfährt, über in

$$x_2 = {}^1/_2\, a - {}^1/_2\, a \sqrt{\left(1 - \frac{4\,b}{a^2}\right)}$$
$$= {}^1/_2\, a \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4\,b}{a^2}\right)}\right]$$

und demnächst

$$= \frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi} [1 - \sqrt{(1 - \sin.\ \varphi^2)}]$$
$$= \frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi} (1 - \cos.\ \varphi)$$
$$= \frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi} \cdot 2 \sin.\ {}^1/_2\, \varphi^2$$
$$= \sqrt{b} \cdot \text{tang.}\ {}^1/_2\, \varphi.$$

Demnach ist in dem obigen Zahlenbeispiele $x_2 = \sqrt{187} \cdot \text{tg.}\ 38^0\ 48'\ 37{,}5''$

$$\log.\ \sqrt{187} = 1,\ 1359208$$
$$\log.\ \text{tang.}\ 38^0\ 48'\ 47{,}5'' = 9,\ 9054710 - 10$$
$$\log.\ x_2 = \overline{1,\ 0413927}$$
$$x_2 = 11.$$

III. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + a\,x - b = 0$. goniometrisch auszudrücken. Man findet für dieselben, wenn sie mit x_1 und x_2 bezeichnet werden

$$1)\ x_1 = -\ {}^1/_2\, a + \sqrt{({}^1/_4\, a^2 + b)}$$
$$2)\ x_2 = -\ {}^1/_2\, a - \sqrt{({}^1/_4\, a^2 + b)}$$

Wird die erste Gleichung unter dem Wurzelzeichen durch ${}^1/_4\, a^2$ dividirt, so geht sie in die folgende über:

$$x_1 = -{}^1/_2\, a\ \sqrt{\left(1 + \frac{4\,b}{a^2}\right)}$$

und wenn $\frac{4\,b}{a^2} = \text{tang.}\ \varphi^2$ gesetzt wird, so ist $\quad x_1 = -\ {}^1/_2\, a\ [1 - \sqrt{(1 + \text{tang.}\ \varphi^2)}]$.

Aus der Gleichung tang. $\varphi^2 = \frac{4b}{a^2}$ und tang. $\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, ergiebt sich $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\text{tg.}\ \varphi}$, so dass also

$$x_1 = -\frac{\sqrt{b}}{\text{tg.}\ \varphi}\left[1 - \sqrt{(1 + \text{tg.}\ \varphi^2)}\right] = -\frac{\sqrt{b}\ .\ \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}\left[1 - \sqrt{(1 + \text{tg.}\ \varphi^2)}\right]$$

Nun ist aber $1 + \text{tang.}\ \varphi^2 = \frac{\cos.\ \varphi^2 + \sin.\ \varphi^2}{\cos.\ \varphi^2} = \frac{1}{\cos.\ \varphi^2}$, also $\sqrt{(1 + \text{tg.}\ \varphi^2)} = \frac{1}{\cos.\ \varphi}$, folglich

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\sqrt{b}\ \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}\left(1 - \frac{1}{\cos.\ \varphi}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{b}\ .\ \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}\ \frac{(\cos.\ \varphi - 1)}{\cos.\ \varphi} \\ &= -\frac{\sqrt{b}}{\sin.\ \varphi}\ (\cos.\ \varphi - 1) \\ &= \frac{\sqrt{b}\ (1 - \cos.\ \varphi)}{\sin.\ \varphi} = \frac{\sqrt{b}\ .\ 2\ .\ \sin.\ {}^1\!/_2\ \varphi^2}{2\ \sin.\ {}^1\!/_2\ \varphi\ .\ \cos.\ {}^1\!/_2\ \varphi} \\ &= \sqrt{b}\ .\ \text{tg.}\ \frac{\varphi}{2.} \end{aligned}$$

Es sei die Zahlengleichung $x^2 + 8x - 105 = 0$ aufzulösen. Zur Berechnung der Wurzel $x_1 = \sqrt{b}\ .\ \text{tg.}\ {}^1\!/_2\ \varphi$ ist der Hülfswinkel φ vorher zu berechnen. Es war oben tg. $\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$. Vergleichen wir die Zahlengleichung mit der obigen allgemeinen, so ist $a = 8$ und $b = 105$, folglich tg. $\varphi = \frac{2\sqrt{105}}{8}$

$$\begin{aligned} \log.\ 2 &= 0,\ 3010300 \\ \log.\ \sqrt{105} &= 1,\ 0105946 \\ \hline &\ 1,\ 3116246 \\ \log.\ 8 &= 0,\ 9030900 \\ \hline \log.\ \text{tg.}\ \varphi &= 10,\ 4085346 - 10. \\ \angle\ \varphi &= 68^0\ 40'\ 34{,}7'' \\ \angle\ \frac{\varphi}{2} &= 34^0\ 20'\ 17{,}35'' \text{ und } x_1 = \sqrt{105}\ .\ \text{tg.}\ \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ \sqrt{105} &= 1,\ 0105946 \\ \log.\ \text{tg.}\ 34^0\ 20'\ 17{,}35'' &= 9,\ 8345034 - 10 \\ \hline \log.\ x_1 &= 0,\ 8450980 \\ x_1 &= 7. \end{aligned}$$

Die andere Wurzel der Gleichung $x_2 = -{}^1\!/_2 a - \sqrt{({}^1\!/_4 a^2 + b)}$ geht in ähnlicher Weise über in

$$\begin{aligned} x_2 &= -{}^1\!/_2 a - {}^1\!/_2 a\ \sqrt{(1 + \frac{4b}{a^2})} \\ x_2 &= -{}^1\!/_2 a\left[1 + \sqrt{(1 + \frac{4b}{a_2})}\right] \\ &= -\frac{\sqrt{b}}{\text{tg.}\ \varphi}\ \left[1 + \sqrt{(1 + \text{tg.}\ \varphi^2)}\right] \\ &= -\frac{\sqrt{b}}{\text{tg.}\ \varphi}\left(1 + \frac{1}{\cos.\ \varphi}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{b}}{\text{tg.}\ \varphi}\left(\frac{\cos.\ \varphi + 1}{\cos.\ \varphi}\right) \\ &= -\sqrt{b}\ .\ \frac{1 + \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi}. \end{aligned}$$

Es ist aber, wie schon oben bei der Behandlung der Gleichung I. sich ergab $\frac{1 + \cos.\ \varphi}{\sin.\ \varphi} = \text{cotg.}\ {}^1\!/_2\ \varphi$, folglich

$$x_2 = -\ \text{cotg.}\ {}^1\!/_2 \varphi\ \sqrt{b}.$$

Für die vorgelegte Gleichung hat man $\log. \sqrt{b} = 1,0105946$

$$\log. \operatorname{cotg}. \frac{\varphi}{2} = 10,1654967 - 10$$

$$\log. (-x_2) = 1,2660913$$

$$x_2 = -15.$$

IV. Die Wurzeln der Gleichung $x^2 - a\,x - b = 0$ goniometrisch auszudrücken.

Nach der gewöhnlichen Herleitung sind diese Wurzeln, wenn sie mit x_1 und x_2 bezeichnet werden:

$$1)\ x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4}\,a^2 + b)} \qquad 2)\ x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,a^2 + b)}$$

Aus 1) hat man $x_1 = \frac{a}{2}\left[1 + \sqrt{(1 + \frac{4\,b}{a^2})}\right]$ und nach Substitution von $\operatorname{tg}. \varphi^2$ für $\frac{4\,b}{a^2}$ und $\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}. \varphi}$ für $\frac{a}{2}$ ist

$$x_1 = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}. \varphi}\,[1 + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}. \varphi^2)}]$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}. \varphi}\left(1 + \frac{1}{\cos. \varphi}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}. \varphi}\left(\frac{\cos. \varphi + 1}{\cos. \varphi}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{b}\,.\,2 \cos. \tfrac{1}{2}\varphi^2}{2 \sin. \tfrac{1}{2}\varphi \cos. \tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$= \sqrt{b}\,.\,\operatorname{cotg}. \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Es sei hiernach die positive Wurzel der Zahlengleichung $x^2 - 11\,x - 152 = 0$ zu berechnen.

Es ist

$$\operatorname{tg}. \varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a} = \frac{2\sqrt{152}}{11}$$

$$\log. 2 = 0,3010300$$

$$\log. 152 = 1,0909218$$

$$1,3919518$$

$$\log. 11 = 1,0413927$$

$$\log. \operatorname{tg}. \varphi = 9,3505591 - 10$$

$$\angle\, \varphi = 65^0\ 57'\ 28{,}5''$$

$$\angle\, \frac{\varphi}{2} = 32^0\ 58'\ 44{,}3'' \text{ und}$$

$$x_1 = \sqrt{105}\,.\,\operatorname{cotg}. 32^0\ 58'\ 44{,}3''$$

$$\log. \sqrt{105} = 1,0909218$$

$$\log. \operatorname{cotg}. 32^0\ 58'\ 44{,}3'' = 10,1878318 - 10$$

$$\log. x_1 = 1,2787536$$

$$x_1 = 19.$$

Für die andere Wurzel der Gleichung ergiebt sich:

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}. \varphi}\,(1 - \frac{1}{\cos. \varphi}$$

$$= \frac{a}{2}\left[1 - \sqrt{(1 + \frac{4\,b}{a^2})}\right] \qquad = -\sqrt{b}\ \operatorname{tg}. \tfrac{1}{2}\,\varphi.$$

(Um nicht Früheres zu wiederholen, hat der Verf. die hier erforderlichen algebraischen Umformungen nur kurz angegeben; er empfiehlt dem Anfänger, das Einzelne des beobachteten Ganges sich klar zu machen.)

Nach dem Obigen hat man für x_2 die Ausrechnung

$$\log. (-x_2) = \log. (\sqrt{b}\ \operatorname{tg}. \tfrac{1}{2}\,\varphi)$$

$$\log. \sqrt{b} = 1,0909218$$

$$\log. \operatorname{tg}. \tfrac{1}{2}\,\varphi = 9,8121682 - 10$$

$$\log. (-x_2) = 0,9030900$$

$$-x_2 = +8,\ x_2 = -8.$$

Die Auflösung der Gleichungen vermittelst goniometrischer Functionen kann auch in den Fällen mit Vortheil angewendet werden, in welchen der Coefficient des zweiten Gliedes so wie das absolute Glied selbst Brüche sind; es ist nur jedesmal zu untersuchen, welche von den vier oben aufgestellten Formen die vorliegende Gleichung hat. Es sei z. B. die Gleichung

$$6,854\,x^2 + 24,368\,x - 124,697 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{24368}{6854}\,x - \frac{124697}{6854} = 0$$

aufzulösen. Diese Gleichung ist nach Nro. III. zu behandeln; für den Hülfswinkel φ ist dort die Gleichung $\text{tg.}\,\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; es ist in unserem Falle $a = \frac{24368}{6854}$ und $b = \frac{124697}{6854}$, folglich

$$\text{tg.}\,\varphi = 2 \cdot \frac{6854}{24368} \cdot \sqrt{\frac{124697}{6854}} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \log.\,\text{tg.}\,\varphi = \log.\,2 + \log.\,6854 &+ \log.\sqrt{124697} \\ - \log.\,24368 &- \log.\sqrt{6854} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\,2 &= 0,3010300 \\
\log.\,6854 &= 3,8359441 \\
\log.\sqrt{124697} &= 2,5929280 \\
&\overline{\;6,7299021} \\
\log.\,24368 &= 4,3868199 \\
\log.\sqrt{6854} &= 1,9179720 \\
&\overline{\;6,3047919} \\
&\;6,7299021 \\
&\;6,3047919 \\
\log.\,\text{tg.}\,\varphi &= 10,4251102 - 10 \\
\varphi &= 69^0\,23'\,24'' \\
\frac{\varphi}{2} &= 34^0\,42'\,12''.
\end{aligned}$$

Die Wurzeln der Gleichung sind $\quad 1)\ x_1 = \sqrt{b}\ \text{tg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi$

$\qquad 2)\ x_2 = -\sqrt{b}\ \text{cotg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi.$

Für x_1 hat man die logarithmische Berechnung

$$\begin{aligned}
\log.\,x_1 &= \log.\sqrt{b} + \log.\,\text{tg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi \\
\log.\sqrt{b} &= 0,6749559 \\
\log.\,\text{tg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi &= 9,8404316 - 10 \\
\log.\,x_1 &= 0,5153875 \\
x_1 &= 3,27633 \\
\log.\,(-x_2) &= \log.\sqrt{b} + \log.\,\text{cotg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi \\
\log.\,b &= 0,6749559 \\
\log.\,\text{cotg.}\ {}^1\!/_2\,\varphi &= 10,1595685 \\
\log.\,(-x_2) &= 10,8345244 \\
x_2 &= -6,83163
\end{aligned}$$

In jeder vollständigen quadratischen Gleichung, welche auf die Form $x^2 + a\,x + b = 0$ gebracht ist, wo a und b positive und negative Zahlen und 0 bedeuten können, ist der mit entgegengesetztem Zeichen genommene Coefficient des zweiten Gliedes gleich der Summe der Wurzeln, das absolute Glied gleich ihrem Produkte; die Wurzeln x_1 und x_2 sind also durch folgende Gleichungen

$$1)\ x_1 = {}^1\!/_2\,[s + \sqrt{(s^2 - 4p)}];\quad x_2 = {}^1\!/_2\,[s - \sqrt{[s^2 - 4p)}]$$

gegeben; sie können aber auch goniometrisch und direkt ausgedrückt werden.

Es sei

$$x_1 + x_2 = s$$
$$x_1\,x_2 = p$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem p positiv oder negativ ist.

Es sei 1) p positiv und es werde $x_1 = \frac{f}{tg. \varphi}$, $x_2 = f . tg. \varphi$ gesetzt, so ist die Hülfszahl f und der Hülfswinkel φ so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen 1) und 2) genügen. Durch Multiplikation derselben hat man $x_1\ x_2 = f^2 = p$, folglich $f = \pm \sqrt{p}$, wo nur das obere Zeichen berücksichtigt werden soll, so dass $f = \sqrt{p}$; nach Substitution des gefundenen Ausdrucks für f in x_1 und x_2 hat man $x_1 = \frac{\sqrt{p}}{tg. \varphi}$; $x_2 = \sqrt{p} . tg. \varphi$ und man hat daraus für Gl. (1) $\sqrt{p}\,(\frac{1}{tg. \varphi} + tg. \varphi) = s$; $\frac{1}{tg. \varphi} + tg. \varphi = \frac{s}{\sqrt{p}}$.

Nun kann aber die Summe $\frac{1}{tg. \varphi} + tg. \varphi$ in den Quotienten $\frac{2}{sin. 2\ \varphi}$ verwandelt werden; man hat demnach $sin. 2\ \varphi = \frac{2 \sqrt{p}}{s}$, $x_1 = \frac{\sqrt{p}}{tg. \varphi}$; $x_2 = \sqrt{p} . tg. \varphi$.

Ist s positiv, so ist auch sin. 2 φ positiv und $\angle\ 2\ \varphi$ ist zwischen den Grenzen 0^0 und 180^0 enthalten, folglich φ zwischen den Grenzen 0^0 und 90^0; da $sin. 2\ \varphi = sin. (2\ R - 2\varphi)$, so ist es gleichgültig, ob man für 2 φ einen spitzen oder stumpfen Winkel nimmt, indem $\frac{1}{tg. \varphi} = tg. (R - \varphi)$; die Werthe für x_1 und x_2 wechseln aber ab. Ist dagegen s negativ, so ist auch sin. 2 φ negativ und der Winkel 2 φ liegt zwischen den Grenzen 180^0 und 360^0, der Winkel φ liegt zwischen 90^0 und 180^0 und x_1 und x_2 sind beide negativ. Auch hier ist es in Beziehung auf die Wurzeln x_1 und x_2 gleichgültig, ob der Winkel 2 φ zwischen den Grenzen 180^0 und 270^0 oder zwischen 270^0 und 360^0 genommen wird, nur dass auch in diesem Falle die Wurzeln x_1 und x_2 dann mit abwechselnden Werthen vorkommen.

Unter der Annahme s = 57,1 und p = 714,1 seien die Wurzeln x_1 und x_2 zu berechnen.

Es ist dem Obigen zufolge $sin. 2\ \varphi = \frac{2 \sqrt{714,1}}{57,1}$, $x_1 = \frac{\sqrt{714,1}}{tg. \varphi}$, $x_2 = \sqrt{714,1} . tg. \varphi$

$$
\begin{array}{rl}
log. sin. 2\ \varphi &= log. 2 + log. \sqrt{714,1} - log. 57,1 \\
log. 2 &= 0,3010300 \\
log. \sqrt{714,1} &= 1,4268795 \\
\hline
 & 1,7279095 \\
log. 57,1 &= 1,7566361 \\
\hline
log. sin. 2\ \varphi &= 9,9712734 - 10 \\
2\ \varphi &= 69^0\ 23'\ 21,96'' \\
\varphi &= 34^0\ 41'\ 40,98''; \quad \text{ferner}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
log. x_1 &= log. \sqrt{714,1} - log. tg. \varphi \\
log. \sqrt{714,1} &= 1,4268795 \\
log. tg. 34^0\ 41'\ 40,98'' &= 9,8402921 - 10 \\
\hline
log. x_1 &= 1,5865874 \\
x_1 &= 38,6 \\
log. x_2 &= log. \sqrt{714,1} + log. tg. 34^0\ 41'\ 40,98'' \\
log. \sqrt{714,1} &= 1,4268795 \\
log. tg. 34^0\ 41'\ 40,98'' &= 9,8402921 - 10 \\
\hline
log. x_2 &= 1,2671716 \\
x_2 &= 18,5
\end{array}
$$

Ist 2) p negativ, so werde wieder $x_1 = \frac{f}{tg. \varphi}$, x_2 aber $= - f\, tg. \varphi$ gesetzt; dann ist $x_1 . x_2 = - f^2 = p$ und $f = \sqrt{-\ p}$, welcher Ausdruck jedoch nicht als imaginär anzusehen ist. Man findet nun weiter nach Substitution des für f gefundenen Werthes $\sqrt{-\ p}\,(\frac{1}{tg. \varphi} - tg. \varphi) = s$; $\frac{1}{tg. \varphi} - tg. \varphi = \frac{s}{\sqrt{-\ p}}$.

Die Differenz $\frac{1}{tg. \varphi} - tg. \varphi$ kann aber verwandelt werden in 2 cotg. 2 φ; man hat also nun $cotg. 2\ \varphi = \frac{s}{2 \sqrt{-\ p}}$. Hat man hieraus die beiden Winkel 2 φ und φ bestimmt, so ist weiter $x_1 = \frac{\sqrt{-\ p}}{tg. \varphi}$ und $x_2 = - \sqrt{p} . tg. \varphi$. Der Winkel 2 φ liegt zwischen 0^0 und 90^0 wenn s positiv ist, dann liegt φ zwischen 0^0 und 45^0, die Tangente dieses Winkels ist also positiv und kleiner als 1; hieraus folgt, dass x_1 positiv, x_2 negativ, aber letztes absolut genommen, kleiner als x_1 ist. In der That muss dies der Fall sein, weil sonst ihre Summe s nicht positiv sein könnte. Ist hingegen s negativ, so liegt der Winkel 2 φ zwischen 90^0 und 180^0, also φ zwischen 45^0 und 90^0. — In Betreff der Vorzeichen x_1 und x_2 gilt das

Nämliche wie vorhin. Da jedoch jetzt tg. $\varphi > 1$, so hat jetzt die Wurzel x_2 den grösseren absoluten Werth. Auch dies harmonirt damit, dass die Summe beider Wurzeln jetzt negativ ist.

Hätte man in den Gleichungen $x_1 + x_2 = s,\ x_1 x_2 = p$ $x_1 = f\cos.\ \varphi^2,\ x_2 = f\sin.\ \varphi^2$ gesetzt, so würde man daraus erhalten haben

$$x_1 + x_2 = f\,(\cos.\ \varphi^2 + \sin.\ \varphi^2) = s, \text{ also } f = s \text{ und}$$

$$x_1\, x_2 = f^2 \cos.\ \varphi^2 \sin.\ \varphi^2 = f^2 (\cos.\ \varphi \sin.\ \varphi)^2$$

$$= f^2 \left(\frac{\sin.\ 2\,\varphi}{2}\right)^2 = p, \text{ folglich}$$

$$\sin.\ 2\ \varphi^2 = \frac{4\,p}{f^2} = \frac{4\,p}{s^2} \text{ und}$$

$$\sin.\ 2\ \varphi = \frac{2\sqrt{p}}{f},\ x_1 = s\cos.\ \varphi^2,\ x_2 = s\sin.\ \varphi^2.$$

Der Verf. unterlässt es, die zuletzt mitgetheilten Betrachtungen durch Rechnungsbeispiele zu erläutern. Dem Anfänger wird es förderlich sein, dergleichen selbst aufzustellen und zu behandeln. Zu diesem Zwecke nehme derselbe zuerst die Werthe der beiden Wurzeln x_1 und x_2 beliebig an, bestimme darnach die Werthe von s und p, und berechne hieraus wieder rückwärts nach den angegebenen Regeln die Wurzeln x_1 und x_2.

C. Goniometrische Auflösung der cubischen Gleichungen.

Wir setzen hier als bekannt voraus, dass es möglich ist, jede gegebene Gleichung des dritten Grades in eine andere Gleichung des nämlichen Grades umzuwandeln, in welcher der Coefficient der zweiten Potenz der unbekannten Grösse = 0 ist. Wird die Unbekannte dieser umgewandelten Gleichung mit dem Buchstaben x bezeichnet, so hat man für die zu betrachtende Gleichung im Wesentlichen folgende 4 Formen:

$$\text{I. } x^3 + p\,x + q = 0$$

$$\text{II. } x^3 + p\,x - q = 0$$

$$\text{III. } x^3 - p\,x + q = 0$$

$$\text{IV. } x^3 - p\,x - q = 0$$

Da wir jeden dieser Fälle einzeln betrachten werden, so dürfen wir auch hier annehmen, dass die Buchstaben p und q nur positive Zahlen bezeichnen. —

Nun gestaltet sich die goniometrische Lösung der Gleichungen dieses Grades wie folgt:

Es sei die Gleichung I. $x^3 + p\,x + q = 0$ zur Behandlung gegeben. Nach der Cardanischen Regel erhält man hieraus für die unbekannte x den Werth:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)}.$$

Hier kann man zunächst den Quadrat-Wurzelausdruck $\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}q^3}$ in ein Product $\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}.\ \sqrt{\left(1 + \frac{27\,q^2}{4\,p^3}\right)}$ verwandeln. Bevor dieses Product an die Stelle jenes Wurzelausdrucks in den Werth von x eingesetzt wird, nehmen wir mit ihm eine Umwandlung vor. Nehmen wir nämlich den Hülfswinkel φ so, dass man hat cotg. $\varphi^2 = \frac{27\,q^2}{4p^3}$, so kann man jenes Product verwandeln in $\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}.\ \sqrt{(1 + \text{cotg. } \varphi^2)}$ oder $\frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\sin.\ \varphi}$. Wir erhalten nun für x den Werth

$$x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\sin.\ \varphi}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\sin.\ \varphi}\right)}.$$

In Folge obiger Annahme ist aber $\tfrac{1}{2}q = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\text{tg. } \varphi}$, also ist nun

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\text{tg. } \varphi} + \frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\sin.\ \varphi}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\text{tg. } \varphi} - \frac{\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}}{\sin.\ \varphi}\right)}.$$

Hierin kann man aber den Radikanden von jeder der beiden Kubikwurzeln als ein Produkt darstellen, welches einen Factor des Werthes $-\tfrac{1}{27}q^3$ hat. Thut man dies und giebt man dann von jedem der beiden

Produkte nach den bekannten Regeln die Kubikwurzel an, so erscheint jede derselben in der Form eines Produktes und zwar haben die beiden Produkte den Faktor $-\sqrt{1/3\,p}$ gemeinschaftlich. Demnach findet man:

$$x = -\sqrt{1/3\,p}\,\sqrt[3]{\left(\frac{1}{tg.\ \varphi} - \frac{1}{sin.\ \varphi}\right)} - \sqrt{1/3\,p}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{tg.\ \varphi} + \frac{1}{sin.\ \varphi}\right)},\ \text{oder}$$

$$x = -\sqrt{1/3\,p}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{1}{tg.\ \varphi} - \frac{1}{sin.\ \varphi}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{tg.\ \varphi} + \frac{1}{sin.\ \varphi}\right)}\right].$$

Es wird jetzt noch eine goniometrische Umformung der beiden Ausdrücke $\frac{1}{tg.\ \varphi} - \frac{1}{sin.\ \varphi}$ und $\frac{1}{tg.\ \varphi} + \frac{1}{sin.\ \varphi}$ vorgenommen werden müssen.

Setzen wir $\frac{1}{tg.\ \varphi} + \frac{1}{sin.\ \varphi} = m$, so ist $m\ sin.\ \varphi = 1 + \frac{sin.\ \varphi}{tg.\ \varphi}$ oder $m\ .\ sin.\ \varphi = 1 + cos.\ \varphi$, also $m = \frac{1 + cos.\ \varphi}{sin.\ \varphi} = \frac{2\ cos.\ 1/2\,\varphi^2}{2\ sin.\ 1/2\,\varphi\ cos.\ 1/2\,\varphi} = cotg.\ 1/2\,\varphi$. Demnach ist $\frac{1}{tg.\ \varphi} + \frac{1}{sin.\ \varphi} = cotg.\ 1/2\,\varphi$. In ähnlicher Weise findet man, dass $\frac{1}{tg.\ \varphi} - \frac{1}{sin.\ \varphi} = -\ tg.\ 1/2\,\varphi$. Man hat also nun

$$x = -\sqrt{1/3\,p}.\left(\sqrt[3]{-\ tg.\ 1/2\,\varphi} + \sqrt[3]{cotg.\ 1/2\,\varphi}\right)\ \text{oder}\ x = \sqrt{1/3\,p}\left(\sqrt[3]{tg.\ 1/2\,\varphi} - \sqrt[3]{cotg.\ 1/2\,\varphi}\right)$$

Der vorstehend angegebene Werth von x ist indessen für die logarithmische Berechnung noch zu wenig bequem; er ist einer weitern Umwandlung fähig, indem man einen zweiten Hülfswinkel ψ wählt, welcher mit dem Winkel φ so in Verbindung steht, dass man hat $tang.\ 1/2\ \psi^3 = tang.\ 1/2\,\varphi$, also auch indem man jede Seite dieser Gleichung in 1 dividirt, $cotg.\ 1/2\,\psi^3 = cotg.\ 1/2\,\varphi$. Man hat dann $\sqrt[3]{tang.\ 1/2\,\varphi} = tang.\ 1/2\,\psi$ und $\sqrt[3]{cotg.\ 1/2\,\varphi} = cotg.\ 1/2\,\psi$. Hieraus kann man nun den Werth von x ausdrücken:

$$x = \sqrt{1/3\ p}\ (tang.\ 1/2\,\psi - cotg.\ 1/2\,\psi).$$

Um den aus Functionen des Winkels ψ zusammengesetzten Factor umzuwandeln, geben wir ihm nach einander die folgende Form:

$$tang.\ 1/2\,\psi - cotg.\ 1/2\,\psi = \frac{sin.\ 1/2\,\psi}{cos.\ 1/2\,\psi} - \frac{cos.\ 1/2\,\psi}{sin.\ 1/2\,\psi} = \frac{sin.\ 1/2\,\psi^2 - cos.\ 1/2\,\psi^2}{sin.\ 1/2\,\psi\ cos.\ 1/2\,\psi} = \frac{-\ cos.\ \psi}{1/2\ sin.\ \psi} = -\ 2\ cotg.\ \psi.$$

Hiernach erhält man schliesslich:

$$x = \sqrt{1/3\,p}\ (-\ 2\ cotg.\ \psi) = -\ 2\sqrt{1/3\cdot p}\ cotg.\ \psi.$$

Hieraus ergiebt sich schon, dass die gegebene Gleichung nur eine einzige, und zwar negative Wurzel, haben kann. Dass diese nicht positiv sein könne, erhellet schon daraus, dass die Summe von drei positiven Zahlen niemals 0 betragen kann. —

Stellen wir nun die vorige Entwickelung in der Weise zusammen, dass aus ihr das praktische Verfahren zur goniometrischen Berechnung des Werthes von x ersichtlich ist, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Ist die Gleichung $x^3 + p\,x + q = 0$ gegeben, so bestimme man zunächst aus der Beziehung

$$cotg.\ \varphi^2 = \frac{27\ q^2}{4\,p\,3}\ \text{oder}\ tg.\ \varphi = \frac{2\cdot 1/3\ p\sqrt{1/3\ p}}{q}$$

den Winkel φ. Demnächst findet man aus der Gleichung $tg.\ 1/2\ \psi = \sqrt[3]{tg.\ 1/2\ \varphi}$ den weiteren Hülfswinkel. Schliesslich ergiebt sich dann x aus der Gleichung

$$x = -2\sqrt{1/3\,p}\ cotg.\ \psi.$$

Wir haben im Vorstehenden die Werthe von $tg.\ \varphi$ und von x zugleich in diejenige Form gebracht, in welcher sie sich für die logarithmische Behandlung am besten eignen. Eine nähere Andeutung hierüber möge unterbleiben, um dem Anfänger Gelegenheit zu geben, sich das Einzelne selbst in's Klare zu bringen und die Vortheile für die Rechnung aufzufinden. Die dargelegte Behandlung möge jetzt auf ein Beispiel angewendet werden.

Es sei gegeben die Gleichung $x_3 + 11\ x + 108 = 0.$

Da p = 11 und q = 108, so hat man

$$\text{tg. } \varphi = \frac{2 \cdot {}^{11}/_3 \sqrt{{}^{11}/_3}}{108}$$

$\log. 11 = 1,0413927$
$\log. 3 = 0,4771213$
$\log. {}^{11}/_3 = 0,5642714$
$\log. \sqrt{{}^{11}/_3} = 0,2821357$
$\log. 2 = 0,3010300$

$\log. 2 \cdot {}^{11}/_3 \cdot \sqrt{{}^{11}/_3} = 1,1474371$
$\log. 108 = 2,0334238$
$\log. \text{tg. } \varphi = 9,1140133 - 10$
$\varphi = 7^0\, 24'\, 30''$
${}^1/_2\, \varphi = 3^0\, 42'\, 15''$
$\log. \text{tg. } {}^1/_2\, \varphi = 8,8111735 - 10.$

Hieraus, indem man durch 3 dividirt

$\log. \text{tg. } {}^1/_2\, \psi = 9,6037245 - 10$
${}^1/_2\, \psi = 21^0\, 52'\, 38''$
$\psi = 43^0\, 45'\, 16''$

$\log. \text{cotg. } \psi = 10,0188082 - 10$
$\log. \sqrt{{}^{11}/_3} = 0,2821357$
$\log. 2 = 0,3010300$
$\log. (-x) = 0,6020639$
also $-x = 4$, $x = -4$.

Wir machen hier darauf aufmerksam, dass man, bei einiger Uebung, im Stande sein wird, an dieser Stelle der Rechnung den Logarithmus von $2\sqrt{{}^1/_3\, p}$ sofort unter den Logarithmus von cotg. ψ zu setzen.

II. Goniometrische Behandlung der Gleichung $x^3 + p\,x - q = 0.$

Die Behandlung dieser Gleichung kann auf die der vorigen folgender Massen zurückgeführt werden: Wenn die Gleichung $x^3 + p\,x + q = 0$ durch den Werth $x = -a$ befriedigt wird, so hat man $-a^3 - pa + q = 0$, also auch $a^3 + pa - q = 0.$

Aus der letzten Gleichung erhellet nun deutlich, dass, wenn die Gleichung

$$x^3 + p\,x - q = 0$$

gegeben wäre, man für sie sofort den Werth x = a haben würde, wobei p, q und a die nämlichen positiven Zahlen, wie zuvor, bedeuten werden. Ist daher die letzte Gleichung aufzulösen, so darf man nur den Werth des absoluten Gliedes mit dem Zeichen + nehmen, die nunmehrige Gleichung auflösen und den aus ihr gefundenen negativen Werth von x mit dem Zeichen + hinschreiben.

Nach diesen Andeutungen rechtfertigt es sich, wenn wir den Gang der goniometrischen Behandlung dieser Gleichung in Kürze zusammenstellen wie folgt:

Ist die Gleichung $x^3 + p\,x - q = 0$ gegeben, so setzt man $\text{tg. } \varphi = \dfrac{2 \cdot {}^1/_3\, p \sqrt{{}^1/_3\, p}}{q}$, $\text{tg. } {}^1/_2\, \psi = \sqrt[3]{\text{tg. } {}^1/_2\, \varphi}$

und erhält schliesslich $x = +\,2\sqrt{{}^1/_3\, p}\ \text{cotg. } \psi.$

Das Verfahren der nummerischen Berechnung von x ist hiernach ganz dasselbe wie bei I. Es kann daher unterbleiben, ein Beispiel darüber zu geben. Wir machen jedoch hier darauf aufmerksam, dass die gegebene Gleichung nur einen einzigen reellen Werth von x zulässt und zwar einen positiven.

III. Goniometrische Behandlung der Gleichung $x^3 - p\,x + q = 0.$

Die Cardanische Regel giebt für die Unbekannte den Werth

$$x = \sqrt[3]{[-\,{}^1/_2\, q + \sqrt{({}^1/_4\, q^2 - {}^1/_{27}\, p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\,{}^1/_2\, q - \sqrt{({}^1/_4\, q^2 - {}^1/_{27}\, p^3)}]}.$$

Wir verwandeln zunächst wieder den Quadratwurzelausdruck in ein Produkt und erhalten dafür

$$\sqrt{{}^1/_{27}\, p^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{27\,q^2}{4\,p^3} - 1\right)}.$$

Bevor man zu einer goniometrischen Umgestaltung dieses Ausdrucks schreitet, hat man zu unterscheiden, ob der Werth des Quotienten $\dfrac{27\,q^2}{4\,p^3}$ grösser oder kleiner ist als 1, d. h. ob $27\,q^2$ grösser oder kleiner ist als $4\,p^3$. Unter der einen oder der andern Voraussetzung wird nämlich die Umformung sich verschieden gestalten.

Erster Fall: $27\,q^2 > 4\,p^3.$

Unter dieser Voraussetzung ist der Bruch $\frac{4p^3}{27q^2}$ kleiner als 1, man ist daher berechtigt zu setzen:

$$\sin.\,\varphi^2 = \frac{4p^3}{27q^2}.$$

Hierdurch verwandelt sich das obige Produkt in

$$\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\sin.\,\varphi^2}-1\right)} \quad\text{oder}\quad \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin.\,\varphi^2}{\sin.\,\varphi^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\cdot\frac{\cos.\,\varphi}{\sin.\,\varphi} = \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\ \text{cotg.}\ \varphi.$$

Man erhält nun für x den Werth

$$x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\ \text{cotg.}\ \varphi\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\ \text{cotg.}\ \varphi\right)}.$$

In Folge der obigen Annahme von $\sin.\,\varphi^2$ ist aber $\tfrac{1}{2}q = \frac{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}{\sin.\,\varphi}$ und man erhält durch Einsetzung dieses Werthes $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}{\sin.\,\varphi} + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\ \text{cotg.}\ \varphi\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}{\sin.\,\varphi} - \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}\ \text{cotg.}\ \varphi\right)}$.

Stellen wir auch hier jeden der beiden Radikanden der Kubikwurzeln als ein Produkt dar, welches einen Factor des Werthes $-\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3}$ hat, und nehmen eine ähnliche Umformung vor wie bei I, so ergiebt sich:

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin.\,\varphi} - \text{cotg.}\ \varphi\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{3}p}\ \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin.\,\varphi} + \text{cotg.}\ \varphi\right)}.$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin.\,\varphi} - \text{cotg.}\ \varphi\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin.\,\varphi} + \text{cotg.}\ \varphi\right)}\right].$$

Es handelt sich jetzt um die Umformung der beiden Ausdrücke $\frac{1}{\sin.\,\varphi} - \text{cotg.}\ \varphi$ und $\frac{1}{\sin.\,\varphi} + \text{cotg.}\ \varphi$.

Setzen wir $\frac{1}{\sin.\,\varphi} - \text{cotg.}\ \varphi = m$, so ist $m \sin.\,\varphi = 1 - \cos.\,\varphi$, oder $2m \sin.\,\tfrac{1}{2}\varphi \cos.\,\tfrac{1}{2}\varphi = 2\sin.\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$, also $m = \frac{\sin.\,\frac{1}{2}\varphi}{\cos.\,\frac{1}{2}\varphi} = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$, oder $\frac{1}{\sin.\,\varphi} - \text{cotg.}\ \varphi = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$. In ähnlicher Weise findet man, dass $\frac{1}{\sin.\,\varphi} + \text{cotg.}\ \varphi = \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi$. Man hat also nun $x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\left(\sqrt[3]{\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{\text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi}\right)$.

Zur bequemeren Handhabung dieses Ausdrucks führen wir wieder, wie bei I, einen Hülfswinkel ψ ein, so dass man hat

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\psi^3 = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi, \quad\text{woraus weiter folgt}\quad \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\psi^3 = \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Durch Anwendung dieser Beziehung erhält man dann weiter:

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\ (\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\psi + \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\psi).$$

Die eingeklammerte Summe aber kann verwandelt werden in:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\psi + \text{cotg.}\ \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sin.\,\frac{1}{2}\psi}{\cos.\,\frac{1}{2}\psi} + \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\psi}{\sin.\,\frac{1}{2}\psi} = \frac{\sin.\,\frac{1}{2}\psi^2 + \cos.\,\frac{1}{2}\psi^2}{\sin.\,\frac{1}{2}\psi\ \cos.\,\frac{1}{2}\psi} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin.\,\psi} = \frac{2}{\sin.\,\psi}.$$

Also hat man nun schliesslich: $x = \frac{-2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin.\,\varphi}$.

Bei der goniometrischen Behandlung des ersten Falles der Gl. III. muss also folgender Weg eingeschlagen werden:

Man bestimme den Winkel φ aus der Gleichung

$$\sin.\,\varphi^2 = \frac{4p^3}{27q^2} \quad\text{oder}\quad \sin.\,\varphi = \frac{\frac{1}{3}p\ .\ 2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{q}.$$

Demnächst $\tfrac{1}{2}\psi$ aus der Gleichung $\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\psi = \sqrt[3]{\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\varphi}$. Man kennt nun auch den Winkel ψ und berechnet nun x aus der Gleichung:

$$x = \frac{-2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin.\,\psi}.$$

Folgendes Beispiel wird das Verfahren erläutern.

Es sei die Gleichung

$$x^3 - 11\,x + 70 = 0$$

gegeben. Man hat $p = 11$, $q = 70$; also $\sin.\ \varphi = \frac{{}^{11}/_3 \cdot 2\,\sqrt{{}^{11}/_3}}{70}$

$$\begin{aligned}
\log.\ 11 &= 1,\ 0413927 \\
\log.\ 3 &= 0,\ 4771213 \\
\log.\ {}^{11}/_3 &= 0,\ 5642714 \\
\log.\ \sqrt{{}^{11}/_3} &= 0,\ 2821357 \\
\log.\ 2 &= 0,\ 3010300 \\
\hline
\log.\ {}^{11}/_3 \cdot 2 \cdot \sqrt{{}^{11}/_3} &= 1,\ 1474371 \\
\log.\ 70 &= 1,\ 8450980 \\
\hline
\log\ \sin.\ \varphi &= 9,\ 3023391 - 10 \\
\angle\,\varphi &= 11^0\ 34'\ 20'' \\
{}^1/_2\,\varphi &= 5^0\ 47'\ 10''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg.}\ {}^1/_2\,\varphi &= 9,\ 0057440 - 10 \\
&\text{durch 3 dividirt} \\
\log.\ \mathrm{tg.}\ {}^1/_2\,\psi &= 9,\ 6685813 \\
{}^1/_2\,\psi &= 24^0\ 59'\ 43{}^1/_2'' \\
\psi &= 49^0\ 59'\ 27'' \\
\log.\ 2\,\sqrt{{}^{11}/_3} &= 0,\ 5831657 \\
\log.\ \sin.\ \psi &= 9,\ 8841956 - 10 \\
\hline
\log.\ (-x) &= 0,\ 6989701 \\
-x &= 5,\ \text{also}\ x = -5.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Behandlung des vorstehenden Falles setzt voraus, dass der Bruch $\frac{27\,q^2}{4\,p^3}$ grösser ist als 1. Für die Annahme, dass $27\,q^2$ kleiner ist als $4\,p^3$, erleidet sie keine Anwendung, weil dann die Grösse $\sqrt{\frac{4\,p^3}{27\,q^2}}$ grösser ist als 1, folglich nicht als Sinus eines Winkels dargestellt werden kann. Es wird also dann ein anderer Weg eingeschlagen werden müssen. Derselbe ist zwar der Art, dass die Grundlage desselben ausserhalb der Grenzen des gewöhnlichen Gymnasial-Unterrichts liegt, jedoch ist sie dem Anfänger leicht auf folgende Art deutlich zu machen:

Wenn man die imaginäre Quadratwurzel aus -1 mit dem Buchstaben i bezeichnet, so hat man für jeden beliebigen Winkel a

$$(\cos.\ a \pm i\ \sin.\ a)^2 = \cos.\ 2\,a \pm i\ \sin.\ 2\,a$$

$$(\cos.\ 2\,a \pm i\ \sin.\ 2\,a)\ (\cos.\ a \pm i\ \sin.\ a) = \cos.\ 3\,a \pm i\ .\ \sin.\ 3\,a,\ \text{also}$$

$$(\cos.\ a \pm i\ .\ \sin.\ a)^3 = \cos.\ 3\,a \pm i\ .\ \sin.\ 3\,a.$$

Die vorstehende Ausführung enthält deren eigentlich zwei: Entweder nimmt man überall die Grösse i mit dem Zeichen +, oder überall mit dem Zeichen —. Die beiden ersten Gleichungen werden dargethan durch wirkliches Vollziehen der links angedeuteten Operationen; die dritte Gleichung folgt aus den beiden vorigen. Man folgert nun hieraus weiter:

$$(\cos.\ {}^1/_3\,\varphi \pm i\ \sin.\ {}^1/_3\,\varphi)^3 = \cos.\ \varphi \pm i\ .\ \sin.\ \varphi,\ \text{also}$$

$$\sqrt[3]{(\cos.\ \varphi \pm i\ .\ \sin.\ \varphi)} = \cos.\ {}^1/_3\,\varphi \pm i\ .\ \sin.\ {}^1/_3\,\varphi.$$

Die letzte Beziehung ist diejenige, auf welche sich die Behandlung des folgenden Falles gründet.

Zweiter Fall: $27\ q^2 < 4\ p^3$.

Man darf auch in diesem Falle setzen

$$\frac{27\ q^2}{4\ p^3} = \cos.\ \varphi^2,\ \text{also}\ \cos.\ \varphi = \frac{q}{{}^1/_3\,p \cdot 2 \cdot \sqrt{{}^1/_3\,p}}.$$

Hierdurch verwandelt sich das zu Anfange des ersten Falles behandelte Produkt in

$$\sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot \sqrt{\cos.\ \varphi^2 - 1}\ \text{oder}\ \sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot i\ .\ \sin.\ \varphi.$$

In Folge der Annahme von φ hat man ferner $+\ {}^1/_2\,q = \cos.\ \varphi \cdot \sqrt{{}^1/_{27}\,p^3}$.

Hiernach gestaltet sich der Werth von x wie folgt:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot \cos.\ \varphi + \sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot i\ \sin.\ \varphi\right)} + \sqrt[3]{\left(-\sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot \cos.\ \varphi - \sqrt{{}^1/_{27}\,p^3} \cdot i\ \sin.\ \varphi\right)}$$

oder, indem wir eine Umwandelung, ähnlich der vorhin bewirkten vornehmen:

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,[\sqrt[3]{(\cos.\varphi - i.\sin.\varphi)} + \sqrt[3]{(\cos.\varphi + i.\sin.\varphi)}]$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p}\,[\cos.\tfrac{1}{3}\varphi - i.\sin.\tfrac{1}{3}\varphi + \cos.\tfrac{1}{3}\varphi + i.\sin.\tfrac{1}{3}\varphi)]$$

endlich $$x = -2.\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.\cos.\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Bevor wir dazu schreiten, die angegebene Behandlung an einem Beispiele zu erläutern, machen wir in Betreff des Winkels φ eine Bemerkung. Ist nämlich ein gegebener Bruch der Cosinus eines Winkels φ, so ist derselbe Bruch auch der Cosinus aller Winkel von der Form $2\,n\,\pi \pm \varphi$, wobei n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Man wird also bei der Berechnung von x einen jeden dieser Winkel in Betracht ziehen müssen und hat nun im Allgemeinen

$$x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.\cos.(\frac{2\,n}{3}\pi \pm \tfrac{1}{3}\varphi).$$

Allein nur die Annahme $n = 1$ giebt für diesen Ausdruck solche Winkel, deren Cosinus von dem des Winkels $\tfrac{1}{3}\varphi$ verschieden sind. Jeder grössere Werth von n giebt einen Winkel, der mit einem der drei anfänglichen Winkel zur Summe ein Vielfaches von 2π giebt, also einen bereits in Rechnung gewesenen Cosinus hat. Wir dürfen daher zur Berechnung des Werthes von x nur die Cosinus der drei Winkel $\tfrac{1}{3}\varphi$, $\tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{3}\varphi$ und $\tfrac{2}{3}\pi + \tfrac{1}{3}\varphi$ anwenden, erhalten aber hierdurch auch 3 Werthe der Unbekannten x, die wir, indem wir ihnen zugleich eine für die Berechnung bequeme Form geben, aufstellen wie folgt:

$$1)\ x = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.\cos.\tfrac{1}{3}\varphi$$

$$2)\ x = +2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.\cos.(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi)$$

$$3)\ x = +2\sqrt{\tfrac{1}{3}p}.\cos.(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi)$$

(Des beschränkten Raumes wegen hat der Verfasser die vorstehende Erörterung möglichst zusammen gedrängt. Er überlässt es dem Leser sich die Einzelheiten derselben zurecht zu legen.)

Als Rechnungsbeispiel soll die Gleichung

$$x^3 - 19\,x + 30 = 0$$

dienen. Man hat für sie $p = 19$, $q = 30$; also

$$\cos.\varphi = \frac{30}{\frac{19}{3}.2.\sqrt{\frac{19}{3}}}$$

$$\log.19 = 1,2787536$$
$$\log.3 = 0,4771213$$
$$\log.\frac{19}{3} = 0,8016323$$
$$\log.2 = 0,3010300$$
$$\log.\sqrt{\frac{19}{3}} = 0,4008161$$
$$\log.\frac{19}{3}.2.\sqrt{\frac{19}{3}} = 1,5034784$$

$$\log.30 = 1,4771213$$
$$\log.\frac{19}{3}.2.\sqrt{\frac{19}{3}} = 1,5034784$$
$$\log.\cos.\varphi = 9,9736429 - 10$$
$$\angle\varphi = 19^0\,45'\,37''$$
$$\tfrac{1}{3}\varphi = 6^0\,35'\,12''$$
$$60 - \tfrac{1}{3}\varphi = 53^0\,24'\,48''$$
$$60 + \tfrac{1}{3}\varphi = 66^0\,35'\,12''$$

Da nun $\log.2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = 0,7018461$, so ist der weitere Verlauf der Rechnung wie folgt:

$$\log.\cos.\tfrac{1}{3}\varphi = 9,9971239 - 10,$$
$$0,7018461$$
$$\log.(-x) = 0,6989700 \quad \text{also } -x = 5$$
$$1)\ x = -5.$$

$$\log.\cos.(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi) = 9,7752739 - 10$$
$$0,7018461$$
$$\log.x = 0,4771200$$
$$\text{also } 2)\ x = +3.$$

$$\log.\cos.(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi) = 9,5991858 - 10$$
$$0,7018461$$
$$\log.x = 0,3010319 \quad \text{demnach } 3)\ x = +2.$$

Aus vorstehender Betrachtung ist klar, dass die Gleichung $x^3 - p\,x + q = 0$ unter der Voraussetzung $27\,q^2 > 4\,p^3$ nur einen einzigen und zwar negativen Werth von x giebt. Unter der Voraussetzung $27\,q^2 < 4\,p^3$ giebt sie noch überdies 2 positive Werthe desselben. —

Endlich sei die Gleichung IV. $x^3 - px - q = 0$ durch goniometrische Lösung zu behandeln. Diese Gleichung tritt zu der Gleichung III. in eine ähnliche Analogie, wie die Gleichung II. zu der Gleichung I. Hat nämlich die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ die Wurzel $-a$, so hat man die identische Beziehung $-a^3 + pa + q = 0$, oder $a^3 - pa - q = 0$.

Hieraus ist ersichtlich, dass die vorgelegte Gleichung durch die Annahme $x = +a$ befriedigt wird. Daher ergiebt sich nun aus der Behandlung der Gleichung III. auch das Verfahren, welches für die Gleichung IV. eingeschlagen werden muss. Indem wir eine ähnliche Betrachtung wie bei II. anstellen, und uns daher auf das daselbst Gesagte beziehen, können wir folgende Anweisung aufstellen. Man löse nach Nro. III. die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ auf, gebe jeder Wurzel derselben das entgegengesetzte Vorzeichen, so hat man die Wurzeln der Gleichung $x^3 - px - q = 0$.

In Betreff der beiden zu unterscheidenden Fälle ergiebt sich hieraus speciell folgendes Verfahren:

Erster Fall: $27q^2 > 4p^3$. Man setze dann $\sin.\varphi = \dfrac{\frac{1}{3}p \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}p}}{q}$, ferner $\operatorname{tang.} \frac{1}{2}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang.} \frac{1}{2}\varphi}$, alsdann hat man: $x = +\dfrac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}p}}{\sin.\psi}$.

Zweiter Fall: $27q^2 < 4p^3$. Man setze $\cos.\varphi = \dfrac{q}{\frac{1}{3}p \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}p}}$. Dann hat die Unbekannte x drei Werthe, nämlich

1) $+2\sqrt{\frac{1}{3}p} \cdot \cos.\frac{1}{3}\varphi$. 2) $-2\sqrt{\frac{1}{3}p}\cos.(60^0 - \frac{1}{3}\varphi)$. 3) $-2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}p} \cdot \cos.(60^0 + \frac{1}{3}\varphi)$.

Die Gleichung IV. giebt also bei der Annahme $27q^2 > 4p^3$ nur eine einzige reelle und zwar positive Wurzel. Bei der Annahme $27q^2 < 4p^3$ giebt sie noch überdies 2 negative Werthe derselben.

Als Material zur Uebung des Vorstehenden theilt der Verf. hier noch eine Anzahl von Gleichungen mit:

$x^3 - 5x - 186 = 0$	$x^3 + 5x + 130 = 0$
$x^3 + 7x - 22 = 0$	$x^2 + 2x - 48 = 0$
$x^2 - 10x + 21 = 0$	$x^2 + 23x + 126 = 0$
$x^2 - 2x - 63 = 0$	$x^3 + 2x + 72 = 0$
$x^3 - 133x - 468 = 0$	$x^3 - 4x - 48 = 0$
$x^3 + 6x - 7 = 0$	$x^2 + 15x + 54 = 0$
$x^2 - 13x + 22 = 0$	$x^3 - 3x + 322 = 0$
$x^2 - 6x - 91 = 0$	$x^2 + 10x - 39 = 0$
$x^3 - 13x + 12 = 0$	$x^3 - 61x - 180 = 0$

Die Gleichungen sind mit Absicht ohne Beziehung auf ihre Gleichartigkeit zusammengestellt, um dem Anfänger Gelegenheit zu geben, sich über die anzuwendende Auflösungsmethode Rechenschaft zu geben. Sie sind übrigens so gewählt, dass die reellen Wurzeln in ganzen Zahlen dargestellt werden können.