Der

Rechenunterricht der Mittelstufe,

ein Beitrag

zur Umgestaltung des Rechenunterrichts überhaupt.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit Systemzahlen.

Vorwort.

Die Frage nach einer zweckmässigen unterrichtlichen Behandlung der Decimalzahlen führt zu einer nicht unwesentlichen Umgestaltung des Rechenunterrichts überhaupt.*)

Die vorliegende Arbeit**) will einen Beitrag zu solcher Umgestaltung liefern, indem sie es versucht, eine einheitliche Auffassung der dekadischen und Decimalzahlen zu vermitteln, das Rechnen mit diesen Systemzahlen und den ausserhalb des Systems liegenden Teilzahlen sowie mit absoluten und relativen Zahlen überall aus demselben Gesetz abzuleiten und dadurch eine organische Verbindung der einzelnen Stufen des Rechenunterrichts herzustellen, bei welcher die Erweiterung des Lehrplanes um die „Decimalbruchrechnung“, nicht die Gefahr einer Zersplitterung der Lehr- und Lernkraft, wohl aber die Veranlassung zu tieferer Durchdringung und gründlicherer Verarbeitung des Unterrichtsstoffes in sich birgt.

Dem hier in Aussicht genommenen Rechenunterricht liegt folgender Lehrplan zu Grunde:

Der propädeutische Unterricht der Unterstufe erzielt Sicherheit im Zählen mit Grössen- und Zahleneinheiten, im Addiren und Subtrahiren, in geringerem Grade

---

*) Sehr gründliche Arbeiten auf diesem Gebiet haben mir vorgelegen 1, von Mauritius, decimales Rechnen und metrisches Messen; 2. von Kuckuck, das Rechnen mit decimalen Zahlen mit besonderer Berücksichtigung des abgekürzten Rechnens; 3. von Harms, das abgekürzte Rechnen und das Rechnen mit abgekürzten Zahlen.

**) Auf dem dieser Arbeit hier zugemessenen Raum kann nur ein verhältnismässig kleiner Teil derselben zum Abdruck kommen; der vollständige Lehrgang wird demnächst besonders im Druck erscheinen.

im Multipliciren und Dividiren mit Systemzahlen innerhalb des Zahlenkreises von 1 Tausendtel bis 1 Tausender und im Einmaleins. Kein schriftliches Rechnen. 2 tes und 3 tes Schuljahr.*)

Die Mittelstufe behandelt 4 Hauptabschnitte.

I. Das nicht abgekürzte Rechnen mit Systemzahlen. II. Das abgekürzte Rechnen mit Systemzahlen. III. Das Rechnen mit Teilzahlen mit Einschluss der Teilbarkeit der Zahlen. IV. Das Rechnen mit algebraischen Zahlen. Viertes und fünftes Schuljahr.**)	auf jeder Stufe angewandte Aufgaben aus der einfachen Schlussrechnung, Flächen- und Körperrechnung; desgleichen sogenannte algebraische Aufgaben.

Diese Mittelstufe zerfällt in zwei concentrische Curse:

1 ter Cursus: Aufbau des Zahlensystems, etwa innerhalb des Zahlenkreises von 1 Milliontel bis 1 Million; das Ziffernsystem; das Umformen concreter und abstracter Zahlen; die Grundrechnungsarten mit Systemzahlen; Linien-, Geld-, Gewichtseinheiten und Hohlmasse; Zählen, Addiren und Subtrahiren mit algebraischen Zahlen.

2 ter Cursus: An die Wiederholung und Erweiterung des ersten Cursus schliesst sich die Darstellung der Systemeinheiten als Potenzen von 10, das Multipliciren und Dividiren mit algebraischen Zahlen und das abgekürzte Rechnen mit Systemzahlen; Flächen- und Raumeinheiten; das Rechnen mit Teilzahlen mit Einschluss der Teilbarkeit der Zahlen.

Die Oberstufe wiederholt das Rechnen mit Teilzahlen und das abgekürzte Rechnen mit Systemzahlen; dann folgen schwierigere Schluss-, Flächen-, Körperrechnungen und Gleichungen des ersten Grades mit bestimmten Zahlen.

Hier teilt sich der für alle Schulen ohne Unterschied geltende Unterrichtsweg. Die Volksschulen nehmen noch das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln hinzu und gehen dann zu den verschiedenen Arten von bürgerlichen Rechnungen und schwierigern algebraischen Aufgaben.

Die Mittel- und höhern Schulen incl. Tertia absolviren das Rechnen mit allgemeinen Zahlen (Buchstabenrechnung), die Gleichungen des ersten Grades mit bestimmten und allgemeinen algebraischen Zahlen, die Proportionen, die allgemeinen Gesetze der Potenzirung und Radicirung, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln; daneben die bürgerlichen Rechnungsarten.

*) Der Rechenunterricht beginnt erst mit dem 2 ten Schuljahr.

**) Vorläufig wird es geraten sein, das Pensum der Mittelstufe auf 2½ bis 3 Jahre auszudehnen.

Auf die Behandlung der Systemeinheiten als Potenzen und das Rechnen mit algebraischen Zahlen darf auch die Volksschule nicht verzichten. Die Einsicht in das Wesen dieser Begriffe fördert in erheblichem Grade die Gewandtheit, grosse Zahlen auf kleine zurückzuführen; sie lässt sich für einen grossen Teil von Rechenaufgaben verwerten, die ungleich geistbildender sind als das Heer von Preis-, Zins- und andern Rechnungen, mit welchen die Schüler der Oberstufe gelangweilt werden; aus ihr reift ganz naturgemäss die Lernfähigkeit für den arithmetischen Unterricht, der jetzt immer häufiger auch an solche Schüler herantritt, welche aus der Volksschule in Lebenskreise übergehen, die ihnen den Besuch von Fortbildungsschulen zur Pflicht machen.

Vorbegriffe.

1.

Messen und Zählen — Grösse und Grösseneinheit — discrete und continuirliche Grössen — Zahl — abstracte und concrete Zahlen — natürliche Zahlenreihe.

Wenn festgestellt werden soll, welche von zwei Strassen die längere ist, so wird jede derselben gemessen, d. h. es wird untersucht, wie viel mal eine Linie von bestimmter Länge, etwa 1 Meter, auf die Linie, welche gleich der Strassenlänge ist, aufgetragen werden kann. Wenn man wissen will, welche von zwei Gesellschaften die grössere Personenmenge enthält, so zählt man beide, d. h. man untersucht, wie viel mal eine Person in jeder Gesellschaft da ist. Die Strassenlängen und die Gesellschaften von Personen sind in diesem Fall Grössen, ein Meter und eine Person die Einheiten dieser Grössen, die sogenannten Grösseneinheiten. Durch Messen oder Zählen zweier Grössen wird das Mehr oder Weniger festgestellt, welches die eine Grösse der andern gegenüber ist. Ein Ding wird Grösse genannt mit Rücksicht auf die Eigenschaft, dass es einem andern Dinge gegenüber ein Mehr oder Weniger ist. Alle übrigen Eigenschaften des Dinges, wie Farbe, Gestalt u. s. w. kommen in dem Begriff der Grösse nicht in Betracht. Eine Grösseneinheit ist ein Ding, insofern mit ihm gemessen oder gezählt wird.

Es giebt Grössen, deren Einheiten, durch ihre Natur bestimmt, getrennt neben einander bestehen wie die Gesellschaft von Personen, eine Reihe von Bäumen u. s. w.; ausserdem giebt es Grössen, die ohne Unterbrechung zusammenhängen wie Räume, Zeiten, Linien, Flächen u. s. w., so dass ihre Einheit beliebig gross gewählt werden kann. Jene heissen gesonderte oder discrete, diese stetige oder continuirliche Grössen. Continuirliche Grössen werden gemessen, discrete Grössen werden gezählt, wenn man eine bestimmte Vorstellung von ihrer Ausdehnung oder ihrer Menge haben will. Denn durch das Messen oder Zählen kommt man zu einer Zahl, d. h. zu einer Vorstellung davon, wie viel mal die Einheit in der Grösse vorhanden ist. Dieser Vorstellung wird eine sprachliche Darstellungsform gegeben, in welcher erstens die Menge der Einheiten in ein Wort zusammengefasst, zweitens die Einheit genannt wird, mit der gemessen oder gezählt worden ist, wie z. B. fünfzig Meter, dreissig Personen. Solche Darstellung der Grösse giebt die Menge der Einheiten so bestimmt an, dass ein Schwanken in der Vorstellung unmöglich ist, und unterscheidet sich daher wesentlich von Darstellungsformen wie einige Meter, viele Personen, die in unbestimmter, verschiedene Auffassungen zulassender Weise die Mengen angeben.

Es ist ein wesentliches Merkmal einer Grösse, dass sie sich in einen solchen Ausdruck zusammenfassen lässt. Solch ein Grössenausdruck kann für eine und dieselbe Grösse verschieden ausfallen. Wenn eine Hauslänge, mit 1 Meter gemessen, den Grössenausdruck sechszehn Meter ergiebt, so erhält man, wenn man dieselbe mit 1 Decimeter misst, den Ausdruck einhundertsechszig Meter. Grösseneinheiten, mit denen eine und dieselbe Grösse gemessen werden kann, heissen gleichartige Grösseneinheiten, z. B. 1 Mark und 1 Pfennig, 1 Kilogramm und 1 Dekagramm; ebenso nennt man Grössen, welche mit einer und derselben Einheit gemessen werden können, gleichartige Grössen, z. B. zwei Linien, zwei Flächen, zwei Räume, zwei Zeiten von verschiedener Ausdehnung sind gleichartige Grössen. In den Grössenausdrücken „fünf Mark und drei Mark“ sind die Einheiten dieselben, nur die Mengen sind verschieden. Grössenausdrücke, welche dieselbe Einheit haben, heissen gleichnamige Grössenausdrücke. In zwei Mark, zwei Meter, zwei Kilogramm sind die Grösseneinheiten verschieden, die Mengen aber sind dieselben. Für den Begriff der Menge, das ist den Zahlenbegriff des Wieviel, kommt die Art der Einheit nicht in Betracht, und für das Zählen ist eine Einheit als bloss vorhandenes oder existirendes Ding gleich jeder andern Einheit, das heisst gleich „eins.“ Denn „eins“ ist jede Einheit ohne Rücksicht auf die Art derselben, darum ist sie die Grundeinheit aller Zahlen.

Wenn zu einer Grösseneinheit eine Grösseneinheit hinzukommt, so wächst eins um eins, und es entsteht die Zahl zwei mal eins oder zwei. Fügt man fortgesetzt immer eins hinzu, so erhält man eine Reihe von Zahlen, von denen jede um eins grösser ist als die ihr vorangegangene Zahl. Wir nennen diese Zahlenreihe die natürliche Zahlenreihe und jede einzelne Zahl derselben eine natürliche Zahl.

Null und eins stehen nicht allein in dem Gegensatz des Nichtvorhandenseins und des Vorhandenseins, sondern null ist zugleich eine Zahl, die eins in der natürlichen Zahlenreihe vorangeht, sie ist um eins weniger als eins, wie eins um eins weniger als zwei ist. Die natürliche Zahlenreihe lässt sich in's Unendliche fortsetzen, denn jede nur denkbare Zahl dieser Reihe kann immer noch um eins vermehrt werden. Jede natürliche Zahl ist ein Vielfaches von eins. Danach fassen wir hier das Wesen der Zahl überhaupt auf und sagen: Die Zahl ist eine Menge von Einheiten. Wird der Zahl eine bestimmte Grösseneinheit zu Grunde gelegt, so ist sie eine concrete Zahl, im entgegengesetzten Fall eine abstracte Zahl. Concrete Zahlen sind: Drei Meter, acht Hektoliter, abstracte Zahlen sind drei, acht u. s. w.

Um die Bildung der abstracten Zahlenbegriffe zu unterstützen, stellen wir uns die natürliche Zahlenreihe unter dem Bilde einer Reihe von Punkten dar, die in gerader Linie in gleichen Zwischenräumen auf einander folgen.*) Mit jedem Punkte schliesst eine Zahl ab, und jeder einzelne Punkt ist immer das Bild für die letzte Einheit einer Zahl. Aus der Entfernung des letzten, d. h. des die Zahl abschliessenden Punktes von dem Anfangspunkt der Reihe bildet sich die Vorstellung von der Grösse der Zahl, und von zwei Zahlen nennen wir diejenige die grössere, die mit einem spätern Punkte abschliesst. Für die eigentliche Zahlenvorstellung ist der die Zahl abschliessende, die letzte Einheit darstellende Punkt der bestimmende, in diesem concentrirt sich gewissermassen die Zahl, und so erscheint der Begriff der Zahl veranschaulicht durch die Stelle, welche ein sinnlicher Gegenstand in einer festgesetzten Reihenfolge einnimmt.

Jede natürliche Zahl hat ihren besondern Namen und ihre besondere Bezeichnung, denn jede ist in ihrer besondern Weise aus der Einheit entstanden, jede Zahl ist eine von allen andern verschiedene Menge von Einheiten. Die Bezeichnung der Zahl, die sogenannte Ziffer, ist nicht zu verwechseln mit der Zahl selbst. Die Ziffer ist das Zeichen für die Zahl, wie die Note das Zeichen für den Ton ist. Wie sich die ersten Zahlenvorstellungen in dem Kinde ganz unbemerkt entwickeln, ohne dass jemand mit Absicht solche zu wecken sich bemüht, so ist auch für die Kunst zu rechnen, d. h. mit Zahlen umzugehen und aus gegebenen Zahlen andere Zahlen nach bestimmten Gesetzen abzuleiten, kein sichtbarer Ursprung nachzuweisen.

2.

Positive und negative Zahlen.

Wenn jemand 8 Mark gewinnt und darauf 11 Mark verliert, so übersteigt der Verlust den Gewinn um 3 Mark. Fragt man: Wie viel hat er gewonnen? so lässt sich eine directe Antwort in einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe nicht geben, man sagt vielmehr, er habe 3 Mark verloren, d. h. der Gewinn beträgt 3 Mark weniger als null Mark. Grössen einer gewissen Art gehen durch fortgesetzte Verminderung in Grössen einer andern, der entgegengesetzten Art über, Ueberfluss in Mangel, Gewinn

---

*) S. Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831, 1. Band. 64 Stück, kurze Darstellung der Hauptmomente der Gauss'schen Theorie der imaginären Grössen.

in Verlust, Wärmegrade in Kältegrade, eine Längenausdehnung nach rechts in eine nach links u. s. w. Für solche Grössen giebt es einen bestimmten Grenzpunkt, auf dem die eine aufgehört, ohne dass die andere schon begonnen hat. Wer z. B. 5 Mark gewinnt und darauf 5 Mark verliert, hat sowohl einen Gewinn von 0 Mark wie einen Verlust von 0 Mark. Solche Grössen heissen entgegengesetzte Grössen, und der Grenzpunkt, von welchem die Bildung der Gegensätze ausgeht, heisst der Nullpunkt der entgegengesetzten Grössen. Ohne einen Nullpunkt sind entgegengesetzte Grössen überhaupt nicht denkbar. Für einfache, leicht übersehbare Verhältnisse lassen sich Fragen wie die obere entgegengesetzt stellen; sind die Zahlenverhältnisse aber verwickelter, so ist vorher nicht zu übersehen, nach welcher von beiden Richtungen hin die Antwort ausfällt; überdies verlangt das Rechnen auf höhern Stufen, das ganz allgemeine Fälle behandelt, eine directe Antwort auf solche Fragen. Deshalb hat die Wissenschaft die natürliche Zahlenreihe über die untere Grenze null hinaus erweitert und Zahlen gebildet, die mit den bisherigen denselben Gegensatz bilden wie Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust u. s. w. Wir zählen abwärts von null weiter und nennen die erste Zahl, die wir antreffen, minus eins, das ist eins weniger als null. Die zweite Zahl heisst minus zwei u. s. w. Diese Zahlen sind als eigentliche Zahlen nicht verschieden von den ursprünglichen, sie unterscheiden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung, die sie von null aus einschlagen. Man lässt ihnen daher auch die ursprünglichen Namen und setzt vor dieselben das Wort minus d. h. weniger.

Jede natürliche Zahl kommt in der verlängerten Zahlenreihe zweimal vor, einmal über null, das andre Mal unter null. Die Zahlen unter null heissen negative Zahlen, im Gegensatz dazu heissen die ursprünglichen Zahlen positive Zahlen. Wenn beide Arten von Zahlen in Betracht kommen, setzt man zur Unterscheidung derselben vor das Zahlwort der positiven Zahl das Wort plus. Sonach ist plus acht die positive Zahl acht, d. h. $0 + 8$, minus acht die negative Zahl acht, d. h. $0 - 8$. Man lässt in beiden Fällen den Ausgangspunkt 0 fort und schreibt $+ 8$ und $- 8$. Die Zeichen $+$ und $-$ dienen dazu, die Richtung der Zahlen anzugeben, vor deren Ziffern sie stehen, und heissen Richtungszeichen. Zwei positive Zahlen heissen gleichgerichtete Zahlen, ebenso zwei negative; eine positive und negative nennt man entgegengesetzt gerichtete oder entgegengesetzte Zahlen. Entgegengesetzte Zahlen haben den gemeinschaftlichen Namen algebraische Zahlen. Eine algebraische Zahl umrichten, heisst sie in die gegenteilige Zahl verwandeln, also $+ 6$ in $- 6$ und umgekehrt. Der Unterschied der positiven und negativen Zahl, der in der Richtung derselben beruht, kommt nicht in Betracht, wenn man an der Zahl nur ihre Entfernung von null hervorhebt, denn diese ist z. B. für $+ 6$ dieselbe wie für $- 6$. Für die Länge dieser Entfernung ist kein Gegensatz denkbar, sie ist in diesem Fall gleich 6 überhaupt. Zahlen werden, insofern ihre Richtung von null aus nicht in Betracht kommt, absolute Zahlen genannt. Die positive Zahl ist als ursprüngliche ihrem Wesen nach zugleich die absolute Zahl; die Grundeinheit eins ist also $= +1$. Nichts desto weniger ist aber auch die negative Zahl in dem Fall als absolute Zahl aufzufassen, wenn lediglich die Menge der Einheiten, nicht das Fehlen derselben an null in Betracht kommt. Die Bezeichnung für absolute Zahlen ist die Ziffer ohne Richtungszeichen. 8 ist das Zeichen für die absolute, also auch für die positive Zahl acht, und man lässt das Zeichen + vor der Ziffer einer positiven Zahl überall da fort, wo ein Irrthum nicht verursacht werden kann.

Fragen wie die am Eingange in diesen Abschnitt gestellten lassen sich mit Hinzunahme der negatizen Zahlen für alle Fälle direct beantworten. Wer 8 Mark gewonnen und darauf 11 Mark verloren hat, trägt einen Gewinn von — 3 Mark davon. Der Gewinn, die Längenausdehnung nach rechts u. s. w. werden auch für den Fall, dass der Verlust, die Längenausdehnung nach links u. s. w. das Uebergewicht behalten, als negativer Gewinn, als negative Längenausdehnung nach rechts u. s. w. durch negative Zahlen ausgedrückt, die den Ueberschuss des Fehlenden über das wirklich Vorhandene angeben. Dadurch wird überhaupt Mangel negativer Ueberfluss, Verringern negatives Vergrössern, Rückwärtsschreiten negatives Vorwärtsgehen, Kälte negative Wärme u. s. w.

3. Begriff der Addition.

a. absolute Zahlen.

Wenn gefragt wird: Welche ist die 6te Zahl in der natürlichen Zahlenreihe der absoluten Zahlen? so erfordert die Antwort für den, welcher zählen, d. h. die Zahlen der Reihe nach aus der Einheit bilden kann, kein Nachdenken. Anders ist es aber, wenn irgend eine andere Zahl als Ausgangspunkt für's Zählen, als 0te Zahl, genommen und z. B. gefragt wird: Welche Zahl trifft man, wenn man von 5 aus 6 Einheiten weiter zählt? Man zählt in diesem Fall: sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf. Diese Art des Zählens nennt man das Zusammenzählen oder Addiren. Zu einer ersten Zahl eine zweite addiren, heisst von der ersten Zahl so viele Einheiten weiter zählen als die zweite hat. Die durch die Addition erhaltene letzte und höchste Zahl heisst summa oder Summe, die für die Addition gegebenen Zahlen heissen Summanden. Von dem einen Summandus aus wird gezählt, der andre giebt an, wie viele Einheiten weiter gezählt werden soll.*) Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden gegen einander vertauscht. Durch die Addition zweier absoluter Zahlen wird die, von der aus gezählt wird, um so viele Einheiten vermehrt, als

*) der erste heisst Augend; der zweite Addend.

die zweite Zahl hat, daher spricht man: 5 plus 6 = 11 und schreibt $5 + 6 = 11$. Diese Form der Verbindung zweier absoluter Zahlen heisst die Summenform oder kurz Summe. Von einer gegebenen Zahl aus kann nur mit der Einheit weiter gezählt werden, aus der die Zahl gebildet worden ist; daraus folgt, dass Summanden und Summe gleichnamig sind. Sind die gegebenen Summanden nicht gleichnamig, so können sie, wenn sie gleichartige Grössenausdrücke sind, gleichnamig gemacht werden; im entgegengesetzten Fall lässt sich keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe als letzte Zahl finden, und die Addition kann nur der Form nach vollzogen werden. Wenn z. B. gefragt wird: Wie viel hat eine Familie im Ganzen an Lebensmitteln verbraucht, wenn sie 2 Hektoliter Kartoffeln, 15 Roggenbrode und 50 Kilogramm Fleisch verzehrt hat? so kann die Summe nur in der Form angegeben werden: 2 Hkl. K. + 15 Rggbrd. + 50 Kgr. Fl. Aus dem Wesen der Addition ergiebt sich, dass die Summe so viele Einheiten hat wie beide Summanden zusammen haben.

b. algebraische Zahlen.

Man hann wie von null aus von jeder Zahl nach zwei Richtungen zählen, entweder in der Richtung, welche die Zahl selbst hat, oder in entgegengesetzter Richtung. Zählt man von $+2$ aus in der Richtung von $+2$, so erhält man die Zahlen $+3$, $+4$, $+5$ . . . zählt man von $+2$ in entgegengesetzter Richtung, so erhält man: $+1 \quad 0 \; -1 \; -2$ u. s. w. Zählt man von -2 in der Richtung, die -2 hat, so erhält man die Zahlen $-3 \; -4$ . . . zählt man in entgegengesetzter Richtung, so erhält man $-1 \quad 0 \; +1 \; +2$ u. s. w. Das eine Zählen hat die Richtung der negativen, das andre die der positiven Zahlenreihe. Zählt man in der Richtung der positiven Zahlenreihe, so addirt man eine positive Zahl; zählt man in der Richtung der negativen Zahlenreihe, so addirt man eine negative Zahl. Daraus ergiebt sich:

1. $+8 + (+5)$*) $= +13$
2. $+6 + (-6) = 0$
3. $+2 + (-9) = -7$
4. $-9 + (-8) = -17$.

Denn wenn, wie in No. 3 gefordert wird, -9 zu $+2$ addirt werden soll, so soll von $+2$ aus in entgegengesetzter Richtung neu Einheiten weiter gezählt werden; man zählt also: $+1 \quad 0 \; -1 \; \ldots\ldots \; -7$. Oder wenn in No. 4 gefordert wird: Zu -9 soll -8 addirt werden, so soll von -9 aus in derselben Richtung acht Einheiten weiter gezählt werden; man zählt also: $-10 \; -11 \; \ldots\ldots \; -17$. Die Summe zweier gegenteiliger Zahlen ist gleich null, denn wenn z. B. -6 zu $+6$ addirt wird, so wird von $+6$ in entgegengesetzter Richtung sechs Einheiten gezählt, dadurch kommt man auf null zurück. Das Operationszeichen + für Summenformen

*) Der zweite Summandus ist in Klammern gesetzt, damit das Operationszeichen ausserhalb der Klammer von dem Richtungszeichen innerhalb derselben getrennt werde.

algebraischer Zahlen fällt fort, ebenso wird, wenn der erste Summandus eine positive Zahl ist, das Zeichen + vor der Bezifferung derselben fortgelassen, und die obern Summen werden geschrieben:

1. $8 + 5 = 13$ 3. $2 - 9 = -7$
2. $6 - 6 = 0$ 4. $-9 - 8 = -17$.

Eine Summe aus algebraischen Zahlen wird eine algebraische Summe genannt.

4. Begriff der Subtraction.

a. absolute Zahlen.

Wenn die Summe 12 und der eine Summandus 8 gegeben sind, so findet man den andern Summandus, wenn man von 8 aus bis 12 zählt. Man sagt in diesem Fall: 8 wird von 12 subtrahirt. Eine erste Zahl von einer zweiten subtrahiren, heisst von der ersten zur zweiten zählen. Dadurch erhält man eine dritte Zahl, welche zu der ersten addirt, die zweite giebt. Indem man 8 von 12 subtrahirt, rechnet man: $8 + 4 = 12$.*) Die gegebene Summe heisst in der Subtraction Minuendus, der gegebene Summandus Subtrahendus, der gesuchte Summandus Differenz. Zählt man von 0 bis 12, so hat man 12 Einheiten gezählt, von 8 bis 12 dagegen acht Einheiten weniger als 12, daher spricht man die Differenz von 8 und 12 auch in der Form zwölf minus acht = vier und schreibt $12 - 8$. Diese Form der Verbindung zweier absoluter Zahlen nennt man Differenzform oder kurz Differenz.*) Da Summe und Summanden gleichnamig sind, so sind auch Minuend und Subtrahend gleichnamig. Sind Minuend und Subtrahend ungleichartig, so lässt sich die Subtraction nicht wirklich ausführen, sondern wie bei der Addition nur andeuten.

b. algebraische Zahlen.

Wenn man von der kleinern Zahl zur grössern zählt, so hat das Zählen die Richtung der positiven Zahlenreihe; zählt man umgekehrt von der grössern zur kleinern Zahl, so hat das Zählen die Richtung der negativen Zahlenreihe. Im ersten Fall addirt man zum Subtrahendus eine positive Zahl, im zweiten eine negative; jene Differenz ist positiv, diese negativ. Für die Subtraction algebraischer Zahlen ergiebt sich also:

1. $+11 - (+6) = +5$ 4. $-12 - (-8) = -4$
2. $+6 - (+11) = -5$ 5. $+6 - (-7) = +13$
3. $-8 - (-12) = +4$ 6. $-7 - (+6) = -13$.

---

*) Der geübtere Rechner darf die Zählung nicht wirklich ausführen, sondern er weiss aus der Addition her den zweiten Summandus augenblicklich zu nennen.

**) Die Differenzform zweier absoluter Zahlen 8 und 12 ist nicht zu verwechseln mit der Summe der beiden algebraischen Zahlen $+12$ und $-8 = 12 - 8$.

Denn wenn, wie in No. 3 verlangt wird, — 12 von — 8 subtrahirt werden soll, so zählt man vier Einheiten in entgegengesetzter Richtung, nämlich: — 11 — 10 — 9 — 8, man addirt also + 4 zu — 12, um — 8 zu erhalten. Die Zählung von — 12 zu — 8 kann den Umweg über 0 nehmen: man zählt von — 12 bis 0 zwölf Einheiten in positiver Richtung, von 0 bis — 8 acht Einheiten in negativer Richtung, folglich erhält man die Summe + 12 — 8 oder — 8 + 12.

Wenn in No. 4. — 8 von — 12 subtrahirt werden soll, so zählt man: — 9 — 10 — 11 — 12, d. h. man zählt vier Einheiten in der Richtung von — 8, man addirt also — 4 zu — 8, um — 12 zu erhalten. Nimmt man bei der Zählung wieder den Weg über 0, so zählt man, um von — 8 zu — 12 zu kommen, zuerst von — 8 bis 0 acht Einheiten in positiver, dann von 0 bis — 12 zwölf Einheiten in negativer Richtung, d. h. man addirt + 8 und — 12, dadurch erhält man die Summe + 8 — 12 oder — 12 + 8.

Dadurch, dass man erst von — 8 bis 0 und dann von 0 bis — 12 zählt, wird klar, dass die Differenz algebraischer Zahlen gleich der Summe aus dem Minuendus und dem umgerichteten Subtrahendus ist. Man darf also nur den Subtrahendus einer algebraischen Differenz umrichten, so erhält man eine algebraische Summe, welche der Differenz gleich ist. Danach sind die obern Differenzen gleich den Summen

1. $11 - 6 = +5$	3. $-12 + 8 = -4$	5. $6 + 7 = +13$
2. $6 - 11 = -5$	4. $-8 + 12 = +4$	6. $-7 - 6 = -13$.

5. Begriff der Multiplication.

a. absolute Zahlen.

Die natürliche Zahlenreihe entsteht dadurch, dass man, von 0 ausgehend, fortgesetzt 1 addirt.

I. 0 . . 3 . . 6 . . 9 . . 12 . . 15 . . 18 . . 21 . . 24 . . 27.

II. 0 . . . 4 . . . 8 . . . 12 . . . 16 . . . 20 . . . 24 . . . 28 . . . 32 . . . 36.

In Reihe I ist an Stelle der Einheit 1 die Einheit 3, in Reihe II die Einheit 4 getreten. In der natürlichen Zahlenreihe zählt man 1 mal 1, 2×1 u. s. w., in Reihe II 1×4, 2×4 u. s. w. Die 9 Zahlen der Reihe II sind so aus 4 entstanden, wie die ersten 9 Zahlen der natürlichen Zahlenreihe aus 1 entstanden sind; sie sind die neun ersten Vielfachen von der Zahl 4. So ist z. B. das 6 te Vielfache so aus 4 entstanden wie 6 aus 1. Ein Vielfaches aus einer Zahl bilden, heisst diese Zahl multipliciren. Das 3 te Vielfache einer Zahl bilden, heisst die Zahl mit 3 multipliciren. Die Zahl 4 mit 5 multipliciren, heisst demnach: aus 4 soll eine Zahl so gebildet werden wie 5 aus 1. Man erhält diese Zahl, indem man mit 4 als Einheit 5 mal zählt, d. h. vier 5 mal zu 0 addirt. Eine erste Zahl soll mit einer zweiten Zahl multiplicirt werden, heisst, aus der ersten soll eine dritte Zahl so gebildet werden wie die zweite aus 1 gebildet ist. Für die Multiplication ist gegeben eine beliebige Zahl, mit der als Einheit gezählt wird, und eine abstracte Zahl, welche angiebt, wie viel mal gezählt werden soll. Jene heisst Multiplicandus, diese Multiplicator. Das Ergebniss einer Multiplication heisst Product. Das Operationszeichen der Multiplication ist $\times$, 4×5 ist die Form für ein Product, die sogenannte Productform oder kurz Product. Das Product ist gleich einer Summe, die durch fortgesetzte Addition eines gegebenen Summanden (Multiplicandus) zu 0 entsteht, daher sind, wie aus dem Wesen der Addition hervorgeht, Product und Multiplicandus gleichnamig. Um nicht für jeden einzelnen Fall des Multiplicirens die Zählung erst ausführen zu müssen, ist es nötig, dass man gewisse Zahlenreihen im Kopfe hat und jede beliebige Zahl solcher Reihe sofort ohne Besinnen angeben kann. Aus den folgenden Abschnitten wird sich ergeben, warum es im allgemeinen genügt, die neun ersten Zahlen der Reihen zu kennen, die aus den Einheiten 2 bis 9 gebildet werden. Diese Reihen insgesammt werden mit dem Namen „das kleine Einmaleins“ benannt.

Die vierte Zahl in der Dreierreihe ist gleich der 3 ten Zahl in der Viererreihe oder, was dasselbe ist, $4 \times 3 = 3 \times 4$. Die Vorstellungen von 3×4 und 4×3 sind ganz verschieden, aber die Resultate sind dieselben. Multiplicator und Multiplicandus dürfen daher für den Fall, dass der letztere eine abstracte Zahl ist, vertauscht werden und haben deshalb den gemeinschaftlichen Namen Factoren, mit denen sie immer dann benannt werden, wenn nur der Wert des Products in Betracht kommt. Wir knüpfen das Wort „mal“ an den Multiplicator und stellen diesen in der Productform voran. In 8×6 ist 8 der Multiplicator, 6 der Multiplicand.

b. algebraische Zahlen.

Jede Zahl, die für das Zählen als Einheit gesetzt wird, ist das $+ 1$ fache. Auch die negative Zahl ist das $+ 1$ fache von sich selbst,*) also $+ 6 = + 1 \times + 6$, $- 6 = + 1 \times - 6$. Wählt man eine beliebige positive Zahl als Einheit für's Zählen, z. B. $+ 4$, so erhält man, wie Reihe

$$-36 -32 -28 -24 -20 -16 -12 -8 -4 \quad 0 \quad +4 +8 +12 +16 +20 +24 +28 +32 +36$$

zeigt, wenn man von 0 aus in der Richtung von $+ 4$ zählt, die Zahlen $+ 4 + 8$ . . Zählt man von 0 aus in entgegengesetzter Richtung, so erhält man $- 4 - 8$ . . . Zählt man mit $- 4$ als Einheit in der Richtung, die $- 4$ selbst hat, so erhält man $- 4 - 8$ . . zählt man entgegengesetzt, so erhält man $+ 4 + 8$ . . . Damit ist die

*) Jede Zahl, ob positiv oder negativ, ist gleich einem Product aus 2 Factoren, von denen der eine die Zahl selbst, der andre $+ 1$ ist.

Grundanschauung gewonnen, aus der sich die Multiplication mit algebraischen Zahlen ergiebt. Der gegebene Multiplicand, der in der Multiplication absoluter Zahlen als 1 faches gilt, ist in der Multiplication algebraischer Zahlen das $+ 1$ fache. Daraus folgt:

1. $+ 5 \times + 8 = + 40$ 3. $- 5 \times + 8 = - 40$
2. $+ 5 \times - 8 = - 40$ 4. $- 5 \times - 8 = + 40$.

Denn wenn, wie in 4 gefordert wird, $- 8$ mit $- 5$ multiplicirt werden soll, so soll aus $- 8$ eine dritte Zahl so entstehen wie $- 5$ aus $+ 1$ entstanden ist. $- 5$ ist dadurch aus $+ 1$ entstanden, dass von 0 aus 5 mal in entgegengesetzter Richtung mit $+ 1$ gezählt worden ist. Wenn man von 0 aus 5 mal mit $- 8$ in entgegengesetzter Richtung zählt, so erhält man die Zahlen $+ 8 + 16 + 24 + 32 + 40$.*) Es ergiebt sich das allgemeine Gesetz: **Ist der Multiplicator eine positive Zahl, so behält das Product die Richtung des Multiplicand; ist der Multiplicator eine negative Zahl, so hat das Product die entgegengesetzte Richtung des Multiplicand.**

Will man ein rein äusserliches Merkmal haben, nach dem man die Richtung des Products bestimmen kann, so merke man sich für schriftliches Rechnen folgende Regel: Gleiche Richtungszeichen geben plus (No. 1 u. 4), ungleiche minus (2 und 3).

6. Begriff der Division.

a. absolute Zahlen.

Der Dividendus ist ein Vielfaches von dem Divisor.

Wenn gegeben ist ein Summandus und die Summe, so lässt sich der andre Summandus berechnen. Ebenso lässt sich, wenn das Product und ein Factor gegeben sind, der andre Factor durch Zählen ermitteln. Wenn die Frage gestellt wird:

a. Wie viel mal sind 7 Kgr. in 42 Kgr. enthalten?

so zählt der Ungeübte mit der Einheit 7 Kgr.: 1×7 (Kgr.) $= 7$ (Kgr.), $2 \times 7 = 14$. $3 \times 7 = 21 \,..\, 6 \times 7 = 42$, d. h. er untersucht, wie vielmal von 0 aus mit 7 Kgr. gezählt werden muss, damit man 42 Kgr. erhalte. Wer das Einmaleins kann, weiss den gesuchten Factor sofort anzugeben, ohne dass er diese Zählung ausführt. Wenn die Aufgabe vorliegt:

b. Wie viele Mark erhält jeder einzelne von 7 Arbeitern, wenn 42 Mark zu gleichen Teilen unter sie verteilt werden?

so versucht der Ungeübte, erst 1 Mark jedem in Gedanken zuzuteilen, dann 2 Mark u. s. w., bis er die Menge der Mark trifft, deren 7 faches $= 42$ Mark ist. Die Zählung, welche hier vollzogen wird, ist folgende: 7×1 (Mark) $= 7$ (Mark), $7 \times 2 = 14 \,...\, 7 \times 6 = 42$.

*) Aus der Behandlung dieser Aufgabe ergiebt sich die der andern.

Es wird gezählt*)

für Aufgabe a	für Aufgabe b
$1 \times 7 = 7$	$7 \times 1 = 7$
$2 \times 7 = 14$	$7 \times 2 = 14$
.	.
.	.
.	.
$6 \times 7 = 42$	$7 \times 6 = 42$.

In beiden Aufgaben ist das Product und ein Factor gegeben, gesucht wird der andre Factor. Die Rechnung vollziehen, zu der diese Aufgaben auffordern, heisst dividiren. Eine erste Zahl durch eine zweite dividiren, heisst eine dritte Zahl suchen, welche mit der zweiten multiplicirt, die erste giebt. Das gegebene Product erhält in der Division den Namen Dividendus, der gegebene Factor, ob Multiplicandus oder Multiplicator, heisst Divisor, der gesuchte Factor Quotient. Der Dividendus ist nach dem Wesen der Division das Product aus Divisor und Quotient.

In Aufgabe a. ist gegeben das Product 42 Kgr., der Multiplicand 7 Kgr., gesucht wird der Multiplicator 6. In Aufgabe b ist gegeben das Product 42 Mark, der Multiplicator 7, gesucht wird der Multiplicand 6 Mark. Aufgaben wie a heissen Messungs-, Aufgaben wie b heissen Teilungsaufgaben. Beide Arten von Aufgaben haben den allgemeinen Namen Divisionsaufgaben. In Messungsaufgaben können Divisor und Dividendus abstracte und concrete Zahlen sein, in Teilungsaufgaben ist der Divisor stets eine abstracte Zahl, während der Dividendus auch hier eine abstracte und concrete Zahl sein kann. Nach dem Dividendus richtet sich im letztern Fall der Quotient.

Der Dividendus ist kein Vielfaches von dem Divisor.

Wenn die Aufgabe vorliegt: 8 Personen erhalten 3 Mark, wie viel erhält eine Person? so ist eine bestimmte Antwort in einer Zahl der natürlichen Zahlenreihe direct nicht zu geben, und die natürlichen Zahlen erweisen sich zum zweiten Male als nicht ausreichend. Ganz abgesehen von den Forderungen der Wissenschaft, so nötigen die Verhältnisse des bürgerlichen Lebens solche und ähnliche Fragen in bestimmten Zahlen recht oft beantworten zu müssen. Um auch Aufgaben lösen zu können, in denen der Dividend nicht ein Vielfaches von dem Divisor ist, hat man daher von den frühesten Zeiten an einen Weg eingeschlagen, der für den vorliegenden Fall z. B. folgendermassen sich gestaltet: Wenn 8 Personen 3 Mark erhalten, so erhält 1 Person den 8 ten Teil von 3 Mark, also auch den 8 ten Teil von jeder einzelnen Mark. Der 8 te Teil von 1 Mark, das ist ein Teil, mit dem 8 mal gezählt werden muss, damit 1 Mark entstehe,

*) Daraus ergiebt sich die Notwendigkeit, das Einmaleins auf beide Arten zu lernen.

wird 1 Achtel Mark genannt. Sollen 5 Personen 3 Mark teilen, so wird jede einzelne Mark in 5 gleiche Teile geteilt, und ein einzelner Teil heisst 1 Fünftel Mark. In allen solchen Fällen wird die eigentliche Einheit in so viele gleiche Teile geteilt, als der Divisor es nötig macht. Ein Teil, dessen Vielfaches gleich der Einheit ist, wird eine Teileinheit genannt. Man zählt mit dieser wie mit der Einheit selbst. Solche Teilung der Einheit wird auch auf Fälle ausgedehnt, in denen die Natur derselben eine Teilung eigentlich nicht zulässt; ja, sie wird ganz allgemein für alle Fälle an der Grundeinheit eins überhaupt vollzogen. Wie man 1 Fünftel Kgr., 1 Achtel Meter bildet, so bildet man 1 Fünftel, 1 Achtel von eins und nennt sie kurz 1 Fünftel, 1 Achtel. Durch Zählung mit 1 Fünftel erhält man 2 Fünftel, 3 Fünftel u. s. w. Zahlen, welche aus Teileinheiten gebildet werden, heissen Teilzahlen.*) Die Teileinheit 1 Fünftel ist genau das Gegenteil von der Zahl 5; diese ist ebenso aus der Grundeinheit gebildet, wie die Grundeinheit aus 1 Fünftel sich herstellen lässt. So giebt es für jede natürliche Zahl eine entsprechende Teileinheit. Die natürliche Zahl bestimmt die Teileinheit, denn sie giebt an, in wie viele Teile die Grundeinheit geteilt wird. Die Teileinheiten werden daher mit denselben Ziffern hezeichnet, mit denen die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen bezeichnet werden, nur mit dem Unterschiede, dass die Ziffer unter einem wagerechten Strich steht. Ueber diesem steht 1, das Zeichen für die Einheit, also 1 Fünftel $= {}^1/_5$. Die Teilzahlen werden nicht geschrieben $2 \times {}^1/_5$, $3 \times {}^1/_5$, sondern kurz ${}^2/_5$, ${}^3/_5$, d. h. über dem wagerechten Strich steht die Ziffer für die eigentliche Zahl, darunter das Zeichen für die natürliche Zahl, welche die Teileinheit bestimmt. Da jede Divisionsaufgabe in der Weise sich vollziehen lässt, dass man die Grundeinheit teilt und die dadurch erhaltene Teileinheit mit dem Dividendus multiplicirt, so stellt man die Quotientenform $12 : 3$ auch dar durch die sogenannte Bruchform $12 \times {}^1/_3$ oder kurz ${}^{12}/_3$.

Durch Einführung der Teileinheiten und Teilzahlen wird es möglich, das Resultat jeder Divisionsaufgabe in einer bestimmten Zahl anzugeben.

b. algebraische Zahlen.

Die Division mit algebraischen Zahlen ergiebt sich unmittelbar aus der Multiplication. Wenn

a. $+5 \times +8 = +40$	so ist nach dem oben entwickelten Begriff der Division	a. $+40 : +5 = +8$
b. $+5 \times -8 = -40$		b. $-40 : +5 = -8$
c. $-5 \times +8 = -40$		c. $-40 : -5 = +8$
d. $-5 \times -8 = +40$		d. $+40 : -5 = -8$

Denn wenn, wie in c gefordert wird, -40 durch -5 dividirt werden soll, so

*) Teileinheiten und Teilzahlen werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Brüche benannt.

ist — 40 dadurch entstanden, dass der unbekannte Factor mit — 5 multiplicirt worden ist. Wenn der unbekannte Factor mit — 5 multiplicirt worden ist, so ist in entgegengesetzter Richtung 5 mal von 0 aus mit ihm gezählt worden. Diese entgegengesetzte Zählung hat — 40, also eine negative Zahl ergeben, folglich ist der unbekannte Factor eine positive Zahl, hier + 8, denn wenn mit + 8 von 0 aus 5 mal in entgegengesetzter Richtung gezählt wird, so erhält man — 40. Ist der Divisor positiv, so hat der Quotient die Richtung des Dividend; ist der Divisor negativ, so hat der Quotient die entegengesetzte Richtung des Dividend.*)

Erster Teil. Zahlensysteme.

1. Bildung der dekadischen Zahleneinheiten.

Die verschiedenen Arten des Zählens setzen voraus, dass der Zählende die Namen der Zahlen der Reihe nach kennt und ausserdem weiss in dem einen Fall, wann er mit der Zählung inne zu halten (Addition und Multiplication), in dem andern, wie weit er gezählt hat. (Subtraction und Division). Gäbe es für jede Zahl einen ursprünglichen Namen, so würde schon das Zählen, mit dem ja das eigentliche Rechnen kaum beginnt, dem Gedächtnis eine Kraft zumuten, über die auch die fähigsten Köpfe nur in beschränkter Weise zu verfügen hätten. Der Anfänger bedient sich der Finger als Merkzeichen beim Zählen. Die Zahl derselben ist ihm bekannt, und mit jedem Finger schliesst eine der Zahlen von eins bis zehn für ihn ab. Er weiss, indem er die Finger der Reihe nach verfolgt, wann die Zählung abzubrechen ist, oder im andern Fall, wie weit er gezählt hat. Reichen die Finger für das Zählen nicht aus, so wird wieder mit dem ersten Finger begonnen. Solchen Weg, wie ihn heute noch jeder Ungeübte beim Zählen einschlägt, haben die ältesten Völker in ihren ersten Anfängen des Rechnens überhaupt genommen, daher auch die auf die sprachliche und graphische Darstellung der Zahlen übertragene Einstimmigkeit in der Art der Gruppirung der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, in welcher eine so bedeutsame Rolle die Zahl zehn spielt, auf welche naturgemäss die Zahl der Finger hinweisen musste. Die verschiedensten Völker haben ihren Zahlenvorstellungen Gruppen von zehn zu Grunde gelegt, und nur bei wenigen Völkern sind fünf (eine Hand) oder zwanzig (Hände und Füsse) als Grundzahlen für ihre Anschauungen gewählt werden. Spuren von Zwanzigergruppen weisen noch gewisse in die romanischen Sprachen übergegangenen keltischen Ausdrücke wie quatre vingt (vier mal zwanzig) nach.**)

*) Auch für die Division gilt jene unter 5 für Multiplication algebraischer Zahlen angegebene Regel.

**) Ausführliches findet man in Crelle, Journal, Bd. 4 „über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwortes in den indischen Zahlen" von A. v. Humboldt.

Um in solche Gliederung der natürlichen Zahlenreihe eine klare Finsicht zu erlangen, stelle man sich vör, dass in jener Reihe von Punkten, welche die natürliche Zahlenreihe verbildlicht, jeder zehnte Punkt durch grössere Stärke heraustritt, dass jeder zehnte von diesen zweifache Stücke erhalte u. s. w. Wie auf diesem Bilde eine Menge von zehn Punkten gleicher Stärke immer mit einem Punkte der nächst höhern Stärke abschliesst, durch welchen die Menge von zehn wieder als eins, als eine höhere Einheit zusammengefasst erscheint, so bilden zunächst zehn Grundeinheiten eine höhere Zahleneinheit, einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender u. s. w. Die in der Reihe von Punkten getroffene Anordnung nennt man ein System, und ein solches System hat man auf die natürliche Zahlenreihe übertragen. Das diesem System zu Grunde liegende Gesetz lautet: Zehn Einheiten bilden eine nächst höhere Einheit. Die Zahl zehn, welche die erste Systemeinheit bildet, ist die Grundzahl oder Basis des Systems, das nach ihr dekadisches Zahlensystem genannt wird. Das Gesetz heisst das dekadische Gesetz.

2. Die dekadischen Systemzahlen.

Die natürlichen Zahlen werden mit Rücksicht darauf, dass sie Zahlen in einem solchen System sind, Systemzahlen genannt. In der natürlichen Zahlenreihe giebt es nur eine Einheit, aber unendlich viele Zahlen. In dem dekadischen Zahlensystem dagegen giebt es eine unbegrenzte Anzahl von höher aufsteigenden Einheiten, von denen jedoch für nicht ganz ungewöhnliche Verhältnisse die ersten neun ausreichen, um die überhaupt vorkommenden Mengen zu umfassen, selbst wenn schon die französische Milliarde mit hineingezogen wird. Aus jeder einzelnen dieser Einheiten werden aber nur acht Zahlen gebildet, nämlich die Zahlen zwei bis neun. Jede höhere Zahl als neun kann in dem System umgangen werden. Die niedrigsten acht Zahlen im System fallen mit den ersten acht natürlichen Zahlen zusammen, die nächsten 8 Zahlen des Systems, die sogenannten Zehnerzahlen, sind die zehnten Zahlen, die Hunderterzahlen die hunderten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Die zwischen den Systemeinheiten und den daraus gebildeten acht Systemzahlen liegenden natürlichen Zahlen erscheinen in dem System als Zusammensetzungen aus zwei oder mehreren Teilen, von denen jeder entweder eine Systemzahl oder : Einheit ist. Wir nennen die Systemeinheiten dekadische Zahleneinheiten, die Zusammensetzungen heissen gemischte Zahlen, und die acht Zahlen, welche aus jeder einzelnen Einheit gebildet werden, heissen im Gegensatz zu den gemischten reine Systemzahlen.

3. Sprachliche Darstellung der Systemzahlen.

Alle unsre Zahlenvorstellungen lassen sich kaum noch so weit des dekadischen Zahlensystems entkleiden, dass wir die Vorteile, welche dasselbe gewährt, in ihrem vollen Umfange ermessen. Die nächsten Vorteile bestehen darin, dass wir mit acht Zahlwörtern und den wenigen Namen für die Einheiten sämmtliche Zahlen der natürlichen Zahlenreihe unzweideutig sprachlich darstellen und umgekehrt aus der sprachlichen Darstellung der Zahl auf ihre Stellung im System schliessen und von dieser aus die richtige Vorstellung von der Zahl überhaupt gewinnen können. Nur die acht Systemzahlen erhalten ursprüngliche Zahlennamen, ebenso ein Teil der Einheiten, alle Namen für gemischte Zahlen sind Zusammensetzungen aus den Namen ihrer Teile. Die acht ursprünglichen Zahlwörter sind zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, die ursprünglichen Namen für die Einheiten sind ausser eins zehn, hundert, tausend, million. Die Namen für die Einheiten zwischen tausend und million sind Zusammensetzungen solcher ursprünglicher Zahlwörter. Für den Zahlenkreis über 1 million wird 1 million gewissermassen wieder als Grundeinheit festgestellt, und danach bilden sich zehn-, hundert-, tausend-, zehntausend-, hunderttausend - million; neue Namen erhalten noch 1 million million, nämlich 1 billion, 1 million billion = 1 trillion, 1 million trillion = 1 quadrillion u. s. w.

In der Art der Zusammensetzung der Zahlwörter für die gemischten Zahlen kommen gewisse Unregelmässigkeiten vor, derer man sich bewusst werden muss. So sind die Zahlwörter für die zwei ersten gemischten Zahlen nicht Zusammensetzungen aus zehn, sondern sie sind aus dem Stamm „lif“ gebildet, und die Namen elf, zwölf stammen aus dem Gothischen ainlif und tvalif. Ferner tritt für das Zahlwort zehn in den Zahlwörtern zwanzig, dreissig u. s. w. abweichend von den andern Wortbildungen das Wort „zig“ auf. Endlich geht in den zusammengesetzten Zahlwörtern für die gemischten Zahlen unter hundert das Zahlwort für die Einerzahl, also für die Zahl mit der niedrigern Einheit, dem für die Zehnerzahl voran, während für die gemischten Zahlen über hundert der Name der Zahl mit der höhern Einheit den Vorrang hat, z. B. acht und vierzig, dreihundert und vierzig.

Wir unterscheiden die sprachliche Darstellung für Systemzahlen dadurch von der für natürliche Zahlen, dass wir diese durch die Zahlwörter ausdrücken, während wir jenen die daraus abgeleitete Substantivform geben. Danach heissen die Einheiten bis tausendmillion

1 Einer, abgekürzt geschrieben	1 E	1 Hunderttausender	= 1 HT
1 Zehner	= 1 Z	1 Millioner	= 1 M
1 Hunderter	= 1 H	1 Zehnmillioner	= 1 ZM
1 Tausender	= 1 T	1 Hundertmillioner	= 1 HM
1 Zehntausender	= 1 ZT	1 Tausendmillioner	= 1 TM.

Die reinen Systemzahlen sind:

2 bis neun Zehner, 2 bis neun Hunderter, 2 bis 9 T u. s. w.

Die gemischten Systemzahlen sind:

1 Z + 1 E, 1 Z + 2 E . . . . . 1 Z + 9 E
(2 Z) 2 Z + 1 E, 2 Z + 2 E . . . . 2 Z + 9 E
.
.
.
(9 Z) 9 Z + 1 E . . . . 9 Z + 9 E
(1 H) 1 H + 1 E . . . . 1 H + 9 E
1 H + 1 Z, 1 H + 1 Z + 1 E . . 1 H + 1 Z + 9 E u. s. w. u. s. w.

Die Umformung der natürlichen Zahl in die entsprechende Systemzahl oder umgekehrt vollzieht sich ganz unmittelbar ohne besondere Rechenoperation, denn die sprachlichen Darstellungen beider sind auch bei der für die Systemzahlen willkürlich von uns gebrauchten Substantivform unmerklich verschieden, z. B. zweihundert = 2 H viertausend = 4 T, zweihundert und drei und siebenzig = 2 H + 7 Z + 3 E; 4 ZT = vierzigtausend, 3 T + 6 H + 4 E = dreitausend sechshundert und vier.

4. Das Zählen mit dekadischen Einheiten.

Hier wird das Zählen gründlich geübt und zwar mündlich und schriftlich, aufwärts und abwärts*), im Chor und einzeln; z. B.

Zähle a in E, b in Z, c in H u. s. w.

1. von 1000, 10,000 100,000 u. s. w.
2. von 4000, 50,000 700,000 u. s. w.
3. von 4 T + 3 H, 5 Z + 8 T, 8 Z + 4 H u. s. w.

Für die mündlichen Uebungen werden die Zahlen in der Form von Systemzahlen sowohl wie auch in der von natürlichen Zahlen gesprochen; für die schriftlichen Uebungen vermeide man noch die Darstellung nach dem Gesetz unseres Ziffernsystems. Es erwächst daraus kein Nachteil, wenn die Schüler sich vorläufig noch der schwerfälligen Darstellungsform bedienen, die erst durch das Ziffernsystem beseitigt wird. Sie lernen die grossartige Erfindung dadurch verstehen und schätzen. Es wird also geschrieben, wenn von 1 T in Z weiter gezählt werden soll: 1 T + 1 Z, 1 T + 2 Z . . . , 1 T + 1 H, 1 T + 1 H + 1 Z u. s. w.

Schliesslich beantworten die Schüler Fragen wie folgende:

1. Welche { Einerzahl / Zehnerzahl / Hunderterzahl / Tausenderzahl } a. folgt auf 4000? b. steht von 4000?

2. Addire {
6 E a. zu 3 ZT b, zu 7 HT + 6 T u. s. w.
7 Z a. zu 9 HT b, zu 5 M + 8 HT + 7 ZT u. s. w.
8 H. a. zu 5 T b, zu 9 HT + 6 ZT u. s. w.
}

*) in der Richtung der positiven und negativen Zahlenreihe.

3. Subtrahire { 3 E. a. von 5 ZT. b. von 3 HT + 9 T u. s. w.
3 Z. a. von 1 T b. von 2 ZT + 8 H u. s. w.
4 H. a. von 5 HT. b. von 6 M + 8 T u. s. w. }

Schon hier werden die Schüler darin geübt, die sogenannte dekadische Ergänzung*) augenblicklich zu finden, zunächst natürlich nur für reine Zahlen, und also Fragen wie folgende sofort zu beantworten:

a. Nenne die dek. Ergänzung für 6 T! Antwort 4 T, denn 6 T + 4 T = 1 ZT.

b. Nenne die dek. Ergänzung für 3 HT! Antw. 7 HT, denn 3 HT + 7 HT = 1 M.

Völlige Sicherheit im Zählen ist die notwendige Grundlage, auf der sich alle Einsicht und Fertigkeit im Rechnen aufbaut. Unsicherheit und Unfertigkeit im Rechnen, Unklarheit und Mangel an Fassungsgabe für arithmetische Wahrheiten und die damit verbundene Unlust und Teilnahmlosigkeit für den Unterricht sind vielfach auf den Mangel an diesem Fundament zurückzuführen. Man muss oft staunen über den Grad der Unkenntnis bei 15, 16jährigen Schülern. In dem Zahlenkreis bis 1000 pflegen sie heimisch zu sein. Darüber hinaus herrscht oft völlige Unkenntnis. Sie wissen z. B. nicht, dass wenn sie von 1 ZT aus mit 1 E zählen, erst nach 10 maligem Zählen 1 Z, nach 100 maligem 1 H u. s. w. hinzukommt, sondern für sie folgt, wenn z. B. von 1 ZT aus mit 1 E gezählt wird, auf 10009 sofort 11000 oder irgend eine andre ebenso unrichtige Zahl.

5. Bildung der dekadischen und decimalen Grösseneinheiten.

Die Grösseneinheiten für das Messen und Wägen von Grössen der sinnlichen Welt, welche den concreten Zahlen zu Grunde liegen, sind im allgemeinen auf drei Hauptklassen zurückzuführen. Es giebt Masse des Raumes, der Zeit und des Gewichts. Anfangs wählte man die naheliegendsten Grössen aus der Natur zu Grösseneinheiten für das Messen von Längenausdehnungen, z. B. die Länge einzelner Teile des menschlichen Körpers, wie Fuss, Arm, Fingerbreite u. s. w. Später stellte sich das Bedürfnis heraus, ein Normalmass herzustellen, das nicht wie jene in verschiedener Ausdehnung in der Natur vorkomme, sondern das überall und zu allen Zeiten dasselbe bleibe.**) Nach vielfach verfehlten Versuchen gelang es Ende des vorigen Jahrhunderts den Franzosen, ein Normalmass festzustellen. Man hatte in der Wahl zwischen der Länge eines Secundenpendels und eines bestimmten Teiles des Erdumfanges geschwankt. Man entschied sich für letzteres und bestimmte, dass der zehnmillionte Teil eines Erdquadranten, also der vierzig millionte Teil eines Erdmeridians unter dem Namen 1 Meter die Grundeinheit für die Linieneinheiten bilden sollte. In der Ableitung der höhern Linieneinheiten unterwarf man sich

*) Die dekadische Ergänzung ist die Zahl, die zu einer andern addirt werden muss, damit die nächst höhere dekadische Einheit entstehe. S. Th. Wittstein, Dr., Lehrbuch der Arithmetik, Abth. 2.

*) Nach dem berühmten Alterthumsforscher Aug. Boeckh hatten schon die Babylonier diese Idee in vortrefflicher Weise verwirklicht.

aus sehr natürlichen Gründen demselben Gesetz, welches dem dekadischen Zahlensystem zu Grunde liegt, d. h. man fasste zehn Meter zu einer höhern Einheit, dem Zehnermeter, zehn Zehnermeter zu einem Hundertermeter, zehn Hundertermeter zu einem Tausendermeter zusammen. Ja, auch die Teileinheiten, die für das Messen kürzerer Linien nötig wurden, bildete man nach dem nämlichen Gesetz. Jede dekadische Einheit ist als das zehnfache der nächst niedern zugleich der zehnte Teil der nächst höhern Einheit. So ist 1 Hundertermeter der zehnte Teil vom Tausendermeter oder 1 Zehntel Tausendermeter, 1 Zehnermeter der zehnte Teil vom Hundertermeter oder 1 Zehntel Hundertermeter, 1 Meter der zehnte Teil vom Zehnermeter oder 1 Zehntel Zehnermeter. Diese Zehnteilung wurde unter 1 Meter fortgesetzt, und man erhielt 1 Zehntel von 1 Meter oder 1 Zehntel Meter, 1 Zehntel von 1 Zehntel Meter oder 1 Hundertel Meter, 1 Zehntel von 1 Hundertel Meter oder 1 Tausendtel Meter. Einem holländischen Mathematiker van Swinden verdanken die abgeleiteten Linieneinheiten ihre characteristischen Namen. Sämmtliche Linieneinheiten behalten als Familiennamen den Namen Meter, die höhern Einheiten erhalten ausserdem von den betreffenden griechischen Zahlwörtern, die niedern Einheiten von den lateinischen Zahlwörtern ihre Vornamen. Demnach ist

1 Tausender Meter	=	1 Kilometer	(1 Km)
1 Hunderter „	=	1 Hektometer	(1 Hm)
1 Zehner „	=	1 Dekameter	(1 Dm)
1 Zehntel „	=	1 decimeter	(1 dm)
1 Hundertel „	=	1 centimeter	(1 cm)
1 Tausendtel „	=	1 millimeter	(1 mm).

Nach dem Princip, welches der Bildung der abgeleiteten Linieneinheiten zu Grunde gelegt war, bildete man auch alle übrigen im Verkehr vorkommenden Grösseneinheiten.*)

Seit dem 1. Januar 1872 sind diese Mass- und Gewichtssysteme auch im deutschen Reich die gesetzlichen.

6. Bildung der decimalen Zahleneinheiten.

Es ist oben nachgewiesen worden, dass gewisse Rechnungen es nötig machen, die Teilung der Grundeinheit auch auf die Einheit eins auszudehnen. Wenn man auch für jeden einzelnen Fall die aus der Grundeinheit gebildeten Teileinheiten beliebig und der jedesmaligen Forderung entsprechend wählen kann, so liegt doch auf der Hand, dass es einen grossen Vorzug hat, eine nach bestimmtem Gesetz gebildete Reihe, ein System von Einheiten festzustellen, die in solcher Verwandtschaft zu einander stehen, dass eine Einheit sich ganz direct mit einer andern vergleichen lässt. Denn Teileinheiten wie

*) S. Erläuterungen zu den „Sechs Stufenleitern", Leon Saunier — Danzig.

1 Fünftel, 1 Zwölftel u. s. w. also solche, die systemlos gebildet sind, lassen sich nicht ohne Zuhilfenahme einer dritten Einheit mit einander vergleichen. Ein System von solchen Teileinheiten lässt sich nach verschiedenen Gesetzen und Rücksichten bilden, und es entsteht daher die Frage, welche Rücksicht für uns die bestimmende sein muss bei Aufstellung eines solchen Systems. Bei den Römern wurde ursprünglich die Münze, welche aus 1 Pfd. Kupfer geprägt wurde, der As, in zwölf Unzen geteilt. Aus der Unze, d. h. aus 1 Zwölftel As, bildeten sich durch weitere Teilung die kleineren Einheiten 1 Vierundzwanzigstel (halbe Unze) 1 Achtundvierzigstel, 1 Zweiundsiebzigstel u. s. w. „Der As bezeichnete nicht nur die ursprüngliche Grösseneinheit, nämlich 1 Pfd. Kupfer, sondern die Römer verstanden unter As die Einheit überhaupt, das Ganze gegenüber seinen duodecimalen Teilen".*) Die lateinischen Namen 1 bis 11 Unzen sind zugleich Namen für die Teileinheiten, resp. Teilzahlen $^1/_{12}$ bis $^{11}/_{12}$. Wie bei den Römern die Bildung der Teileinheiten überhanpt aus der bestehenden Teilung des As in 12 Unzen hervorging, so sind überall und zu allen Zeiten ganz naturgemäss diejenigen Teileinheiten die gebräuchlicheren gewesen, die den Teilungen der Grösseneinheiten entsprechen.

Auch wir stellen ein System von Teileinheiten auf, das sich dem System der für Deutschland gesetzlichen Grösseneinheiten anschliesst. Wie daher 1 Zehntel, 1 Hundertel, 1 Tausendtel Meter aus der Grundeinheit 1 m nach dem dekadischen Gesetz gebildet worden sind, so lassen wir aus der Grundeinheit 1 E entstehen die Teileinheiten 1 Zehntel Einer oder kurz 1 Zehntel (1 z), 1 Hundertel (1 h), 1 Tausendtel (1 t) 1 Zehntausendtel (1 zt), 1 Hunderttausendtel (1 ht), 1 Milliontel (1 m), 1 Zehnmilliontel (1 zm), 1 Hundertmilliontel (1 hm), 1 Tausendmilliontel (1 tm). Wir nennen diese nach dem dekadischen Gesetz gebildeten Teileinheiten Decimaleinheiten, indem wir für diese Wortbildung dasselbe Princip anwenden, das dem Worte decimeter zu Grunde liegt.

1 z ist das genaue Gegenteil von 1 Z. Dieses ist 10 mal 1 E, jenes der 10 te Teil von 1 E. 1 z muss mit 10 multiplicirt, 1 Z durch 10 dividirt werden, damit man 1 E erhalte. Für jede dekadische Zahleneinheit giebt es eine gegenteilige decimale Einheit. Die Reihe der decimalen Einheiten bildet die natürliche Fortsetzung der Reihe der dekadischen Einheiten unter 1 E hinaus. Die Grundeinheit 1 E ist als Grenze dieser Einheiten als die niedrigste dekadische und auch als höchste decimale Einheit anzusehen.

7. Decimalzahlen.

Mit den Decimaleinheiten wird ebenso gezählt wie mit den andern Zahleneinheiten. Man erhält durch das Zählen mit 1 z die Zahlen 2 z, 3 z, 4 z bis 9 z, mit 1 h die Zahlen

*) Fr. Hultsch, griechische und römische Metrologie, S. 111.

2 h, 3 h bis 9 h u. s. w. Auch hier lässt sich jede höhere Zahl als neun umgehen, da zehn Einheiten wieder als eins gelten. Die Zahlen, welche durch Zählen mit einer Decimaleinheit entstehen, heissen Decimalzahlen. Man unterscheidet auch hier reine Decimalzahlen von gemischten Decimalzahlen. Jene sind die acht Zahlen zwei bis neun, die aus jeder Decimaleinheit gebildet werden, diese sind Zusammensetzungen aus Decimaleinheiten oder reinen Decimalzahlen und werden vorläufig in der Form 2h + 3t oder 5t + 6zt u. s. w. ausgedrückt.

8. Das Zählen mit decimalen Einheiten.

Das Zählen mit decimalen Einheiten wird ebenso geübt wie mit dekadischen, z. B.

1. Zähle in z von 1 z ab!

	1E + 1 z	2 E + 1 z	
2 z	1E + 2 z	2 E + 2 z	
3 z	1E + 3 z	.	
4 z	.	.	u. s. w.
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
9 z	1E = 9 z	2 E + 9 z	
1 E	2E	3 E	

2. Zähle mit 1 h $\left\{\begin{array}{l}\text{a. von 1 h}\\ \text{b. von 1 z}\\ \text{c. von 1 E u. s. w.}\end{array}\right.$

3. Zähle mit $\begin{array}{r}\text{1 t}\\ \text{1 zt}\\ \text{1 ht}\\ \text{1 m}\\ \text{1zm}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{a. von 1 t}\\ \text{b. von 1 zt}\\ \text{c. von 1 ht}\\ \text{d. von 1 m u. s. w.}\end{array}\right.$

Schliesslich beantworten die Schüler Fragen wie folgende:

1. Welche $\left\{\begin{array}{l}\text{Zehntel Zahl}\\ \text{Hundertel ,,}\\ \text{Tausendtel ,,}\\ \text{Zehntausdtl. ,,}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{folgt auf}\\ \\ \text{steht vor}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{2 z?}\\ \text{3 h?}\\ \text{4 t?}\\ \text{5 zt?}\end{array}\right.$

2. Addire $\left\{\begin{array}{l}\text{3 t}\\ \text{4 zt}\\ \text{5 ht}\end{array}\right\}$ zu $\left\{\begin{array}{l}\text{4 h}\\ \text{5 t}\\ \text{6 zt.}\end{array}\right.$

3. Subtrahire $\left\{\begin{array}{l}\text{7 h}\\ \text{8 t}\end{array}\right\}$ von $\left\{\begin{array}{l}\text{1 E, 2 E u. s. w.}\\ \text{1 z, 2 z u. s. w.}\\ \text{3 h, 4 h u. s. w.}\end{array}\right.$

4. Wie viele h sind zu 2 z + 3 h zu addiren, damit man 3 z erhalte?
5. Nenne die dek. Ergänzung von a, 4 h. b, 3 h + 7 t, c, 8 t + 2 zt u. s. w.
6. Wie viele cm sind zu 3 cm zu addiren, damit man 1 dm erhalte?
7. Zähle mit 1 cm von 8dm u. s. w.!
8. Nenne die dekadische Ergänzung von 3 dm + 6 cm!

9. Die dekadischen Zahleneinheiten als Potenzen von 10.

Die dekadischen Einheiten haben, wie wir sie uns als Zahlen in jener Reihe denken, ganz verschiedene Entfernung von einander. 1 Z ist von 1 E um neun, 1 H von 1 Z um neunzig, 1 T von 1 H um neunhundert entfernt. Je höher die Einheiten steigen, desto grösser wird ihre Entfernung. Das Bild einer fortlaufenden Reihe von Punkten wirklich auszuführen, um diese Entfernungen darzustellen, ist aus leicht erklärlichen Gründen nur für eine verhältnismässig sehr geringe Ausdehnung möglich. Die Grösse dieser Zahleneinheiten lässt sich noch in anderer Weise verbildlichen. Die dekadischen Zahleneinheiten sind dadurch aus 1 E entstanden, dass das dekadische Gesetz angewendet worden ist. Für 1 Z ist dieses Gesetz 1 mal angewandt worden, denn: 10 E = 1 Z, für 1 H 2 mal, denn 1: 10 E = 1 Z, 2: 10 Z = 1 H. So giebt es für jede dekadische Einheit eine Zahl, die angiebt, wie viel mal das Gesetz in Kraft getreten ist, um diese Einheit aus 1 E zu bilden. Wir nennen diese Zahlen die Exponenten der Einheiten. Der Exponent für 1 T = 3, für 1 M = 6 u. s. w. Die Exponenten für die neun ersten dekadischen Einheiten sind die Zahlen 1, 2 . . bis 9. Für die Grundeinheit 1 E hat das Gesetz nicht zur Anwendung kommen dürfen, d. h. es ist 0 mal angewandt worden, daher der Exponent = 0. Wir wollen uns daran gewöhnen, die Grösse der Zahleneinheiten an der Grösse ihrer Exponenten abzuschätzen, denn diese sind kleine fassbare Zahlen, während jene sehr bald eine nicht vorstellbare Grösse erreichen. Dies war der leitende Gedanke für den Entwurf der „Sechs Stufenleitern", welche die Grössenverhältnisse der dekadischen (und decimalen) Einheiten verbildlichen sollen.

Die mittlere von den 19 Stufen der Stufenleiter No. 3 ist das Bild für die Grundeinheit 1 E, d. h. die Einheit mit dem Exponenten 0. Wir nennen diese Stufe die 0 te Stufe. Will man der 0 ten Stufe eine sinnliche Anschauung zu Grunde legen, so denke man an den Fussboden eines innern Hausraumes, der dem, welcher von der ersten Stufe einer auf dem Fussboden stehenden Treppe hinabsteigt, als besondere Stufe erscheint, die eine Stufe tiefer liegt als die erste Stufe, also die 0 te Stufe genannt werden muss. Die nächst höhere Stufe ist das Bild für die dekadische Einheit mit dem Exponenten 1, wir nennen sie die 1 te Stufe. So versehen wir die Stufen bis oben hinauf mit Ordnungszahlen, welche mit den Exponenten der Einheiten übereinstimmen, die durch die betreffenden Stufen verbildlicht werden. Die links von der Leiter stehenden Ziffern 0 bis 9 sind die Zeichen für die Ordnungszahlen der Stufen und die Exponenten der Einheiten. Wir bleiben uns immer bewusst, dass durch die gleichen Entfernungen der Stufen nicht die ungleichen Entfernungen der dekadischen Zahleneinheiten sondern die gleichen Entfernungen ihrer Exponenten 0 bis 9 verbildlicht sind.

Wir sagen von der Einheit, die den Exponenten 1 hat, sie ist die Einheit der 1ten Stufe oder des 1ten Grades. 1 H ist danach die dekadische Einheit des 2 ten Grades.

Indem der Exponent einer dekadischen Einheit angiebt, wie viel mal das dekadische Gesetz angewandt worden ist, um diese Einheit aus 1 E zu bilden, giebt er zugleich auch an 1, wie viele Stufen die Einheit höher steht als die Grundeinheit, 2, wie viele Einheiten (die Grundeinheit eingeschlossen) unter ihr stehen.

Von 1 T, das ist die dek. Einh. mit dem Exponenten 3, gilt daher folgendes:

1, sie ist dadurch aus 1 E entstanden, dass das dek. Gesetz 3 mal angewandt worden ist,

2, sie steht 3 Grade höher als die Grundeinheit,

3, unter ihr stehen noch 3 niedere Einheiten.

Wir wollen, damit die Eigenthümlichkeit des dekadischen Zahlensystems noch klarer hervortrete, ein Fünfersystem bilden, das heisst ein System, in welchem die Zahl fünf die Rolle spielt wie die Zahl zehn in dem dekadischen System. Das dem Fünfersystem zu Grunde liegende Gesetz lautet: Fünf Einheiten bilden die Einheit des nächst höhern Grades. Für die Einheit eins, mit der auch das Fünfersystem die Reihe der Einheiten eröffnet, kommt das Gesetz nicht zur Anwendung, eins bleibt auch hier die Einheit des 0 ten Grades. Die einmalige Anwendung des Gesetzes führt auf die Zahl fünf, das ist die Basis selbst,

die zweimalige Anwendung auf		$5 \times 5 \times 1 = 25$
die 3 malige	„ „	$5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$
die 4 „	„ „	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1 = 625$ u. s. w.

Danach ist in dem Fünfersystem

1 Einer	die Einheit des	0 ten	Grades.
1 Fünfer	„ „ „	1 „	
1 Einhundertfünfundzwanziger	„	2 „	
1 Sechshundertfünfundzwanziger		3 „	

Die Zahlen eins, zehn, hundert, tausend u. s. w., welche in dem Zahlensystem als Einheiten gelten, nennt man Potenzen von 10, die Zahlen, welche in dem Fünfersystem als Einheiten auftreten, sind Potenzen von 5.

In dem Zehnersystem das Zahlengesetz 1 mal auf 1 E angewandt, giebt die Zahl 10×1, 2 mal, die Zahl $10 \times 10 \times 1$, 3 mal, $10 \times 10 \times 10 \times 1$ u. s. w.*) Die Potenzen von 10 sind also, wenn wir von der Bildung des Zahlensystems ganz absehen, überhaupt die Zahlen, welche man, von eins als erstem Multiplicandus ausgehend, bei fortgesetzter Multiplication mit 10 trifft. Die Potenzen von 5 sind die Zahlen, welche man, von eins ausgehend, bei fortgesetzter Multiplication mit 5 trifft. Wenn man daher von einer beliebigen Potenz mit der Grundzahl 10 aus den Weg, den man von 1 aus nahm, um die Potenz zu bilden, zurückgeht, d. h. fortgesetzt durch 10 dividirt, so trifft man auf diesem Rückgange unfehlbar 1, den Ausgangspunkt für die Potenzenbildung.

*) Vergl. Diesterweg, method. Handbuch für den Gesammtunterricht im Rechnen. Abth. 2.

Darum ist die Bildung jeder Potenz als von 1 ausgegangen anzusehen. Eins ist die Potenz des 0 ten Grades für jede Basis, und die Basis selbst, also jede beliebige Zahl der natürlichen Zahlenreihe, ist eine Potenz des ersten Grades. Der wesentliche Unterschied des Multiplicirens und Potenzirens besteht also darin, dass jenes 0, dieses 1 als Ausgangspunkt hat. Der Zahlenwert einer Potenz hängt sowohl von der Grösse der Basis als auch von der Grösse des Exponenten ab. Denn der Exponent giebt an, wie viel mal die Multiplication mit der Basis in der Potenz vollzogen ist, oder wie viel mal die Basis in der Potenz Factor ist. Basis und Exponent bestimmen die Grösse einer Potenz, und die 1, auf welche jede Potenz als auf ihren eigentlichen Ursprung zurückzuführen ist, hat auf die Potenz selbst weiter keinen bestimmenden Einfluss. Eine kürzere Bezeichnung der Potenz besteht daher nur aus den Ziffern für zwei Zahlen, Basis und Exponent. Eine kleine Ziffer für den Exponenten steht rechts oben von der grössern für die Basis. 10^2 ist die Bezeichuung für die Potenz mit der Basis 10 und dem Exponenten 2. Man liest: zehn zur zweiten, oder zehn hoch zwei, oder 2 te Potenz von 10, oder 10 vom 2 ten Grade. 5^4 ist gleich dem Product $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1$, oder, da 1 ohne Einfluss ist, $= 5 \times 5 \times 5 \times 5$. Jedes Product aus gleichen Factoren ist daher gleich einer Potenz zu setzen, deren Basis der Factor des Products ist, und dessen Exponent angiebt, wie viel mal die Basis als Factor in dem Product vorkommt; also $8 \times 8 \times 8 = 8^3$.

Die Zahleneinheiten des dek. Systems werden als Potenzen von 10 in folgender Weise bezeichnet:

$$\begin{array}{rrr} 1 = 10^0 & 10000 = 10^4 & 10000000 = 10^7 \\ 10 = 10^1 & 100000 = 10^5 & 100000000 = 10^8 \\ 100 = 10^2 & 1000000 = 10^6 & 1000000000 = 10^9 \\ 1000 = 10^3 & & \end{array}$$

Diese Potenzen haben alle die Basis 10 und unterscheiden sich nur durch ihre Exponenten, d. h. dem Grade nach. Die dekadischen Zahlen unterscheiden wir nach dem Grade ihrer Einheiten. Danach ist 4 H die dek. Zahl 4 des 2 ten Grades, 6 ZT die dek. Zahl 6 des 4 ten Grades u. s. w. Eine Zahl bestimmen, heisst den Grad der Zahl angeben. Gemischte Zahlen haben den Grad ihres höchsten Teiles, also 6 HT + 8 ZT + 4 H + 9 E ist eine gemischte Zahl des 5 ten Grades, denn 6 HT ist eine Zahl des 5 ten Grades.

Die natürliche Zahlenreihe wird durch das dek. System in Gruppen zerlegt, die mit jeder nächstfolgenden an Umfang ganz erheblich wachsen.

Die Zahlen des 0 ten Grades umfassen das Zahlengebiet von 1 bis 9
„ „ „ 1 „ „ „ „ „ 10 bis 99
„ „ „ 2 „ „ „ „ „ 100 bis 999 u. s. w.

Dabei ist nicht zu übersehen, dass die höhern Grade zugleich alle andern umfassen. Eine höhere und eine niedere Zahl schliessen zwar an verschiedenen Stellen ab, und ihre Endpunkte, d. h. die letzten Einheiten jeder Zahl liegen neben einander, aber die niedere Zahl ist als Gesammtmenge der Einheiten ein Teil von der höhern und liegt als solcher nicht neben sondern in der höhern. Man sagt in diesem Sinne daher richtiger: Die Zahlen des 1 ten Grades umfassen das Zahlengebiet bis 99, die Zahlen des 2 ten Grades bis 999 u. s. w. Jeder neue Zahlenkreis wird mit einer Einheit eröffnet. Alle Zahlen des Zahlenkreises gehören dem Grad an, dem diese Einheit angehört. Man sagt auch wohl, es sind Zahlen mit demselben Exponenten. Demnach sind die Zahlen

1 bis	9	Zahlen	mit	dem	Exponenten	0	
10 bis	99	„	„	„	„	1	
100 bis	999	„	„	„	„	2	u. s. w.

10. Decimale Zahleneinheiten als Potenzen mit negativen Exponenten.

Das dekadische Gesetz wird 2 × angewandt, um aus eins 1 H, 1 ×, um 1 Z, 0 mal, um 1 E zu bilden. Wie ist es mit 1 z, 1 h und den übrigen Decimaleinheiten? Wenn wir, von 1 E ausgehend, das Gesetz anwenden, so kommen wir nie auf 1 z oder eine andere Decimaleinheit, aber wenn wir umgekehrt von 1 z ausgehen, so erhalten wir durch einmalige Anwendung des Gesetzes 1 E, durch 2 malige aus 1 h 1 E, denn 1: 10 h = 1 z, 2: 10 z = 1 E. Für jede decimale Einheit giebt es eine Zahl, welche angiebt, wie viel mal das dek. Gesetz angewandt werden muss, um aus der decimalen Einheit die Grundeinheit zu erhalten. Wir nennen diese Zahlen die Exponenten der decimalen Einheiten. Demnach hat 1 t den Exponenten 3, 1 ht den Exponenten 5 u. s. w. Die Exponenten für dek. Einheiten geben an, wie viel mal die Anwendung des dek. Gesetzes stattgefunden hat, die Exponenten für decimale Einheiten dagegen bestimmen, wie viel mal dieselbe stattfinden soll, damit aus der decimalen Einheit die Grundeinheit entstehe; jene sagen, wie viel mal mehr als 0 mal, diese, wie viel mal weniger als 0 mal die Gesetzanwendung sich vollzog. Die Exponenten für dekadische und decimale Einheiten sind entgegengesetzte Zahlen, jene sind positive, diese negative Zahlen. Die Exponenten für jene sind darum nicht 1, 2, 3 u. s. w., sondern + 1, + 2, + 3 u. s. w. und die Exponenten der decimalen Einheiten sind — 1, — 2, — 3 u. s. w. Wir finden die neun absteigenden decimalen Einheiten durch die neun absteigenden Stufen der Stufenleiter No. 3 verbildlicht, indem wir uns ebenso wie bei den dek. Einheiten bewusst sind, dass mit den gleichen Entfernungen dieser Stufen nicht die ungleichen Entfernungen der Einheiten selbst, sondern die gleichen Abstände ihrer unter 0 absteigenden Exponenten veranschaulicht sind. Die Ordnungszahlen dieser absteigenden Stufen, welche durch die rechts von der Stufenleiter stehenden Ziffern bezeichnet werden, sind gleich den negativen Exponenten der decimalen Einheiten. Indem der Exponent einer decimalen Einheit bestimmt, wie viel mal das Gesetz angewandt werden soll, um aus der Einheit die Grundeinheit zu bilden, giebt er zugleich an, wie viele Grade die decimale Einheit tiefer steht als die Grundeinheit, und wie viele Einheiten (die Grundeinheit eingeschlossen) höher stehen. Für 1 zt mit dem Exponenten — 4 gilt demnach folgendes:

1: durch 4 malige Anwendung des Gesetzes wird 1 zt zu 1 E erhoben,

2: 1 zt steht 4 Grade tiefer als 1 E,

3: über 1 zt stehen noch 4 Einheiten nämlich 1 t, 1 h, 1 z, 1 E.

Wählen wir als Basis eines Zahlensystems wieder die Zahl 5, um auch unter 1 hinaus den Decimaleinheiten entsprechend die Teileinheiten zu bilden, so entsteht zunächst die Frage: Welche Teileinheit muss mit 5 multiplicirt werden, damit man die Grundeinheit erhalte? Diese Teileinheit ist der 5 te Teil von 1, d. h. 1 Fünftel, demnach ist $\frac{1}{5}$ die Einheit des Fünfersystems mit dem Exponenten — 1. Die Einheit des nächstfolgenden Grades ist der 5×5 te Teil von 1, das ist $\frac{1}{25}$, die Einheit mit dem Exponenten — 3 erhält man, wenn man 1 durch $5 \times 5 \times 5$ dividirt, das ist $\frac{1}{125}$. Die Teileinheiten des Zehner- und Fünfersystems mit negativen Exponenten nennen wir auch Potenzen und bezeichnen dieselben in der bekannten Potenzform. Danach ist

1 z $= 10^{-1}$	1 m $= 10^{-6}$	$\frac{1}{5} = 5^{-1}$
1 h $= 10^{-2}$	1 zm $= 10^{-7}$	$\frac{1}{25} = 5^{-2}$
1 t $= 10^{-3}$	1 hm $= 10^{-8}$	$\frac{1}{125} = 5^{-3}$
1 zt $= 10^{-4}$	1 tm $= 10^{-9}$	$\frac{1}{625} = 5^{-4}$
1 ht $= 10^{-5}$		u. s w.

Die Potenzen mit negativen Exponenten erhält man, wenn man, von eins ausgehend, fortgesetzt durch die Basis dividirt.

Wenn man daher eine Potenz mit negativen Exponenten fortgesetzt mit der Basis multiplicirt, so trifft man unfehlbar die Grundeinheit 1 und im weitern Verlauf die Potenzen aus derselben Basis mit positivem Exponenten. Jede Teileinheit ist demnach eine Potenz mit dem Exponenten — 1. Ein Quotient, der zum Dividendus 1 und zum Divisor ein Product aus gleichen Factoren, d. h. eine Potenz mit positivem Exponenten hat, ist gleich einer Potenz mit negativem Exponenten, dessen absolute Zahl angiebt, wie viel mal der Factor in dem Divisor vorkommt und dessen Basis dieser Factor ist,

z. B $\frac{1}{6 \times 6 \times 6} = 6^{-3}$

Die Potenz mit positivem Exponenten ist, abgesehen von der Bildung eines Zahlensystems, gleich einem Product, das man erhält, indem man, von eins ausgehend, fortgesetzt mit einer und derselben Zahl multiplicirt; die Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Quotienten, den man erhält, wenn man, von eins ausgehend, fortgesetzt durch eine und dieselbe Zahl dividirt. Für jede Potenz mit positivem Exponenten giebt es eine gegenteilige Potenz mit negativem Exponenten. In jener ist der Multiplicandus $= 1$, in dieser der Dividendus $= 1$; in jener ist der Multiplicator gleich einem Product aus gleichen Factoren, in dieser ist es der Divisor; z. B.

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^{+4} \qquad \frac{1}{9 \times 9 \times 9 \times 9} = 9^{-4}$$

Die Grenze der Potenzen mit positiven und der gegenteiligen mit negativen Exponenten ist die Grundeinheit 1.*) Nicht zu verwechseln damit ist die Grenze der positiven und negativen Exponenten, welche wie für positive und negative Zahlen überhaupt $= 0$ ist.

Um die decimalen Einheiten von einander zu unterscheiden, sagt man z. B. 1 z ist die decimale Einheit des 1 ten, 1 h die decimale Einheit des 2 ten Grades u. s. w. Die Decimalzahlen unterscheidet man nach dem Grade ihrer Einheiten, 5 z ist die Decimalzahl 5 des 1 ten, 7 m die Decimalzahl 7 des 6 ten Grades. Gemischte Decimalzahlen haben den Grad ihres niedrigsten Teiles, z. B. 2 z + 6 h + 4 t ist eine gemischte Decimalzahl des 3 ten Grades. Eine gemischte Zahl, die aus dekadischen und Decimalzahlen besteht, die sogenannte dekadisch decimale Zahl, wird dem Grade nach bestimmt, wenn sie eingerichtet ist. (Siehe unten.)

11. Uebungen.

A. Reihenbildungen.

a. 1 Z ist die dek. Zahleneinh. des 1 ten Grades.
1 H „ „ „ „ „ 2 „ u. s. w.
Oder:
1 TM hat den Exponenten + 9
1 HM „ „ „ + 8 u. s w.

b. 1 z ist die decimale Zahleneinheit des 1 ten Grades.
1 h „ „ „ „ „ 2 „ u. s. w.
Oder:
1 tm hat den Exponenten — 9 u. s. w.
1 hm „ „ „ — 8.

c. Nenne die Systemzahl 4 in allen Ordnungen (auf- und abwärts.)!

B. Aufgaben.

a. Bestimme die Zahl { 7 Z, 4 z / 5 T, 8 t / 6 M, 7 zt }

*) 1 E ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Potenz mit positivem und der gegenteiligen Potenz mit negativem Exponenten.

b. Nenne { a. die dek. Zahl / b. die Decimalzahl } 7 des { 2 ten, 3 ten, / 4 ten, 5 ten, / 6 ten, 7 ten Grades u. s. w.

c. Zerlege die gemischte Zahl dreihundert und siebzig in ihre Teile und bestimme jeden einzelnen Teil!

d. Gieb die gemischte Zahl als natürliche Zahl an, die aus den Teilen 3 ZT nnd 8 Z besteht! Die Antwort lautet dreissigtausend und achtzig (nicht 3 ZT + 8 Z).

e. Nenne die gegenteilige Einheit von 1 HT!

f. Welche Potenzform setzt man für 1 ZT, 1 z, 1 m u. s. w.?

g. Welche Quotientenform setzt man für 1 ht?

h. Welche Productform setzt man für 1 ZM?

i. Wie viel mal muss die Multiplication mit 10 ausgeführt werden, wenn 1 t zu einem E erhoben werden soll?

k. Wie viel mal muss die Division mit 10 vollzogen werden, wenn 1 HT zu 1 E hinabgesetzt werden soll?

l. Für welche Einheit muss die Multiplication mit 10 drei mal vollzogen werden, damit dieselbe gleich 1 E werde?

m. Für welche Einheit muss die Division durch 10 viermal vollzogen werden, damit man 1 E erhalte?

n. Wie viel betragen die Exponenten zweier gegenteiliger Einheiten zusammen?

Zweiter Teil. Das indo arabische Ziffernsystem.

1. Bezifferung dekadischer Zahlen.

Mit den Zahlenvorstellungen der Völker erwachte auch das Bedürfnis, dieselben durch Zeichen darzustellen. Aus Geschichte und Sprache der Völker ist ersichtlich, dass man sich in ältester Zeit für das Darstellen von Zahlen der Finger bediente. Dann gebrauchte man auch kleine Kugeln, Steine, Samenkörner u. s. w. Um solche Hilfsmittel leichter bei der Hand zu haben, zog man Kugeln auf Schnüre. „Rechenschnüre sind in Asien, namentlich bei den Tataren und Chinesen in uraltem Gebrauch gewesen und sollen sich auch bei den Peruanern und Mexikanern vorfinden, und der christlich-religiöse Rosenkranz, welchen die Kreuzzüge aus Asien nach Europa herüberbrachten, verdankt wahrscheinlich seinen ersten Ursprung dieser zum Rechnen oder Abzählen bestimmten Kugelschnur."*) Solche Kugelschnüre wurden auch in Rahmen gespannt, und so entstand der römische Abacus, dessen Geschichte sich bis in's 12 te Jahrhundert verfolgen lässt,**) und der Suanpan, der bis auf den heutigen Tag in China und Hochasien gebräuchlich ist. Neben diesen greifbaren Darstellungsmitteln für Zahlen bestand

*) Nesselmann. Die Algebra der Griechen. S. 107.
**) Wildermuth. Encyclopädie von Schmid. Bd. 6. S. 701 u. 704.

später der Gebrauch schriftlicher Zahlzeichen.*) Die einfachste und natürlichste Art solcher schriftlichen Zahlzeichen waren Striche, welche in Holz geschnitten oder in einen Stein gekratzt wurden. Von solcher Ursprünglichkeit der Zahlenbezeichnung berichtet Livius, indem er erzählt, dass die Römer jedes Jahr einen Nagel in dem Heiligtum der Minerva einschlugen, um die Zahl der verflossenen Jahre darzustellen. Ein einfacher Strich als Zeichen für die Einheit ist jedenfalls das älteste schriftliche Zahlzeichen. Die Anzahl der Striche war die Zahl der Einheiten, die dargestellt werden sollte. Solche Aneinanderreihung der Striche musste bei Darstellung grösserer Zahlen unbequem, ja unmöglich werden, und man wählte im Anschluss an das dekadische Zahlensystem ein Zeichen für zehn, hundert u. s. w. Einheiten. Zeugen von solcher ursprünglichen Zahlenbezeichnung sind die römischen Ziffern.**) „Man braucht nur ein paar einfache Exempel der Addition u. s. w. in griechischer oder römischer Zahlenschreibung vorzunehmen, um gewahr zu werden, wie beschwerlich die dazu erforderlichen Arbeiten waren, welche bei uns die Kinder mit Leichtigkeit verrichten lernen, insbesondere, welche Fesseln dadurch dem arithmetischen Denken angelegt waren. Die Bewunderer des freien griechischen Genius, dessen mathematische Leistungen mit seinen anderweiten Manifestationen auf gleicher Höhe stehen, können ein gewisses Bedauern nicht unterdrücken, dass es den griechischen Meistern nicht gelungen ist, diese Fesseln abzuwerfen und damit ganze grosse Gebiete der mathematischen Forschung zu eröffnen, in denen sie ohne Zweifel ebenfalls erfolgreich vorgedrungen sein würden.“***)

Mit Recht wird darum das uns allen bekannte Ziffernsystem, welches jene „hemmenden Fesseln“ abgeworfen hat, als eine der grossartigsten und nützlichsten Erfindungen gepriesen. Auch in diesem System ist der einfache Strich das Zeichen für die Einheit. Die besondere Art der Einheit ist an der Stelle kenntlich, welche der Strich einnimmt.

Von den zehn neben einander stehenden Strichen, nämlich

$$\overset{9}{1}\quad\overset{8}{1}\quad\overset{7}{1}\quad\overset{6}{1}\quad\overset{5}{1}\quad\overset{4}{1}\quad\overset{3}{1}\quad\overset{2}{1}\quad\overset{1}{1}\quad\overset{0}{1}$$

nimmt jeder, wie man sich ausdrückt, eine „Stelle“ ein und zwar einem andern Strich gegenüber seine ganz bestimmte Stelle. Von zwei Nachbarstrichen sagt man, sie seien *eine* Stelle von einander entfernt, oder sie haben eine *Stellenentfernung*****) = eins. In derselben Weise drückt man die Stellenentfernung zweier Striche überhaupt

*) Nesselmann hält es für unzweifelhaft, dass die Zahlenschrift lange vor der Buchstaben- und Wortschrift vorhanden gewesen. S. 63.

**) Ueber römisches und griechisches Ziffernsystem siehe Nesselmann und Friedlein, die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer u. s. w.

***) R. Baltzer. „Ueber die Zahlwörter und Zahlzeichen.“

****) Die Stellenentfernung heisst auch *Stellendifferenz*.

aus. Man sagt z. B. zwei Striche haben eine Stellenentfernung = zwei, wenn noch ein Strich zwischen ihnen steht. Will man die Stellenentfernung zweier Striche überhaupt feststellen, so beginnt man die Zählung bei dem einen dieser Striche nicht etwa mit „eins", denn der Strich hat von sich selbst keine Entfernung, sondern mit „null". Für die unter 2 und 6 stehenden Striche zählt man: Null, eins, zwei, drei, vier; also Stellenentfernung = vier. Um das Messen der Stellenentfernung zweier beliebiger Striche unmittelbarer vollziehen zu können, beginnt man für alle Fälle an einer ganz bestimmten Stelle die Zählung mit null. Es liegt nahe, als solche eine von den zwei äussersten Stellen zu wählen; die spätere Betrachtung wird es rechtfertigen, dass wir uns für die äusserste Stelle rechts entscheiden. Dadurch erhält jede einzelne Stelle eine Ordnungszahl, die unveränderlich mit ihr verbunden bleibt: Die äusserste Stelle rechts hat die Ordnungszahl 0, die äusserste Stelle links die Ordnungszahl 9; damit sind die Ordnungszahlen aller übrigen Stellen bestimmt.

Die Ordnungszahl einer Stelle giebt an:

1. ihre Stellenentfernung von der 0 ten Stelle,
2. die Anzahl der Stellen, welche sich rechts von ihr befinden.

Der Strich in der 4 ten Stelle also hat von dem Strich in der 0 ten Stelle eine Stellenentfernung = 4, und rechts von ihm stehen noch 4 Zeichen.

Für das Messen der Stellenentfernung zweier beliebiger Stellen ergiebt sich: **Die Stellenentfernung zweier Stellen ist gleich der Differenz ihrer Ordnungszahlen.**

Wenn die Bestimmung getroffen wird, dass von den zehn neben einander stehenden Strichen der Strich in der 0 ten Stelle das Zeichen für die Zahleneinheit des 0 ten Grades ist; wenn ferner im Anschluss an das dekadische Zahlensystem festgesetzt wird, dass von zwei Nachbarstrichen der links stehende immer das Zeichen für eine dekadische Zahleneinheit ist, die einen Grad höher ist, als die Einheit, deren Zeichen rechts steht, so haben wir in den zehn neben einander stehenden Strichen die Zeichen für die zehn aufsteigenden dekadischen Zahleneinheiten vom 0 ten bis 9 ten Grade. Von rechts nach links gelesen, erkennen wir in den zehn Strichen der Reihe nach die Zeichen für die Einheiten 1 E, 1 Z, 1 H u. s. w. bis 1 TM.

Der Strich in der 0 ten Stelle bleibt ein für alle Mal das Zeichen für die Einheit des 0 ten Grades, der Strich in der 5 ten Stelle das Zeichen für die Einheit des 5 ten Grades u. s. w.

Die Ordnungszahl einer Stelle ist gleich dem Exponenten der dekadischen Einheit, deren Strich diese Stelle einnimmt.

In welcher Weise jede beliebige dekadische Zahleneinheit durch einen einzigen

Strich ohne Begleitung aller übrigen bezeichnet werden kann, ist auf der Tabelle ersichtlich. Auf der 0 ten Stufe erscheint der Strich ohne jede Begleitung, er ist in diesem Falle das Zeichen für 1 E. Auf Stufe 1 steht 10.

Die 0 versetzt den Strich, der ohne sie das Zeichen für 1 E wäre, in die erste Stelle, sie drückt aus, dass die 0 te Stelle unbesetzt ist. Der Strich in der ersten Stelle ist, wie wir wissen, das Zeichen für die dekadische Einheit des ersten Grades, das ist 1 Z. Auf Stufe 2 steht 100. Die beiden Nullen zeigen, dass zwei Stellen, die 0 te und 1 te, unbesetzt sind, und versetzen den Strich in die 2 te Stelle; derselbe ist das Zeichen für die dekadische Einheit des 2 ten Grades, das ist 1 H u. s. w. Mit Zuhilfenahme der 0 lässt sich der einzelne Strich in jede beliebige Stelle versetzen; in Folge dessen ist jede beliebige dekadische Zahleneinheit durch einen Strich unzweideutig darzustellen.

Für die Systemzahlen giebt es acht Zeichen, die sogenannten Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Diese Ziffern haben dieselbèn Namen wie die Zahlen, welche sie bezeichnen. Ziffer 3 z. B. ist das Zeichen für die Zahl drei. Wie der Strich das Zeichen für die Einheiten aller Grade ist, so ist auch Ziffer 3 das Zeichen für die Zahl drei in allen Graden.

Der Exponent der Zahl ist gleich der Ordnungszahl der Stelle, in welcher ihre Ziffer steht; z. B. 6 T ist die dekadische Zahl 6 mit dem Exponenten 3, folglich steht Ziffer 6 für 6 T in der 3 ten Stelle, und man schreibt 6000. Gemischte Zahlen werden mit soviel Ziffern bezeichnet als sie Teile haben, die Ziffer für jeden Teil der gemischten Zahl nimmt die Stelle ein, die der Grad dieses Teiles ihr anweist. Ist man daher bei der Bezifferung einer gemischten Zahl zweifelhaft, so darf man nur die gemischte Zahl in ihre Teile auflösen. Die 0 wird überall gesetzt, wo eine Stelle von der 0 ten Stelle ab unbesetzt bleibt.

Die Vollkommenheit dieses Ziffernsystems beruht auf der Einführung des Stellenwertes der Ziffern und der 0. Jedes der neun Zahlzeichen hat eine absolute Bedeutung durch seine Gestalt und eine relative durch seine Stelle. Die Gestalt der Ziffer bestimmt die Systemzahl, die Ziffernstelle den Grad dieser Zahl. Mit Zuhilfenahme der 0 lässt sich jede Ziffer in die Stelle versetzen, die der Einheit ihrer Zahl entspricht.

Allgemein wird angenommen, dass das System von den Indern erfunden und von den Arabern nach Europa verpflanzt worden ist. Die Ziffern selbst sind arabischen Ursprungs, und ihre Formen stimmen mit denen der westarabischen oder Gebarziffern in den Grundzügen überein.*) Nach diesem Ursprunge wird das System das indo

*) Friedlein, Tafel 5.

arabische Ziffernsystem genannt. In Frankreich und Italien war dasselbe schon im 13 ten Jahrhundert bekannt, in Deutschland ging es mit der Verbreitung langsamer. In Schlesien z. B. kommen die Ziffern erst im Jahre 1340 vor. Ende des 14 ten Jahrhunderts werden sie allgemeiner, und seit den achtziger Jahren des 15 ten Jahrhunderts erscheinen sie in Druckschriften. Der Osten Europas hat sie vermutlich früher gehabt, da derselbe namentlich durch Constantinopel in directem Verkehr mit Arabien und Indien stand.

Mit der Kenntnis dieses Systems bildete sich zunächst ein einfaches und leichtes Verfahren für die Species oder Grundrechnungsarten aus, das sich vor der bis dahin üblichen schwerfälligen Methode glänzend auszeichnete. Diese neue Methode führte den Namen Algorithmus von einem berühmten arabischen Mathematiker Mohamed ben Musa mit dem Beinamen Alkharizmi (in der ersten Hälfte des 9 ten Jahrhunderts), welcher eine weit verbreitete Arithmetik schrieb, in der die auf das indische System sich gründenden gewöhnlichen Rechenoperationen behandelt wurden. Im 16 ten Jahrhundert erscheinen auch in Deutschland schon viele gedruckte Rechenbücher, welche die auf das indo arabische Ziffernsystem sich gründenden Rechnungsarten ausführlich behandeln, darunter eins von dem uns dem Namen nach allen bekannten Adam Riese, welcher in Deutschland am meisten zur Verbreitung der neuen Rechenkunst beigetragen hat.*)

Laplace spricht sich über den Wert des Systems in folgender Weise aus: „Der Gedanke, alle Quantitäten durch 9 Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellenwert giebt, ist so einfach, dass man eben deshalb nicht genug anerkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und Leichtigkeit, welche die Methode dem Rechnen gewährt, erheben das arithmetische System der Inder in den Rang der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es aber war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus entnehmen, dass sie dem Genie des Archimedes und des Appollonius von Perga, zwei der grössten Geister des Alterthums, entgangen war.“**)

2. Bezifferung der Decimalzahlen.

Wir wissen, dass die Grundeinheit 1 E als Grenze der dekadischen und decimalen Einheiten sowohl als die niedrigste dekadische wie auch als die höchste decimale Ein-

*) Die Kenntnis des indo arabischen Ziffernsystems war es auch, welche deutsche Astronomen, darunter Regiomontanus (Müller aus Königsberg in Franken) auf die Einführung der Decimalzahlen für ihre wissenschaftlichen Berechnungen schon im 15 ten Jahrhundert führte, also zu einer Zeit, in der die Grösseneinheiten des geschäftlichen Verkehrs noch nicht dazu nötigten.

**) S. Crelle, Journal für Mathematik 4, 207.

heit angesehen werden kann. Die Reihe der dekadischen Einheiten ist nach unten, die Reihe der decimalen Einheiten nach oben durch 1 E begrenzt. Wenn daher von den zehn neben einander stehenden Strichen

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

feststeht, dass sie die Zeichen für die zehn ersten decimalen Einheiten sind; wenn ferner wie für die Bezeichnung dek. Einh. bestimmt wird, dass von zwei Nachbarstrichen der links stehende das zehnfache von der Einheit darstellt, deren Strich rechts steht, so ist kein Zweifel, dass der Strich auf dem äussersten Ende links das Zeichen für 1 E ist. Von links nach rechts gelesen, erkennen wir auch ohne irgend eine nähere Bezeichnung in den blossen Strichen die Zeichen für die decimalen Einheiten 1 E, 1 z, 1 h, 1 t . . bis 1 tm. Wir haben keinen Grund, die Stelle für den Strich des Einers, welche in der Bezeichnung dekadischer Stellen als 0 te Stelle gilt, mit einer neuen Ordnungszahl zu versehen, vielmehr nennen wir sie auch hier die 0 te Stelle, da dieselbe mit dem Zeichen für die Einheit des 0 ten Grades besetzt wird. Während in der Bezeichnung der dekadischen Einheiten die 0 te Stelle auf dem äussersten Ende rechts zu finden ist, sehen wir sie hier auf dem äussersten Ende links. Während dort die Anzahl der Stellen nach links unbegrenzt ist, finden dieselben hier nach rechts keine Begrenzung. Wir versehen die Stellen rechts von der 0 ten in derselben Weise mit Ordnungszahlen wie dort die Stellen links von der 0 ten. Der Strich steht hier in der ersten Stelle, wenn links von ihm noch ein Strich, in der 2 ten Stelle, wenn links von ihm noch zwei Striche stehen u. s. w. Der Strich auf dem äussersten Ende rechts steht in der 9 ten Stelle. Wir nennen die Stellen, in denen die Zeichen für die decimalen Einheiten stehen, Decimalstellen; im Gegensatz zu ihnen heissen die Stellen, in denen die Zeichen für dekadische Einheiten oder dekadische Zahlen stehen, dekadische Stellen.

Die Ordnungszahl der Decimalstelle ist gleich dem negativen Exponenten der decimalen Einheit, deren Strich die Stelle einnimmt. Also: Der Strich in der 4 ten Decimalstelle ist das Zeichen für die decimale Einheit des 4 ten Grades, das ist 1 zt.

Mit Anwendung der null lässt sich auch hier jede beliebige decimale Einheit durch einen Strich ohne Begleitung der übrigen Striche bezeichnen, wie aus den „Sechs Stufenleitern“ ersichtlich ist. Auf Stufe 1 steht 0 1. Die null versetzt den Strich in die erste Decimalstelle; derselhe ist daher das Zeichen für die decimale Einheit des 1 ten Grades, das ist 1 z. Auf Stufe 5 steht 0 0 0 0 0 1. Der Strich in der 5 ten Decimalstelle ist das Zeichen für die decimale Einheit des 5 ten Grades, das ist 1 ht. In gleicher Weise ergiebt sich die Bedeutung der Striche auf den andern Stufen. Wie die decimale Einheit das Gegenteil von der betreffenden dekadischen ist, so ist auch ihre

Bezifferung genau die Umkehrung von der für die gegenteilige dekadische Einheit, also:

1 H = 100	001 = 1 ht
1 T = 1000	0001 = 1 t
1 ZT = 10000	00001 = 1 zt.

Die Bezeichnung der Decimalzahlen kann nach dem Vorangegangenen keine Schwierigkeiten machen. Die acht Ziffern für dekadische Zahlen sind auch die Zeichen für die acht Decimalzahlen durch alle Grade. Die Ordnungszahl der Decimalstelle ist gleich dem Exponenten der decimalen Einheit, aus welcher die betreffende Zahl gebildet ist; z. B. 0005 d. h. Ziffer 5 in der 3ten Decimalstelle ist das Zeichen für die Decimalzahl 5 des 3ten Grades, das ist 5 t. Gemischte Decimalzahlen werden mit soviel Ziffern bezeichnet als die Anzahl ihrer Teile beträgt, also 028 = 2 z + 8 h.

3. Bezeichnung dekadisch decimaler Zahlen.

Die Grenze dekadischer und decimaler Einheiten ist die Grundeinheit 1 E, die Grenze der dekadischen und Decimalstellen ist die 0te Stelle. Wären die 7 Striche

1 1 1 1 1 1 1

Zeichen für dekadische Einheiten, so wäre der äusserste Strich rechts das Zeichen für 1 E; wären diese Striche Zeichen für decimale Einheiten, so wäre der äusserste Strich links das Zeichen für 1 E. Die übrigen Striche wären in jedem der beiden Fälle leicht zu entziffern. Wenn aber ein Teil von jenen 7 Strichen Zeichen für dekadische und der übrige Teil Zeichen für decimale Einheiten ist, so ist die richtige Lesung nicht eher möglich, als bis von einer der Stellen die Ordnungszahl angegeben ist. Am natürlichsten ist es, die Grenze der dekadischen und Decimalstellen, das ist die 0te Stelle, zu kennzeichnen. Unterstreichen wir z. B. die 0te Stelle: 1 1 1 1 $\underline{1}$ 1 1, so sind die Striche sofort zu deuten, und man liest, von der 0ten Stelle ausgehend, nach links: 1 Z, 1 H, 1 T, 1 ZT, nach rechts: 1 z, 1 h. Es ist gebräuchlich, rechts von der 0ten Stelle ein Komma, das sogenannte Decimalkomma, zu setzen, und jene obere Reihe zu schreiben: 1 1 1 1 1, 1 1. Allerdings wird bei dieser Art der Bezeichnung der Vorteil eingebüsst, dass die Stellen für die Striche der gegenteiligen Einheiten dem Auge als correspondirende erscheinen, wie es auf den „Sechs Stufenleitern“ dadurch erreicht ist, dass die 0te Stelle von zwei senkrechten Linien eingeschlossen ist.

Sind die Teile der gemischten Zahlen dekadische und Decimalzahlen, so vollzieht sich die Bezeichnung in derselben Weise; z. B.:

38,02 wird gelesen: 3 Z + 8 E + 2 h
400,604 „ „ : 4 H + 6 z + 4 t u. s. w.

4. Uebungen.

Durch die Uebungen dieser Stufe soll eine genaue Bekanntschaft mit dem indo arabischen Ziffernsystem erzielt werden, welche in sicherem und mit Bewusstsein vollzogenem Zahlenlesen und — Schreiben gipfelt. Die Arten der Uebungen sind hier am Schlusse des Abschnitts zusammengestellt, während sich beim Unterricht selbst jede einzelne Uebung der entsprechenden Entwicklung unmittelbar anschliesst.

Uebungen.

A. Einprägung der Ordnungszahlen der Ziffernstellen.

1. Wie viele Stellen giebt es rechts von der 5 ten dekadischen Stelle?
2. Welche Stelle ist es, die rechts noch vier Stellen neben sich hat?
3. Zeige und benenne die Ziffernstellen der Reihe nach von der 0 ten Stelle!
4. Die wie vielte Stelle zeige ich? (Der Lehrer zeigt an der Tafel die verschiedensten Stellen, die Schüler geben die Ordnungszahl derselben an.)
5. Zeige die 3 te, 5 te, u. s. w. dekadische Stelle!
6. Wie muss man schreiben, wenn Ziffer 6 in der 4 ten Stelle stehen soll? u. s. w.

B. Lesen.

1. Reihenbildungen, auf- und abwärts.
   a. Der Strich in der 0 ten Stelle ist das Zeichen für die dek. Einheit des 0 ten Grades das ist 1 E. Der Strich in der 1 ten Stelle u. w.
   b. Die Ziffer 3 in der 0 ten Stelle ist das Zeichen für die Zahl 3 des 0 ten Grades, das ist 3 E. Die Ziffer 3 in der 1 ten, 2 ten u. s. w.

2. Aufgaben.
   a. Leset 1 0 0 0!
   (In welcher Stelle steht der Strich? — Woran erkennt ihr das? — Welche dek. Einh. bezeichnet der Strich in der 3 ten Stelle?)
   Der Schüler spricht schliesslich in zusammenhängender Rede:
   „Der Strich steht in der 3 ten Stelle, denn rechts von ihm stehen noch 3 Nullen. Der Strich in der 3ten Stelle ist das Zeichen für die dekad. Zahleneinheit des 3 ten Grades, das ist 1 T oder als natürliche Zahl tausend.“ Zuletzt bleibt diese Begründung aus, und es wird nur gelesen. Allerdings muss man auf diese Art der Begründung noch immer wieder zurückgehen, wenn Unsicherheiten des Schülers dazu nötigen.
   b. Leset 2 0 8 0 5!
   Nach vorangegangener Entwicklung spricht der Schüler in zusammenhängender Rede:
   „Ziffer 5 in der 0 ten Stelle ist das Zeichen für die Zahl 5 des 0 ten Grades, das ist 5 E; Ziffer 8 in der 2 ten Stelle ist das Zeichen für die Zahl 8 des 2 ten Grades, das ist 8 H; Ziffer 2 in der 4 ten Stelle ist das Zeichen für die Zahl 2 des 4 ten Grades, das ist 2 ZT.
   Also liest man, von links nach rechts: 2 ZT + 8 H + 5 E.
   Wenn Fertigkeit im Lesen einigermassen erreicht ist, dann treten auf

C. Schreibeübungen, die mit den Leseübungen wechseln.

Bei den Schreibeübungen ist von vorn herein darauf Bedacht zu nehmen, das Schreiben schlechter und undeutlicher Zahlzeichen zur Unmöglichkeit zu machen.
Wegen schlechter Ziffernschrift ist nicht der Schreiblehrer der Anstalt, sondern allein der Rechenlehrer der Klasse verantwortlich zu machen.
Die Schreibeübungen werden wie die Leseübungen eingeleitet, z. B.

1. Schreibe 1 ZT!

Der Schüler spricht, nachdem eine ähnliche Entwickelung wie oben vorausgegangen ist, in zusammenhängender Rede:
1 ZT ist die dek. Zahleneinheit des 4ten Grades. Das Zeichen für die dek. Zahleneinh. des 4 ten Grades ist ein Strich in der 4 ten Stelle, folglich müssen rechts vor dem Strich noch 4 Nullen stehen, und man schreibt 1 0 0 0 0.

2. Schreibe 6 HT + 4 H + 5 E!

Der Schüler spricht nach vorangegangener Entwickelung:
„6 HT ist die dek. Zahl 6 des 5 ten Grades; das Zeichen für die dek. Zahl 6 des 5 ten Grades ist Ziffer 6 in der 5 ten Stelle. 4 H ist die dek. Zahl 4 des 2 ten Grades, das Zeichen dafür ist Ziffer 4 in der 2 ten Stelle. 5 E ist die Zahl 5 des 0 ten Grades, das Zeichen dafür ist Ziffer 5 in der 0 ten Stelle. Diese gemischte Zahl wird also bezeichnet durch Ziffer 5 in der 0 ten, Ziffer 4 in der 2 ten, Ziffer 6 in der 5 ten Stelle; die 1 te, 3 te und 4 te Stelle werden mit Nullen besetzt und man schreibt 6 0 0 4 0 5". Solche Begründungen werden auch schriftlich von den Schülern gearbeitet, vorausgesetzt, dass die Besprechungen einer fehlerhaften Darstellung genügend vorgebeugt haben.

Für die Decimalzahlen treten dieselben Uebungen auf wie für die dekadischen Zahlen. Zuerst werden die Orduungszahlen der Ziffernstellen fest eingeprägt, damit die Stelle jeder Ziffer sofort erkannt wird. Den darauf folgenden Lese- und Schreibeübungen geht anfangs immer das Bestimmen der Decimalzahl voraus, denn nach dem Grade derselben bestimmt sich die Ordnungszahl der Ziffernstelle. Sicheres Unterscheiden des Grades der Zahlen und der Ordnungszahlen der Ziffernstellen sind unerlässliche Bedingungen für Sicherheit im Lesen und Schreiben. Bei der Behandlung dekadisch decimaler Zahlen ist in der ersten Zeit der Strich unter der Ziffer in der 0 ten Stelle als Merkzeichen festzuhalten, und erst wenn die Schüler im Lesen und Schreiben nach dieser Weise sicher geworden sind, lasse man an Stelle des wagerechten Striches unter den kurzen senkrechten Strich, das sogenannte Decimalkomma, unmittelbar rechts neben der 0 ten Stelle gelten. Bei Einführung des Decimalkomma ist wieder besonders die richtige Unterscheidung der Stellen im Auge zu behalten, sowohl der gleichgerichteten als der entgegengesetzten. Die 0 te Stelle bildet immer den Ausgangspunkt in den Belehrungen darüber. Vorläufig noch werden Ziffern wie 3, 782 gelesen: 3 E + 7 z + 8 h + 2 t; erst auf der folgenden Stufe, wenn die Schüler mit den Umformungen bekannt geworden sind, kommen noch andere Lesearten hinzu.

5. Das Ziffernsystem in seiner Anwendung auf concrete Zahlen mit dekadischen und decimalen Grösseneinheiten.

Wenn wir für die 7 Striche

1 1 1 1, 1 1 1

die Bestimmung treffen, dass der in der 0 ten Stelle stehende das Zeichen für 1 Meter ist; wenn wir ferner feststellen, dass die Striche nach dem Gesetz des indo arabischen Ziffernsystems neben einander gestellt sind, so ist

der Strich in der 1 ten dek. Stelle das Zeichen für 1 Dm,
" " " 2 ten " " " " " 1 Hm,
" " " 3 ten " " " " " 1 Km,
" " " 1 ten Decimalstelle " " 1 dm,
" " " 2 ten " " " " " 1 cm,
" " " 3 ten " " " " " 1 mm.

Während also Ausdrücke für Grössen, deren Einheiten nicht dekadisch und decimal gebildet sind, in mehreren Columnen neben einander gestellt werden müssen, wie z. B.

5 Ruthen 6 Fuss 7 Zoll,
26 " 4 " 9 " u. s. w.

so lassen sich Grössen, denen dekadische und decimale Grösseneinheiten zu Grunde liegen, in derselben einfachen Weise darstellen wie dekadische und Decimalzahlen; allerdings muss, da die Einheit des 0 ten Grades in solchem Fall nicht die abstracte eins ist, ein Zeichen beigefügt werden, an dem man die Grundeinheit erkennt, und die obere Reihe muss also geschrieben werden $1\,1\,1\,1,1\,1\,1^{m.}$ Wenn wir geschrieben finden $5\,8\,2\,3,4\,6\,1^{m}$, so lesen wir: 5 Km 8 Hm 2 Dm 3 m 4 dm 6 cm 1 mm.

In 9 8 2, 6 Dm ist die Grundeinheit 1 Dm. Ziffer 2 in der 0 ten Stelle ist das Zeichen für 2 Dm, Ziffer 8 in der 1 ten Stelle das Zeichen für 1 Zehner Dekameter, das ist 1 Hm, Ziffer 9 in der 2 ten dek. Stelle das Zeichen für 9 Hunderter Dm, das sind 9 Km, Ziffer 6 in der 1 ten Decimalstelle das Zeichen für 6 Zehntel D m, das sind 6 m. Der Ausdruck ist also zu lesen: 9 K m 8 H k m 2 D k m 6 m.

Statt der eigentlichen Grundeinheit kann also jede andre Einheit desselben Systems als Grundeinheit gesetzt werden, wodurch natürlich die Ziffern in andere Stellen treten. So kann z. B. 5 8 2 3, 4 6 1 ^{m} in folgenden Formen ausgedrückt werden:

5, 8 2 3 4 6 1	Km
5 8, 2 3 4 6 1	Hm
5 8 2, 3 4 5 1	Dm
5 8 2 3, 4 6 1	m
5 8 2 3 4, 6 1	dm
5 8 2 3 4 6, 1	cm
5 8 2 3 4 6 1	mm.

Die Münzeinheiten*) werden in Zukunft jedenfalls sein: 1 Mark (1 mrk) und 1 Pfennig (1 pf.).

Wenn geschrieben steht: 8 6 4 2, 5 3 mrk
so ist die Grundeinheit 1 mrk. Ziffer 2 in der 0 ten Stelle ist also das Zeichen für 2 Einermark, Ziffer 4 in der 1 ten dek. Stelle das Zeichen für 4 Zehnermark u. s. w. Ziffer 5 in der ersten Decimalstelle ist das Zeichen für 5 Zehntel Mark, das sind 50 pf., Ziffer 3 in der 2 ten Decimalstelle das Zeichen für 3 Hundertel Mark, das sind 3 pf.

Da in diesem System nur die Namen mrk und pf existiren, so liest man 8642 mrk 53 pf. So ist

3 4, 0 5 mrk = 34 mrk 5 pf
9 2, 6 „ = 92 „ 60 „
0, 0 5 „ = — „ 5 „

Sollen also geschrieben werden in einem Ausdruck
54 mrk 60 pf, so schreibt man 5 4, 6 mrk
3 „ 4 „ „ „ „ 3, 0 4 „ u. s. w.

Die gesetzlichen Gewichtseinheiten sind neben der Grundeinheit 1 Gramm (1 gr), die dekadischen 1 Dekagramm (1 Dg.) und ein Kilogramm (1 Kgr.) und die decimalen 1 Decigramm (1 dgr.), 1 Centigramm (1 cgr.), 1 Milligramm (mgr.)

Da ein besonderer Name für Hundertergramm fortfällt, so sind die Hundertergramm als Zehner Dekagramm zu lesen.

8 0 2, 0 5 Kgr. = 8 0 2 Kgr. 5 Dgr.
4 3 5, 3 6 Dgr. = 4 Kgr. 35 Dgr. 3 gr. 6 dgr.
9, 0 3 4 gr. = 9 gr. 3 cgr. 4 mgr.

Ob 1 Kgr. oder 1 Dgr. oder 1 gr. als Grundeinheit zu wählen ist, richtet sich nach den Quantitäten, die ausgedrückt werden sollen.

---

*) Die sachlichen Erklärungen für das Verhältnis der dek. und decimalen Grösseneinheiten und den Zusammenhang der einzelnen Systeme habe ich in den „Erläuterungen zu den Sechs Stufenleitern“ gegeben, weshalb ich dieselben hier als bekannt voraussetze.

Die gebräuchlichen Hohlmasse (Raumeinheiten) sind 1 Liter (1 l) und 1 Hektoliter (1 Hl). Da für Zehner —, Tausenderliter und ebenso für Zehntel —, Hunderterliter keine besondern Namen gebräuchlich sind, so sind Zehnerliter in dek. Zahlen des ersten Grades und Zehntel —, Hundertelliter in Decimalzahlen des 1 ten und 2 ten Grades mit Beibehaltung der Grundeinheit 1 l zu lesen, also:

823,5 l = 8 Hl 23,5 l
1020,07 l = 10 Hl 20,07 l
6000,5 l = 60 Hl 0,5 l
459,02 Hl = 459 Hl 2 l.

Die Uebungen dieser Stufe lassen sich schon recht mannigfach gestalten. Man dictirt z. B. mehrere Posten Zahlen, abwechselnd dekadische, decimale und dekadisch decimale, fügt denselben dann die Grösseneinheiten der verschiedenen Systeme bei und lässt die Zahlen in sämmtlichen Einheiten des Systems als ungleichnamige Zahlen aussprechen, also:

2634,591 m (oder Dkm, Hkm, Km, dcm)
= 2 Km 6 Hkm 3 Dkm 4 m 5 dcm 9 cm 1 mm.

Oder: 2634,591 mrk (oder pf)
= 2634 mrk 59,1 pf.

Oder: 2634,591 gr. (oder Dkgr, Kgr, dcgr, cgr, mgr.)
= 2 Kgr 63 Dkgr 4 gr 5 dcgr 9 cgr 1 mgr.

Oder: 2634,591 l (oder Hkl)
= 26 Hkl 34,591 l.

Oder: 2634,591 T (oder Z, H, ZT, z, h, t u. s. w.)
= 2634 T 5 H 9 Z 1 E u. s. w.

Auch die ausländischen Systeme mögen hier Berücksichtigung finden, die östreichischen Gulden und Neukreuzer, die russischen Rubel und Kopeken, die französischen Franks und Centimen.

Auf dieser Stufe lassen sich schon Aufgaben wie folgende stellen:

1. Der Erdumfang beträgt 40000000 m; wie viel beträgt diese Längenausdehnung in Dkm, Hkm, Km, dcm, cm, mm?
2. Wie viele Hunderterthalerscheine betragen 1 Million Thaler?
3. 7500 m bilden 1 Meile; wie viele Dkm, Hkm, Km u. s. w.:
4. Auf einem Chausseesteine steht geschrieben 0,06, auf dem nächsten 0,07. Die Grundeinheit für diese Bezeichnung ist 1 Meile; wie viele m, Dkm, Hkm, dcm, cm u. s. w. sind die Steine von einander entfernt?
5. Man geht von einem Chausseestein zum andern in 1 Minute; wie viel Zeit braucht man für 1 Meile?
6. In wie viel Zehnmarkstücken ist eine Summe von 58000 pf. auszuzahlen?
7. Für 100 mrk zahlt jemand 4 mrk Zinsen jährlich; wie viel für 20,000 mrk?
8. Jemand zählt in 1 Minute durchschnittlich bis 100; wie viel Zeit braucht er, um bis 5000 zu zählen?
9. Ein rechteckiger Platz ist 180 m lang und 120 m breit. Wie viel Zeit braucht man, denselben zu umgehen, wenn man in 1 Minute 75 m zurücklegt?

10. Wie viel mal muss man den Umgang machen, bis man eine Meile zurückgelegt hat?

Bei solchen Aufgaben stellt sich heraus, wie weit das Verständnis der Schüler in das dekadische System reicht. und in welchem Grade die formale Bildung überhaupt gefördert ist.

Aufgaben, die das Nachdenken der Schüler in gesteigertem Grade in Anspruch nehmen dadurch, dass sie Fälle vorlegen, die der Unterricht nicht direct in Behandlung genommen hat, sind auf jeder Stufe des Rechenunterrichts zu geben. Sollten für solche Aufgaben, die selbstständiges Nachdenken erfordern, auch nur die fähigeren Schüler der Klasse heranzuziehen sein, so wäre das kein Grund, dieselben ausfallen zu lassen. Dem geschlossenen Gange des Unterrichts muss die ganze Klasse folgen bis auf die wenigen Schüler, die durch unabweisbare Umstände daran verhindert sind. Die fähigen Schüler müssen deshalb auf ein ihren Kräften angemessenes schnelleres Fortschreiten verzichten; warum will man sie denn nicht von Zeit zu Zeit durch Aufgaben entschädigen, an denen sich die Schwächern noch nicht beteiligen können?

Man macht nicht selten die Erfahrung, dass Schüler bei solchen Aufgaben eine geistige Kraft verraten, die man nach ihren Leistungen in dem gewöhnlichen Unterrichtsgange nicht bei ihnen voraussetzte.

Dritter Teil. Das Umformen der Zahlen,

1. Begriff des Umformens.

1 Km = 10 Hm = 100 Dm = 1000 m = 10000 dm = 100000 cm = 1000000 mm.

Die Einheit 1 Km ist hier in verschiedener Weise dargestellt. So lassen sich für alle dekadische und decimale Einheiten verschiedene Darstellungsformen finden und in Folge dessen auch für die aus diesen Einheiten gebildeten Systemzahlen.

5 T = 50 H = 500 Z = 5000 E = 50000 z = 500000 h u. s. w.

Man erhält verschiedene Darstellungsformen einer Zahl dadurch, dass man die Zahl aus verschiedenen Einheiten entstehen lässt, denn mit der Einheit der Zahl ändert sich auch die Menge. Eine Zahl in einer andern Einheit ausdrücken, heisst die Zahl auf eine andre Eorm bringen oder sie **umformen**.

2. Die einfachste Form für Zahlen.

In der Reihe

0,004 ZT = 0,04 T = 0,4 H = 4 Z = 40 E = 400 z = 4000 h.

ist 4 Z die einfachste Form. Die einfachste Darstellungsform einer Zahl erhält man, wenn man der Zahl die möglichst grösste Einheit zu Grunde legt, ohne Teileinheiten der Grundeinheit zu bilden. Die sprachliche Darstellungsform für Zahlen wie 0,004 ZT oder 0,04 T, bei denen die Einheit zu gross gewählt ist, besteht aus 3 Teilen, nämlich aus dem Namen der Zahl, dem Namen der Teileinheit und dem der Grundeinheit. Formen wie 40 E, 400 z, welche die Einheit zu klein fassen, enthalten ausser dem Namen der Einheit den Namen einer dekadischen Zahl, die sich als Zahl eines höhern

Grades angeben lässt. Die graphische Bezeichnung der einfachsten Form unterscheidet sich dadurch von allen übrigen, dass sie die geringste Anzahl von Ziffernstellen in Anspruch nimmt. 4 Z z. B, nimmt eine, die andern Formen dagegen zwei, drei u. s. w. Stellen ein.

3. Die Arten des Umformens.

Für die reinen Zahlen giebt es zwei Arten des Umformens. Entweder wird eine Zahl auf eine niedere oder auf eine höhere Einheit gebracht. Eine Zahl in niedern Einheiten ausdrücken, heisst die Zahl erweitern. Eine Zahl in höhern Einheiten ausdrücken, heisst die Zahl heben.*)

Die gemischte Systemzahl 5 H + 4 Z + 2 E ist als natürliche Zahl = fünfhundert zwei und vierzig. Die erste Darstellungsform giebt die Zahl, wie es nach dem System nicht anders geht, in drei ungleichnamigen Teilen an, die zweite drückt die Zahl als eine einzige aus, welcher die Einheit eins zu Grunde liegt. Da die Sprache keinen Unterschied macht, wenn sie eine Zahl als natürliche oder Systemzahl darstellt, und da die von uns willkürlich gebildeten Namen für die Systemzahlen sich auch nur unwesentlich von den eigentlichen Zahlwörtern unterscheiden, so merken wir, wenn wir die Systemzahl in die natürliche verwandeln, gar nicht, dass wir eine Rechenoperation vollziehen, die sich hier z. B. in folgender Weise gestaltet: 5 H = 500 E, 4 Z = 40 E, 500 E + 40 E + 2 E = 542 E. Anders wird die Rechnung, wenn z. B. die Aufgabe vorliegt: 6 T + 3 H = ? H. Hier wird der Ausdruck 6 T nicht in 6000 sondern in 60, 3 H nicht in 300 sondern in 3 umgewandelt, und man erhält 63 H. Durch solche Umformung der gemischten Zahl werden die nach dem System gebildeten Teile derselben in eine einzige natürliche Zahl zusammengezogen, der eine Einheit zu Grunde liegt, während in der gemischten Zahl mit verschiedenen Einheiten gezählt wird. Eine gemischte Zahl auf eine einzige Einheit bringen, d. h. die Teile derselben zu einer einzigen Zahl zusammenziehen, heisst die gemischte Zahl einrichten.

Ehe zu den eigentlichen Rechnungsarten übergegangen wird, für welche die Schüler nach allen Richtungen hin so vorbereitet sein müssen, dass das Verfahren für dieselben sich ihnen aus der gewonnenen Einsicht von selbst ergiebt, bietet sich hier beim Umformen der Zahlen die beste Gelegenheit dar, alles auf den früheren Stufen Erlernte noch einmal zu wiederholen, anzuwenden und so zu befestigen, dass es bleibendes Eigenthum der Schüler wird, über das sie zu jeder Zeit in Freiheit verfügen können. Wenn das Wesen des Umformens erkannt ist, wird das Verfahren geübt.

*) Der Ausdruck „heben" in der Bedeutung von „erheben" ist sehr bezeichnend für die Operation, denn durch das Heben wird die Zahl auf eine höhere Stufe „gehoben".

4. Das Erweitern der Zahlen. — Verhältniszahl. — Stufen- und Stellen-Differenz.

Will man 3 H auf E erweitern, so muss man die Verhältniszahl der beiden Einheiten 1 E und 1 H wissen, d. h. diejenige Zahl, welche angiebt, wie viele niedere Einheiten die höhere bilden. Wenn eine Einheit einen Grad höher steht als eine andere, so beträgt die Verhältniszahl der beiden Einheiten 10; sind zwei Einheiten zwei Stufen von einander entfernt, so ist die Verhältniszahl derselben = 100. Die Verhältniszahl zweier Systemeinheiten ergiebt sich aus der Entfernung der Stufen, das ist die Differenz ihrer Exponenten, welche wir Stufendifferenz nennen. 1 E und 1 T haben eine Stufendifferenz = 3, 1 h und 1 H haben eine Stufendifferenz = 4, denn die Differenz von -2 und $+2 = +4$, daher muss 1 h mit $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ multiplicirt werden, damit 1 H entstehe. Die Verhältniszahl zweier Systemeinheiten ist eine Potenz von 10, deren Exponent gleich der Stufendifferenz der Einheiten ist.*) In der graphischen Bezeichnung der Einheiten und Zahlen finden wir die Stufendifferenz versinnlicht in der Stellendifferenz. Wenn 2 Einheiten eine Stufendifferenz = 4 haben, so haben die Striche, welche sie nach dem Gesetz des Ziffernsystems bezeichnen, eine Stellendifferenz = 4. Die Stellendifferenz zweier Ziffern ist gleich der Stufendifferenz der Einheiten ihrer Zahlen. Das Erweitern selbst vollzieht sich, sobald die Verhältniszahl gefunden ist, ganz unmittelbar nach dem Gesetz des dekadischen Systems. Wenn die Aufgabe gestellt ist, 4 Z auf h zu erweitern, so wird folgender Weg eingeschlagen: 1 Z und 1 h haben eine Stufendifferenz = 3, also beträgt die Verhältniszahl $= 10^3 = 1000$. 1 Z hat 1000 h, folglich haben 4 Z 4×1000 h = 4000 h.

5. Das Heben der Zahlen.

Das Heben wird, wenn man von solchen Fällen absieht, in denen die Einheit zu gross gewählt ist, an Zahlen vollzogen, die bereits erweitert worden sind. Das Heben einer Zahl ist daher gleichbedeutend mit dem Rückgängigmachen dieser Erweiterung. 500 Z ist die Zahl 500 mit der Einheit 1 Z. Giebt man dieser Zahl die nächst höhere Einheit 1 H, so verwandelt sich die Zahl 5 des 2ten Grades in die Zahl 5 des 1ten Grades. Giebt man der Zahl die nächst höhere Einheit 1 T, so erhält man die Zahl 5 des 0ten Grades, demnach sind 500 Z = 5 T. Wenn 6000 h gehoben werden soll

---

*) Die Verhältniszahl von 1 E und einer beliebigen abgeleiteten Einheit ist unmittelbar in dem Namen dieser gegeben; z. B. die Verhältniszahl von 1 E und 1 T = 1000, von 1 h und 1 E = hundert u. s. w. Das bezieht sich auch auf die systemlosen Teileinheiten. Die Verhältniszahl von $1/8$ und 1 E = 8.

auf E, so besinnt man sich, dass die Einheit 1 E, welche die Zahl erhalten soll, zwei Stufen höher ist als die Einheit 1 h, welche die gegebene Zahl hat. Wenn die Einheit der Zahl zwei Stufen steigen soll, so muss die Zahl selbst zwei Stufen fallen, aus 6000 wird also 60, folglich sind 6000 h = 60 E. Wird die Aufgabe gestellt: 80000 h soll auf die einfachste Form gebracht werden, so hält man sich vor: Aus der Zahl 80000 soll die Zahl 8 werden, d. h. die Zahl des 4 ten Grades soll die Zahl des 0 ten werden, also soll sie 4 Stufen fallen, folglich muss ihre Einheit 1 h 4 Stufen steigen und 1 H werden, also sind 80000 h = 8 H.*)

6. Das Einrichten der gemischten Zahlen.

Das Einrichten einer gemischten Zahl besteht in zwei Thätigkeiten. Sollen die Teile derselben in eine einzige Zahl zusammengezogen werden, so müssen sie addirt werden. Dazu ist erforderlich, dass die ungleichnamigen Teile gleichnamig gemacht werden. Dies geschieht durch Erweitern derjenigen Teile, welche noch nicht die Einheit haben, auf welche die gemischte Zahl gebracht werden soll.

Aufgabe: 4 Z + 7 z + 8 h soll auf h eingerichtet werden!

4 Z = 4000 h, 7 z = 70 h; 8 h + 70 h + 4000 h = 4078 h.

Das Erweitern, Heben und und Einrichten wird auch an concreten Zahlen vollzogen. Die Namen „Absolviren und Reduciren" für Umformungen concreter Zahlen einzuführen, ist unnötig. Warum will man für dieselben Operationen verschiedene Namen wählen? Namen und Erklärungen müssen, so lange nicht ganz besondere Gründe dagegen sprechen, von vorn herein so gegeben werden, dass sie auf einer höhern Stufe nicht gegen andre vertauscht werden dürfen; dadurch lässt sich ihre Zahl sehr bedeutend verringern. Weises Masshalten im Geben von Namen und Erklärungen ist dringende Pflicht des Lehrers. Man hat die Schulregulative von 1854 wegen der Menge des religiösen Memorirstoffs angeklagt; hoffentlich ist die Zeit nicht fern, da man Klagen über Mengen von ganz unnützem Memorirstoff auf andern Gebieten für ebenso begründet erachten wird.

7. Uebungen.

1. Bestimme die Stufendifferenz a. von 1 H und 1 ZT b. von 1 t und 1 m, c. von 1 zt und 1 H, d. von 2 dm und 3 Km, e. von 3 Dgr. und 5 Kgr.
   Antwort zu c: 1 zt hat den Exponenten — 4, 1 H den Exponenten + 2; die Differenz von — 4 und + 2 = + 6, also beträgt die Stufendifferenz 6.
2. Nenne zwei Einheiten, deren Stufendifferenz = 3 ist!
3. Bestimme die Verhältniszahl a. von 1 Kgr. und 1 Dkgr, b. von 1 l und 1 Hl, c. von 1 z und 1 T, d. von 1 cm und 1 Km!
   Antwort zu a: 1 Kgr. ist die Gewichtseinheit mit dem Exponenten + 1. Die Differenz

*) Das Heben werde später, wenn die Division durch dekadische Einheiten bekannt ist, in ähnlicher Weise wie das Erweitern noch einmal geübt.

von $+ 1$ und $+ 3 = + 2$. also die Stufendifferenz $= 2$, folglich ist die Verhältniszahl $= 10^2 = 100$, d. h. 100 Dgr = 1 Kgr.

Die Begründung bleibt zuletzt aus, um dem eigentlichen Rechnen die nötige Zeit einzuräumen, tritt aber sofort wieder ein, wenn Unklarheit entdeckt wird. Und man entdeckt sie bei aller Vorsicht, bei dem lückenlosesten Fortschreiten immer wieder an einzelnen Schülern und hat sich die Mühe nicht verdriessen zu lassen, hinabzusteigen längs dem Ideengange des Kindes bis an den Punkt, wo derselbe unterbrochen ist.

4. Auf welche Einheit lässt sich die Zahl 8 T erweitern? Auf welche nicht?
5. Auf welche Einheiten lässt sich 4000 h heben? Warum hebt man nicht auf H oder auf höhere Einheiten?
6. Erweitere 9 ZT auf z!
   1 ZT und 1 z haben die Stufendifferenz 5, also beträgt die Verhältniszahl $10^5 = 100\,000$. Wenn 1 ZT = 100000 z, so sind 6 ZT $= 6 \times 100000 = 600000$ z.
7. Hebe 40000 h auf die Einheit 1 z!
   1 h und 1 Z haben die Stufendifferenz 3. Wenn die Einheit der Zahl 40000 h 3 Stufen steigen soll, so muss die Zahl 40000 drei Stufen fallen. Sie ist die Zahl 4 des 4ten Grades, folglich wird sie die Zahl 4 des 1ten Grades, also sind 40000 h = 40 Z.
8. Wie wird 5 200 000 am einfachsten dargestellt? (52 HT).
9. Lies die Zahl 5 200 000 in E, Z, H . . . M (5, 2 M).
10. Gieb die ungleichnamigen Teile an von den Zahlen a. 3206,805; b. 3206,805 Kgr.
11. Nenne die Zahl in 10 a als eine auf t oder zt oder ht u. s. w. eingerichtete Zahl!
12. Nenne die gleichnamigen Theile dieser Zahl in t, zt, ht u. s. w.
13. Weshalb ist es am zweckmässigsten, diese Zahl auf t einzurichten?
14. Gieb diese Zahl an in E, Z, H, . . , z, h u. s. w.!
15. Gesetzt, die Grundeinheit dieser Zahl ist 1 m; nenne dann a. die ungleichnamigen Teile in den gesetzlichen dekadischen und decimalen Linieneinheiten; b. die gleichnamigen Teile in mm; c. die auf mm eingerichtete Zahl!
16. Schreibe 6 Km 8 Hm 3 Dm 5 m 7 dm als eine gemischte Zahl a. mit der Grundeinheit 1 m; b. mit der Grundeinheit 1 Km, 1 Hm, 1 Dm, 1 dm!
17. Schreibe die Posten 68 Kgr 5 Dgr 4 gr; 5 Kgr 20 Dgr 6,5 gr; 80 Dgr 0,08 gr als gemischte Zahlen mit der Grundeinheit 1 Kgr oder 1 Dgr oder 1 gr und setze die Ziffern gleicher Ziffernstellen unter einander!
18. Schreibe 0,8264 T als H, Z, E, z u. s. w.
19. Schreibe a. von $804{,}302^m$ b. von 76,5 Hl c. von 80,06 mrk d. von 579,208Kgr } die ungleichnamigen Teile in den gesetzlichen Einheiten!

Die Grundrechnungsarten mit absoluten Zahlen.

Nach Klarlegung des Begriffes der einzelnen Rechnungsart an verschiedenen Beispielen mit concreten und abstracten Zahlen wechseln Reihenbildungen mit Auflösungen von Aufgaben und Uebungen im Schnellrechnen. Wie weit das Rechnen ohne Zuhilfenahme der Ziffern auszudehnen ist, hängt von der Art der Unterrichtsanstalt, der Menge der Unterrichtszeit, dem Jahrgange der

Schüler und andern Zufälligkeiten ab. Bei einem grossen Teil von Aufgaben lassen sich schriftliches und Kopf-Rechnen verbinden.

Man gestatte die grösste Freiheit in der Wahl der Auflösungsart einer Aufgabe, aber man hüte sich davor, dem Auffinden der kürzesten Wege zu viel Zeit zu opfern. Eine richtige Anleitung schärft den Blick für das Finden des kürzesten Weges, ohne dass dieses als Ziel in den Vordergrund tritt. Für die Hauptarten der angewandten Aufgaben dictirt der Lehrer eine Auflösung in mustergiltiger sprachlicher Form. Schüler, welche bei aller Einsicht in den Gang des Verfahrens eine correcte sprachliche Darstellungsform sich nicht aneignen können, werden genötigt, das vom Lehrer dictirte Beispiel zu memoriren.

Jede Lösung einer Rechenaufgabe zerfällt im allgemeinen in vier Teile: 1. die Aufgabe, 2. die eigentliche Auflösung, welche die einzelnen Schlussforderungen angiebt und das Verfahren begründet, 3. die Berechnung, 4. den Abschluss, welcher die Aufgabe noch einmal vollständig mit aufnimmt und an Stelle der Frage das gefundene Resultat setzt.

I. Addition.

A. Beispiele von Reihenbildungen.*)

1. Zähle mit 7 H von 400! (1100, 1800 u. s. w.); 2. zähle mit 460 von 230! (690, 1150, 1610 u. s. w.); 3. zähle mit 8 z von 3 z! (1 E 1 z; 1 E 9 z; 2 E 7 z u. s. w.); 4. zähle mit 6 h 4 t von 8 t! (7 h 2 t; 1 z 3 h 6 t; 2 z; 2 z 6 h 4 t u. s. w.)

B. Aufgaben.

Der Addend eine reine Zahl.

1. Addire 300 zu 800; (Man zählt: 900, 1000, 1100).**)
2. Addire 4000 zu 6685! (7685, 8685 . . 10685).
3. Addire 8 z zu 5 E 7 z! (5 E 7 z + 3 z = 6 E; 6 E + 5 z = 6 E 5 z.)

Der Addend eine gemischte Zahl.

4. Addire 364 zu 978!
   - a. 978 + 300 = 1278; 1278 + 60 = 1338; 1338 + 4 = 1342.
   - b. 978 + 22 = 1000; 1000 + 342 = 1342.
   - c. 97 Z + 36 Z = 133 Z = 1330; 8 E + 4 E = 12 E; 1330 + 12 = 1342.
5. Addire 58,3 und 4,78!
   - a. 58 + 4 = 62; 3 z + 7 z = 1 E; 62 + 1 = 63; 63 + 8 h = 63,08.
   - b. 583 z + 47 z = 630 z = 63 E; 63 E + 8 h = 63,08.
   - c. 58,3 + 5 = 63,3; 63,3 — 0,22 = 63,08.
6. Addire 895 zu 2615! (2615 + 900 = 3515; 3515 — 5 = 3510.)

*) auf- und abwärts.

**) Damit ist das eigentliche Verfahren angedeutet. Die Schüler vollziehen die Zählung nicht mehr, sondern nennen augenblicklich die Summe.

Aus 5 c und 6 ergiebt sich der Satz: **Wenn man zu einer Summe eine Zahl addirt und dieselbe Zahl wieder subtrahirt, so bleibt die Summe unverändert.**

7. Es soll addirt werden: 8 Z 4 E 6 z + 8 E 4 h + 5 Z 6 E 8 z + 4 Z 9 z 5 h + 2 Z 7 E 9 h!

Wenn Summen addirt werden sollen, so werden die einzelnen Summanden addirt. Die Reihenfolge, in welcher das geschieht, ist ohne Einfluss auf das Resultat. Die gleichnamigen Summanden werden in eine Zahl zusammengezogen:

8 Z + 5 Z + 4 Z + 2 Z	= 19 Z =	1 H 9 Z
4 E + 8 E + 6 E + 7 E	= 25 E =	2 Z 5 E
6 z + 8 z + 9 z	= 23 z =	2 E 3 z
4 h + 5 h + 9 h	= 18 h =	1 z 8 h

Die 14 Summanden sind auf 8 reducirt. Die gleichnamigen Summanden 9 Z und 2 Z; 5 E und 2 E; 3 z und 1 z werden je in eine Zahl zusammengezogen, also erhält man 2 H 1 Z 7 E 4 z 8 h.

Bei schriftlicher Addition setzt man daher die Ziffern für die Summanden nach dem Gesetz des Ziffernsystems so unter einander, dass die Ziffern gleicher Stellen, das sind die Ziffern für gleichnamige Summanden, senkrecht unter einander stehen.

Begründung.

4 h + 5 h + 9 h = 18 h = 1 z 8 h
1 z fällt hinüber zu den Zehntelsummanden, Ziffer 8 für 8 h tritt in die Hundertelstelle der Summe.
1 z + 6 z + 8 z + 9 z = 24 z = 2 E 4 z
2 E fallen hinüber zu den Einersummanden, Ziffer 4 für 4 z tritt in die Zehntelstelle der Summe.
2 E + 4 E + 8 E + 6 E + 7 E = 27 E = 2 Z 7 E
2 Z + 8 Z + 5 Z + 4 Z + 2 Z = 21 Z = 2 H 1 Z

84,6	8,04	56,8	40,95	27,09	217,48

Zuletzt wird kurz addirt in folgender Weise:

	2	2	1	
84,6	10	6	7	—
8,04	—	14	—	4
56,8	15	20	15	—
40,95	19	—	24	9
27,09	21	27	—	18
217,48	21	7	4	8

Aufgaben mit concreten Zahlen dictirt der Lehrer in verschiedenen Einheiten, die Schüler schreiben die Ziffern nach dem System und fügen denselben das Zeichen für **eine**, gewöhnlich die gesetzliche Grundeinheit bei z. B.

8. Addire 3 Kgr 50 Dgr 2 gr + 48 Kgr 6 Dgr 5 gr + 8600 Dgr + 5 gr + 578 gr!

Es wird geschrieben:

	3,502	Kgr.
	48,065	„
	86,005	„
	0,578	„
Summa	138,15	„

II. Subtraction.

Znnächst werden Uebungen Behufs schneller Angabe der dekadischen Ergänzung einer Zahl angestellt. Die Schüler sind schliesslich befähigt, Fragen wie folgende sofort zu beantworten.

1. Nenne die dekadische Ergänzung von a $\left\{ \begin{array}{l} 380 \\ 460\,t \end{array} \right.$ b $\left\{ \begin{array}{l} 452 \\ 348\,t \end{array} \right.$

2. Wie viel fehlen demjenigen an $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ mark} \\ 1 \text{ Kgr} \\ 1 \text{ Hl} \end{array} \right\}$ welcher $\left\{ \begin{array}{r} 32 \text{ pf} \\ 165 \text{ gr} \\ 27 \text{ l} \end{array} \right\}$ besitzt?

3. Auf einem Chausseesteine liest man 0,78. Wie weit ist derselbe vom nächsten Meilenstein entfernt?

Die Reihenbildungen für die Subtraction ergeben sich aus denen für die Addition.

Aufgaben.

A. Der Subtrahend eine reine Zahl.

1. Suche die Differenz von 40 und 600! (Man zählt mit 1 Z: 50, 60 . . 100; dann mit 1 H: 200, 300 . . 600; also 6 Z 5 H = 560.)
2. Wie gross ist die Differenz von 3 h und 5 z 2 h? (Man zählt mit 1 h: 4 h 5 h . . . 1 z; dann mit 1 z: 2 z, 3 z . . . 5 z; dann wieder mit 1 h: bis 2 h; also: 7 h + 4 z + 2 h = 4 z 9 h.)
3. Das Bruttogewicht einer Waare beträgt 25 Kgr 5 Dgr, das Taragewicht 60 Dgr; wie viel das Nettogewicht? (Von 60 Dgr bis 1 Kgr sind 40 Dgr; von 1 Kgr bis 25 Kgr 5 Dgr = 24 Kgr. 5 Dgr; im ganzen 24 Kgr 45 Dgr.)

B. Der Subtrahend eine gemischte Zahl.

4. Suche die Differenz von 247 und 1124!

$$\left. \begin{array}{l} \text{Von 247 bis 1000} = 653 \\ \text{von 1000 bis 1124} = 124 \end{array} \right\} \; 653 + 124 = 777.$$

5. Wie viele Jahre sind am nächsten 31. October seit der Reformation verflossen?

$$\text{a} \left\{ \begin{array}{l} \text{Von 1517 bis 1600} = 83 \\ \text{Von 1600 bis 1873} = 273 \\ 83 + 273 = 356 \end{array} \right. \qquad \text{b} \left\{ \begin{array}{l} \text{Von 1517 bis 1817} = 300 \\ \text{Von 1817 bis 1873} = 56 \\ 300 + 56 = 356. \end{array} \right.$$

6. Wie gross ist die Differenz von 3 E 8 z und 4 Z 6 E?

$$\left. \begin{array}{l} \text{Von 3 E 8 z bis 4 E} = 2 \text{ z} \\ \text{von 4 E bis 1 Z} = 6 \text{ E} \\ \text{von 1 Z bis 4 Z 6 E} = 3 \text{ Z 6 E} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ z} + 6 \text{ E} + 3 \text{ Z 6 E} = 4 \text{ Z 2 E 2 z} \\ = 422 \text{ z.} \end{array}$$

7. Gegeben ist der eine Summandus = 2 8, 3 6; die Summe = 6 2 9, 7 8; wie gross ist der andre Summandus?

Man überlegt: 8 h ist die Summe aus den Hundertelsummanden, deren Ziffern in der Addition über einander stehen; ebenso ist 7 z die Summe aus den Zehntelsummanden u. s. w. Man rechnet also:

$$\begin{array}{r} +\,601{,}42 \\ 28{,}36 \\ \hline 629{,}78 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6\text{ h} + 2\text{ h} = 8\text{ h} \\ 3\text{ z} + 4\text{ z} = 7\text{ z} \\ 8\text{ E} + 1\text{ E} = 9\text{ E} \\ 2\text{ Z} + 0\text{ Z} = 2\text{ Z} \\ 0\text{ H} + 6\text{ H} = 6\text{ H} \end{array}$$

8. Gegeben der Subtrahendus = 2 6, 5 8; der Minuendus = 6 3, 9 2; wie gross ist die Differenz?

Ueberlegung.

Der Hundertelsummand = 8; die Hundertelsumme kann nicht kleiner sein, mithin beträgt sie nicht 2 sondern 12 h = 1 z 2 h, und 1 z ist zu den Zehntelsummanden gefallen. Der gegebene Zehntelsummand ist daher nicht 5 sondern 5 + 1. Der Einersummand ist 7, die Einersumme ist daher nicht 3, sondern 13 = 1 Z 3 E; 1 Z ist zu den Zehnersummanden gefallen, und der gegebene Zehnersummand ist nicht 2, sondern 3.

Berechnung.

$$\begin{array}{r} 36{,}34 \\ 27{,}58 \\ \hline 63{,}92 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8\text{ h} + 4\text{ h} = 12\text{ h} \\ 6\text{ (nicht 5) z} + 3\text{ z} = 9\text{ z} \\ 7\text{ E} + 6\text{ E} = 13\text{ E} \\ 3\text{ (nicht 2)} + 3\text{ Z} = 6\text{ Z} \end{array}$$

Da wir aus practischen Gründen später bei der Division nicht von unten nach oben die schriftliche Rechnung ausführen können, so sind wir gezwungen, diese Ziffernstellung für Subtractionsaufgaben gegen die nebenstehende zu vertauschen:

$$\begin{array}{r} 63{,}92 \\ 27{,}58 \\ \hline 36{,}34 \end{array}$$

Unser Subtractionsverfahren in No. 8, das wir unmittelbar aus dem Additionsverfahren ableiteten, lässt sich noch in anderer Weise begründen. Die Differenzen a. 11 — 5; b. 18 — 12; c. 21 — 15 sind einander gleich. Minuend und Subtrahend von b sind um 7, die von c um 10 grösser als die von a. Wir leiten daraus folgenden Satz ab: Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zu Minuend und Subtrahend eine und dieselbe Zahl addirt oder subtrahirt. Wir wenden den ersten Teil des Satzes auf die folgende Aufgabe an:

9. Wie viel beträgt die Differenz von 5 8, 0 6 und 8 6 2, 0 4?

Ueberlegung.

Der Minuend 4 h ist kleiner als der Subtrahend 6 h; man addire daher 10 h zum Minuend, das giebt 14 h. Um die Differenz unverändert zu lassen, addire man dieselbe Zahl zum Subtrahend, aber nicht als 10 h sondern als 1 z zum Zehntelsubtrahend. Bei der 2 ten Subtraction verfährt man ebenso:
Man addirt 10 z zu 0 z, dafür zum nächsten Subtrahend 1 E. Bei der 3 ten Subtraction addirt man 10 E zu 2 E, dafür zum nächsten Subtrahend 1 Z u. s. w.

Berechnung.

$$\begin{array}{r} 862{,}04 \\ 58{,}06 \\ \hline +\ 803{,}98 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6\ h + 8\ h = 14\ h \\ 1\ z + 9\ z = 10\ z \\ 9\ E + 3\ E = 12\ E \\ 6\ Z + 0\ Z = \ \ 6\ Z \\ 0\ H + 8\ H = \ \ 8\ H \end{array}$$

In der Differenzform stehen die Ziffern des Subtrahendus dann, wenn derselbe eine Summe ist, in Klammern. So kann die vorige Aufgabe, wenn der Subtrahend in seine Teile zerlegt wird, geschrieben werden:

$$802{,}04 - (50 + 8 + 0{,}06)$$

Die Ziffern in Klammern sind die Bezeichnung für solche Zahlen, die das Resultat einer bereits vollzogenen Zahlenverbindung (**hier** einer Summe) sind. Wenn z. B. gefragt wird:

10. Wie viel beträgt der 4 te Winkel eines Vierecks, wenn der eine 104,5°, der zweite 46,5°, der dritte 66,4° enthält? so ist die Antwort: 360° — (104,5° + 46,5° + 66,4°).

Wird die Summe, deren Ziffern hier in Klammer stehen, in **eine** Zahl verwandelt, so erhält man 360° — 217,4° = 142,6°. Die Berechnung zerfällt demnach in zwei Teile, eine Addition und eine Subtraction. Man kann zuerst **einen** Summandus des Subtrahendus subtrahiren, das giebt 360° — 104,5°; von dieser Differenz den **zweiten** Summandus, das giebt 360° — 104,5° — 46,5°; von dieser Differenz den **dritten** Summandus; dann erhält man 360° — 104,5° — 46,5° — 66,4°. Die zweckmässigste Art, solche Differenzen zu berechnen, besteht darin, dass man Addition und Subtraction in eine Rechnung zusammenzieht; z. B.

11. Nach den letzten Zählungen hat London 3,800,000, Wien 900,000, Berlin 830,000, Petersburg 670,000, Neapel 440,000, Madrid 318,000, Amsterdam 280,000 Einwohner. Wie viele Einwohner hat London mehr als diese Städte zusammengenommen?

Man schreibt mit der Einheit 1 M: *) und rechnet (von unten nach oben.)

	E	z	h	t
	3	38	30	10
	‖	‖	‖	‖
3, 8	+ 0	+ 3	+ 6	+ 2
--(0, 9	.	35	.	.
0, 8 3	.	26	24	.
0, 6 7	.	18	21	.
0, 4 4	.	12	14	.
0, 3 1 8	.	8	10	8
0, 2 8)	.	5	9	.
	3	3	1	
0, 3 6 2				

Abschluss: Also ist London um 0,362 M = 362000 Einwohner grösser als die Städte Wien, Berlin, Petersburg, Neapel, Madrid und Amsterdam zusammengenommen.

In Aufgaben, deren Minuendus und Subtrahendus Summen sind, wird der Minuendus durch Addition in eine Zahl verwandelt; die weitere Ausführung ist dieselbe wie in dem vorigen Beispiel.

12. Ein Kaufmann hat eingenommen: 309,08 mark; 0,5 mark; 47,62 mark. Er giebt aus 25,9 mrk; 0,95 mrk; 235,8 mrk; 2,06 mrk. Um wie viel übersteigt die Einnahme die Ausgabe?

Summe der Einnahme.	Differenz der Ausgabe und Einnahme.
309,08 mrk.	357,2 mrk
0,5 „	— (25,9 „
47,62 „	0,95 „
357,2 „	235,8 „
	2,06 „)
	= 92,49 „

*) Die Schüler sind so vorbereitet, dass sie jede dek. Zahl in den verschiedensten Systemeinheiten angeben können.