Ueber eine der Lemniskate der Gestalt nach ähnliche Curve.

1. Definition und Gleichung der Curve.

Die zu untersuchende Curve habe die Eigenschaft, dass bei rechtwinkeligen Coordinaten die im Punkte x, y gezogene Tangente von der y Achse eine Strecke $\frac{x^4}{a^2 y}$ abschneidet, wobei a eine gegebene Linie bedeutet.

Ist AB Fig. I. die Tangente im Punkte x, y der zu suchenden Curve in Beziehung auf rechtwinkelige Coordinaten, so soll $OA = \frac{x^4}{a^2 y}$ sein. Wir nennen $\angle$ CBA φ; es ist dann $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = \frac{x^4}{a^2 y\,[x + y \operatorname{cotg}(\pi - \varphi)]}$ oder $a^2 y\,(-x \operatorname{tg}\varphi + y) = x^4$, oder, da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ ist, so ist

$$a^2 x y \frac{dy}{dx} - a^2 y^2 + x^4 = o; \text{ oder } a^2 \frac{dy}{dx} - a^2 \frac{y}{x} + x^2 \frac{x}{y} = o.$$

Zur Sonderung der Variabeln setzt man $\frac{y}{x} = t$ oder $y = x \,.\, t$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{dt}{dx} + t$. Obige Gleichung wird $a^2 x \frac{dt}{dx} + a^2 t - a^2 t + \frac{x^2}{t} = o$ oder $a^2\, tdt = -x\, dx$, integriert $\frac{1}{2} a^2 t^2 = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} c^2$, wo $\frac{c^2}{2}$ die Constante bedeuten soll; c ist analog dem a eine Strecke; also $t^2 = \frac{1}{a^2}(c^2 - x^2)$; oder $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$. Dies ist also die Gleichung der gesuchten Curve.

2. Discussion der Gleichung.

Da in der resultierenden Gleichung der Curve $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$ eine willkürliche Constante c vorkommt, so gibt es eine unendliche Anzahl von Curven von der verlangten Eigenschaft. Da aber die gefundene Differentialgleichung der Curve in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ nur vom ersten Grade ist, so kann keine die Schaar der Curven einhüllende Curve existieren.

Aus $y^2 = \frac{x^2}{a^2}(c^2 - x^2)$ ersehen wir, dass für $x = o$ $y = o$ wird; die Curve geht also durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems. Da für jedes x, das absolut genommen kleiner als c ist, zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene Werte von y existieren, so liegt die Curve symmetrisch zur x Achse. Für $x = \pm c$ wird y wider Null; die Curve schneidet also von Neuem in diesen Punkten die x Achse; für $x > c$ wird y complex. Die Curve liegt also zwischen 2 Parallelen zur y Achse in der Entfernung $\pm$ c von derselben. Durch eine analoge Betrachtung finden wir, dass die Curve auch zwischen 2 Parallelen zur x Achse in der Entfernung $\pm \frac{c^2}{2a}$ von derselben symmetrisch zur y Achse liegt. Die Curve lässt sich also vollständig in ein bestimmtes Rechteck einzeichnen.

Da die Curve in Beziehung auf beide Achsen symmetrisch ist, so genügt es, die Eigenschaften des im ersten Quadranten liegenden Teiles der Curve aufzusuchen. Die Gleichung der Curve im ersten Quadranten ist $y = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$ $x > o$. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}} + \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{a} = \frac{c^2 - 2x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\sqrt{c^2 - x^2}(-4x) - \dfrac{(c^2 - 2x^2)\,a\,(-x)}{\sqrt{c^2 - x^2}}}{a^2(c^2 - x^2)}$$

$$= \frac{-4x(c^2 - x^2) + x(c^2 - 2x^2)}{a(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es wird $\frac{dy}{dx} = o$ für $x = \frac{c}{2}\sqrt{2}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird für $x = \frac{c}{2}\sqrt{2} = \dfrac{-2c\sqrt{2}\,\frac{c^2}{2}}{a\left(\frac{c^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4}{a}$

also negativ. Die Curve hat demnach für $\frac{c}{2}\sqrt{2}$ ein Maximum. Sie steigt continuirlich bis zu diesem Punkte, fällt dann wider zur x Achse und schneidet dieselbe rechtwinkelig im Punkte $x = c$; denn $\frac{dy}{dx}$ wird für $x = c$ unendlich. Da $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(-3c^2 + 2x^2)}{a(c^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ für alle in Betracht kommende x, $x = o$ ausgenommen, negativ ist, so wendet die Curve der x Achse immer die concave Seite zu; für $x = o$ haben wir einen Inflexionspunkt. Andere ausgezeichnete Punkte hat die Curve nicht.

3. Construction der Curve.

Um den Anfangspunkt der Coordinaten O schlagen wir Fig. II. mit a und c als Radien Kreise; ihre Durchschnittspunkte mit der positiven x Achse nennen wir A und C, ziehen in A eine Tangente AB an den ersten Kreis, errichten in einem beliebigen Punkte D von OC ein Lot auf die x Achse, verlängern es bis es die Peripherie des mit c als Radius geschlagenen Kreises im Punkte E schneidet, ziehen durch E eine Parallele zur x Achse und verlängern sie bis sie AB im Punkte F schneidet, verbinden O mit F durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt G derselben mit DE ein Punkt der gesuchten Curve.

Beweis:

$$\overline{DE}^2 = (c + x)(c - x) = \overline{AF}^2.$$
$$AF : DG = a : x$$
$$DG = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$$

Q. e. d.

Macht man obige Construction für jeden Punkt von OC, so erhält man zunächst alle im ersten Quadranten liegende Punkte der Curve und dann wegen der Symmetrie zu beiden Achsen leicht die ganze geschlossene Curve.

In der Anlage haben wir die Construction für 4 Verhältnisse von a und c in Fig. III, IV, V, VI ausgeführt und sehen, dass die Curven mehr oder weniger die Gestalt einer Lemniskate haben.

4. Gleichung und Construction der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale der Curve. Berechnung des Krumungskreises und der Evolute, und

5. Quadratur der Curve

sind aus Mangel an Raum weggelassen worden.

6. Rectification der Curve.

Es ist $ds^2 = dx^2 + dy^2$, also $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$; demnach ist die Länge des Bogens bis zum Punkte x, y

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Aus $y = \frac{x}{a}\sqrt{c^2 - x^2}$ fanden wir $\frac{dy}{dx} = \frac{c^2 - 2x^2}{a\sqrt{c^2 - x^2}}$, also ist

$$s = \int_0^x \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2 c^2 - a^2 x^2 + c^4 - 4c^2 x^2 + 4x^4}{c^2 - x^2}}\,dx.$$

Setzt man $x = cz$, $dx = cdz$, so ist

$$s = \int_0^{\frac{x}{c}} \frac{c}{a} \sqrt{\frac{4c^2z^4 - z^2(a^2+4c^2)+a^2+c^2}{1-z^2}}\,dz = \frac{2c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{c}} \sqrt{\frac{z^4 - z^2\frac{a^2+4c^2}{4c^2} + \frac{a^2+c^2}{4c^2}}{1-z^2}}\,dz.$$

Setzen wir $\frac{a^2+4c^2}{4c^2} = a'$, $\frac{a^2+c^2}{4c^2} = c'$ und $z = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dz = \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}\,dt$ $= \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$; es ist dann $z^2 + z^2t^2 - t^2 = o$, $t = \frac{z}{+\sqrt{1-z^2}}$; die untere Grenze bleibt demnach o, die obere wird $\frac{\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}$; also ist

$$s = 2\frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\frac{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} - \frac{t^2a'}{1+t^2} + c'}{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\;\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{t^4 - a't^2 - a't^4 + c' + 2c't^2 + c't^4}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= 2\frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{t^4(1-a'+c') - t^2(a'-2c') + c'}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$1 - a' + c' = \frac{4c^2 - a^2 - 4c^2 + a^2 + c^2}{4c^2} = \frac{1}{4}$$

$$a' - 2c' = \frac{a^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2c^2}{4c^2} = \frac{2c^2 - a^2}{4c^2};$$ demnach wird

$$s = \frac{a^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{t^4 - t^2\left(\frac{2c^2-a^2}{c^2}\right) + \frac{a^2+c^2}{c^2}}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{-4c^4+4c^2a^2-a^4+4c^2a^2+4c^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{8a^2c^2-a^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nemlich $8c^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} a^2$ ist.

I. Fall. $8c^2 = a^2$.

Wir erhalten jetzt

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} (t^2+3)\frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \frac{1+t^2+2}{(1+t^2)^2}\,dt;$$

setzt man $t = \operatorname{tg}\varphi$, $dt = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$ so bleibt die untere Grenze o, die obere wird $\varphi =$ arc tg $\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}$; also

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi}(1+2\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{c^2}{a}\int_0^{\varphi}(2-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{c^2}{a}\left(2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right), \text{ oder nur durch a ausgedrückt}$$

$$s = \frac{a}{8}\left[2 \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-8x^2}} - \frac{1}{2}\sin 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-8x^2}}\right]$$

Dies ist also in diesem Falle die allgemeine Auflösung.

Es drückt sich hier die Länge der ganzen Curve überraschend einfach aus; für $x = c = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ wird nemlich

$$s = \frac{a}{8}\cdot[2\,.\operatorname{arctg}\infty - \tfrac{1}{2}\sin 2\operatorname{arctg}\infty] = \frac{a}{8}\pi.$$

Die ganze Curve also gleich $\frac{a}{2}\pi = \frac{1}{4}\, 2a\pi$, also gerade so lang als ein Quadrant des mit dem Radius a geschlagenen Hilfskreises.

II. Fall. $8c^2 < a^2$.

$$\text{Es war } s = \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right) + \frac{8a^2c^2-a^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 + \frac{a^2-2c^2}{2c^2}\right)^2 - \frac{a^4-8a^2c^2}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Da $a^2 > 8c^2$ ist, so ist $a^2 - 2c^2 > 0$ und $a^4 - 8a^2c^2 > 0$; wir setzen darum zur Abkürzung $\frac{a^2-2c^2}{2c^2} = \alpha^2$, $\frac{a^4-8a^2c^2}{4c^4} = \beta^4$, so ist

$$s = \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{(t^2+\alpha^2+\beta^2)\ (t^2+\alpha^2-\beta^2)}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Man setze $t = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{u}\sqrt{1-u^2}$, $dt = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ \frac{\frac{-u^2}{\sqrt{1-u^2}} - \sqrt{1-u^2}}{u^2}\, du$

$= -\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, du$; es wird dann

$$t^2+\alpha^2+\beta^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{u^2}$$

$$t^2+\alpha^2-\beta^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)u^2+(\alpha^2-\beta^2)u^2}{u^2}$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2-2\beta^2u^2}{u^2} = \frac{\left(1-\frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}u^2\right)(\alpha^2+\beta^2)}{u^2};$$ setzt man $\frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} = \varkappa^2$ und bemerkt, dass $\varkappa^2 < 1$, so ist

$$t^2+\alpha^2-\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)\frac{1-\varkappa^2u^2}{u^2}$$

$$t^2+1 = \frac{\alpha^2+\beta^2-u^2(\alpha^2+\beta^2-1)}{u^2}.$$

Aus $t = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{u} \sqrt{1 - u^2}$ sehen wir, dass für $t = o$, $u = 1$ wird; aus $u^2 t^2 = (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \beta^2) u^2$ wird $u = + \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{t^2 + (\alpha^2 + \beta^2)}}$; für $t = \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$ wird also $u = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)(c^2 - x^2)}{x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)(c^2 - x^2)}}$; dieser Wert von u wird also die obere Grenze des Integrals. Für den grössten Wert von x nemlich $x = c$ wird $u = o$. Es wird demnach jetzt

$$s = - \frac{c^2}{a} (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}} \int_1^u \frac{\sqrt{1 - \varkappa^2 u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{[\alpha^2 + \beta^2 - u^2 (\alpha^2 + \beta^2 - 1)]^2}$$

Setzt man $\frac{c^2}{a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = A$, $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2} = h$, so wird

$$s = A \int_u^1 \frac{(1 - \varkappa^2 u^2)\, du}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)}}.$$

Es sei $\frac{1 - \varkappa^2 u^2}{(1 - hu^2)^2} = \frac{A_0}{(1 - hu^2)^2} + \frac{A_1}{1 - hu^2}$, also $1 - \varkappa^2 u^2 = A_0 + A_1 - A_1 hu^2$, also $A_0 + A_1 = 1$; $hA_1 = \varkappa^2$; $A_1 = \frac{\varkappa^2}{h}$; $A_0 = \frac{h - \varkappa^2}{h}$. Bezeichnen wir $(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)$ mit U, so ist

$$s = A \cdot \frac{h - \varkappa^2}{h} \int_u^1 \frac{du}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}} + A \frac{\varkappa^2}{h} \int_u^1 \frac{du}{(1 - hu^2)\sqrt{U}}.$$

Es ist $\frac{d \frac{u\sqrt{U}}{1 - hu^2}}{du} = \frac{(1 - hu^2)\left(u \frac{d\sqrt{U}}{du} + \sqrt{U}\right) + 2hu^2 \sqrt{U}}{(1 - hu^2)^2}$,

$\frac{d\sqrt{U}}{du} = - \frac{\varkappa^2 u (1 - u^2) + u (1 - \varkappa^2 u^2)}{\sqrt{U}} = - \frac{u (1 + \varkappa^2 - 2\varkappa^2 u^2)}{\sqrt{U}}$, also

$$\begin{aligned}
\frac{d \frac{u\sqrt{U}}{1 - hu^2}}{du} &= \frac{(1 - hu^2)[-u^2 (1 + \varkappa^2 - 2\varkappa^2 u^2) + (1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)] + 2hu^2 [(1 - u^2)(1 - \varkappa^2 u^2)]}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}} \\
&= \frac{(1 - hu^2)(-u^2 - \varkappa^2 u^2 + 2\varkappa^2 u^4 + 1 - u^2 - \varkappa^2 u^2 + \varkappa^2 u^2) + 2u^2 h (1 - u^2 - \varkappa^2 u^2 + \varkappa^2 u^4)}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}} \\
&= \frac{1 - u^2 (2 + 2\varkappa^2 - h) + u^4 (3\varkappa^2 + 2h [1 + \varkappa^2] - 2h [1 + \varkappa^2]) - h\varkappa^2 u^6}{(1 - hu^2)^2 \sqrt{U}}.
\end{aligned}$$

Den Zähler des Bruches setzen wir gleich

$$b_0 + b_1 (1 - hu^2) + b_2 (1 - hu^2)^2 + b_3 (1 - hu^2)^3 =$$
$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 - hu^2 (b_1 + 2b_2 + 3b_3) + h^2 u^4 (b_2 + 3b_3) - h^3 b_3 u^6;$$

demnach ist

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= 1. \\ h (b_1 + 2b_2 + 3b_3) &= 2 (1 + \varkappa^2) - h \\ h^2 (b_2 + 3b_3) &= 3\varkappa^2 \\ h^3 b_3 &= h\varkappa^2; \text{ also ist} \end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{\varkappa^2}{h^2},\ b_2 = 0,\ b_1 = -\left[1 - \frac{2(1-\varkappa^2)}{h} - \frac{3\varkappa^2}{h^2}\right],\ b_0 = 2\left(1 - \frac{1+\varkappa^2}{h} + \frac{\varkappa^2}{h^2}\right).$$

Also ist

$$\frac{d\dfrac{u\sqrt{U}}{1-hu^2}}{du} = \frac{b_0}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} + \frac{b_1}{(1-hu^2)\sqrt{U}} + \frac{b_3(1-hu^2)}{\sqrt{U}},$$

$$\frac{u\sqrt{U}}{1-hu^2} = b_0\int\frac{du}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} + b_1\int\frac{du}{(1-hu^2)\sqrt{U}} + b_3\int\frac{(1-hu^2)\,du}{\sqrt{U}}$$

also

$$\int_u^1\frac{du}{(1-hu^2)^2\sqrt{U}} = \frac{1}{b_0}\left[\frac{u\sqrt{U}}{1-hu^2}\right]_{u_0}^1 - \frac{b_1}{b_0}\int_u^1\frac{du}{(1-\lambda u^2)\sqrt{U}} - \frac{b_3}{b_0}\int_u^1\frac{du}{\sqrt{U}} + \frac{b_3h^2}{b_0}\int_u^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{U}}.$$

Das letzte Integral $\int_{u_0}^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{U}}$ verwandelt sich durch die Substitution $u = \sin\varphi$ in

$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$. Bezeichnen wir $\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}$ mit $\Delta(\varphi)$, so ist das Integral gleich

$$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\frac{1}{\varkappa^2}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\varkappa^2\sin^2\varphi + 1 - 1}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi = -\frac{1}{\varkappa^2}\left\{\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\Delta(\varphi)\,d\varphi - \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}\right\} =$$

$-\frac{1}{\varkappa^2}\left[E\left(\varkappa,\frac{\pi}{2}\right) - E(\varkappa,\varphi) - F\left(\varkappa,\frac{\pi}{2}\right) + F(\varkappa,\varphi)\right]$ wo die F und E die bekannten, durch die Landen'sche Substitution zu berechnenden elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sind. Da in diesem Teile der Modul immer $\varkappa$ ist, so wollten wir ihn unbezeichnet lassen. Das vorletzte Integral $\int_u^1\frac{du}{\sqrt{U}}$ ist $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi)$.

Das vorhergehende Integral ist das Legendre'sche Integral dritter Gattung; wir bezeichnen es vorläufig mit $\Pi_0 (\varkappa, -\lambda, \varphi)$, oder bei weggelassenem Modul mit $\Pi_0 (-\lambda, \varphi)$.

Es ist also dann

$$s = A \frac{h - \varkappa^2}{h} \left\{ -\frac{1}{b_0} \frac{u\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2 u^2)}}{1 - hu^2} - \frac{b_1}{b_0} \left[\Pi_0 \left(-h, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0 (-h, \varphi) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{b_3}{b_0} \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\varphi) \right] + \frac{b_3 h^2}{b_0 \varkappa^2} \left[E\left(\frac{\pi}{2}\right) - E(\varphi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(\varphi) \right] \right\}$$
$$+ A \frac{\varkappa^2}{h} \left[\Pi_0 \left(-h, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi_0 (-h, \varphi) \right].$$

Dies ist also in diesem Falle die allgemeine Auflösung. Es erübrigt aber noch das vorkommende Legendre'sche Integral in gebrauchsfertigerer Form zu geben; wir führen es darum auf die Jacobi'sche Normalform zurück.

Es ist $\Pi_0 (\varkappa, -h, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - h \sin^2\varphi)\, \Delta(\varphi)} = \int_0^\varphi \frac{1 - h \sin^2\varphi + h \sin^2\varphi}{(1 - h \sin^2\varphi)\, \Delta(\varphi)} d\varphi$

$$= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + h \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - h\sin^2\varphi)\, \Delta(\varphi)}.$$

Setzen wir $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = u$, also $\varphi = \operatorname{am} u$, $d\varphi = \Delta \operatorname{am} u \, du$, so ist

$\Pi_0 (\varkappa, -h, \varphi) = u + h \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - h \sin^2 \operatorname{am} u}$; setzt man noch $h = + \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} b$, wo

also b eine constante durch $\int_0^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$ definierte Grösse ist, so ist

$$\Pi_0 (\varkappa, -h, \varphi) = u + \frac{\sin \operatorname{am} b}{\cos \operatorname{am} b \, \Delta \operatorname{am} b} \int_0^u \frac{\varkappa^2 \sin \operatorname{am} b \cos \operatorname{am} b \, \Delta \operatorname{am} b \sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} b \sin^2 \operatorname{am} u}$$

$= u + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} b}{\Delta \operatorname{am} b} \Pi (\operatorname{am} u, \operatorname{am} b, \varkappa)$ wo nun mit Π das Jacobi'sche Integral dritter Gattung bezeichnet wird.

Den Wert der Coustante b müssen wir noch näher betrachten. Zunächst ist zu untersuchen, ob die obere Grenze reell, und ob sie in diesem Falle grösser, gleich oder kleiner als Eins ist.

Da $\varkappa$ eine reelle Zahl, so ist $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ nur dann reell, wenn $h > o$ ist. Es war $\varkappa^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$,

$h = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2}$, für $\alpha^2 = \frac{a^2-2c^2}{2c^2}$, $\beta^4 = \frac{a^4-8a^2c^2}{4c^4}$ und $a^2 > 8c^2$;

da α^2 und β^2 reelle positive Grössen sind, so ist $h \geqq o$, wenn

$\alpha^2+\beta^2 \geqq 1$, d. h. $a^2 - 2c^2 + a\sqrt{a^2-8c^2} \geqq 2c^2$, oder $a^2 - 4c^2 + a\sqrt{a^2-8c^2} \geqq o$;

da $a^2 > 8c^2$ ist, so ist immer das obere Zeichen richtig, also h positiv. Ferner ist

$\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} = \sqrt{\frac{a^2-4c^2+\sqrt{a^4-8a^2c^2}}{2\sqrt{a^4-8a^2c^2}}}$ grösser als Eins; denn wäre $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} \leqq 1$, so

müsste $a^2 - 4c^2 + \sqrt{a^4-8a^2c^2} \leqq 2\sqrt{a^4-8a^2c^2}$ sein, d. h.

$a^2 - 4c^2 \leqq \sqrt{a^4-8a^2c^2}$ und da $a^2 > 8c^2$ also auch $> 4c^2$ ist, so müsste

$a^4 - 8a^2c^2 + 16c^4 \leqq a^4 - 8a^2c^2$ sein, d. h. $16c^4 \leqq o$; dies ist unmöglich, also

$\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} > 1$. Also wird in $b = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$ die obere Grenze grösser als Eins; b also complex. Wir versuchen den reellen vom imaginären Teil zu sondern. Der geradlinigte Integrationsweg von o bis $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ führt durch den Verzweigungspunkt $z = 1$ hindurch; erreicht aber nicht mehr den Verzweigungspunkt $z = \frac{1}{\varkappa}$; denn h $= \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2+\beta^2} = 1 - \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$; wir sahen, dass $h > o$ war, jetzt finden wir es kleiner als Eins; also $\sqrt{h} < 1$, also $\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}} < \frac{1}{\varkappa}$; also haben wir den Verzweigungspunkt $+\frac{1}{\varkappa}$ (wie auch -1 und $-\frac{1}{\varkappa}$) nicht in Betracht zu ziehen. Um den Verzweigungspunkt $\frac{1}{\varkappa}$ zu vermeiden, zerlegen wir

$$b = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} \text{ in } \int_0^{1-\varrho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} + \int_{1-\varrho}^{1+\varrho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} + \int_{1+\varrho}^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}}$$

setzen dann im zweiten Summanden $z = 1 - \rho e^{i\vartheta}$; die untere Grenze wird dann o, die obere π; wir umkreisen dann also den betreffenden Punkt in einem Halbkreise mit dem Radius ρ und lassen im Resultate ρ gegen o convergieren. Es ist $dz = - \rho i e^{i\vartheta} d\vartheta$; wir erhalten also

$$b = \int\limits_0^{1-\rho} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} - i\sqrt{\rho} \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} d\vartheta}{\sqrt{e^{i\vartheta}(2-\rho e^{i\vartheta})(1-\varkappa^2[1-\rho e^{i\vartheta}]^2)}} + \int\limits_{1+\rho}^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Nehmen wir Lim $\rho = o$ und bemerken wir, dass das 2. Integral für Lim $\rho = o$ einen endlichen Wert hat, mit $\sqrt{\rho}$ multipliciert, also sich der Null nähert, so ist

$$b = \int\limits_0^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} - i \int\limits_1^{\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Der Minuendus ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung; wir bezeichnen es wie üblich mit K. Im Subtrahendus setzen wir $z = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varkappa^2) z'^2}}$, $1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2$;

es ist dann $dz = \frac{\varkappa' z'^2 dz'}{(1-\varkappa'^2 z'^2)^{\frac{3}{2}}}$; $z^2 - 1 = \frac{\varkappa'^2 z'^2}{1-\varkappa'^2 z^2}$; $1 - \varkappa^2 z^2 = 1 - \frac{\varkappa^2}{1-\varkappa'^2 z'^2}$

$$= \frac{1 - \varkappa' z'^2 - 1 + \varkappa'^2}{1-\varkappa'^2 z'^2} = \frac{\varkappa'^2 (1 - z'^2)}{1 - \varkappa'^2 z'^2}.$$

Aus $z^2 = \frac{1}{1-\varkappa'^2 z^2}$ wird $z'^2 = \frac{z^2-1}{\varkappa'^2 z^2}$; für $z = 1$ wird $z' = o$, für $z = \sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}$ wird

$$z' = \sqrt{\frac{\frac{h}{\varkappa^2} - 1}{\varkappa'^2 \frac{h}{\varkappa^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}, \text{ also}$$

$$b = K - i \int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{\varkappa'^2 z' dz'}{(1-\varkappa'^2 z'^2)^{\frac{3}{2}-1} \varkappa' z' \varkappa' \sqrt{1-z'^2}} = K - i \int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa'^2 z^2)}}.$$

Die obere Grenze ist reell und ein ächter Bruch; denn, wenn man ihr die Form $\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{1-\varkappa^2}}$ gibt, so ist $\frac{\varkappa^2}{h} < 1$ wie bewiesen, also $1 - \frac{\varkappa^2}{h} > o$, und $\frac{\varkappa^2}{h} > \varkappa^2$; denn h war ein ächter Bruch, also $o < \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\varkappa^2}{h}}{1-\varkappa^2}} < 1$; das Integral bekommt also einen reellen Wert, der d sein möge, alsdann ist $b = K - id$. Dann ist $\Pi_0(-\lambda, \varphi) = u + \dfrac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(K - id)}{\Delta \operatorname{am}(K - id)} \Pi(u, K - id)$. Wir versuchen das scheinbar Imaginäre wegzuschaffen.

Aus $b = \displaystyle\int_o^{\sqrt{\frac{h}{\varkappa^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$ ist $\sqrt{\dfrac{h}{\varkappa^2}} = \sin \operatorname{am} b = \sin \operatorname{am}(K - id)$;

aus $d = \displaystyle\int_o^{\sqrt{\frac{1-\frac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa'^2 z^2)}}$ ist $\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\varkappa^2}{h}}{\varkappa'^2}} = \sin \operatorname{am} d$; oder $\sqrt{\dfrac{\varkappa^2}{h}} = \Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')$,

also $\sin \operatorname{am}(K - id) = \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}$; $\cos \operatorname{am}(K - id) = \dfrac{i\varkappa' \sin \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}$; $\Delta \operatorname{am}(K—id)$ $= \sqrt{\dfrac{1 - \varkappa'^2 \sin^2 \operatorname{am}(d, \varkappa') - 1 + \varkappa'^2}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}} = \dfrac{\varkappa' \cos \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}$, also $\dfrac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(K - id)}{\Delta \operatorname{am}(K - id)} =$ $- \dfrac{i \Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(d, \varkappa') \cos \operatorname{am}(d, \varkappa')}$; da

$\operatorname{am}(K - id) = \operatorname{am}[2K - (K + id)] = \pi - \operatorname{am}(K + id)$ so ist $\Pi(u, K - id) = - \Pi(u, K + id)$; also wird

$$\Pi_0(-\lambda, \varphi) = u + \frac{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\varkappa'^2 \sin \operatorname{am}(d, \varkappa') \cos \operatorname{am}(d, \varkappa')} i \Pi(u, K + id)$$

$i\Pi(u, K + id)$ ist aber (Legendre. Traité des Fonctions elliptiques III p. 138) gleich $i\Pi(u, id) + u\varkappa^2 \dfrac{\operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\varkappa^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(d, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(d, \varkappa')} \dfrac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}\right)$.

Es bleibt noch übrig $i\Pi(u, id)$ auf rein reelle Form zu bringen. Bekanntlich ist für jedes complexe a

$\Pi(u, a) = u Z(a) + \dfrac{1}{2} l \dfrac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}$, wo $Z(a)$ definiert ist, durch (Jacobi fundamenta 47. 1 für $x = \dfrac{a\pi}{2\varkappa}$)

$$\frac{4\pi}{2K} \cdot \left\{\frac{q}{1 - q^2} \sin \frac{a\pi}{K} + \frac{q^2}{1 - q^4} \sin \frac{2a\pi}{K} + \frac{q^3}{1 - q^6} \sin \frac{3a\pi}{K} \ldots\right\}; \; q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

und K′ ensteht aus K, indem man $\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}$ an die Stelle von $\varkappa$ rücken lässt;

ferner ist definiert (Jac. fundamenta 52) $\Theta(u) = \Theta(o)\, e^{\int\limits_o^u Z(u)\,du}$

Also ist $i\Pi(u, id) = + iu\, Z(id) + \frac{i}{2}\, l\, \frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)}$.

Es ist aber (Fund. § 56. 4)

$$iZ(id) = -\operatorname{tg} \operatorname{am}(d, \varkappa')\, \Delta \operatorname{am}(d, \varkappa') + \frac{\pi d}{2KK'} + Z(d, \varkappa')$$

$l\, \frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)} = \int\limits_o^{u-id} Z(u)\,du - \int\limits_o^{u+id} Z(u)\,du$; setzt man im Minuendus $u = v - di$, so wird die untere Grenze di, die obere u, und im Subtrahendus $u = v + di$, so wird die untere Grenze $-$ di, die obere u und es ist

$$l\, \frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)} = \int\limits_{\beta i}^{u} Z(v-di)\,dv - \int\limits_{-\beta i}^{u} Z(v+di)\,dv$$

$$= \int\limits_o^{u} Z(v-di)\,dv - \int\limits_o^{u} Z(v+di)\,dv + \int\limits_{di}^{o} Z(v-di)\,dv - \int\limits_{-di}^{o} Z(v+di)\,dv$$

setzt man im letzten Integral $v = -v'$, so wird

$-\int\limits_{-di}^{o} Z(v+di)\,dv = \int\limits_{di}^{o} Z(-v'+di)\,dv' = -\int\limits_{di}^{o} Z(v'-di)\,dv'$; denn

$Z(a) = -Z(-a)$; also $\int\limits_{di}^{o} Z(v-di)\,dv = \int\limits_{-di}^{o} Z(v+di)\,dv$; also

$$l\, \frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)} = \int\limits_o^{u} [Z(u-di) - Z(u+di)]\,du.$$

Das n^te Glied von $Z(u-di) - Z(u+di)$ ist

$$\frac{4\pi}{2K}\, \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left[\sin \frac{n\pi(u-di)}{K} - \sin \frac{n\pi(u+di)}{K}\right] =$$

$-\frac{4\pi}{K}\, \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi\, di}{K} \cos \frac{n\pi\, u}{K}$, zwischen den Grenzen o und u integriert, gibt

$$-\frac{4}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\sin\frac{n\pi\, di}{K}\sin\frac{n\pi\, u}{K} = -i\frac{2}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi\, u}{K},\ \text{also}$$

$$\frac{i}{2}\frac{\Theta(u-id)}{\Theta(u+id)} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi\, u}{K}.$$

Also ist

$$\Pi_0(-h,\varphi) = u + \frac{\Delta\,\text{am}\,(d,\varkappa')}{\varkappa'^2\sin\text{am}\,(d,\varkappa')\cos\text{am}\,(d,\varkappa')} +$$

$$\left\{-u\,\text{tg}\,\text{am}\,(d,\varkappa')\,\Delta\,\text{am}\,(d,\varkappa') + \frac{\pi d u}{2KK'} + u\,Z\,(d,\varkappa') + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(e^{\frac{n\pi d}{K}} - e^{-\frac{n\pi d}{K}}\right)\sin\frac{n\pi\, u}{K}\right.$$

$$\left. u\,\varkappa^2\frac{\text{tg}^2\,\text{am}\,(d,\varkappa')}{\Delta\,\text{am}\,(d,\varkappa')} - \text{arc tg}\left(\frac{\varkappa^2\,\text{tg}\,\text{am}\,(d,\varkappa')}{\Delta\,\text{am}\,(d,\varkappa')}\frac{\sin\text{am}\,u\cos\text{am}\,u}{\Delta\,\text{am}\,u}\right)\right\}.$$

Die Functionen von am u drücken wir entweder nach Jacobi durch die Transcendente Θ oder nach Weierstrass durch die Abel'schen Functionen Al (ω) etc. aus. (Crelle. Bd. 52, S. 357.). Bei Berechnung des vollständigen Integrals $\Pi_0\left(-h, \frac{\pi}{2}\right)$ fallen in Folge von $\sin n\pi = 0$, $\cos\text{am}\,K = 0$, $\text{artg}\,0 = 0$ die unter dem Summenzeichen stehende unendliche Reihe und der arc tg fort.

Es ist somit die Länge des Bogens s auch in diesem 2. Fall in gebrauchsfertiger Gestalt gegeben.

III. Fall. $8c^2 > a^2$.

Wir fanden

$$s = \frac{c^2}{a}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left(t^2 - \frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{8a^2c^2-a^4}{4c^4}}\ \frac{dt}{(1+t^2)^2};$$

setzt man $\frac{2c^2-a^2}{2c^2} + i\,\frac{a\sqrt{8c^2-a^2}}{2c^2} = r^2(\sin\alpha + i\cos\alpha)$, so muss

$$r^4 = \left(\frac{2c^2-a^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{a^2(8c^2-a^2)}{4c^4} = \frac{4c^4-4a^2c^2+a^4+8a^2c^2-a^4}{4c^4} = \frac{a^2+c^2}{c^2};\ \text{also}$$

$$r^2 = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c},\quad \text{tg}\,\alpha = \frac{2c^2-a^2}{a\sqrt{8c^2-a^2}}.\ \text{Es ist demnach}$$

$$s = \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{[t^2 - r^2(\sin\alpha + i\cos\alpha)]\,[t^2 - r^2(\sin\alpha - i\cos\alpha)]}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left[t+r\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t-r\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t+r\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[t-r\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)\right]}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{c^2}{a}\int\limits_0^{\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}} \sqrt{\left[\left(t + r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]\left[\left(t - r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]}\;\frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Setzt man jetzt $t = r\,\frac{1-y}{1+y}$ (wo y eine andere Variabel ist, als die im ersten Teil vorkommende Ordinate y), $dt = r\,\frac{-(1+y)-(1-y)}{(1+y)^2}\,dy = -\frac{2r}{(1+y)^2}\,dy$

$$\left(t + r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = r^2\,\frac{\left[(1-y)+(1+y)\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\,(1+y)^2}{(1+y)^2}$$

$$= r^2\,\frac{(1-y)^2 + (1+y)^2 + 2\,(1-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}}{(1+y)^2}$$

$$= 2r^2\,\frac{1 + y^2 + (1-y^2)\sin\frac{\alpha}{2}}{(1+y)^2}$$

$$= 2r^2\,\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)y^2}{(1+y)^2} \quad \text{und analog}$$

$$\left(t - r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2r^2\,\frac{1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)y^2}{(1+y)^2}$$

$$1 + t^2 = \frac{(1+y)^2 + r^2(1-y)^2}{(1+y)^2} = \frac{1 + r^2 + y^2(1+r^2) + 2y(1-r^2)}{(1+y)^2}.$$

Zur Bestimmung der neuen Grenzen haben wir $t = r\,\frac{1-y}{1+y}$, oder $y = \frac{r-t}{r+t}$; für $t = o$ wird $y = 1$; für $t = \frac{x}{\sqrt{c^2 - x}}$ wird $y = \frac{r\sqrt{c^2-x^2}-x}{r\sqrt{c^2-x^2}+x}$. Also ist

$$s = 4\frac{c^2}{a} r^3 \int_y^1 \frac{\sqrt{\left[1 - \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) y^2\right]\left[1 + \sin\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) y^2\right]}\, dy}{[1 + r^2 + (1 + r^2)\, y^2 + 2y\,(1 - r^2)]^2}.$$

Es ist $1 + \sin\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\alpha}{4} = \left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)^2$

und analog $1 - \sin\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)^2$, ferner

$$\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{\alpha}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi - \alpha}{4}$$

$$\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{\alpha}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi - \alpha}{4};$$ also

$$s = 4\frac{c^2}{a} r^3 \cos\frac{\alpha}{2} \int_y^1 \frac{\sqrt{\left(\mathrm{tg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + y^2\right)\left(\mathrm{cotg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + y^2\right)}\, dy}{[1 + r^2 + 2y\,(1 - r^2) + (1 + r^2)\, y^2]^2}.$$

Man setze $4\frac{c^2}{a} r^3 \cos\frac{\alpha}{2} = B$, $\mathrm{tg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} + \mathrm{cotg}^2\frac{\pi - \alpha}{4} = b$,

$y^4 + by^2 + 1 = Y$, $1 + r^2 = p$, $1 - r^2 = q$, so ist

$$s = B\int_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{[py^2 + 2qy + p]^2} = B\int_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{p^2y^4 + 4q^2y^2 + p^2 + 4pqy^3 + 2p^2y^2 + 4pqy}$$

$$= B\int_y^1 \frac{\sqrt{Y}\, dy}{[p^2y^4 + 2\,(2q^2 + p^2)\, y^2 + p^2] + 4pqy\,(1 + y^2)};$$ man setze $2q^2 + p^2 = s^2$, so ist

$$s = B\int_y^1 \frac{(y^4 + by^2 + 1)\,[p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2 - 4pqy\,(1 + y^2)]}{\sqrt{Y}\,[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2)^2 - 16p^2q^2y^2\,(1 + y^2)^2]}$$

$$= B\int_y^1 \frac{[p^2y^8 - 4pqy^7 + (2s^2 + p^2b)y^6 - 4pq\,(1 + b)\,y^5 + 2(s^2b + p^2)y^4 - 4pq\,(1 + b)\,y^3 + (2s^2 + p^2b)y^2 - 4pqy + p^2]\, dy}{\sqrt{Y}\,[p^4y^8 + (4s^2p^2 - 16\,p^2q^2)\,y^6 + (4s^4 + 2\,p^4 - 32\,p^2q^2)\,y^4 + (4s^2p^2 - 16\,p^2q^2)\,y^2 + p^4]}$$

$$= \frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} +$$

$$B\int_y^1 \frac{[-4pqy^7 + (-2s^2 + p^2b - 16q^2)y^6 - 4pq\,(1 + b)y^5 + 2(s^2b - p^2 - \frac{2s^4}{p^2} + 16q^2)y^4 - 4pq\,(1 + b)y^3 + (-2s^2 + p^2b - 16q^2)y^2 - 4pqy]\, dy}{\sqrt{Y}\,[(p^2y^4 + 2s^2y^2 + p^2)^2 - 16\,p^2q^2y^2\,(1 + y^2)^2]}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$s = \frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{B}{p^2}\int_y^1 \frac{a_0 y^7 + a_1 y^6 + a_2 y^5 + a_3 y^4 + a_2 y^3 + a_1 y^2 + a_0 y}{\sqrt{Y}\,[(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2)^2 - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2]}\, dy.$$

Um $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{\left(y^2 + \mathrm{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)\left(y^2 + \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)}}$ zu berechnen, setze man

$\frac{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}} = \eta$; η hat ein Maximum für $y = o$. Ist nun die untere Grenze des Integrals $y = \frac{r\sqrt{c^2 - x^2} - x}{r\sqrt{c^2 - x^2} + x} \geqq o$, so nehmen wir $y = \mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}\,\frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta}$,

$dy = -\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}\,\frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{1 - \eta^2}}$,

$$y^2 + \mathrm{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4} = \frac{\mathrm{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}(1 - \eta^2) + \eta^2\, \mathrm{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}{\eta^2} = \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\, \frac{1 - \eta^2\left(1 - \mathrm{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)}{\eta^2}.$$

Da α aus $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2c^2 - a^2}{a\sqrt{8c^2 - a^2}}$ als spitzer Winkel gefunden ist, so können wir $1 - \mathrm{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4} = \lambda^2 < 1$ setzen. Die untere Grenze wird $\eta_0 = \frac{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + \mathrm{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}}$, die obere $\eta_1 = \cos\frac{\pi - \alpha}{4}$. Wir kürzen $(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)$ durch H ab. Es ist also

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi - \alpha}{4} \int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{H}}.$$

Ist die untere Grenze $y < o$, wie es z. B. geschieht, wenn wir die Länge der ganzen im ersten Quadranten liegenden Curve finden wollen ($y = -1$), so teilen wir $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ in $\int_y^0 \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$; da im ersten Summanden $y < o$, so setzen wir in ihm $y = -\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}\,\frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta^2}$, $dy = +\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi - \alpha}{4}\,\frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{1 - \eta^2}}$, im zweiten wie oben

$y = + \operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta^2}$. Wir erhalten dann

$$\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4}} \int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \frac{1}{\operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4}} \int_1^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} = \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \left[\int_{\eta_0}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \int_{\eta_1}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} \right].$$

Wenn wir die ganze Länge der im ersten Quadranten liegenden Curve berechnen, so wird $\eta_0 = \eta_1 = \cos \frac{\pi - \alpha}{4}$ und die Summanden werden einander gleich.

Setzen wir in der allgemeinen Auflösung $\eta = \sin \chi$ und nennen arc sin $\eta_0 = \chi_0$, arc sin $\eta_1 = \chi_1$, so ist im ersten Falle

$$\frac{B}{p^2} \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{B}{p^2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \left[F(\lambda, \chi_0) - F(\lambda, \chi_1) \right],$$ im zweiten Falle

$$\frac{B}{p^2} \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{B}{p^2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \left[2\,F\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) - F(\lambda, \chi_0) - F(\lambda, \chi_1) \right].$$

Wir kommen jetzt zur Behandlung des Integrals des zweiten Summanden von s.

$$\int^1 \frac{a_0 y^7 + a_1 y^6 + a_2 y^5 + a_3 y^4 + a_2 y^3 + a_1 y^2 + a_0 y}{\sqrt{Y} \{(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2)^2 - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2\}} dy =$$

$$\int_y^1 \frac{(a_0 y^6 + a_2 y^4 + a_2 y^2 + a_0) y \, dy}{\sqrt{Y} [(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2) - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2]} + \int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2) \, dy}{\sqrt{Y} [(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2) - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2]}.$$

Den ersten Summanden wollen wir s_1 nennen; wir setzen in ihm $y^2 = u$, $2y\,dy = du$; die obere Grenze bleibt 1, die untere wird $u = y^2$; da aber $u = y^2$ für $y = o$ ein Minimum hat, so müssen wir $\int_y^1$ wider wie früher trennen in $\int_y^0 + \int_0^1$ und im ersten Integrale $y = - \sqrt{u}$, im zweiten $y = + \sqrt{u}$ setzen; da aber $y\,dy$ in beiden Integralen gleich wird, und die Function sonst nur von y^2 abhängt, so vereinigen sich die Integrale sofort wider, und es wird

$$s_1 = \int_u^1 \frac{(a_0 u^3 + a_2 u^2 + a_2 u + a_0) \, du}{\sqrt{u^2 + bu + 1} \{(p^2 u^2 + 2s^2 u + p^2) - 16 p^2 q^2 u (1 + u)^2\}};$$ da y für $x = c$ gleich -1 wurde, wird $u = +1$. Wenn wir also die ganze Länge der im ersten Quadranten liegenden Curve finden wollen, wird $s_1 = o$.

Die Irrationalität schaffen wir fort durch die Substitution

$$\xi = \frac{2\sqrt{u^2 + bu + 1} - (2u + b)}{\sqrt{4 - b^2}};$$ $\sqrt{4 - b^2}$ bezeichnen wir mit b'; es ist dann

$$b'\xi + 2u + b = 2\sqrt{u^2 + bu + 1} \text{ und}$$

$$b'^2\xi^2 + 4u^2 + b^2 + 4b'u\xi + 2bb'\xi + 4ub = 4u^2 + 4bu + 4, \text{ also}$$

$$u = \frac{-b'\xi + 4 - b^2 - 2bb'\xi}{4b'\xi} = \frac{-2b\xi + b'(1 - \xi^2)}{4\xi}, \text{ also}$$

$$du = \frac{-8b'\xi^2 - 4b'(1 - \xi^2)}{16\xi^2} = -\frac{b'}{4}\,\frac{1 + \xi^2}{\xi^2}\,d\xi; \text{ ferner ist}$$

$$\xi b' + \sqrt{4u^2 + 4b + b^2 + 4 - 4} = 2\sqrt{u^2 + bu + 1}$$

$$\xi b' + \sqrt{4(u^2 - bu + 1) - b'^2} = 2\sqrt{u^2 + bu + 1}$$

$$4(u^2 + bu + 1) - b'^2 = 4(u^2 + bu + 1) - 4\sqrt{u^2 + bu + 1}\,\xi b' + \xi^2 b'^2 \text{ also}$$

$$\sqrt{u^2 + bu + 1} = \frac{b'}{4}\,\frac{1 + \xi^2}{\xi}, \text{ demnach}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + bu + 1}} = -\frac{d\xi}{\xi}.$$

Die obere Grenze wird jetzt $\xi_1 = \dfrac{2\sqrt{2 + b} - (2 + b)}{\sqrt{(2 + b)(2 - b)}} = \dfrac{2 - \sqrt{2 + b}}{\sqrt{2 - b}}$, die untere $\xi_0 = \dfrac{2\sqrt{y^4 + by^2 + 1} - (2y^2 + b)}{b'}$.

Es ist nun $a_0 u^3 + a_2 u^2 + a_2 u + a_0$ durch ξ auszudrücken.

$$u = \frac{b'(1 - \xi^2) - 2b\xi}{4\xi}$$

$$u^2 = \frac{b'(1 - 2\xi^2 + \xi^4) - 4bb'\xi(1 - \xi^2) + 4b^2\xi^2}{16\xi^2}$$

$$u^3 = \frac{b'^3(1 - 3\xi^3 + 3\xi^4 - \xi^6) - 6bb'^2\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^4) + 12b^2b'\xi^2(1 - \xi^2) - 8b^3\xi^3}{64\xi^3}, \text{ demnach}$$

$$a_0 = a_0\,\frac{64\xi^3}{64\xi^3}$$

$$a_2 u = a_2\,\frac{16b'\xi^2 - 32b\xi^3 - 16b'\xi^4}{64\xi^3}$$

$$a_2 u^2 = a_2\,\frac{4b'\xi - 16bb'\xi^2 + (-8b'^2 + 16b^2)\xi^3 - 16bb'\xi^4 + 4b'\xi^5}{64\xi^3}$$

$$a_0 u^3 = a_0\,\frac{b'^3 - 6bb'^2\xi + (-3b'^3 + 12b^2b')\xi^2 + (12bb'^2 - 8b^3)\xi^3 + (3b'^3 - 12b^2b')\xi^4 - 6bb'^2\xi^5 - b'^3\xi^6}{64\xi^3}.$$

Also ist $a_0 + a_2 u + a_2 u^2 + a_0 u^3 =$

$$\begin{array}{lllllll}
a_0 b'^3 & + 4a_2 b' \xi & + 16a_2 b' \xi^2 & + 64a_0 \xi^3 & - 16a_2 b' \xi^4 & + 4a_2 b' \xi^5 & - a_0 b'^3 \xi^6 \\
 & - 6a_0 bb'^2 \xi & - 16a_2 bb' \xi^2 & - 32a_2 b \xi^3 & - 16a_2 bb' \xi^4 & - 6a_0 bb'^2 \xi^5 & \\
 & & - 3a_0 b'^3 \xi^2 & - 8a_2 b'^2 \xi^3 & + 3a_0 b'^3 \xi^2 & & \\
 & & + 12a_0 b^2 b' \xi^2 & + 16a_2 b^2 \xi^3 & - 12a_0 b^2 b' \xi^2 & & \\
 & & & + 12a_0 bb'^2 \xi^3 & & & \\
 & & & - 8a_0 b^3 \xi^3 & & & \\
\hline
(b_0 & + b_1 \xi & + b_2 \xi^2 & + b_3 \xi^3 & - b_2 \xi^4 & + b_1 \xi^5 & - b_0 \xi^6) : 64\xi^3
\end{array}$$

wo die b die darüberstehenden Summen bezeichnen.

Der Nenner war

$[p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2 + 4pqy\,(1 + y^2)]\,[p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2 - 4pqy\,(1 + y^2)]$.

Wir setzen ihn gleich Null und bestimmen seine Wurzeln. Der erste Factor gleich Null gesetzt und durch y^2 dividiert gibt

$$p^2 \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 4pq \left(y + \frac{1}{y}\right) + 2s^2 = o; \quad y + \frac{1}{y} = y'; \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = y'^2 - 2$$

$$p^2 y'^2 + 4pqy' + 2(s^2 - p^2) = o, \quad s^2 - p^2 = 2q^2$$

$(py' + 2q)^2 = o$; $y' = -\frac{2q}{p}$. Es hat also die letzte Gleichung zwei gleiche Wurzeln, also auch die Gleichung in y. Es ist

$$y + \frac{1}{y} + 2\frac{q}{p} = o, \text{ also } y^2 + 2\frac{q}{p} y + 1 = o, \quad y = -\frac{q}{p} \pm \sqrt{\frac{q^2 - p^2}{p^2}},$$

$q^2 - p^2 = (1 - r^2)^2 - (1 + r^2) = -4r^2$; $y = -\frac{q}{p} \pm 2\frac{r}{p} i$; also sind die 4 Wurzeln des ersten Factors $y_{1,2} = -\frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i$, $y_{3,4} = -\frac{q}{p} - 2\frac{r}{p} i$.

Aus dem ersten Factor geht der zweite hervor, wenn man für q $-q$ setzt; also sind die 4 Wurzeln des gleich Null gesetzten zweiten Factors $y_{5,6} = \frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i$, $y_{7,8} = \frac{q}{p} - \frac{2r}{p} i$; also ist

$$[p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2]^2 - 16p^2 q^2 y^2 (1 + y^2) =$$

$$p^4 \left[\left(y + \frac{q}{p} + 2\frac{r}{p} i\right)\left(y + \frac{q}{p} - 2\frac{r}{p} i\right)\left(y - \frac{q}{p} + \frac{2r}{p} i\right)\left(y - \frac{q}{p} - \frac{2r}{p} i\right)\right]^2 =$$

$$[(py + q + 2ri)(py + q - 2ri)(py - q + 2ri)(py - q - 2ri)]^2 : p^4 =$$

$[p^2 y^2 - (q + 2ri)^2]^2\,[p^2 y^2 - (q - 2ri)^2]^2 : p^4$; man setze

$(q + 2ri)^2 = q_0$, $(q - 2ri)^2 = q_1$, so ist der letzte Ausdruck

$\frac{(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}{p^4}$; es wurde $y^2 = u = \frac{b'(1 - \xi^2) - 2b\xi}{4\xi}$ gesetzt. Es ist

$p^2 y^2 - q_0 = \frac{p^2 [b' (1 - \xi^2) - 2b\xi] - 4q_0 \xi}{4\xi}$ kurz $\frac{\xi'}{4\xi}$. Wir setzen $\xi' = o$ und bestimmen die Wurzeln dieser Gleichung.

$p^2 b' \xi^2 + 2\xi (bp^2 + 2q_0) - b' p^2 = o$. Es ist

$-\frac{bp^2 + 2q_0}{p^2 b'} = \frac{-bp^2 - 2q^2 + 8r^2}{p^2 b'} - \frac{4qr}{p^2 b'} i$ und bei leicht ersichtlicher Abkürzung gleich $\rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,})$

$\xi = \rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,}) \pm \sqrt{\rho_{,}^2 (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) + 1}$;

$1 + \rho_{,}^2 \cos 2\beta + i \rho_{,}^2 \sin 2\beta = \rho_{,,}^2 (\cos 2\beta_{,,} + i \sin 2\beta_{,,})$

$\xi = \rho_{,} (\cos \beta_{,} + i \sin \beta_{,}) \pm \rho_{,,} (\cos \beta_{,,} + i \sin \beta_{,,})$

$= \rho_{,} \cos \beta_{,} \pm \rho_{,,} \cos \beta_{,,} + i (\rho_{,} \sin \beta_{,} \pm \rho_{,,} \sin \beta_{,,})$; also bei weiterer Abkürzung

$\xi_1 = m + ni$, $\xi_2 = m' + n'i$,

also ist $\frac{\xi'}{4\xi} = \frac{p^2 b' [\xi - (m + ni)] [\xi - (m' + n'i)]}{4\xi}$.

Wir müssen in ähnlicher Weise $p^2 y^2 - q_1$ auszudrücken suchen. q_1 geht aus q_0 hervor, wenn wir für i $-i$ setzen; also ist auch

$p^2 y^2 - q_{,} = \frac{p^2 b' [\xi - (m - ni)] [\xi - (m' - n'i)]}{4\xi}$; also

$\frac{(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}{p^4} = \frac{p^4 b'^4 [(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2}{4^4 \xi^4}$; also ist

$$S_1 = -\frac{4^{4-3}}{p^4 b'^4} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6)\, d\xi}{[(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2 \ \xi . \xi^3 . \xi^{-4}}$$

$$= \frac{4}{p^4 b'^4} \int_{\xi_1}^{\xi_0} \frac{(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6)\, d\xi}{[(\xi - m)^2 + n^2]^2 [(\xi - m')^2 + n'^2]^2}.$$

Setzen wir unter dem Integralzeichen den Zähler des Bruches gleich $f(\xi)$, den Nenner gleich $F(\xi)$ und $\frac{F(\xi)}{(\xi - m - ni)^2} = \Phi(\xi)$. Es sei

$\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{A_1}{(\xi - m - ni)^2} + \frac{A_2}{(\xi - m - ni)} + \frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}$, wo $\varphi(\xi)$ eine bestimmte Function von ξ ist, deren Wert aber noch nicht bekannt ist; dann ist

$f(\xi) = A_1 \Phi(\xi) + A_2 (\xi - m - ni) \Phi(\xi) + (\xi - m - ni)^2 \varphi(\xi)$

$f'(\xi) = A_1 \Phi'(\xi) + A_2 \Phi'(\xi) (\xi - m - ni) + A_2 \Phi(\xi) + 2\varphi(\xi) (\xi - m - ni) + (\xi - m - ni)^2 \varphi'(\xi)$

für $\xi = m + ni$ wird

$f(m + ni) = A_1 \Phi(m + ni)$.

$f'(m + ni) = A_1 \Phi'(m + ni) + A_2 \Phi(m + ni)$.

Aus $f(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 - b_2 \xi^4 + b_1 \xi^5 - b_0 \xi^6$ ist $f(m + ni)$ zu bestimmen. Es ist

$$\begin{array}{ll}
b_0 & = b_0 \\
b_1(m+ni) & = b_1 m + b_1 \; ni \\
b_2(m+ni)^2 & = b_2 m^2 + 2b_2 m \; ni - b_2 \; n^2 \\
b_3(m+ni)^3 & = b_3 m^3 + 3b_3 m^2 ni - 3\, b_3 m \; n^2 - b_3 \; n^3 i \\
-b_2(m+ni)^4 & = -b_2 m^4 - 4b_2 m^3 ni + 4_2 b_2 m^2 n^2 + 4\, b_2 m \; n^3 i - b_4 \; n^4 \\
b_1(m+ni)^5 & = b_1 m^5 + 5b_1 m^4 ni - 5_2 b_1 m^3 n^2 - 5_2 b_1 m^2 n^3 i + 5\, b_1 m \; n^4 + b_1 \; n^5 i \\
-b_0(m+ni)^6 & = -b_0 m^6 - 6b_0 m^5 ni + 6_2 b_0 m^4 n^2 + 6_3 b_0 m^3 n^3 i - 6_2 b_0 m^2 n^4 - 6b_0 mn^5 i + b_0 n^6 \\
\hline
f(m + ni) & = c_0 + c_1 i
\end{array}$$

wo c_0 die Summe der 1., 3., 5., 7. Reihe, $c_1 i$ die Summe der 2., 4., 6. Reihe bezeichnen soll.

$$\Phi(\xi) = (\xi - m + ni)^2 (\xi - m' - n'i)^2 (\xi - m' + n'i)^2$$

$$\begin{aligned}
\Phi(m + ni) &= -4n^2 [(m - m') + i(n - n')]^2 [(m - m') + i(n + n')]^2 \\
&= -4n^2 [(m - m')^2 - (n^2 - n'^2) + 2in(m - m')]^2 \\
&= -4n^2 \{[(m - n')^2 - (n^2 - n'^2)]^2 - 4n^2(m - m')^2\} - 16n^3 i(m - m')[(m - m')^2 - (n^2 - n'^2)]
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den reellen Teil mit d_0, den imaginären mit $d_1 i$, so ist

$\Phi(m + ni) = d_0 + d_1 i$, also ist $A_1 = \frac{c_0 + c_1 i}{d_0 + d_1 i}$.

Zur Berechnung von A_2 muss man $f'(\xi)$ und $\Phi'(\xi)$ bilden. Es ist $f'(\xi) = b_1 + 2b_2 \xi + 3b_3 \xi^2 - 4b_2 \xi^3 + 5b_0 \xi^4 - 6b_0 \xi^5$. Hieraus findet man nach kurzer Rechnung analog dem früheren $f(m + ni)$

$f'(m + ni) = c_3 + c_4 i$.

$\Phi'(\xi) = 2\{(\xi - m + ni)[(\xi - m')^2 + n'^2]\} \{[(\xi - m')^2 + n^2] + 2(\xi - m + ni)(\xi - m')\}$, oder Reelles vom Imaginären gesondert und für $\xi = m + ni$ gesetzt, gibt kurz $\Phi'(m + ni) = d_3 + d_4 i$; also ist

$c_3 + c_4 i = \frac{c_0 + c_1 i}{d_0 + d_1 i} (d_3 + d_4 i) + A_2 (d_0 + d_1 i)$; also

$$A_2 = \frac{(c_3 + c_4 i)(d_0 + d_1 i) - (c_0 + c_1 i)(d_3 + d_4 i)}{(d_0 + d_1 i)^2} = \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2}, \text{ also ist}$$

$$\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = \frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)(\xi - m - ni)^2} + \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2 (\xi - m - ni)^2} + \frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}.$$

$\frac{\varphi(\xi)}{\Phi(\xi)}$ zerlegen wir weiter in

$$\frac{A_3}{(\xi - m + ni)^2} + \frac{A_4}{(\xi - m + ni)} + \frac{B_1}{(\xi - m' - n'i)^2} + \frac{B_2}{(\xi - m' - n'i)} + \frac{B_3}{(\xi - m' + n'i)^2} + \frac{B_4}{(\xi - m' + n'i)}.$$

A_3, A_4 finden wir aus A_1 und A_2 wenn wir für i $-i$ setzen; die B erhalten wir aus den entsprechenden A, wenn wir alle m und n mit Strichen versehen. Kurz es ist

$$\begin{aligned}\frac{f(\xi)}{F(\xi)} = &\frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)\,(\xi - m - ni)^2} + \frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2\,(\xi - m - ni)} \\ &+ \frac{c_0 - c_1 i}{(d_0 - d_1 i)\,(\xi - m + ni)^2} + \frac{e_0 - e_1 i}{(d_0 - d_1 i)^2\,(\xi - m + ni)} \\ &+ \frac{c_0' + c_1' i}{(d_0' + d_1 i')\,(\xi - m' - n' i)^2} + \frac{e_0' + e_1' i}{(d_0' + d_1' i)^2\,(\xi - m' - n' i)} \\ &+ \frac{c_0' - c_1' i}{(d_0' + d_1' i)\,(\xi - m' + n' i)^2} + \frac{e_0' - e_1' i}{(d_0' - d_1' i)\,(\xi - m' + n' i)}.\end{aligned}$$

Da $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \text{Const.}$, so ist das unbestimmte Integral als dem 1. und 3. Summanden

$$-\frac{c_0 + c_1 i}{(d_0 + d_1 i)(\xi - m - ni)} - \frac{c_0 - c_1 i}{(d_0 - d_1 i)(\xi - m + ni)} = -\frac{(c_0 + c_1 i)(d_0 - d_1 i)(\xi - m + ni) + (c_0 - c_1 i)(d_0 + d_1 i)(\xi - m - ni)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]}$$

$$= -\frac{2(c_0 d_0 + c_1 d_1)\,(\xi - m)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]} - \frac{2n\,(c_0 d_1 - c_1 d_0)}{(d_0^2 + d_1^2)\,[(\xi - m)^2 + n^2]}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$C_1 \frac{\xi - m}{(\xi - m)^2 + n^2} + \frac{C_2}{(\xi - m)^2 + n^2} + \text{Const.}$. Multipliciert man den 2. und 4. Summanden mit $d\xi$ und integriert unbestimmt, so erhält man

$$\frac{e_0 + e_1 i}{(d_0 + d_1 i)^2}\, l\,(\xi - m - ni) + \frac{e_0 - e_1 i}{(d_0 - d_1 i)^2}\, l\,(\xi - m + ni) + \text{Const.}$$

$$= \frac{e_0 + e_1 i}{2(d_0 + d_1 i)^2} \left\{ l\,[(\xi - m)^2 + n^2] - i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} \right\}$$

$$+ \frac{e_0 - e_1 i}{2(d_0 - d_1 i)^2} \left\{ l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} \right\} + \text{Const.}$$

$$= \tfrac{1}{2} l\,[(\xi - m)^2 + n^2]\, \frac{(e_0 + e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 - 2 d_0 d_1 i) + (e_0 - e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 + 2 d_0 d_1 i)}{(d_0^2 + d_1^2)^2}$$

$$- i \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m}\, \frac{(e_0 + e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 - 2 d_0 d_1 i) - (e_0 - e_1 i)\,(d_0^2 - d_1^2 + 2 d_0 d_1 i)}{(d_0^2 + d_1^2)^2}$$

$$= \frac{e_0 (d_0^2 - d_1^2) + 2 e_1 d_0 d_1}{(d_0^2 + d_1^2)^2}\, l[(\xi - m)^2 + n^2] + \frac{[4 e_0 d_0 d_1 - 2 e_1 (d_0^2 - d_1^2)]}{(d_0^2 + d_1^2)^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} + \text{Const.}$$

oder wenn wir die Constanten mit C_3 und C_4 bezeichnen

$$C_3\, l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + C_4 \operatorname{arc\,tg} \frac{n}{\xi - m} + \text{Const.}$$

Das unbestimmte Integral der 4 übrigen Summanden erhält man, indem man für die Constanten die bestrichenen Buchstaben setzt; die vorkommenden Functionen derselben wollen wir analog dem Früheren mit bestrichenen Buchstaben bezeichnen. Es ist also

$$\int \frac{f(\xi)}{F(\xi)}\,d\xi = C_1 \frac{\xi - m}{(\xi - m)^2 + n^2} + C_2 \frac{1}{(\xi - m)^2 + n^2} + C_3\, l\,[(\xi - m)^2 + n^2] + C_4 \operatorname{arctg} \frac{n}{\xi - m}$$

$$+ C_1' \frac{\xi - m'}{(\xi - m')^2 + n^2} + C_2' \frac{1}{(\xi - m')^2 + n'^2} + C_3'\, l\,[(\xi - m')^2 + n'^2] + C_4' \operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi - m'}$$

also ist

$$s_1 = \frac{4}{p^4 b'^4} \Big\{ C_1 \Big[\frac{\xi_0 - m}{(\xi_0 - m)^2 + n^2} - \frac{\xi_1 - m}{(\xi_1 - m)^2 + n^2} \Big] + C_1' \Big[\frac{\xi_0 - m'}{(\xi_0 - m')^2 + n^2} - \frac{\xi_1 - m'}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2} \Big]$$

$$+ C_2 \Big[\frac{1}{(\xi_0 - m)^2 + n^2} - \frac{1}{(\xi_1 - m)^2 + n^2} \Big] + C_2' \Big[\frac{1}{(\xi_0 - m')^2 + n'^2} - \frac{1}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2} \Big]$$

$$+ C_3\, l \frac{(c_0 - m)^2 + n^2}{(c_1 - m)^2 + n^2} + C_3'\, l \frac{(\xi_0 - m')^2 + n'^2}{(\xi_1 - m')^2 + n'^2}$$

$$+ C_4 \Big[\operatorname{arctg} \frac{n}{\xi_0 - m} - \operatorname{arctg} \frac{n}{\xi_1 - m} \Big] + C_4' \Big[\operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi_0 - m'} - \operatorname{arctg} \frac{n'}{\xi_1 - m'} \Big].$$

Es bleibt noch $\int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2)\,dy}{\sqrt{Y}\,[(p^2 y^4 + 2s^2 y^2 + p^2)^2 - 16 p^2 q^2 y^2 (1 + y^2)^2]}$, kurz s_2 genannt, auszurechnen übrig; oder

$$s_2 = \int_y^1 \frac{(a_1 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2)\,dy}{\sqrt{Y}\,(p^2 y^2 - q_0)^2\,(p^2 y^2 - q_1)^2} \quad \text{wo } q_0 = (q + 2ir)^2,\ q_1 = (q - 2ir)^2$$

$Y = \left(y^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)\left(y^2 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}\right)$. Wir setzen wie bei Berechnung von $\int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{Y}}$

$$\frac{\operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4}}{\sqrt{y^2 + \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}} = \eta.$$ Es war für $y \geqq o$ $y = \operatorname{cotg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta}$,

$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)}}$, die untere Grenze η_0, die obere η_1.

Es ist $a_1 y^6 + a_3 y^4 + q_1 y^2 = \frac{a_1 (1 - \eta^2)^3 + a_3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 + a_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^4 (1 - \eta^2)}{\operatorname{tg}^6 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^6}$

$$= \frac{a_1 (1 - 3\eta^2 + 3\eta^4 - \eta^6) + a_3 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4} (\eta^2 - 2\eta^4 + \eta^6) + a_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\pi - \alpha}{4} (\eta^4 - \eta^6)}{\operatorname{tg}^6 \frac{\pi - \alpha}{4} \eta^6}$$ oder

$$= \frac{\eta^6\left(-a_1+a_3 \operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}-a_1 \operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+\eta^4\left(3a_1-2a_3\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}+a_1\operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+\eta^2\left(-3a_1+a_3\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)+a_1}{\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$= \frac{\alpha_0\,\eta^6 + \alpha_1\,\eta^4 + \alpha_2\,\eta^2 + \alpha_3}{\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6}.$$ Für $y^2 = \dfrac{1-\eta^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,y^2}$ wird

$$p^2y^2-q_0 = \frac{p^2(1-\eta^2)-q_0\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\eta^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2} = \frac{p^2-\eta^2\left(p^2+q_0\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2} = \frac{1-\eta^2\left(1+\frac{q_0}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^2}\,p^2,$$

wir setzen den Factor von η^2 kurz g_0 so ist also $p^2\,y^2 - q_0 = \dfrac{p^2\,(1-g_0\,\eta^2)}{\eta^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$;

und wenn wir g_1 so aus q_1 entstehen lassen, wie g_0 aus q_0 entstand, so ist

$p^2\,y^2 - q_1 = \dfrac{p^2\,(1-g_1\,\xi^2)}{\eta^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}$; also ist bei Vertauschung der Grenzen

$$s_2 = +\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{(\alpha_0\,\eta^6+\alpha_1\,\eta^4+\alpha_2\,\eta^2+\alpha_3)\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\,d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\,\eta^2)}\;\dfrac{\operatorname{tg}^6\frac{\pi-\alpha}{4}\,\eta^6\,p^8\,(1-g_0\,\eta^2)^2\,(1-g_1\,\eta^2)^2}{\eta^8\operatorname{tg}^8\frac{\pi-\alpha}{4}}}$$ oder wenn

wir $(1-\eta^2)(1-\lambda^2\,\eta^2) = H$ setzen, so ist

$$s_2 = +\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{\alpha_0\,\eta^8+\alpha_1\,\eta^6+\alpha_2\,\eta^4+\alpha_3\,\eta^2}{\sqrt{H}\,(1-g_0\,\eta^2)^2\,(1-g_1\,\eta^2)^2}\,d\eta.$$

Es ist $(1-g_0\,\eta^2)(1-g_1\,\eta^2) = g_0\,g_1\,\eta^4-(g_0+g_1)\,\eta^2+1$; hier müssen die Coefficienten von η reell sein. Es war

$g_0 = 1+\dfrac{q_0}{p^2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}$; $q_0 = (q+2ir)^2$, $g_1 = 1+\dfrac{q_1}{p^2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi-\alpha}{4}$; $q_1 = (q-2ir)^2$

$$g_0\cdot g_1 = 1+\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2}(q_0+q_1)+\frac{\operatorname{tg}^4\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^4}\,q_0\,q_1;\quad q_0+q_1 = 2\,(q^2-4r^2)$$

$q_0\cdot q_1 = (q^2+4r^2)^2 = [(1-r)^2+4r]^2 = p^4.$

$$g_0 + g_1 = 2 + 2\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^2}(q^2 - 4r^2);$$ also ist $g_0 \cdot g_1$ und $g_0 + g_1$ tatsächlich reell.

Es ist $[(1-g_0\eta^2)(1-g_1\eta^2)]^2 = (g_0 g_1)^2\eta^8 - 2g_0 g_1(g_0+g_1)\eta^6 + [(g_0+g_1)^2 + 2g_0 g_1]\eta^4 + 2(g_0+g_1)\eta^2 + 1$ oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung gleich $\beta_0\eta^8 + \beta_1\eta^6 + \beta_2\eta^4 + \beta_3\eta^2 + 1$.

Es ist jetzt $\frac{\alpha_0\eta^8 + \alpha_1\eta^6 + \alpha_2\eta^4 + \alpha_3\eta^2}{\beta_0\eta^8 + \beta_1\eta^6 + \beta_2\eta^4 + \beta_3\eta^2 + 1} =$

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0\beta_1}{\beta_0}\right)\eta^6 + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_2\right)\eta^4 + \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_3\right)\eta^2 + \frac{\alpha_0}{\beta_0}}{(1 - g_0\eta^2)^2(1 - g_1\eta^2)^2}$$ oder abgekürzt

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0}{(1 - g_0\eta^2)^2(1 - g_1\eta^2)^2};$$ also ist

$$S_2 = +\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\gamma_0\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{(\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0)\,d\eta}{\sqrt{H}\,[(1 - g_0\eta^2)^2(1 - g_1\eta^2)^2]}.$$

Das Integral des ersten Summanden haben wir Seite 20 berechnet. Den zweiten Summanden setzen wir gleich $-\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}S_3$. Wir bezeichnen für den Augenblick

$\frac{\gamma_3\eta^6 + \gamma_2\eta^4 + \gamma_1\eta^2 + \gamma_0}{(1 - \gamma_0\eta^2)^2(1 - \gamma_1\eta^2)^2}$ mit $\frac{F(\eta^2)}{f(\eta^2)}$ und erhalten für $\eta^2 = \zeta$

$$\frac{f(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{\gamma_3\zeta^3 + \gamma_2\zeta^2 + \gamma_1\zeta + \gamma_0}{(1 - g_0\zeta)^2(1 - g_1\zeta)^2}$$

$$= \frac{\delta_1}{(1 - g_0\zeta)^2} + \frac{\delta_2}{(1 - g_0\zeta)} + \frac{\delta_3}{(1 - g_1\zeta)^2} + \frac{\delta_4}{(1 - g_1\zeta)};$$ so ist

$$f(\zeta) = \delta_1(1 - g_1\zeta)^2 + \delta_2(1 - g_0\zeta)(1 - g_1\zeta)^2 + [\delta_3 + \delta_4(1 - g_1\zeta)](1 - g_0\zeta)^2,$$ also

$$f\left(\frac{1}{g_0}\right) = \delta_1\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right)^2$$ und

$$f'\left(\frac{1}{g_0}\right) = -2\delta_1 g_1\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right) - \delta_2 g_0\left(1 - \frac{g_1}{g_0}\right)^2;$$ also

$$\delta_1 = \frac{g_0^2 f\left(\frac{1}{g_0}\right)}{(g_0 - g_1)^2};\quad \delta_2 = \frac{-2\delta_1(g_0 - g_1)g_1 - f'\left(\frac{1}{g_0}\right)g_0}{(g_0 - g_1)^2}.$$ Es war

$$g_0 = 1 + \frac{(q + 2ir)^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2} = 1 + \frac{q^2 - 4r^2}{p^2}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4} + i\,\frac{2qr}{p^2}$$ kurz gleich $m + ni$, ebenso

$$g_1 = 1 + \frac{(q - 2ir)^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^2} = m - ni.$$ Es ist

$$f\left(\frac{1}{g_0}\right) = \frac{\gamma_3 + \gamma_2\,(m + ni) + \gamma_1\,(m + ni)^2 + \gamma_0\,(m + ni)^3}{(m + ni)^3}$$
$$= \frac{\gamma_3 + \gamma_2\,m + \gamma_1\,(m^2 - n^2) + \gamma_0\,(m^3 - 3mn^2) + i\,(\gamma_2\,n + 2\gamma_1\,mn + 3\gamma_0\,m^2 n - \gamma_0\,n^3)}{(m + ni)^3}$$

kurz gleich $\frac{m_, + n_, i}{(m + ni)^3}$; also $\delta_1 = -\frac{m_, + n_, i}{(m + ni)\,4n^2}$ oder kürzer $\frac{\mu + \nu i}{m + ni}$. Ferner

$$\delta_2 = \frac{+\,i\,4\,(\mu + \nu i)\,(m - ni)\,n + f'\left(\frac{1}{g_0}\right)(m + ni)^2}{4\,(m + ni)\,n^2}; \text{ es war}$$

$f'(\zeta) = \gamma_3\,\zeta^3 + \gamma_2\,\zeta^2 + \gamma_1\,\zeta + \gamma_0$ also

$$(m + ni)^2 f'\left(\frac{1}{m + ni}\right) = 3\gamma_0 + 2\gamma_2\,(m + ni) + \gamma_1\,(m + ni)^2$$
$$= 3\gamma_3 + 2\gamma_2\,m + \gamma_1\,(m^2 - n^2) + 2i\,(\gamma_2\,n + \gamma_1\,mn)$$

kurz gleich $m_2 + i\,n_2$ also

$$\delta_2 = \frac{+\,i\,4\,(\mu + \nu i)\,(m - ni)\,n + (m_2 + i\,n_2)}{4\,(m + ni)\,n^2}$$

oder bei leicht ersichtlicher Abkürzung

$$\delta_2 = \frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni}.$$

Aus δ_1 geht δ_3, aus δ_2 geht δ_4 hervor, indem man für g_0 g_1, d. h. für i $-i$ setzt. Man erhält

$\delta_3 = \frac{\mu - \nu i}{m - ni}$ und $\delta_4 = \frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni}$. Demnach sind in

$\frac{f(\zeta)}{F(\zeta)} = \frac{\delta_1}{(1 - g_0\,\zeta)^2} + \frac{\delta_2}{1 - g_0\,\zeta} + \frac{\delta_3}{(1 - g_1\,\zeta)^2} + \frac{\delta_4}{1 - g_1\,\zeta}$ die Constanten δ als reelle Grössen bestimmt. Wir erhalten jetzt

$$S_2 = \int_{\eta_1}^{\eta_0} \left\{ \frac{\delta_1}{(1 - g_0\,\eta^2)^2} + \frac{\delta_2}{1 - g_0\,\eta^2} + \frac{\delta_3}{(1 - g_1\,\eta^2)^2} + \frac{\delta_4}{1 - g_1\,\eta^2} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{H}}$$

und betrachten zuerst $\int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{\delta_1}{(1 - g_0\,\eta^2)}\,\frac{d\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)\,(1 - \lambda^2\,\eta^2)}}$, worin η_1 und η_0 zwischen o und 1 incl. der Grenzen lagen, und $g_0 = m + ni\,\lambda^2 < 1$.

Wir setzen $t = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{[1 - (m + ni\,\eta^2)]\,\sqrt{(1 - \eta^2)\,(1 - \lambda^2\,\eta^2)}}$; es sei $\eta = \sin\,\chi$

so ist $t = \int\limits_0^{\chi} \frac{d\chi}{[1-(m+ni)\sin^2\chi]\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\chi}}$; wir bezeichnen $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\chi} = \Delta(\chi)$;

es ist $\frac{1}{1-(m+ni)\sin^2\chi} = \frac{1-(m+ni)\sin^2\chi + (m+ni)\sin^2\chi}{1-(m+ni)\sin^2\chi}$, also

$$t = \int\limits_0^{\chi} \frac{d\chi}{\Delta(\chi)} + \int\limits_0^{\chi} \frac{(m+ni)\sin^2\chi\, d\chi}{[1-(m+ni)\sin^2\chi]\,\Delta(\chi)}.$$

Wir setzen $(m+ni) = \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am}(\alpha+\beta i)$, mod. λ; wir lassen den Modulus wider unbezeichnet, also $\sin\operatorname{am}(\alpha+\beta i) = \frac{\sqrt{m+ni}}{\lambda}$.

Die rechte Seite ist eine complexe Grösse, also sind α und β zu bestimmen möglich; denn wie Richelot zuerst gezeigt hat, lässt sich jede complexe Grösse auf die Form $\sin\operatorname{am}(\alpha+\beta i)$ bringen. Es ist (Jac. fund. 18)

$$\sin\operatorname{am}(a \pm b) = \frac{\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}b\,\Delta\operatorname{am}b \pm \sin\operatorname{am}b\cos\operatorname{am}a\,\Delta\operatorname{am}a}{1-\lambda^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}b},$$

setzt man $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha - \beta i$, so gibt das obere Zeichen $\sin\operatorname{am}2\alpha$, das untere $\sin\operatorname{am}2\beta i$ ausgedrückt durch $\sin\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i)$, $\cos\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i)$, $\Delta\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i)$.

Es war gegeben $\sin\operatorname{am}(\alpha+\beta i) = \frac{\sqrt{m+ni}}{\lambda}$, demnach

$$\sin\operatorname{am}(\alpha-\beta i) = \frac{\sqrt{m-ni}}{\lambda}, \text{ also}$$

$$\cos\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i) = \frac{\sqrt{\lambda^2-m \mp ni}}{\lambda},$$

$$\Delta\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i) = \sqrt{1-m\mp ni}.$$ Wir setzen für den Augenblick $m \pm ni = \rho_{,}^2(\cos 2\vartheta_{,} \pm i\sin 2\vartheta_{,})$, wo

$\rho_{,}^4 = m^2+n^2$, $\operatorname{tg} 2\vartheta_{,} = \frac{n}{m}$ ist; also ist

$\sqrt{m\pm ni} = \rho_1(\cos\vartheta_1 \pm i\sin\vartheta_1) = \lambda\sin\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i) = \rho_1 e^{\pm\vartheta_1 i}$.

Auf eben so einfache Weise findet man ρ_2, ρ_3, ϑ_2, ϑ_3 in

$\sqrt{\lambda^2-m\mp ni} = \rho_2(\cos\vartheta_2 \pm i\sin\vartheta_2) = \lambda\cos\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i) = \rho_2 e^{\pm\vartheta_2 i}$

$\sqrt{1-m\mp ni} = \rho_3(\cos\vartheta_3 \pm i\sin\vartheta_3) = \Delta\operatorname{am}(\alpha\pm\beta i) = \rho_3 e^{\pm\vartheta_3 i}$. Demnach ist

$$\left.\begin{matrix}\sin 2\alpha \\ \sin 2\beta i\end{matrix}\right\} = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3 \cdot e^{(\vartheta_1-\vartheta_2-\vartheta_3)i} - \rho_1\rho_2\rho_3\, e^{(-\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3)i}}{\lambda^2\left[1-\frac{\rho_{,}^2\rho_{,}^2}{\lambda^2}e^{2(\vartheta_{,}-\vartheta_{,})i}\right]}, \text{ also}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\rho_1\rho_2\rho_3\cos(\vartheta_1-\vartheta_2-\vartheta_3)}{\lambda^2-\rho_{,}^4};\ \sin\operatorname{am}2\beta i = i\,\frac{2\rho_1\rho_2\rho_3\sin(\vartheta_1-\vartheta_2-\vartheta_3)}{\lambda^2-\rho_{,}^4}.$$

Da $\sin \operatorname{am} 2\beta i = i \operatorname{tg} \operatorname{am} (2\beta, \lambda')$ wo $\lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$ so ist

$$\operatorname{tg} \operatorname{am} (2\beta, \lambda') = \frac{2\rho_1 \, \rho_2 \, \rho_3 \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3)}{\lambda^2 - \rho_1^4}.$$

Es lassen sich bekanntlich die Bestimmungsformeln für α und β noch etwas vereinfachen, aber für unseren Zweck genügen die gegebenen Formeln. Also

$$t = \int_0^\chi \frac{d\chi}{\Delta(\chi)} + \int_0^\chi \frac{\lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \sin^2 \chi \, d\chi}{[1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \sin^2 \chi] \, \Delta (\chi)}.$$

Den ersten Summanden setzen wir gleich v, demnach $\chi = \operatorname{am} v$; $d\chi = \Delta \operatorname{am} v \, dv$; also

$$t = v + \frac{\operatorname{tang} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} \int_0^v \frac{\lambda^2 \sin \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \cos \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \, \Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \sin \operatorname{am} v \, dv}{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \sin^2 \operatorname{am} v}$$

$$= v + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} \Pi (\operatorname{am} v, \operatorname{am} (\alpha + \beta i), \lambda) \text{ kürzer}$$

$$= v + \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} \Pi (v, \alpha + \beta i).$$

Wir versuchen in t das Reelle vom Imaginären zu sondern. Bekanntlich ist für jedes u und v (Fund. 18), wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{am} u = a$, $\operatorname{am} v = b$ setzen,

$$\sin (u + v) = \frac{\sin a \cos b \, \Delta (b) + \sin b \cos a \, \Delta (a)}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\cos (u + v) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \, \Delta (a) \, \Delta (b)}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b}$$

$$\Delta (u + v) = \frac{\Delta (a) \, \Delta (b) - \lambda^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - \lambda^2 \sin^2 a \sin^2 b}; \text{ setzt man}$$

$u = \alpha$, $v = \beta i$ und berücksichtigt man, dass (Fund. 19)

$$\sin \operatorname{am} (\beta i) = \frac{i \sin \operatorname{am} (\beta, \lambda')}{\cos \operatorname{am} (\beta, \lambda')}$$

$$\cos \operatorname{am} (\beta i) = \frac{1}{\cos \operatorname{am} (\beta, \lambda')}$$

$$\Delta \operatorname{am} (\beta i) = \frac{\Delta \operatorname{am} (\beta, \lambda')}{\cos \operatorname{am} (\beta, \lambda')} \text{ so ist}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} = \frac{\sin \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\cos \operatorname{am} (\alpha + \beta i) \, \Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} =$$

$$\frac{\sin \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} (\beta, \lambda') + i \sin \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} \alpha}{\cos \operatorname{am} \alpha \cos \operatorname{am} (\beta, \lambda') - i \sin \alpha \sin \operatorname{am} (\beta, \lambda') \, \Delta \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} (\beta, \lambda')} \times$$

$$\frac{\cos^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda')}{\Delta \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} (\beta, \lambda') - i \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} \alpha}$$

In diesem Ausdruck lässt sich leicht das Reelle vom Imaginären trennen, wir nennen das Reelle A_0, das Imaginäre $A_1 i$; also ist

$\frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} (\alpha + \beta i)}{\Delta \operatorname{am} (\alpha + \beta i)} = A_0 + A_1 i$. Demnach

$t = v + (A_0 + A_1 i) \, \Pi (v, \alpha + \beta i)$; setzt man in diesem Ausdruck für $i - i$, so erhält man

$$\int_0^{\eta} \frac{d\eta}{[1 - (m - ni) \eta^2] \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \lambda^2 \eta^2)}} = v + (A_0 - A_1 i) \, \Pi (v, \alpha - \beta i).$$

Es seien die zu η_1 und η_0 gehörigen Werte von v v_1 und v_0; alsdann ist

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \left(\frac{\delta_2}{1 - g_0 \eta^2} + \frac{\delta_1}{(1 - g_1 \eta^2)} \right) \frac{d\eta}{\sqrt{H}} =$$

$$\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} \{ v_0 - v_1 + (A_0 + A_1 i) [\Pi (v_0, \alpha + \beta i) - \Pi (v_1, \alpha + \beta i)] \} +$$

$\frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni} \{ v_0 - v_1 + (A_0 - A_1 i) [\Pi (v_0, \alpha - \beta i) - \Pi (v_1, \alpha - \beta i)] \}$. Es ist $\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} + \frac{\mu_0 - \nu_0 i}{m - ni} =$

$\frac{(\mu_0 + \nu_0 i)(m - ni) + (\mu_0 - \nu_0 i)(m + ni)}{m^2 + n^2} = 2 \frac{\mu_0 m + \nu_0 n}{m^2 + n^2}$. In $\frac{\mu_0 + \nu_0 i}{m + ni} (A_0 + A_1 i)$ nennen wir das Reelle A_2, das Imaginäre $A_3 i$. Alsdann ist obiges Integral gleich

$$2 \frac{\mu_0 m + \nu_0 n}{m^2 + n^2} (v_0 - v_1) + A_2 [\Pi (v_0, \alpha + \beta i) + \Pi (v_0, \alpha - \beta i) - \Pi (v_1, \alpha + \beta i) - \Pi (v_1, \alpha - \beta i)]$$
$$+ i A_3 [\Pi (v_0, \alpha + \beta i) - \Pi (v_0, \alpha - \beta i) - \Pi (v_0, \alpha + \beta i) + \Pi (v_0, \alpha - \beta i)].$$

Es wird mit Berücksichtigung von Jac. fund. § 55, 7; § 55, 1; § 18, 4 der Factor von A_2 gleich

$$2 \Pi (v_0 - v_1, \alpha) + (v_0 - v_1) \, 2 \frac{\lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \cos \operatorname{am} \alpha \, \Delta \operatorname{am} \alpha}{1 + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda')}$$
$$+ \tfrac{1}{2} l \frac{1 + \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_0 - v_1 - \alpha)}{1 - \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} (v_0 - v_1 + \alpha)} \times$$
$$\frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_0 - \alpha)}{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_0 + \alpha)} \times \frac{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_1 + \alpha)}{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} (\beta, \lambda') \sin^2 \operatorname{am} (v_1 - \alpha)},$$ also

eine vollkommene reelle, ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Den Factor von A_3 nennen wir $i B_3$. Nach fund. 55, 8 ist dann

$$i B_3 = 2i [\Pi (v_0, \beta i) - \Pi (v_1, \beta i)] + (v_0 - v_1) \lambda^2 \sin \operatorname{am} \alpha \cdot \operatorname{tg} \operatorname{am} (\beta, \lambda')$$
$$\{ \sin \operatorname{am} (\alpha + \beta i) + \sin \operatorname{am} (\alpha - \beta i) \} + \frac{i}{2} l \frac{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_0 - \beta i)}{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_0 + \beta i)}$$
$$+ \frac{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_1 + \beta i)}{1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am} (v_1 - \beta i)}.$$

Der erste Summand ist unter Berücksichtigung der eben dagewesenen Formeln

$$2i\,\Pi\,(v_0 - v_1, \beta i) + i\,l\,\frac{1 + i\,\lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1 - \beta i)}{1 - i\,\lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1 + \beta i)}.$$

Es ist $\sin(u \mp \beta i) = \dfrac{\sin \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda') \mp i \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')}$.

Der Logarithmus hat also die Form $i\,l\,\dfrac{x + yi}{x - yi}$. Es ist

$$l\,\frac{x + yi}{x - yi} = [l\,(x + yi) - l\,(x - yi)] = \frac{1}{2}\,[l\,(x^2 + y^2) - l\,(x^2 + y^2)] +$$
$$i\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{y}{x}\right)\right]\Big\} = + 2i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}; \text{ also}$$
$$i\,l\,\frac{x + yi}{x - yi} = - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}; \text{ also ist der Logarithmus gleich}$$

$$-2\operatorname{arctg} \frac{\lambda \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am}(v_0 - v_1)\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta,\lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am}(v_0 - v_1) \sin^2 \operatorname{am}(\beta,\lambda') + \lambda^2 \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta,\lambda') \sin \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am}(v_0 - v_1)}$$
$$\times\, \Delta \operatorname{am}(v_0 - v_1) \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda');$$ also eine reelle Grösse.

Das Integral dritter Gattung haben wir schon Ende des 2. Falles dieses Abschnittes behandelt. Wir erhalten, wenn wir jetzt für den Modulus $\varkappa$ λ, für $\varkappa'$ also λ' für K und K' also Λ und Λ' setzen

$$2i\Pi\,(v_0 - v_1, \beta i) = 2\,(v_0 - v_1)\left\{- \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \frac{\pi\beta}{2\Lambda\Lambda'} +\right.$$
$$\left. Z\,(\beta, \lambda') + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi\beta}{\Lambda}} - e^{-\frac{n\pi\beta}{\Lambda}}\right) \sin \frac{n\pi\,(v_0 - v_1)}{\Lambda}\right\}.$$

Der erste Summand von iB_3 ist also eine reelle ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Der zweite Summand ist sofort mit Hülfe von Jac. fund. § 18, 1 auf eine reelle übersichtliche Form zu bringen; er ist

$$\frac{2\,(v_0 - v_1)\, \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \operatorname{tg} \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')}.$$

Den noch vorkommenden Logarithmus können wir in der eben gezeigten Weise auf einen reellen arc tg bringen. Es ist

$$\sin^2 \operatorname{am}(u \mp \beta i) = \frac{\sin^2 \operatorname{am} u\, [\Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2 - \cos^2 \operatorname{am} u\, [\Delta \operatorname{am} u]^2 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \mp 2i \sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{[\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2},$$

also ist der letzte Summand

$$-\operatorname{arctg} \frac{2\lambda \sin \operatorname{am} \alpha \sin \operatorname{am} v_0 \cos \operatorname{am} v_0\, \Delta \operatorname{am} v_0 \sin \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos \operatorname{am}(\beta, \lambda')\, \Delta \operatorname{am}(\beta, \lambda')}{[\cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') + \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} v_0 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')]^2 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha \,\{\sin^2 \operatorname{am} v_0 [1 - \lambda'^2 \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')] - \cos^2 \operatorname{am} v_0\, [1 - \lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} v_0] \sin^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda') \cos^2 \operatorname{am}(\beta, \lambda')\}}$$

plus arc tg eines Ausdrucks, in dem nur für v_0 v_1 steht.

Es ist also auch iB_3 eine reelle ohne Schwierigkeit zu berechnende Grösse.

Wir haben auf diese Weise

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\left(\frac{\delta_2}{1-g_0\eta^2}+\frac{\delta_4}{1-g_1\eta^2}\right)\frac{d\eta}{\sqrt{H}}$$ in gebrauchsfertiger Form gegeben.

Es erübrigt noch $\int_{\eta_1}^{\eta_0}\left\{\frac{\delta_1}{[1-g_0\eta^2]^2}+\frac{\delta_3}{[1-g_1\eta^2]^2}\right\}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}$ kurz s_4 zu behandeln.

Auf Seite 10 haben wir gefunden, wenn wir die Bezeichnungsweise zugleich für den augenblicklichen Zweck umformen

$$\frac{\eta\sqrt{H}}{1-g_0\eta^2}=b_0\int\frac{d\eta}{(1-g_0\eta^2)^2\sqrt{H}}+b_1\int\frac{d\eta}{(1-g_0\eta^2)\sqrt{H}}+b_3\int\frac{1-g_0\eta^2}{\sqrt{H}}d\eta$$

wo jetzt $b_0=2\left(1-\frac{1-\lambda^2}{g_0}+\frac{\lambda^2}{g_0^2}\right)$, $b_1=-\left[1-\frac{2(1-\lambda^2)}{g_0}-\frac{3\lambda^2}{g_0^2}\right]$, $b_3=\frac{\lambda^2}{g_0^2}$ complexe Grosse sind. Wir setzen

$b_0=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2 i}$, $\frac{b_1}{b_0}=\varepsilon_3+\varepsilon_4 i$, $\frac{b_3}{b_0}=\varepsilon_5+\varepsilon_6 i$, so erhalten wir

$$s_4=(\varepsilon_1+\varepsilon_2 i)\left[\frac{\eta\sqrt{H}}{1-g_0\eta^2}\right]_{\eta_1}^{\eta_0}-(\varepsilon_3+\varepsilon_4 i)\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{(1-g_0\eta^2)\sqrt{H}}-(\varepsilon_5+\varepsilon_6 i)\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{1-g_0\eta^2}{\sqrt{H}}d\eta$$

plus den conjugiert complexen Gliedern. Alle hier vorkommende Integrale haben wir schon behandelt und gefunden, dass je 2 entsprechende derselben zusammen einen reellen durch elliptische Functionen ausdrückbaren Wert geben. Die Aufstellung des etwas langen Resultates wollen wir des Raumes wegen unterlassen.

Für den Fall, dass die Länge eines Bogens bis zum Punkte x, y gefunden werden soll, für dessen x, $r\sqrt{c^2-x^2}\geqq x$, ist im 3. Falle die allgemeine Auflösung, wenn wir der Kürze wegen die Abkürzungen beibehalten und die Seitenzahl, auf der sich die Ausrechnung befindet, in Klammern dahintersetzen,

$$s=\frac{B}{p^2}\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}\,(19)+s_1\,(26)+\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}\int_{\eta_1}^{\eta_0}\frac{d\eta}{\sqrt{H}}+\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}}{p^8}s_3\,(29\text{ u. f.})\right\}$$

Für den Fall, dass $-1\leqq\frac{r\sqrt{c^2-x^2}-x}{r\sqrt{c^2-x^2}-x}<o$ haben wir nur noch s_2 weiter zu berechnen. Formen wir

$$s_2=\int_y^1\frac{a_1y^6+a_3y^4+a_1y^2}{\sqrt{Y}(p^2y^2-q_0)^2(p^2y^2-q_1)^2}dy$$ wie $\int_y^1\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (Seite 19) um, so ist

$$s_2 = \int_y^0 \frac{a_0 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2}{\sqrt{Y}\,(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}\, dy + \int_0^1 \frac{a_0 y^6 + a_3 y^4 + a_1 y^2}{\sqrt{Y}\,(p^2 y^2 - q_0)^2 (p^2 y^2 - q_1)^2}\, dy =$$

$$\frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[\int_{\eta_0}^{1} \frac{\alpha_0 \eta^8 + \alpha_1 \eta^6 + \alpha_2 \eta^4 + \alpha_3 \eta^2}{\sqrt{H}\,(1 - g_0 \eta^2)^2 (1 - g_1 \eta^2)^2}\, d\eta - \int_1^{\eta_1} \frac{\alpha_0 \eta^8 + \alpha_1 \eta^6 + \alpha_2 \eta^4 + \alpha_3 \eta^2}{\sqrt{H}\,(1 - g_0 \eta^2)^2 (1 - g_1 \eta^2)^2}\, d\eta \right.$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[\int_{\eta_0}^{0} + \int_0^1 - \int_1^0 - \int_0^{\eta_1} \right] = \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[2\int_0^1 - \int_0^{\eta_0} - \int_0^{\eta_1} \right]$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{\pi - \alpha}{4}}{p^8} \left[2\gamma_0 \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \gamma_0 \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} - \gamma_0 \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + 2\int_0^1 \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta - \int_0^{\eta_0} \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta - \int_0^{\eta_1} \frac{\varphi(\eta^2)}{\sqrt{H}\,\chi(\eta^2)}\, d\eta \right].$$

Die ersten 3 Integrale sind Seite 19, die Form der letzten 3 auf Seite 28 u. f. behandelt.

Somit ist in diesem Falle

$$s = \frac{B}{p^2} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{4} \left[\int_{\eta_0}^{1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} + \int_{\eta_1}^{1} \frac{d\eta}{\sqrt{H}} \right] + s_1\,(26) + s_2\,(34). \right\}$$

Wir haben somit die Länge des Bogens für alle Fälle angegeben.